

# Die Nadel als Kühlelement

Von R. FOCKE VDI, Berlin

*Über verrippte Kühlflächen, weniger über die Nadel als Kühlelement<sup>1)</sup>, besteht ein umfangreiches Schrifttum. Da der Kühlnadel neben der Kühtrippe als Konstruktionselement eine erhöhte Bedeutung zukommt, soll nachstehend ihr wärmetechnisches Verhalten näher untersucht werden.*

**1. Einleitung.** Auf fast allen Gebieten der Technik tritt dem Ingenieur das Problem des Wärmeaustausches entgegen. Von besonderer Wichtigkeit ist in vielen Fällen zur Kühlung thermisch hoch beanspruchter Maschinenteile eine Anordnung zur Wärmeabfuhr mit kleinstem Leistungsaufwand. Da Wärmeabfuhr in den überwiegenden Fällen einen reinen Verlust darstellt, ist es ja verständlich, diesen Vorgang nicht noch durch zusätzliche Leistung erkaufen zu wollen. Betrachten wir hier nur die Wärmeabfuhr durch gasförmige Kühlmittel, vor allem Luft, so findet man in üblichen Ausführungen immer verrippte Kühlflächen. Hierüber liegen eingehende theoretische Untersuchungen von *Ernst Schmidt*<sup>2)</sup> vor. Er fand eine allgemeine Eigenschaft von Kühlelementen kleinsten Werkstoffaufwandes, die sofort die Temperaturkurve liefert, ohne daß man die Aufgabe als Variationsproblem anzufassen braucht. Danach ist im Kühlelement bei kleinstem Werkstoffaufwand die Dichte des Wärmestromes an allen Stellen gleichgroß. Die Kurve der Temperaturverteilung längs des Wärmestromes ist dann eine Gerade, und die Rippe kleinsten Werkstoffaufwandes wird von zwei Parabeln begrenzt, die sich im Scheitel berühren. Außer dieser Rippe kleinsten Werkstoffaufwandes behandelte *E. Schmidt* die Rippe von Rechteck- und Dreieckquerschnitt und stellte die Bedingungen für ihre günstigsten Abmessungen auf. In ähnlicher Weise soll auch hier die Nadel als Kühlelement in bezug auf ihre Wärmeabfuhr, ihren Kühlleistungsbedarf und ihren Aufwand an Werkstoff untersucht werden. In der Praxis ist die Kühlnadel nur selten und dann nur in grober Annäherung verwendet worden.

Zur Vermeidung dicker Grenzschichten längs der Rippenflanken sowie der Erscheinung, daß der Wärmeübergang im laminaren Anlaufteil einer parallel angeströmten Platte vor dem Umschlag in turbulente Grenzschicht besonders groß ist, wurde bereits versucht, die Rippenfläche zu unterbrechen und des weiteren auch in flossenartige Teile aufzuteilen.

Das Extrem dieser Anwendungsform ist die mit Nadeln besetzte Kühlfläche, wobei die äußere Form der Nadeln, für die kreisförmige Querschnitte vorausgesetzt werden, noch zu bestimmen ist.

Wie müssen nun die Flanken solcher Nadeln mit optimalen Wärmeübertragungsbedingungen ausgeführt werden? Die Optimalbedingung ist dabei offensichtlich nur die, daß der Materialaufwand, also das Nadelvolumen, zu einem Minimum werden muß. Die Frage nach dem kleinsten Kühlleistungsaufwand ist nur abhängig von der gegenseitigen Nadelanordnung und wird noch im nachfolgenden geklärt. Die Nadelform wird somit zu einem reinen Wärmeleitungsproblem.

**2. Kleinster Werkstoffaufwand für Kühlnadeln mit Kreisquerschnitten.** Parabolisches Profil. — Zur Aufstellung der Differentialgleichung legen wir an die Nadel ein Koordinatensystem nach Bild 1. Die Übertemperatur der Nadel gegen die Umgebung sei  $t = \psi(x)$  und habe am Nadelfuß den gegebenen Wert  $t_0$ . Die Wärmeübergangszahlen über den kreisförmigen Umfang einer Nadel zeigen nach Messungen von *E. Schmidt* und *K. Wenner*<sup>3)</sup> den in Bild 2 skizzierten Verlauf. Bei kleinen Reynoldsschen Zahlen ist der Wärmeübergang auf der Vorderseite der Nadel wesentlich größer als auf der Rückseite. Bei zunehmender Luftgeschwindigkeit wird hingegen der Wärmeaustausch auf der hinteren Nadelhälfte immer größer und kann sogar wirksamer als der auf der Vorderseite der Nadel werden. Für Rechnungen ist es aber zweckmäßig, mit einer mittleren Wärmeübergangszahl zu rechnen, die in den später verwendeten Beziehungen immer vorausgesetzt ist. Wir nehmen also die Wärmeübergangszahl  $\alpha$  als konstant über die ganze Nadel an.  $\lambda$  sei die Wärmeleitzahl des Nadelwerkstoffes; der Halbmesser des Kreisquerschnittes  $y$  wird als klein gegenüber der Nadellänge  $l$  angenommen. Es gelten dann für die an einer Stelle  $x$  der Nadel stündlich hindurchgehende Wärmemenge  $Q$  folgende Gleichungen:

$$Q = -\lambda y^2 \pi \frac{dt}{dx}; \quad -dQ = \alpha t 2 y \pi dx.$$

<sup>1)</sup> *Truelsen*, Nadelekonosier und Luftheritzer, Arch. Wärmew. Bd. 3 (1932) S. 257/58; *H. Wagner*, Betriebs-erfahrungen an Ekonosierern und Luftheritzern, Wärme Bd. 55 (1932) S. 677/80 insbes. S. 280 u. Bd. 56 (1933) S. 271; *R. Schulze*, Unterwindzonenroste für Magerfeinkohlen, Wärme Bd. 57 (1934) S. 203/07 insbes. S. 205.

<sup>2)</sup> *E. Schmidt*, Die Wärmeübertragung durch Rippen, Z. VDI Bd. 70 (1926) S. 885/89 u. 947/51.

<sup>3)</sup> *E. Schmidt* u. *K. Wenner*, Wärmeabgabe über den Umfang eines angeblasenen geheizten Zylinders, Forsch. Ing.-Wes. Bd. 12 (1941) S. 65/73.

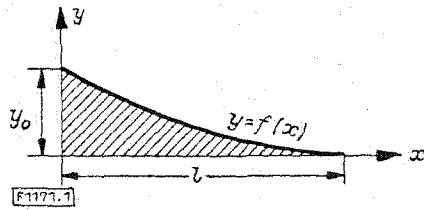


Bild 1. Profilkurve  $y = f(x)$  einer Kühlnadel mit kreisförmigen Querschnitten.

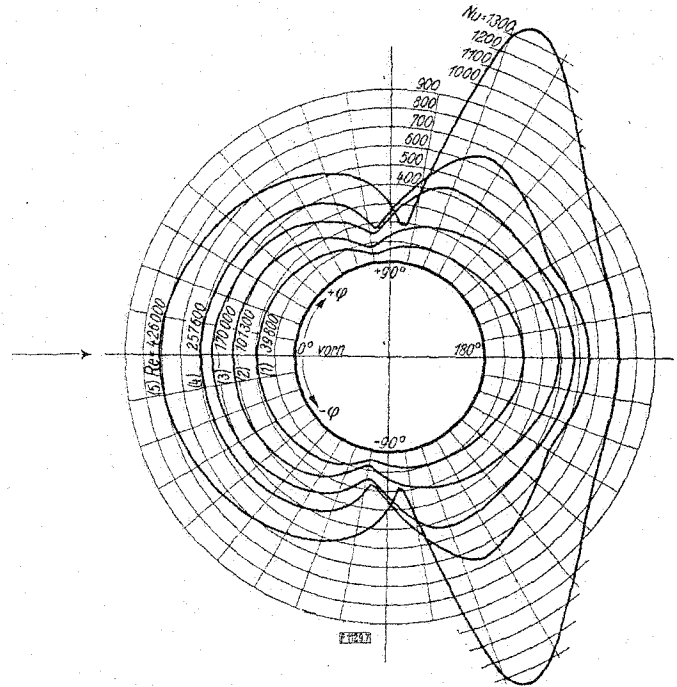


Bild 2 (rechts). Verlauf der Wärmeübergangszahlen  $\alpha$  um den Umfang einer zylindrischen Nadel nach E. Schmidt und K. Wenner<sup>3)</sup>.

Differenziert man die erste Gleichung und eliminiert  $dQ$ , erhält man:

$$y^2 \frac{d^2 t}{dx^2} + 2 y \frac{dy}{dx} \frac{dt}{dx} - \frac{\alpha}{\lambda} t 2 y = 0 \dots \dots \dots (1).$$

Der Werkstoffaufwand für die Nadel von der Länge  $l$  ist  $V = \int_0^l y^2 \pi dx$ , die abgegebene Wärmemenge

$$Q_0 = \alpha \int_0^l 2 \pi t y dx.$$

Das Nadelprofil  $y = f(x)$  ist nun so zu wählen, daß bei gegebener Wärmeabgabe der Baustoffaufwand am kleinsten wird. Diese Aufgabe ist ein Variationsproblem mit Nebenbedingungen. Dieses Problem läßt sich ohne die Hilfsmittel der Variationsrechnung lösen, wenn man die von E. Schmidt<sup>2)</sup> gefundene allgemeine Eigenschaft von Kühlelementen kleinsten Baustoffaufwandes benutzt. Er stellt auf Grund einer Analogie mit der Kanalströmung den Satz auf, daß für den kleinsten Werkstoffaufwand die Dichte des Wärmestromes  $dQ/df$  ( $f$  veränderliche Querschnitte der Nadel) an allen Stellen gleich groß sein muß. Nach der Fourierschen Grundgleichung  $dQ/df = -\lambda dt/dx$  folgt daraus, daß das Temperaturgefälle konstant bleiben muß, solange  $\lambda$  konstant bleibt. Die Temperaturabnahme längs der Wärmeströmung ist also eine Gerade, die durch die Gleichung  $t = t_0 - cx$  dargestellt sei. Mit  $c = t_0/l$  folgt

$$t = t_0 - \frac{t_0}{l} x_0 \dots \dots \dots (2).$$

Setzt man diesen Wert in die Gl. 1 ein, so erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha}{\lambda c} [cx - t_0].$$

Durch Integration mit der Grenzbedingung  $y = 0$  für  $x = l$  folgt:

$$y = \frac{\alpha}{2\lambda} [x - l]^2 \dots \dots \dots (3).$$

Die günstigste Profilform ist also eine Parabel. Für die gesamte Wärmemenge ergibt sich:

$$Q_0 = \alpha \int_0^l t 2 \pi y dx \dots \dots \dots (4).$$

Setzt man Gl. 2 und 3 ein und integriert, erhält man:

$$Q_0 = \frac{\pi t_0 \alpha^2}{\lambda} \frac{l^3}{4} \dots \dots \dots (5).$$

Für den Materialaufwand folgt:

$$V = \int_0^l y^2 \pi dx = \frac{1}{5} \frac{\pi x^2}{4 \lambda^2} l^5 \dots (6).$$

Für die parabolische Profilform gelten demnach folgende Gleichungen:

$$l = 1,083 \sqrt[3]{\frac{\lambda}{x^2}} \sqrt[3]{\frac{Q_0}{t_0}}; \quad y_0 = 0,587 \frac{1}{\sqrt{\alpha \lambda}} \sqrt[3]{\left(\frac{Q_0}{t_0}\right)^2}; \quad V = 0,2348 \frac{1}{\sqrt{\alpha^4 \lambda}} \sqrt[3]{\left(\frac{Q_0}{t_0}\right)^5} \dots (7, 8, 9).$$

Da diese Nadelform eine sehr scharfe Spitze hat und auch herstellungsmäßig unbequem ist, soll eine praktischere Nadelform, nämlich die mit gerader Flanke untersucht werden.

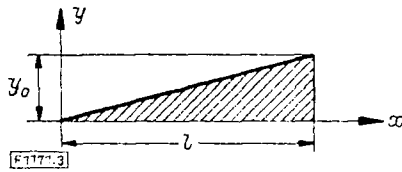


Bild 3. Dreieckprofil einer Kühlnadel mit kreisförmigen Querschnitten.

Dreieckprofil. — Für diese Untersuchung ist es günstiger, das Koordinatensystem nach Bild 3 zu legen. Die Gleichung des Profils ist also  $y = \frac{y_0}{l} x$ . Setzt man diesen Wert in die Differentialgl. 1 ein, so erhält man:

$$\frac{x y_0}{2l} \frac{d^2 t}{dx^2} + \frac{y_0}{l} \frac{dt}{dx} - \frac{\alpha}{\lambda} t = 0 \dots (10)$$

oder  $\frac{x}{2} \frac{d^2 t}{dx^2} + \frac{dt}{dx} - \frac{\alpha l}{\lambda y_0} t = 0 \dots (10a).$

Führt man die Größe:  $z = \frac{\alpha l}{\lambda y_0} x$  ein, so vereinfacht sich Gl. 10a zu:

$$\frac{d^2 t}{dz^2} - \frac{2}{z} \frac{dt}{dz} - \frac{2}{z} t = 0 \dots (11).$$

Mit den Besselfunktionen  $I_1$  und  $N_1$  lautet die Lösung:

$$t = \frac{1}{\sqrt{z}} [A I_1(2i\sqrt{2}z) + B N_1(2i\sqrt{2}z)] \dots (12).$$

Da nur  $I_1$  für  $x = 0$  und somit  $z = 0$  endliche Werte ergibt, fällt das Glied mit  $N_1$  weg, da  $t$  an der Stelle  $x = 0$  endlich sein muß. Setzen wir  $\frac{\alpha l}{\lambda y_0} = k$ , so wird die Lösung:

$$t = \frac{A}{\sqrt{kx}} I_1(2i\sqrt{2kx}) \dots (13).$$

Die Konstante  $A$  ergibt sich aus der Bedingung  $t = t_0$  an der Stelle  $x = l$ :

$$t_0 = \frac{A}{\sqrt{kl}} I_1(2i\sqrt{2kl}); \quad t = t_0 \frac{\sqrt{kl}}{\sqrt{kx}} \frac{-i I_1(2i\sqrt{2kx})}{-i I_1(2i\sqrt{2kl})} \dots (14).$$

Zähler und Nenner werden mit  $-i$  multipliziert, um einen Schönheitsfehler zu beheben, da die Besselfunktion 1. Ordnung mit imaginärem Argument nur mit dem Faktor  $-i$  einen positiven reellen Wert ergibt. Die Wärmemenge  $Q$  ergibt sich aus:

$$Q_0 = \alpha \int_0^l t \cdot 2y \pi dx,$$

wobei  $y = \frac{y_0}{l} x$  ist; somit wird:

$$Q_0 = \frac{2\alpha y_0 \pi}{\sqrt{l(-i) I_1(2i\sqrt{2kl})}} t_0 \int_0^l (-i) I_1(2i\sqrt{2kx}) \sqrt{x} dx \dots (15).$$

Setzt man nun  $2i\sqrt{2kx} = \bar{z}$ , so wird  $x d\bar{z} = i\sqrt{2k} \sqrt{x} dx$  und  $i\sqrt{x} dx = \frac{x d\bar{z}}{\sqrt{2k}} = \frac{\bar{z}^2 d\bar{z}}{-4\sqrt{(2k)^3}}$ .

Setzen wir noch

$$\frac{1}{4\sqrt{(2k)^3}} = \frac{1}{4\sqrt{8\left(\frac{\alpha l}{\lambda y_0}\right)^3}} = C,$$

so wird

$$\frac{Q_0}{t_0} = \frac{2\alpha y_0 \pi}{\sqrt{l(-i) I_1(2i\sqrt{2kl})}} C \int_0^{2i\sqrt{2kl}} I_1(\bar{z}) \bar{z}^2 d\bar{z} \dots (16).$$

Für die Integration gilt die Regel:

$$\int x^{p+1} Z_p(x) dx = x^{p+1} Z_{p+1}(x) \dots \dots \dots (17).$$

Wobei  $Z_p(x) = c_1 \cdot I_p(x) + c_2 \cdot N_p(x)$  ist. Das Integral in Gl.16 entspricht der Form Gl.17, wenn man  $p = 1$  setzt. Demnach wird:

$$\frac{Q_0}{t_0} = \frac{2 \alpha y_0 \pi}{\sqrt{l(-i) I_1(2i \sqrt{2kl})}} C(-8kl) I_2(2i \sqrt{2kl}).$$

Nach Einsetzen der Werte  $C$  und  $k$  folgt:

$$\frac{Q_0}{t_0} = \frac{-I_2\left(2i \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda} \frac{l}{y_0}}\right)}{\sqrt{2\pi^2 \alpha \lambda y_0^3} - i I_1\left(2i \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda} \frac{l}{y_0}}\right)} \dots \dots \dots (18).$$

In Gl. 18 sind  $y_0$  und  $l$  so zu bestimmen, daß  $Q_0/t_0$  ein Maximum wird, der Werkstoffaufwand  $V = \frac{1}{3} \pi y_0^2 l$  für die Nadel jedoch konstant bleibt. Setzen wir  $l = \frac{3V}{\pi y_0^2}$  in Gl. 18 ein, so wird

$$\frac{Q_0}{t_0} = \frac{-I_2\left(2i \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda} \frac{3V}{\pi y_0^{5/2}}}\right)}{\sqrt{2\pi^2 \alpha \lambda y_0^3} - i I_1\left(2i \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda} \frac{3V}{\pi y_0^{5/2}}}\right)}$$

Führt man nun zur Vereinfachung

$$u = \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda} \frac{6V}{\pi}} y^{-5/2}$$

als neue Veränderliche ein, so folgt:

$$\frac{Q_0}{t_0} = \sqrt{2\pi^2 \alpha \lambda y_0^{3/2}} \frac{-I_2(iu)}{-i I_1(iu)}; \quad y_0^{3/2} = u^{-2/5} \sqrt{\left[\frac{6V}{\pi} \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda}}\right]^3}$$

und weiter:

$$\frac{Q_0}{t_0} = \sqrt{2\pi^2 \alpha \lambda} \sqrt{\left[\frac{6V}{\pi} \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda}}\right]^3} u^{-2/5} \frac{-I_2(iu)}{-i I_1(iu)} \dots \dots \dots (19).$$

In dieser Gleichung ist  $Q_0/t_0$  nur noch von  $u$  abhängig. Es ist also  $u$  so zu bestimmen, daß dieser Quotient ein Höchstwert wird. Man muß also  $d(Q_0/t_0)/du = 0$  setzen. Es gilt daher

$$\frac{d\left[u^{-2/5} \frac{-I_2(iu)}{-i I_1(iu)}\right]}{du} = 0.$$

Ausgeführt ergibt diese Rechnung:

$$\frac{-\frac{3}{5} u^{-7/5} (-i I_1) (-I_2) + u^{-2/5} (-I_2') (-i I_1) - u^{-2/5} (-i I_2) (-i I_1')}{I_1^2} = 0 \dots \dots \dots (20).$$

Für die Differentiation der Besselfunktionen gilt:

$$\frac{dI_2(iu)}{du} = -\frac{2}{u} I_2(iu) + i I_1(iu) = I_2'; \quad \frac{dI_1(iu)}{du} = -\frac{1}{u} I_1(iu) + i I_0(iu) = I_1';$$

damit geht die Gl. 20 über in:

$$\frac{8}{5} \frac{1}{u} [-i I_1(iu)] [-I_2] - [-i I_1]^2 = -[I_0(iu) \{-I_2(iu)\}].$$

Die Gleichung wurde mit  $+i$  multipliziert, damit in den eckigen Klammern nur positive und reelle Werte stehen. Die Lösung dieser transzendenten Gleichung muß man durch Probieren mit Hilfe der Funktionstafel von *Jahnke-Emde*<sup>4)</sup> suchen. Sie lautet:

$$u_0 = 2,91625.$$

Die Bedingung für die günstigste Dreiecksnadel ist daher:

$$\sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda} \frac{6V}{\pi}} y_0^{-5/2} = 2,91625.$$

Für  $\frac{Q_0}{t_0}|_{\max}$  findet man also:

$$\frac{Q_0}{t_0}|_{\max} = \sqrt{2\pi^2 \alpha \lambda} y_0^{-3/2} \frac{-I_2(iu_0)}{-i I_1(iu_0)} \quad \text{mit} \quad \frac{-I_2(iu_0)}{-i I_1(iu_0)} = 0,5575.$$

<sup>4)</sup> E. Jahnke u. F. Emde, Funktionstafeln, 2. Aufl., Leipzig 1933.

Mit

$$y_0^{3/2} = \left[ \frac{6V}{\pi} \sqrt{\frac{2\lambda}{x}} \right]^{3/2} \quad \text{wird} \quad \frac{Q_0}{t_0} = \sqrt{2} \pi^2 \alpha \lambda \left[ \frac{6V}{\pi} \sqrt{\frac{2\lambda}{x}} \right]^{3/2} \frac{-I_2(i u_0)}{-i I_1(i u_0)} \dots (20a \text{ u. } 21).$$

Löst man diese Gleichung nach  $V$  auf, so erhält man für das Dreieckprofil nach entsprechender Vereinfachung:

$$V = 0,239 \frac{1}{\sqrt{x^4 \lambda}} \sqrt[3]{\left(\frac{Q_0}{t_0}\right)^5} \dots (22).$$

Für  $y_0$  ergibt sich durch Einsetzen von  $V$  in Gl. 20a

$$y_0 = 0,55 \frac{1}{\sqrt{x \lambda}} \sqrt[3]{\left(\frac{Q_0}{t_0}\right)^2} \dots (23).$$

Für die Nadellänge erhält man:

$$l = 0,755 \sqrt{\frac{\lambda}{x^2}} \sqrt[3]{\frac{Q_0}{t_0}} \dots (24).$$

Die Übertemperatur an der Nadelspitze ergibt sich für  $x = 0$  aus Gl. 14 zu:

$$\frac{t_x}{t_0} = \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{x}} \frac{-i I_1(2i \sqrt{2kx})}{-i I_1(i u_0)} \Big|_{x=0} \dots (25).$$

Da nun  $-i I_1(0) = 0$  ist, wird obiger Ausdruck in vorliegender Form unbestimmt. Gl. 25 kann man auch schreiben:

$$k \frac{t_x}{t_0} = \frac{-i I_1(2i \sqrt{2kx})}{\sqrt{x}} \dots (25a),$$

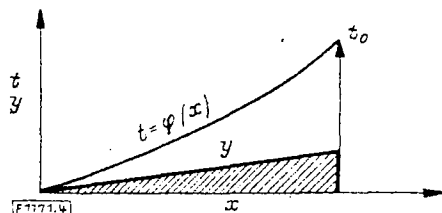


Bild 4. Temperaturverlauf längs der Erzeugenden einer Kühlnadel mit Dreieckprofil.

wobei die Konstante  $A = \frac{-i I_1(i u_0)}{\sqrt{l}}$  ist. Es ist also folgender Grenzwert zu bilden:

$$\lim_{x' \rightarrow 0} \frac{-i I_1(i \sqrt{x'})}{k' \sqrt{x'}}.$$

Für die erste Differentiation folgt:

$$\lim_{x' \rightarrow 0} \frac{\frac{i I_1(i \sqrt{x'})}{\sqrt{x'}} + I_0(i \sqrt{x'})}{\frac{1}{2\sqrt{x'}}} \dots (26).$$

Für  $x' = 0$  ist  $I_0(i x') = 1$ . Der erste Summand ist für  $x' > 0$  negativ; für  $x' = 0$  wird er  $0/0$ , also auf alle Fälle endlich. Der Wert  $0/0 = \infty$  fällt wegen Gl. 25a auch aus. Daher geht Gl. 26 über in:

$$\frac{\text{Endlicher Wert}}{\infty} = 0.$$

Die Nadelspitze hat also auch bei gerader Erzeugenden die Übertemperatur 0. Der grundsätzliche Verlauf der Temperaturkurve ist in Bild 4 wiedergegeben.

Zylindrisches Profil. — Der Vollständigkeit halber soll auch noch kurz die Lösung für eine zylindrische Nadel, deren Stirnfläche gegen Wärmeabgabe geschützt sei, in vergleichsfähiger Form angegeben werden. Die Differentialgleichung dafür lautet:

$$t'' = \beta^2 t \quad \text{mit} \quad \beta = \sqrt{\frac{\alpha U}{\lambda f}}; \quad \frac{U}{f} = \frac{2\pi r}{r^2 \pi} = \frac{2}{r}.$$

Die Lösung lautet:

$$t = A e^{\beta x} + B e^{-\beta x}.$$

Mit den Randbedingungen:

$$x = 0; \quad t = t_0; \quad x = l; \quad t' = 0$$

folgt:

$$t = t_0 \frac{\text{Cof}[\beta(x-l)]}{\text{Cof}[\beta l]}.$$

Die Wärmeabgabe ist wieder:

$$Q_0 = \alpha \int_0^l 2 \pi r t dx = t_0 \sqrt{2 \alpha \lambda \pi^2} r^{3/2} \mathfrak{Eg} \left[ \sqrt{\frac{2 \alpha}{\lambda r}} l^2 \right];$$

mit  $l = \frac{V}{r^2 \pi}$  und  $\sqrt{\frac{2 \alpha}{\lambda \pi^2} \frac{V^2}{r^2}} = u$  folgt weiter:

$$\frac{Q_0}{t_0} = \sqrt{2 \alpha \lambda \pi^2} \mathfrak{Eg}(u) u^{-3/2} \sqrt{\left[ \frac{2 \alpha V^2}{\lambda \pi^2} \right]^3} \dots \dots \dots (27).$$

Das Maximum an Wärmeabgabe bei gegebenem Volumen erhält man daher aus:

$$\frac{d}{du} \left( \frac{Q_0}{t_0} \right) = 0$$

mit der Bedingungsgleichung  $u = \frac{3}{5} \mathfrak{E} \sin(u) \mathfrak{C} \operatorname{of}(u)$  und der Lösung:  $u_0 = 0,9196$ .

Für die Abmessungen der zylindrischen Nadel folgt daraus:

$$r = \frac{0,456}{\sqrt{\alpha \lambda}} \sqrt[3]{\left( \frac{Q_0}{t_0} \right)^2}; \quad l = 0,45 \cdot \sqrt[3]{\frac{\lambda}{\alpha^2}} \sqrt[3]{\frac{Q_0}{t_0}}; \quad V = \frac{0,293}{\sqrt{\alpha^4 \lambda}} \sqrt[3]{\left( \frac{Q_0}{t_0} \right)^5} \dots \dots (28, 29, 30).$$

**3. Erörterung der Ergebnisse.** Die Bemessungsformeln der verschiedenen Nadelformen haben den gleichen Aufbau. Nur die jeweiligen Konstanten weichen voneinander ab. In Bild 5 sind die Umrißlinien der drei Nadelformen gezeichnet. Der Werkstoffaufwand, der geraden Nadel (Dreieckprofil) ist nur um  $\approx 2\%$  größer als der der Nadel günstigster (parabolischer) Form, während der der Zylindernadel ungefähr  $25\%$  größer ist. Aus diesem Grunde werde letztere bei den weiteren Betrachtungen nicht mehr berücksichtigt.

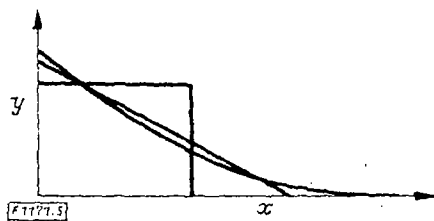


Bild 5. Vergleich der Profile der drei Nadelformen.

Zahlentafel 1. Vergleich der Volume der Nadeln aus Stahl, Al-Legierung und Kupfer (Volumen der Nadel aus Kupfer gleich 1 gesetzt).

	Stahl	Al-Leg.	Cu
$\lambda$	30	120	330
$V$	2,02	1,42	1
$\frac{V - V_{Cu}}{V_{Cu}}$	102%	42%	—
$\frac{V - V_{St}}{V_{St}}$	—	—29,7%	—50,5%
$\frac{V - V_{Al}}{V_{Al}}$	42,2%	—	—29,6%

Die Nadel günstigster Form hat eine äußerst scharfe Spitze, die praktisch nicht verwendet werden kann. Außerdem ist das Verhältnis der Volume (für gleichen Werkstoff somit auch der Gewichte) von gerader Nadel zur parabolischen nur 1,02. Die übermäßig scharfe Spitze fällt bei gerader Kühlnadel weg. Deshalb wird man in der Praxis immer Nadeln mit geraden Flanken verwenden. Es gilt für beide Ausführungen, daß die Nadeln um so länger und dünner werden, je größer  $\lambda$  wird.

Gleichzeitig nimmt der Werkstoffaufwand nur mit der  $\sqrt[3]{\lambda}$  ab. Ein Vergleich zwischen Nadeln aus Stahl, Aluminiumlegierung und Kupfer bei gleichen  $Q_0$ ,  $t_0$  und  $\alpha$  zeigt Zahlentafel 1. Dabei ist das Kupfervolumen zum Vergleich mit 1 angenommen. Für gleiche Wärmeleistung wird das Nadelgewicht viermal größer, wenn Stahl statt Aluminiumlegierung verwendet wird.

Man spart also bei Al-Legierung nicht nur rd. 30% an Werkstoffvolumen, sondern vor allem 75% an Gewicht. Die große Überlegenheit der Al-Nadel ist somit klar. Kupfer sei als Werkstoff von vornherein ausgeschieden. Das Volumen einer Cu-Nadel wäre 50,5%, das Gewicht aber nur 44% kleiner als bei Stahlnadeln.

Das Volumen einer Nadel nimmt mit der  $\sqrt[3]{\lambda}$ -ten Potenz der Wärmeleistung zu. Daher ist es günstig,  $Q_0$  je Nadel klein zu halten und dafür viele Nadeln an der zu kühlenden Fläche anzubringen. (Diese Forderung erfährt jedoch, wie später gezeigt wird, eine Einschränkung.) Die Grenze ist dabei durch die erforderliche Festigkeit gegen mechanische Beanspruchung gegeben, aber wieder abhängig vom Werkstoff und von  $\alpha$ . Die günstigsten Verhältnisse können nur von Fall zu Fall entschieden werden und gelten dann einzig für einen ganz bestimmten Betriebszustand. Es ist also sehr unbequem, daß in den Bemessungsformeln  $\alpha$  und  $Q_0/t_0$  stehen. Man darf z. B. für hohe Kühlluftgeschwindigkeiten nicht dasselbe Nadelprofil nehmen, wie für niedrige Geschwindigkeiten. Bei der richtig bemessenen Nadel muß die Spitzenübertemperatur 0 werden.

**4. Vergleich mit verrippten Kühlflächen.** Bei Rippenkühlung ist die Entfernung der einzelnen Rippen durch die Überlegung bestimmt, daß sie soweit auseinander stehen müssen, daß keine Rippe sich im Bereich des von ihren Nachbarn schon erwärmten Luftstromes befindet<sup>2)</sup>. Demnach müssen also Rippen im doppelten Abstand ihrer eigenen Grenzschichtdicke stehen. Bei Nadeln kann man von einer Grenzschicht nicht sprechen. Eine gegenseitige Störung im Wärmeübergang tritt deshalb auch bei kleinsten Abständen nicht ein. *Reiher*<sup>5)</sup> hat durch Versuche an Rohrbündeln tatsächlich festgestellt, daß der Wärmeübergang praktisch unabhängig von den relativen Abständen ist.

Es ist nun noch von Interesse, einen Vergleich zwischen einer verrippten und einer mit Nadeln versehenen gleichgroßen Grundfläche zu ziehen. Die Grundlage zu diesem Vergleich sei folgende: Die verbaute Grundfläche sei ein Streifen von 4,5 mm Breite und 30 cm Länge. Als Werkstoff wird Dural mit  $\lambda = 137 \text{ kcal/m h } ^\circ\text{C}$  verwendet. Wie verhalten sich die Wärmeleistungen und Gewichte der beiden Kühlelemente für gleiche Kühlleistung?

Mit Nadeln besetzte Kühlfläche. — Für die Nadel gelte nach *Brandt* und *Dingler*<sup>6)</sup>:

$$\Delta p = \alpha k_0 \varrho w^2 \text{Re}^s \dots \dots \dots (31).$$

Der Exponent  $s$  fällt asymptotisch für steigende Anzahl der Nadelreihen und erreicht schließlich den Wert  $-0,285$ .  $\varrho = \gamma/g$  ist die Dichte und  $k_0$  ein Beiwert, der abhängig von dem Verhältnis der Teilung  $s_1$  zum Nadeldurchmesser  $d$  ist. Für  $\alpha$  gibt *Brandt* Werte an, die mit steigender Nadelanzahl erst angenähert parabolisch, dann jedoch linear zunehmend sind. Das bedeutet, daß der Turbulenzzustand der Kühlluft nach einer gewissen Anzahl Nadelreihen durch die folgenden nicht mehr vergrößert wird und somit jede Nadelreihe denselben Druckabfall hervorruft. Die Längsteilung sei in dieser Rechnung gleich der Querteilung mit 4,5 mm angenommen. Wir bekommen also sehr viele Nadelreihen hintereinander. Für dieses Gebiet kann  $\alpha$  dargestellt werden durch:

$$\alpha = 0,307 z^{-0,81};$$

$z$  ist die Anzahl der Nadelreihen hintereinander. Obige Gleichung kann auch geschrieben werden:

$$\alpha = 0,307 \bar{z},$$

wobei  $\bar{z} = z - 2,64$  ist. Somit folgt:

$$\Delta p = 0,307 \bar{z} k_0 w^2 \text{Re}^{-0,285};$$

$\text{Re} = w d/\nu$  ist die Reynoldssche Zahl. Für Luft wird  $\nu = 0,15 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $\gamma = 1,2 \text{ kg/m}^3$  (entspricht einer Temperatur von  $12^\circ\text{C}$  und  $735,5 \text{ mm QS}$ ) und  $\lambda_L = 0,021 \text{ kcal/m h } ^\circ\text{C}$  angenommen. Mit diesen Werten folgt:

$$\Delta p = 0,307 \bar{z} C_1 w^{1,715} d^{-0,285} k_0 \text{ mit } C_1 = 0,000797 \dots \dots \dots (32).$$

Für die Wärmeübergangszahl  $\alpha$  gilt nach *F. Merkel*<sup>7)</sup>:

$$\alpha = 0,075 \cdot 1,47 \text{Pe}^{0,75} \frac{\lambda_L}{d}; \quad \text{Pe} = \text{Re Pr}; \quad \text{Pr} = 0,73; \quad \alpha = 7,68 w^{0,75} d^{-0,25}.$$

Daraus folgt:

$$w = 0,0662 \alpha^{1,333} d^{0,333} \dots \dots \dots (33);$$

in Gl. 32 eingesetzt, wird:

$$\Delta p = 7,53 \cdot 10^{-6} \bar{z} \alpha^{2,28} d^{0,287} k_0 \dots \dots \dots (34),$$

wobei  $d$  in Metern und  $\alpha$  in  $\text{kcal/m h } ^\circ\text{C}$  einzusetzen ist. Die Kühlleistung wird:

$$A = \Delta p w f.$$

$f$  ist der für die Strömung freie Querschnitt jeweils vor der Nadelreihe. Außerdem gilt:

$$l = 0,755 \sqrt[3]{\frac{\lambda}{\alpha^2}} \sqrt[3]{\frac{Q_0}{t_0}}; \quad d = y_0 = 0,55 \frac{1}{3} \sqrt[3]{\left(\frac{Q_0}{t_0}\right)^2} \dots \dots \dots (35).$$

Es wird dabei der für Wärmeübergang und Druckverlust maßgebende Rohrdurchmesser gleich dem Durchmesser der Nadel in halber Höhe gesetzt, der gleich dem Radius  $y_0$  des Nadelfußes ist. Mit den Beziehungen der Gl. 33, 34 und 35 folgt:

$$A = 1,223 \cdot 10^{-9} \alpha^{2,737} \bar{z} k_0 \lambda^{0,126} \left(\frac{Q_0}{t_0}\right)^{0,7466} \dots \dots \dots (36).$$

Für jedes  $A$  ist nun  $\alpha$  so zu bestimmen, daß  $Q_0$  ein Maximum wird. Für  $Q_0$  folgt aus Gl. 36:

$$Q_0 = t_0 \left[ \frac{A}{z k_0} \right]^{1,34} 10^{11} \cdot 7,63 \alpha^{-3,66} \lambda^{-0,169} \dots \dots \dots (37).$$

<sup>5)</sup> *H. Reiher*, Wärmeübergang von strömender Luft an Rohre und Röhrenbündel im Kreuzstrom, VDI-Forsch.-Heft 269, Berlin 1925.

<sup>6)</sup> *H. Brandt* u. *J. Dingler*, Der Druckverlust in senkrecht angeströmten Rohrbündeln, Wärme Bd. 59 (1936) S. 1/8.

<sup>7)</sup> s. Hütte, Bd. I, 26. Aufl., Berlin 1931, S. 499.

Leider ist in dieser Gleichung  $k_0$  abhängig von  $d$ , also abhängig von  $x$ , und zwar wird  $k_0$  mit sinkendem  $x$  größer. Aus dem von Brandt für  $k_0$  angegebenen Diagramm folgt die Beziehung Bild 6 und 7. Die Kurve  $k_0 = f(d)$  zwischen  $d = 1$  und  $2,5$  (dieses Gebiet käme wohl in der Praxis vor allem zur Verwendung) kann durch die Gleichung

$$k_0 = 5,9 d^2 + 5,2 d - 5,6 \dots \dots \dots (38)$$

dargestellt werden.  $d$  ist in mm einzusetzen. Gl. 36 geht somit über in:

$$A = A p w f = 1,223 \cdot 10^{-9} x^{2,737} z^{-0,126} \left(\frac{Q_0}{t_0}\right)^{0,746} \left[ 1,88 \frac{10^6}{\sqrt{x^2 \lambda^2}} \sqrt[3]{\left(\frac{Q_0}{t_0}\right)^4} + 2,93 \frac{10^3}{\sqrt{x \lambda}} \sqrt[3]{\left(\frac{Q_0}{t_0}\right)^2} - 5,6 \right] (39).$$

Diese Beziehung ist nun nach  $Q_0$  nicht mehr aufzulösen. Die Lösung wird deshalb so versucht, daß für verschiedene angenommene  $Q_0$  und  $x$  die Kühlleistung  $A$  ausgerechnet wird.  $Q_0$  wird sodann als Funktion von  $x$  mit dem Parameter  $A$  dargestellt und so das zu jedem  $A$  gehörige  $x$  bestimmt, bei dem  $Q_0$  ein Maximum wird. Bei der praktischen Durchführung der Rechnung ist es jedoch einfacher, statt mit Gl. 39 mit Gl. 36 zu rechnen. Zuerst bestimmt man  $d$  und damit aus Bild 6 oder aus Bild 7 den Beiwert  $k_0$  und schließlich die Kühlleistung  $A$ .

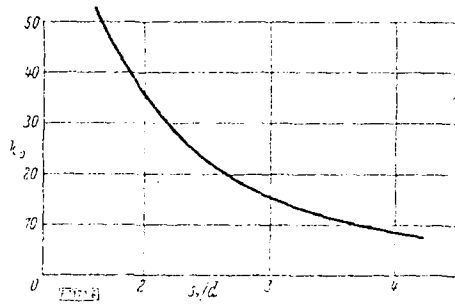


Bild 6 (links). Beiwert  $k_0$  der Gl. 32, abhängig vom Verhältnis  $s_1/d$  ( $s_1$  Nadelabstand,  $d$  Nadel Durchmesser).

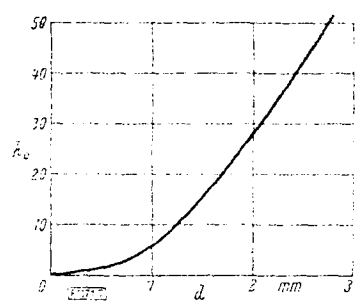


Bild 7 (rechts). Abhängigkeit des Beiwertes  $k_0$  vom Durchmesser  $d$  für einen Nadelabstand  $s_1 = 4,5$  mm.

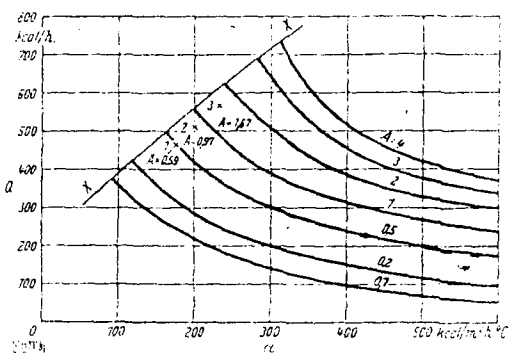


Bild 8. Optimale Wärmemenge  $Q$  der Kühlnadel in Abhängigkeit von der Wärmedurchgangszahl  $\alpha$  für verschiedene Kühlleistungen  $A$ .

Die Punkte 1, 2 und 3 beziehen sich auf die Kühlrippe für Luftgeschwindigkeiten  $w_{Rippe}$  von 40, 50 und 60 m/s. Auf der Linie X-X werden die Nadel Durchmesser gleich der Teilung.

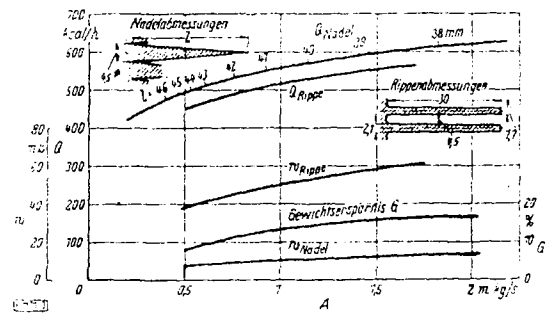


Bild 9. Gegenüberstellung der maximalen Wärmeleistung  $Q$ , der Luftgeschwindigkeiten  $w$  für Nadel und Rippe. Gewichtersparnis  $G$  % bei der Nadel gegenüber der Rippe.

Bild 8 zeigt die graphische Lösung. Die Kühlleistung  $A$  wird als Parameter verwendet. Alle Kurven sind nur bis zur Linie X-X gültig. Auf dieser Linie wird nämlich der Nadel Durchmesser am Fuß gleich der Teilung. Oberhalb von X-X würden sich also die Nadeln durchdringen, weshalb dieses Gebiet ausfallen muß. Es zeigt sich, daß man bei vorgegebener Kühlleistung die größte Wärmeabgabe erreicht, wenn man den Radius des Nadelfußes gleich der halben Teilung macht. Die Wärmeabgabe steigt bei Anwachsen der Kühlleistung erst schnell, später aber sehr langsam an. Bild 9 zeigt  $Q$  abhängig von  $A$ . Die Zahlen an der Kurve  $Q_{Nadel}$  bedeuten die Länge der Nadeln für maximale Wärmeleistungen.

Verrippte Kühlfläche. — Die angenommenen Rippenabmessungen sind in Bild 9 angegeben. Diese Rippenform stellt bereits eine sehr hochwertige Ausführungsform dar.

Für die Berechnung der Wärmeleistung und der Kühlleistung wurden folgende Beziehungen verwendet:

$$Q = \lambda F \beta t_0 \mathfrak{F}_\beta (\beta h) l'; \quad A p = 0,316 \text{Re}^{-0,25} w^2 \frac{Q}{2} \frac{l'}{d_{ae}};$$

$$x = 0,042 \text{Pe}^{0,75} \frac{\lambda L}{d_{ae}}; \quad A = A p w \cdot f \text{ mit } \beta = \sqrt{\frac{2x}{\lambda \delta}}; \quad \delta = 1,9 \text{ mm.}$$



Es bedeuten:

- $F$  den für die Wärmeströmung maßgebenden Rippenquerschnitt,  
 $f$  den freien Querschnitt zwischen zwei Rippen,  
 $l$  die Länge der Rippe,  
 $d_{ne}$  den gleichwertigen Durchmesser.

Die Wärmeabgabe der Kühlrippe wurde für Luftgeschwindigkeiten von 40, 50 und 60 m/s berechnet und ebenfalls in Bild 8 (Punkte 1, 2 und 3) und Bild 9 eingetragen.

Folgerungen. — Aus Bild 9 ist das Verhalten der Kühlnadel gegenüber der Kühlrippe zu entnehmen. Es zeigt sich, daß die Wärmeleistung der Nadel um durchweg rund 8% höher liegt. Berechnet man den Werkstoffaufwand der Nadel für verschiedene Punkte nach Gl. 22, dann ergibt sich eine Ersparnis an Werkstoff von 10 bis 16% gegenüber der Rippe.

Für die Kühlleistung der Nadeln zeigt sich, daß die Luftgeschwindigkeiten sehr niedrig, hingegen die Druckabfälle hoch sind; die Nadelhöhe ist dabei 40,5 mm. Es ist deshalb interessant, zu untersuchen, ob man es in der Hand hat, durch andere Nadelteilung den Druckabfall zu erniedrigen. Voraussetzung ist dabei, daß der Nadelfußhalbmesser gleich der halben Teilung ist.  $k_0$  wird dabei konstant gleich 35,0. Aus den Gl. 34 und 36 folgt für gleiche Wärmeleistung aller auf der Grundfläche untergebrachten Nadeln und bei gleicher Kühlleistung:

$$\Delta p_2 = \Delta p_1 \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^{0,5}$$

Je enger man also die Teilung macht, desto größer wird der Druckabfall. Macht man sie halb so groß, so steigt  $\Delta p$  im Verhältnis  $\sqrt{2}$ , während sich  $w$  nicht wesentlich ändert. Die früher aufgestellte Forderung nach vielen kleinen Nadeln ist daher durch das erreichbare Druckgefälle begrenzt.

In diesen Überlegungen ist die Erwärmung der Kühlluft nicht berücksichtigt worden. Da die Erwärmung bei Nadelkühlung ein Mehrfaches der bei Rippenkühlung auftretenden ist, werden die hinteren Nadelreihen in ihrer Wärmeleistung etwas sinken; man wird deshalb die Tiefe der Nadelreihen nicht allzugroß wählen dürfen, um sich des Vorteils der größeren Wärmeabgabe der Nadeln nicht wieder zu begeben. Abschließend kann aus der Gegenüberstellung der Kühlung durch Nadeln und der durch Rippen gesagt werden:

Die Nadeln führen bei gleichem Aufwand an Kühlleistung mehr Wärme ab als Rippen und brauchen weniger Werkstoff als diese. Die Kühlleistungen unterliegen dabei vollkommen anderen Bedingungen. Während die Rippen große Luftgeschwindigkeiten mit relativ kleinen Druckabfällen erfordern, setzt sich die Kühlleistung der Nadeln aus kleinen Luftgeschwindigkeiten, aber höheren Druckabfällen zusammen. Dieser grundlegende Unterschied wird vor allem das Anwendungsgebiet der Nadel als Kühlelement bestimmen.

Man arbeitet in vielen Fällen bestimmt günstiger, wenn man die hohe Kühlluftgeschwindigkeit, die Rippen zu intensiver Kühlung erfordern, aufstaut und den dadurch höheren Überdruck bei kleineren Luftmengen und mit niedriger Luftgeschwindigkeit bei der Kühlung abbaut. Die Eintritts-, Austritts-, Stoß- und Umlenkverluste, die in der Kühlluftzu- und -ableitung unvermeidbar sind, werden dabei in starkem Maße verringert, so daß die gesamte Kühlleistung, die ja aus der reinen Kühlleistung und den Verlusten (die oft die reine Kühlleistung weit übersteigen) besteht, bedeutend gesenkt werden kann.

Hat man nur geringe Luftmengen zur Verwendung, so ist die Nadel von vornherein das gegebene Kühlelement.

Eine nicht unbeträchtliche Verbesserung der Nadelkühlung läßt sich wohl dadurch erreichen, daß man den Nadelquerschnitt nicht rund, sondern stromlinienförmig ausbildet. Inwieweit der Druckabfall dadurch gesenkt werden kann, ohne das  $\alpha$  zu verkleinern, ist theoretisch noch nicht zu überblicken.

**5. Zusammenfassung.** Es werden Nadeln von kreisförmigem Querschnitt mit Parabeln und Geraden als Erzeugenden auf ihre optimalen Bedingungen in bezug auf Wärmeabfuhr untersucht. Die Optimalbedingungen für zylindrische Nadeln werden angegeben. Im weiteren wird eine Gegenüberstellung in der Wärmeabfuhr und dem dazu nötigen Leistungsaufwand von Nadeln und Rippen vorgenommen. Es werden grundsätzliche Unterschiede im Verhalten dieser beiden Kühlelemente gefunden und die besonderen Eigenschaften der Nadeln klargestellt. Die gewichts- und leistungsmäßigen Vorteile der Kühlnadel werden bei folgerichtiger Ausnützung ihrer Eigenschaften aufgezeigt.

[RF 1171]