BOL. SOC. BRAS. MAT. 8.2(1977), 127–130

Um problema da teoria dos subgrupos subnormais

Rudolf Maier

1. Introdução

Um problema fundamental que aparece no tratamento de várias questões da teoria dos grupos é o fenômeno de que, dado um grupo G e um subgrupo X de G, em geral não existe o "subnormalizador de X em G", isto é, o maior subgrupo de G no qual X está contido como subgrupo subnormal. Em outras palavras: Se G é um grupo e se A, B, X são subgrupos de G com $X \leq A \cap B$, tais que A e B contêm X como subgrupo subnormal, então a conclusão de que X também é um subgrupo subnormal no grupo $\langle A, B \rangle$ gerado por A e B, é falsa em geral. Entretanto essa conclusão é trivialmente verdadeira, substituindo-se "subnormalidade" por "normalidade".

O objetivo desta nota é dar força à conjectura de que a conclusão mencionada é válida para grupos finitos, sob a condição adicional de os subgrupos A e B serem permutáveis. Mostraremos que essa conjetura admite uma solução afirmativa no caso em que o subgrupo X ê um grupo solúvel. A demonstração baseia-se num teorema bem conhecido de Baer (Lemma 1). No que segue, usamos a notação de [5].

Conjetura. *Seja G um grupo finito e sejam A, B, X subgrupos de G com $X \leq A \cap B$, X sn A e X sn B. Se $AB = BA$, então X sn $\langle A, B \rangle = AB$.*

Teorema. *Seja G um grupo finito e sejam A, B, X subgrupos de G com $X \leq A \cap B$, X sn A e X sn B. Se $AB = BA$ e se X é um grupo solúvel, então X sn AB.*

Mencionamos duas aplicações deste resultado. A primeira fornece uma condição necessária e suficiente para que um subgrupo solúvel de um grupo G seja subnormal em G. Este corolário pode ser considerado como uma resposta parcial à pergunta-título em [6]. O segundo corolário fornece um critério de não-simplicidade que se deduz imediatamente do primeiro.

Corolário 1. *Seja G um grupo finito e seja X um subgrupo solúvel de G. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(*i*) X *sn* G.
(*ii*) G *admite uma decomposição como produto* $G = G_1G_2\ldots G_r$, *onde* G_1, $G_2, \ldots, G_r$ *são subgrupos de* G ($r \geq 1$) *permutáveis dois a dois, tais que* $X \leq G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_r$ *e* X *sn* G_i *para* $i = 1, 2, \ldots, r$.

A demonstração é feita de modo evidente por indução sobre r.

Corolário 2. *Seja* G *um grupo finito, admitindo uma decomposição* $G = G_1G_2\ldots G_r$ *como produto de subgrupos* $G_1, G_2, \ldots, G_r$ *de* G ($r \geq 1$) *que são permutáveis dois a dois, tais que existe um subgrupo solúvel* $X \neq 1$ *de* $G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_r$ *com* X *sn* G_i *para* $i = 1, 2, \ldots, r$. *Então* G *não pode ser simples de ordem composta.*

2. A demonstração do teorema

Os seguintes resultados serão utilizados na demonstração do Teorema.

Lema 1. *Seja* G *um grupo finito,* X *um subgrupo de* G *e seja* p *um primo. O fecho normal* X^G *de* X *em* G *é um* p*-grupo se e somente se os grupos* $\langle X^g, X\rangle$ *são* p*-grupos para todo* $g \in G$.

Uma demonstração deste fato fundamental encontra-se em [5]. A demonstração original (para X cíclico) está em [1].

Lema 2. *Seja* G *um grupo finito tal que* $G = AB$, *onde* A *e* B *são subgrupos de* G, *e seja* p *um primo. Então existe um* p*-subgrupo de Sylow* P *de* A *e um* p*-subgrupo de Sylow* Q *de* B, *tais que* $PQ = QP$ *é um* p*-subgrupo de Sylow de* G.

Uma demonstração encontra-se em [3].

Lema 3. *Seja* G *um grupo finito, seja* T *um subgrupo de* G *tal que* T *sn* G *e seja* M *um subgrupo minimal normal em* G. *Então* M *normaliza* T.

Isto é um resultado de [4].

Demonstração do Teorema: Seja G um grupo de ordem $|G|$ mínima para o qual o Teorema é falso e sejam A, B, X subgrupos de G, $AB = BA$,

$X \leq A \cap B$, X solúvel, X sn A, X sn B, mas X não subnormal em AB. Podemos supor que a escolha desses subgrupos foi feita de tal maneira, que $|A|$ é máxima e que $|X|$ é mínima satisfazendo essas propriedades. Então vale o seguinte:

(i) $AB = G$: Isto segue-se imediatamente da escolha de G com $|G|$ mínima.

(ii) *A é um subgrupo maximal de G*: Por (i) temos $AB = G$. É claro que $A \neq G$. Seja U um subgrupo de G com $A \leq U$. Temos a decomposição $U = A\bar{B}$ onde $\bar{B} = U \cap \bar{B}$. Vale X sn A e X sn $\bar{B}$. A escolha de $|G|$ mínima assegura X sn $A\bar{B} = U$. Ora, $G = UB$; portanto, a escolha de $|A|$ máxima dá $U = A$.

(iii) *A não contém nenhum subgrupo $M \neq 1$ normal em G*: Suponhamos, $1 \neq M \trianglelefteq G$ com $M \leq A$. No grupo quociente G/M temos a seguinte situação: $G/M = (A/M)(BM/M)$, $XM/M \simeq X/X \cap M$ é um subgrupo solúvel de $(A/M) \cap (BM/M)$ e vale XM/M sn A/M e XM/M sn BM/M. A minimalidade de $|G|$ fornece XM/M sn G/M, isto é XM sn G. De $X \leq XM \leq A$ e X sn A concluímos X sn XM. Portanto tem-se também X sn G, o que contradiz a escolha de X.

(iv) *A não contém nenhum subgrupo $T \neq 1$ subnormal em G*: Suponhamos $1 \neq T$ sn G, onde $T \leq A$. Seja M um subgrupo minimal normal de G. Por (iii) temos $M \leq A$ e por (ii) concluímos $MA = G$. Usando o resultado do Lema 3, obtemos $1 \neq T^G = T^{MA} = T^A \leq A$. Isto contradiz (iii).

(v) *$|X| = p$ para algum primo p*: Escolhemos um subgrupo T minimal subnormal em X. Da solubilidade de X segue que $|T| = p$, para algum primo p. Vale T sn A e T sn B. Ora, se fosse $T < X$, seríamos levados a concluir que T sn G pela escolha de $|X|$ mínima. Isto contradiz (iv). Por tal, $T = X$ e $|X| = p$.

(vi) *X^A e X^B são p-grupos*: Isto segue-se da teoria fundamental dos subgrupos subnormais [2].

(vii) *$H = \langle X^A, X^B \rangle$ é um p-grupo*: Segundo o Lema 2 podemos escolher um p-subgrupo de Sylow P de A e um p-subgrupo de Sylow Q de B, tais que $PQ = QP$ é um p-subgrupo de Sylow de $G = AB$. De (vi) segue $X^A \leq P$ e $X^B \leq Q$. Portanto, $H = \langle X^A, X^B \rangle \leq PQ$. Assim, H é um p-grupo.

(viii) *$\langle X^g, X \rangle$ é um p-grupo para todo $g \in G$*: Seja $g \in G$ um elemento qualquer. Existem elementos $a \in A$, $b \in B$ com $g = ab$. Temos $\langle X^g, X \rangle = \langle X^{ab}, X \rangle = \langle X^a, X^{b^{-1}} \rangle^b \leq H^b$. Portanto, $\langle X^g, X \rangle$ é um p-grupo.

(ix) *A contradição*: De (viii) e do Lema 1 segue que o fecho normal X^G é um p-grupo. Isto implica X sn G, uma contradição vis-à-vis a escolha de X

Bibliografia

[1] Baer, R., *Engelsche Elemente Noetherscher Gruppen.* Math. Annalen 133, 256-270 (1957).

[2] Wielandt, H., *Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen.* Math. Zeitschrift 45, 209-244 (1939).

[3] Wielandt, H., *Über das Produkt paarweise vertauschbarer nilpotenter Gruppen.* Math. Zeitschrift 55, 1-7 (1951).

[4] Wielandt, H., *Über den Normalisator der subnormalen Untergruppen.* Math. Zeitschrift 69, 463-465 (1958).

[5] Wielandt, H. *Kriterien für Subnormalität in endlichen Gruppen.* Math. Zeitschrift 138, 199-203 (1974).

[6] Wielandt, H., *When is a subgroup subnormal?* Atas da 3.ª Escola de Álgebra, Brasília 1974. Coleção Atas, IMPA.

Universidade de Brasília
Departamento de Matemática – IE
70.000 Brasília – DF, Brasil