

## Charakteristikenverfahren zur näherungsweise Berechnung der unsymmetrischen Überschallströmung um ringförmige Körper

VON WOLFGANG HAACK, Berlin<sup>1)</sup>

Die Strömung eines idealen Gases um einen schlanken Rotationskörper, der mit Überschallgeschwindigkeit schräg angeblasen wird, kann man näherungsweise durch Linearisierung der Differentialgleichung der Gasdynamik ermitteln. Dabei verwendet man im allgemeinen Quellen- und Dipolverteilungen längs der Rotationsachse, die nach dem von VON KÁRMÁN und MOORE (1932) und VON KÁRMÁN und TSIEN (1939) angegebenen Verfahren berechnet werden<sup>2)</sup>.

Bei einem zusammengesetzten Rotationskörper, der etwa dadurch entsteht, daß man über einen spitzen rotationssymmetrischen Kern einen Ring von beliebigem, aber vorn scharfkantigem Profil schiebt (Figur 1), wird das Verfahren der Quell- und Dipolverteilung recht umständlich. Dabei bereiten die Unstetigkeitsflächen, die durch die Vorderkante des Ringes entstehen, besondere Schwierigkeiten. Hier zeigt sich, daß man solche Strömungsvorgänge sehr einfach mit einem zu der linearen Differentialgleichung gehörenden Charakteristikenverfahren ermitteln kann. Auch die Unstetigkeitsflächen bereiten keine Umstände. Selbst die mehrfache Reflexion der Unstetigkeitsflächen an den Wänden zwischen Ring und Kern läßt sich ohne besonderen Aufwand überwinden.

Die praktische Bedeutung der Problemstellung liegt in der Möglichkeit, Rotationskörper durch Ringe, die über das Heck geschoben werden, zu stabilisieren. An drei Beispielen wird gezeigt, daß der Auftrieb ein und desselben Ringes sehr verschieden sein kann, je nach der Gestalt des Kernes und nach der Art der Anbringung.

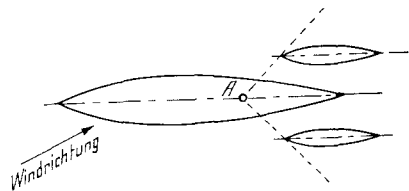


Fig. 1

Rotationskörper mit ringförmigem Leitwerk. Die Strömung berechnet man bis Punkt *A* nach dem Quell-Dipol-Verfahren, hinter Punkt *A* nach dem Charakteristikenverfahren.

<sup>1)</sup> Ordentlicher Professor an der Technischen Universität und Honorarprofessor an der Freien Universität Berlin.

<sup>2)</sup> Vgl. etwa: R. SAUER, *Theoretische Einführung in die Gasdynamik* (Springer, Berlin 1943). – R. COURANT und K. O. FRIEDRICHS, *Supersonic Flow and Shock Waves* (Interscience Publishers, New York 1948). – A. FERRI, *Elements of Aerodynamics of Supersonic Flows* (Macmillan, New York 1949).

Im ersten Teil der folgenden Mitteilung wird das Charakteristikenverfahren entwickelt. Gemäß der Theorie, die kürzlich vom Verfasser und G. HELLWIG<sup>1)</sup> veröffentlicht wurde, würde es naheliegen, an Stelle der Potentialfunktion die sogenannten Normalfunktionen einzuführen und diese nach dem Charakteristikenverfahren zu bestimmen. Dieser Vorgang wird sehr einfach im Innern des Strömungsgebietes, bereitet aber etwas Mühe längs der Ränder. Deshalb wurde hier das Verfahren abgeändert, so daß unmittelbar die Potentialfunktion bestimmt wird. Das bedeutet eine Vereinfachung am Rand, verlangt aber eine Integration mehr als die Bestimmung der Normalfunktion.

Das Verfahren ist im folgenden so dargestellt, daß es unabhängig von jener Arbeit verständlich ist.

Im zweiten Teil werden drei Beispiele behandelt:

1. ein frei stehender zylindrischer Ring,
2. der gleiche Ring über einem zylindrischen Kern,
3. der gleiche Ring über konischem Kern.

Die beiden ersten Beispiele sollen hauptsächlich die Ermittlung der Unstetigkeiten erläutern.

#### ERSTER TEIL: CHARAKTERISTIKENVERFAHREN

### 1. Die linearen Differentialgleichungen

Das Geschwindigkeitspotential für die Strömung eines idealen Gases sei  $\Phi(x, y, z)$ . Die partiellen Ableitungen  $\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z$  sind die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors  $w$  mit dem Betrag  $w$ . Es ist also

$$w^2 = \Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2. \quad (1, 1)$$

Bezeichnen wir mit  $\kappa$  die Gaskonstante und mit  $a$  die Schallgeschwindigkeit, so gilt bekanntlich

$$a^2 = a_0^2 - \frac{\kappa - 1}{2} w^2. \quad (1, 2)$$

Die Differentialgleichung für die Potentialströmung eines idealen Gases ist

$$\left(1 - \frac{\Phi_x^2}{a^2}\right) \Phi_{xx} + \left(1 - \frac{\Phi_y^2}{a^2}\right) \Phi_{yy} + \left(1 - \frac{\Phi_z^2}{a^2}\right) \Phi_{zz} - \frac{2 \Phi_x \Phi_y}{a^2} \Phi_{xy} - \frac{2 \Phi_x \Phi_z}{a^2} \Phi_{xz} - \frac{2 \Phi_y \Phi_z}{a^2} \Phi_{yz} = 0.$$

Wir beschränken uns im folgenden auf die Strömung um einen schlanken Rotationskörper, der sich in einer Parallelströmung der Geschwindigkeit  $U$  befindet, und setzen voraus, daß die Richtung der Anströmgeschwindigkeit

<sup>1)</sup> W. HAACK und G. HELLWIG, Math. Z. 53, 244–266; 340–355 (1950).

nur einen *kleinen* Winkel  $\vartheta$  mit der Achse des Rotationskörpers bildet. Die  $x$ -Achse möge mit der Achse des Rotationskörpers zusammenfallen, die  $y$ -Achse legen wir so, daß der Vektor der Anströmgeschwindigkeit zur  $(x, y)$ -Ebene parallel ist.

Dann können wir die Strömung um den Rotationskörper als kleine Störung der Parallelströmung ansehen. Das Potential der ungestörten Parallelströmung ist

$$U \cos \vartheta x + U \sin \vartheta y. \quad (1, 3)$$

Da  $\vartheta$  als klein vorausgesetzt ist, können wir dafür schreiben, wegen  $\cos \vartheta \approx 1$ ,

$$U x + U \sin \vartheta y, \quad (1, 3a)$$

dabei ist  $U \sin \vartheta$  klein gegen  $U$ . Jetzt machen wir für  $\Phi(x, y, z)$  den Ansatz

$$\Phi(x, y, z) = U x + \bar{\Phi}(x, y, z), \quad (1, 4)$$

indem wir den unsymmetrischen Teil der Parallelströmung mit in das Störpotential  $\bar{\Phi}$  aufnehmen. Gemäß unserer Voraussetzung sind  $\bar{\Phi}_x, \bar{\Phi}_y, \bar{\Phi}_z$  klein gegen  $U$ , und wir gelangen durch Vernachlässigung kleiner Größen zu der linearen Differentialgleichung für  $\bar{\Phi}$ :

$$\left(1 - \frac{U^2}{a^2}\right) \bar{\Phi}_{xx} + \bar{\Phi}_{yy} + \bar{\Phi}_{zz} = 0, \quad (1, 5)$$

in der die Schallgeschwindigkeit  $a = a_0$  konstant ist. Durch Übergang zu Zylinderkoordinaten

$$x = x; \quad y = r \cos \psi; \quad z = r \sin \psi \quad (1, 6)$$

erhält man die Differentialgleichung

$$\left(1 - \frac{U^2}{a^2}\right) \bar{\Phi}_{xx} + \bar{\Phi}_{rr} + \frac{1}{r^2} \bar{\Phi}_{\psi\psi} + \frac{1}{r} \bar{\Phi}_r = 0. \quad (1, 7)$$

Da die Gleichung linear ist, können wir das Potential  $\bar{\Phi}$  als Überlagerung zweier Teilpotentiale darstellen. Wir zerlegen  $\bar{\Phi}$  in einen axialsymmetrischen Teil  $\varphi$  und einen unsymmetrischen Teil  $\bar{\varphi}$ . Für den unsymmetrischen Teil  $\bar{\varphi}$  versuchen wir den Ansatz

$$\bar{\varphi} = F(x, r) \cos \psi.$$

Dann wird also

$$\bar{\Phi}(x, r, \psi) = \varphi(x, r) + F(x, r) \cos \psi. \quad (1, 8)$$

Durch Einsetzen in (1, 7) erhält man mit der Abkürzung  $U/a = M$  für den axialsymmetrischen Teil die Differentialgleichung

$$(1 - M^2) \varphi_{xx} + \varphi_{rr} + \frac{1}{r} \varphi_r = 0 \quad (1, 9)$$

und für den unsymmetrischen Teil

$$(1 - M^2) F_{xx} + F_{rr} + \frac{1}{r} F_r - \frac{1}{r^2} F = 0. \quad (1, 10)$$

## 2. Charakteristikenverfahren zur Lösung des Anfangswertproblems

Um die beiden Differentialgleichungen (1, 9) und (1, 10) gemeinsam behandeln zu können, schreiben wir (1, 10) in der Form:

$$(1 - M^2) F_{xx} + F_{rr} + \frac{1}{r} F_r - \frac{\varepsilon}{r^2} F = 0. \quad (2, 1)$$

Für  $\varepsilon = 0$  erhalten wir (1, 9) und für  $\varepsilon = 1$  die Gleichung (1, 10). Wenn  $M > 1$ , also  $U$  größer als die Schallgeschwindigkeit ist, gehört (2, 1) zum hyperbolischen Typus und besitzt reelle Charakteristiken, die der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$(M^2 - 1) dr^2 - dx^2 = 0 \quad (2, 2)$$

genügen. Führen wir längs der Charakteristiken die Bogenlänge  $ds^2 = M^2 dr^2$  als Parameter ein, so wird

$$x' = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{M} \sqrt{M^2 - 1}; \quad r' = \frac{dr}{ds} = \pm \frac{1}{M}. \quad (2, 3)$$

Die Charakteristiken sind bekanntlich zwei Scharen von Geraden, die mit der  $x$ -Achse den Machschen Winkel  $\alpha$  einschließen mit  $\sin \alpha = 1/M$ .

Eine beliebige Funktion  $F(x, r)$  hat längs einer Charakteristik die Richtungsableitung

$$\frac{dF}{ds} = F_x x' + F_r r' = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M} F_x \pm \frac{1}{M} F_r.$$

Wir bezeichnen die Richtungsableitung längs der nach außen führenden Charakteristik ( $r' = +1/M$ ) mit  $F_1$  und diejenige längs der anderen mit  $F_2$ , dann gilt:

$$F_1 = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M} F_x + \frac{1}{M} F_r; \quad F_2 = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M} F_x - \frac{1}{M} F_r. \quad (2, 4)$$

Die Auflösung dieser Gleichungen nach  $F_x, F_r$  gibt

$$F_r = \frac{M}{2} (F_1 - F_2); \quad F_x = \frac{M}{2\sqrt{M^2 - 1}} (F_1 + F_2). \quad (2, 5)$$

Nach (2, 4) sind  $F_1$  und  $F_2$  Funktionen von  $x, r$ . Ihre Richtungsableitungen werden durch zwei Indizes bezeichnet. Nennen wir  $s_1$  die Bogenlänge der ersten

Charakteristik ( $r' = +1/M$ ) und  $s_2$  die der zweiten, so gelten die Bezeichnungen:

$$F_{12} = \frac{dF_1}{ds_2}; \quad F_{21} = \frac{dF_2}{ds_1}.$$

Aus (2, 3) und (2, 4) folgt:

$$F_{12} = (F_1)_x \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M} - (F_1)_r \frac{1}{M}$$

und nach einfacher Umrechnung

$$-F_{12} = \frac{1}{M^2} [(1 - M^2) F_{xx} + F_{rr}] = -F_{21}.$$

Jetzt können wir in der Differentialgleichung (2, 1) an Stelle der partiellen Ableitungen die Richtungsableitungen setzen und erhalten:

$$-M^2 F_{12} + \frac{M}{2r} (F_1 - F_2) - \frac{\epsilon}{r^2} F = 0. \tag{2, 6}$$

Schreiben wir diese Gleichung in Differenzenform, so erhalten wir die Grundgleichungen für das Charakteristikenverfahren

$\Delta F_1 = \left( \frac{F_1 - F_2}{2rM} - \frac{\epsilon}{r^2 M^2} F \right) \Delta s_2,$	(2, 7)
$\Delta F_2 = \left( \frac{F_1 - F_2}{2rM} - \frac{\epsilon}{r^2 M^2} F \right) \Delta s_1.$	(2, 8)

Zur Lösung des *Anfangswertproblems* gehen wir nun folgendermaßen vor: Längs einer Kurve  $l$  (Figur 2), die nirgends von einer Charakteristik berührt wird, sei die Strömung bekannt, das heißt längs  $l$  kennt man  $F$ ,  $F_x$ ,  $F_r$  und daher nach (2, 4) auch  $F_1$ ,  $F_2$ . Wir wählen auf  $l$  zwei Punkte  $P$ ,  $Q$  in geeignetem Abstand. Die entsprechenden Charakteristiken durch  $P$  und  $Q$  schneiden sich in  $R$ . Der Abstand  $QR = \Delta s_2$  und  $PR = \Delta s_1$  gibt die zu jeder Charakteristik gehörige Längendifferenz. Dann ist

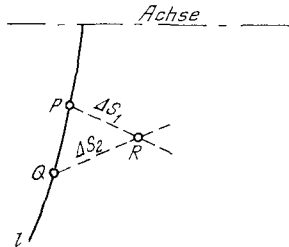


Fig. 2  
Skizze zur Lösung des Anfangswertproblems.

$$F_1(R) = F_1(Q) + \Delta F_1, \quad F_2(R) = F_2(P) + \Delta F_2. \tag{2, 9}$$

$\Delta F_1$  und  $\Delta F_2$  erhält man aus (2, 7) und (2, 8). Wenn  $\epsilon \neq 0$  ist, muß man noch  $F(R)$  bestimmen. Das geschieht durch näherungsweise Integration nach der Trapezformel. Da man in  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  die Ableitungen von  $F$  kennt, kann man die Integration längs der ersten Charakteristik über

$F_1$  oder längs der zweiten über  $F_2$  ausführen. Am besten ist, beides zu tun. Längs der ersten Charakteristik wird

$$F^I(R) = F(P) + \frac{1}{2} [F_1(P) + F_1(R)] \Delta s_1, \tag{2, 10}$$

längs der zweiten folgt

$$F^{II}(R) = F(Q) + \frac{1}{2} [F_2(Q) + F_2(R)] \Delta s_2. \tag{2, 11}$$

Da das Differenzenverfahren nur angenäherte Werte liefert, wird im allgemeinen  $F^I \neq F^{II}$  sein. Die Differenz  $|F^I - F^{II}|$  gibt ein Maß für die Genauigkeit. Wird sie zu groß, so muß man die Intervalle, das heißt den Abstand  $PQ$ , kleiner wählen. Für die Fortsetzung der Rechnung setzen wir

$$F(R) = \frac{1}{2} [F^I(R) + F^{II}(R)]. \tag{2, 12}$$

Damit ist das Anfangswertproblem gelöst. Wir wollen erwähnen, daß für  $\varepsilon=0$ , also für den symmetrischen Teil  $\varphi$  der Strömung, die Gleichungen (2, 10) bis (2, 12) überflüssig werden.

### 3. Das charakteristische Randwertproblem

Für die Strömung um einen Rotationskörper liegt zunächst kein Cauchysches Problem vor, sondern ein charakteristisches Anfangswertproblem, bei dem längs eines Randes, nämlich an der Wand des Körpers, die Richtung des Geschwindigkeitsvektors bekannt ist. Wir nehmen an, die Strömung sei in  $A$

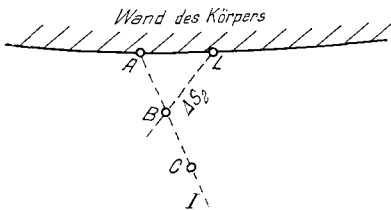


Fig. 3

Skizze zum charakteristischen Randwertproblem.

und links vom Punkt  $A$  der Wand des Drehkörpers bekannt (Figur 3). Dann kennt man die Funktionen  $F, F_1, F_2$  auch längs der Charakteristik I durch  $A$ . Es seien  $B, C, \dots$  Punkte der Charakteristik I durch  $A$ . Wir legen durch  $B$  die Charakteristik II, bestimmen ihren Schnittpunkt  $L$  mit der Wand und die Länge  $BL = \Delta s_2$ . Dann folgt aus (2, 7):

$$F_1(L) = F_1(B) + \Delta F_1. \tag{3, 1}$$

Zur Bestimmung von  $F_2$  beachten wir die Randbedingung. Die Tangente der Randkurve  $dr/dx$  ist gegeben. Demnach gilt:

$$\frac{F_r}{F_x} = \frac{dr}{dx} \tag{3, 2}$$

und wegen (2, 5)

$$\frac{dr}{dx} = \frac{F_1 - F_2}{F_1 \cdot F_2} \sqrt{M^2 - 1}. \quad (3, 3)$$

Daraus folgt für  $F_2(L)$

$$F_2(L) = F_1(L) \frac{\sqrt{M^2 - 1} - (dr/dx)}{\sqrt{M^2 - 1} + (dr/dx)}. \quad (3, 4)$$

Schließlich bestimmt man im Falle  $\varepsilon \neq 0$  noch  $F(L)$  durch

$$F(L) = F(B) + \frac{1}{2} [F_2(B) + F_2(L)] \Delta s_2. \quad (3, 5)$$

Zur Berechnung des Widerstandes bzw. des Auftriebes braucht man längs des Randes noch die Funktion  $F_x(L)$ , die nach (2, 5) bekannt ist.

Kennt man  $F$ ,  $F_1$ ,  $F_2$  in  $L$ , so hat man für alle Punkte der Charakteristik I durch  $L$  stets Cauchysche Anfangswertprobleme, die nach Ziffer 2 erledigt sind.

Damit ist das Charakteristikenverfahren soweit entwickelt, daß man für jeden (schlanken) Rotationskörper den unsymmetrischen Potentialteil  $F(x, r)$  mit  $F_x$ ,  $F_r$  berechnen kann. Für den symmetrischen Teil  $\varphi(x, r)$  gelten dieselben Gleichungen mit  $\varepsilon = 0$ , jedoch tritt an Stelle der Randbedingung (3, 2) wegen (1, 4) und (1, 8) die Forderung

$$\frac{\varphi_r}{U + \varphi_x} = \frac{dr}{dx}$$

und wegen (2, 5) die Bindung zwischen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  längs des Randes

$$\frac{dr}{dx} = \frac{M(\varphi_1 - \varphi_2)}{2U + (M/\sqrt{M^2 - 1})(\varphi_1 + \varphi_2)}. \quad (3, 6)$$

Die Durchführung des Verfahrens gestaltet sich besonders einfach, wenn man das Netz der Charakteristiken so wählt, daß man, soweit möglich, konstante Intervalle  $\Delta s_1$  und  $\Delta s_2$  hat.

Wir schließen diesen Abschnitt mit folgender Bemerkung: Nach (3, 5) wird  $F(L)$  im Randpunkt  $L$  so bestimmt, daß eine Charakteristik bevorzugt ist. Man kann aber  $F(L)$  nochmals durch Integration längs der Randkurve von  $A$  bis  $L$  (Figur 3) berechnen und durch Mittelbildung mit (3, 5) einerseits den Wert verbessern, andererseits die Güte des Verfahrens beurteilen.

#### 4. Überdruck, Widerstand und Auftrieb

Zur Bestimmung des Überdruckes, der an einer Stelle  $x, r, \psi$  herrscht, gehen wir aus von der Bernoullischen Druckformel

$$\frac{p}{p_0} = \left[ 1 + \frac{\kappa - 1}{2} \left( \frac{w^2 - w_0^2}{a_0^2} \right) \right]^{\kappa/(\kappa - 1)}.$$

Ist nun, wie hier vorausgesetzt,  $w^2 - w_0^2$  klein, so gilt für den Überdruck die Näherungsformel:

$$\frac{p - p_0}{\rho_0 w_0^2/2} = \frac{w^2}{w_0^2} - 1.$$

In unserem Falle ist nach (1, 4)  $w_0 = U$  und

$$w^2 = \Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2 \approx (U + \varphi_x + F_x \cos \psi)^2$$

oder, wenn man konsequent Größen zweiter Ordnung vernachlässigt,

$$w^2 = U^2 + 2 U \varphi_x + 2 U F_x \cos \psi.$$

Damit wird der Überdruck

$$\frac{p - p_0}{\rho U^2/2} = \frac{2 \varphi_x}{U} + \frac{2}{U} F_x \cos \psi. \quad (4, 1)$$

Zur Bestimmung der Kräfte, die von der Strömung auf den Körper übertragen werden, braucht man die Funktionen  $\varphi_x$  und  $F_x$  an der Oberfläche. Der Meridian des Rotationskörpers sei gegeben durch  $r(x)$  und seine Tangente durch  $r' = dr/dx$ . Bezeichnen wir mit  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  die Einheitsvektoren in Richtung der  $y$ -,  $z$ -,  $x$ -Achse, so wird die auf ein Flächenelement wirkende Kraft, bezogen auf den Staudruck,

$$d^2\mathfrak{B} = \frac{p - p_0}{\rho U^2/2} (-\cos \psi \mathbf{i} - \sin \psi \mathbf{j} + r' \mathbf{k}) r dx d\psi.$$

Durch Integration über  $\psi$  von 0 bis  $2\pi$  erhalten wir die Kraft, die auf eine Scheibe des Körpers der Dicke  $dx$  ausgeübt wird; dividieren wir durch  $dx$ , so ist  $d\mathfrak{B}/dx$  die Kraft pro Längeneinheit des Körpers. Die  $\mathbf{k}$ -Komponente gibt den *Widerstand*, die  $\mathbf{i}$ -Komponente den *Auftrieb*. Es folgt für den *Widerstand*:

$$\frac{dR}{dx} = 2\pi r r' \frac{2 \varphi_x}{U} \quad (4, 2)$$

und für den *Auftrieb*

$$\frac{d\bar{W}}{dx} = \frac{2}{U} F_x \int_0^{2\pi} \cos^2 \psi d\psi = \frac{2r}{U} F_x \pi. \quad (4, 3)$$

Im allgemeinen bezieht man beide Werte auf einen geeigneten Querschnitt (zum Beispiel größten Querschnitt) und erhält den Widerstands- und Auftriebsbeiwert, indem man  $\bar{W}$  noch nach dem Anstellwinkel  $\vartheta$  differenziert. Die Funktion

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{d\bar{W}}{dx} = \frac{2r \pi}{U \sin \vartheta} F_x, \quad (4, 4)$$

als Funktion von  $x$  betrachtet, nennen wir die Auftriebsverteilung des Körpers. Sie ist maßgebend für alle Stabilisierungsprobleme.



ZWEITER TEIL: UNSTETIGKEITEN

Im folgenden sollen einige einfache Anwendungen der Theorie behandelt werden. Die Druck- und Auftriebsverteilung über einem einfachen Rotationskörper wird man wohl besser und schneller nach dem Quellsenken- bzw. Dipolverfahren berechnen<sup>1)</sup>. Das Charakteristikenverfahren dürfte sich besonders bei ringförmigen Körpern oder bei einfachen Rotationskörpern eignen, die zur Stabilisierung mit einem oder mehreren Ringen beliebiger Form versehen sind. Wir wollen drei verschiedene Anordnungen von Ringen behandeln und die Unstetigkeit untersuchen, die durch die Vorderkante des Ringes entsteht.

5. Auftriebsverteilung eines zylindrischen Ringes

Figur 4 zeigt einen Meridianschnitt in der  $(x, y)$ -Ebene durch den zylindrischen Ring, der unter dem Winkel  $\vartheta$  mit der Geschwindigkeit  $U$  angeblasen wird. In Figur 5 haben wir den unteren Teil des Schnittes vergrößert gezeichnet und ein Netz von Charakteristiken für die Machsche Zahl  $M = 1,5$  darauf gelegt.

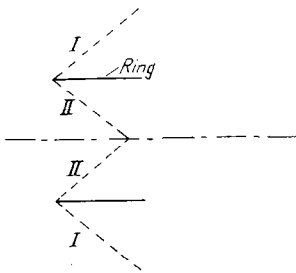


Fig. 4

Zylindrischer Ring mit den Unstetigkeitsflächen.

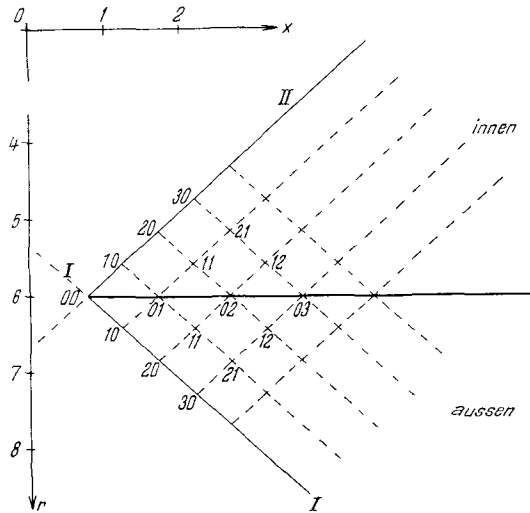


Fig. 5

Charakteristikenchema für freien Ring.

Die Gitterpunkte des Netzes haben wir so numeriert, wie es zur Durchführung des Verfahrens vorteilhaft ist. Durch den vordersten Ringpunkt (00) geht

<sup>1)</sup> Vgl. etwa: R. SAUER, *Theoretische Einführung in die Gasdynamik* (Springer, Berlin 1943). - R. COURANT und K. O. FRIEDRICHS, *Supersonic Flow and Shock Waves* (Interscience Publishers, New York 1948). - A. FERRI, *Elements of Aerodynamics of Supersonic Flows* (Macmillan, New York 1949).

die Machsche Linie I nach außen und II nach innen, dabei gehört nach der Bezeichnung von Ziffer 3 die Linie I zur ersten und II zur zweiten Schar. In dem Gebiet links von I und II ist die Strömung ungestört. Das Potential  $F$  ist in diesem Gebiet gegeben durch [vgl. (1, 8)]

$$\cos \vartheta F(x, y, z) = (U \sin \vartheta) y \quad \text{oder} \quad \cos \vartheta F(x, r) = (U \sin \vartheta) r \cos \vartheta .$$

Daher wird

$$F(x, r) = U \sin \vartheta r; \quad F_x = 0; \quad F_r = U \sin \vartheta . \quad (5, 1)$$

Aus (2, 4) folgt daraus mit  $M = 1,5$

$$F_1 = + 0,667 U \sin \vartheta; \quad F_2 = - 0,667 U \sin \vartheta . \quad (5, 2)$$

Beim Auftreffen der Strömung auf die Ringkante bei (00) tritt eine Unstetigkeit auf, die sich längs der Charakteristik I nach außen und längs II nach innen fortpflanzt. Zunächst muß an der Ringwand die Randbedingung (3, 3) erfüllt sein. Da in unserem Beispiel  $r' = 0$  ist, folgt:

$$F_1 = F_2 \quad (\text{am Rand}) . \quad (5, 3)$$

Diese Beziehung gilt rechts von (00). Auf der Machschen Linie I, die sich von links dem Punkt (00) nähert, ist die Änderung von  $F_2$  nach (2, 8) bestimmt. Sie erfährt keine Störung durch den Ring. An der Innenseite bei (00) gilt daher

$$F_2 = F_1 = -0,667 U \sin \vartheta \quad [\text{innen bei (00)}] . \quad (5, 4)$$

Entsprechend bleibt  $F_1$  auf der Machschen Linie II, die von links nach (00) führt, ungestört, man hat also

$$F_1 = F_2 = +0,667 U \sin \vartheta \quad [\text{außen bei (00)}] . \quad (5, 5)$$

Längs der Störungslinie II bleibt überall  $F_2 = -0,667 U \sin \vartheta$  ungestört, das heißt *die Ableitung  $F_2$  bleibt beim Überschreiten der Linie II stetig*. Wir wollen zeigen, daß auch  $F$  stetig bleibt. Wir können  $F$  als Integral über  $F_2$  längs der Linie II ansehen. Daraus folgt die Stetigkeit von  $F$  aus der Stetigkeit von  $F_2$ . Ebensogut können wir über  $F_1$  längs einer Charakteristik der ersten Schar von links bis an ihren Schnitt mit II integrieren. Da  $F_1$  links von II stetig ist, bleibt auch  $F$  stetig und hat längs II den ungestörten Wert. Längs der Störinie II ist daher  $F$  ungestört ( $F = U \sin \vartheta r$ ),  $F_2$  ungestört ( $F_2 = -0,667 U \sin \vartheta$ ), dagegen  $F_1$  unstetig. Da aber  $F_1$  nach (5, 4) bei (00) bekannt ist, läßt sich die Fortpflanzung der Störung von  $F_1$  längs II nach (2, 7) berechnen. In der zweiten Spalte der Tabelle 1 sind die Werte von  $r$ ,  $F$ ,  $F_1$ ,  $F_2$  für die Punkte (00) bis (30) der Linie II zusammengestellt. Dazu ist noch eine Zahlenreihe  $A$

Tabelle 1

Schema zur Berechnung der Strömung um einen freien Ring  
 $F, F_1, F_2, d\bar{c}/dx$  stets dividiert durch  $U \sin \vartheta$  ( $M = 1,5$ )

Innen		0	0	1	2	3
3	$r$	4,725	4,725			
	$F$	4,725	4,725			
	$F_1$	0,667	-0,825			
	$F_2$	-0,667	-0,667			
	$\Delta$		-0,067			
2	$r$	5,150	5,150	5,150		
	$F$	5,150	5,150	4,201		
	$F_1$	0,667	-0,766	-0,803		
	$F_2$	-0,667	-0,667	-0,734		
	$\Delta$		-0,059	-0,048		
1	$r$	5,575	5,575	5,575	5,575	
	$F$	5,575	5,575	4,661	3,684	
	$F_1$	0,667	-0,714	-0,759	-0,803	
	$F_2$	-0,667	-0,667	-0,726	-0,782	
	$\Delta$		-0,052	-0,044	-0,034	
0	$r$	6	6	6	6	6
	$F$	6	6	5,119	4,173	
	$F_1$	0,667	-0,667	-0,719	-0,770	-0,816
	$F_2$	-0,667	-0,667	-0,719	-0,770	-0,816
	$\Delta$		-0,047	-0,040	-0,033	
	$d\bar{c}/dx$		-0,298	-0,322	-0,345	-0,366
Außen		0	0	1	2	3
0	$r$	6	6	6	6	6
	$F$	6	6	6,822	7,586	
	$F_1$	0,667	0,667	0,624	0,580	0,537
	$F_2$	-0,667	0,667	0,624	0,580	0,537
	$\Delta$		-0,047	-0,054	-0,060	
	$d\bar{c}/dx$		0,298	0,279	0,260	0,240
1	$r$	6,425	6,425	6,425	6,425	
	$F$	6,425	6,425	7,219	7,953	
	$F_1$	0,667	0,667	0,628	0,589	
	$F_2$	-0,667	0,620	0,570	0,520	
	$\Delta$		-0,043	-0,048	-0,052	
2	$r$	6,850	6,850	6,850		
	$F$	6,850	6,850	7,616		
	$F_1$	0,667	0,667	0,632		
	$F_2$	-0,667	0,577	0,522		
	$\Delta$		-0,039	-0,043		
3	$r$	7,275	7,275			
	$F$	7,275	7,275			
	$F_1$	0,667	0,667			
	$F_2$	-0,667	0,538			
	$\Delta$		-0,035			
	$x$		0	0,95	1,90	2,85

angegeben; sie enthält die Werte  $\Delta F_1$ ,  $\Delta F_2$ , die für gleiche  $\Delta s$  nach (2, 7), (2, 8) in jedem Punkt einander gleich sind. Ganz analog liegen die Verhältnisse längs I an der Außenseite. Dabei empfiehlt es sich, die Zahlen für die Störlinie zweimal aufzuschreiben, zuerst für den ungestörten, dann für den gestörten Zustand. Dann kann man die Unstetigkeiten gut in der Zahlentafel verfolgen.

Nach diesen Vorarbeiten sind alle Voraussetzungen erfüllt, und man kann das unter den Ziffern 2 und 3 beschriebene Verfahren durchführen. Die Zahlentafel 1 zeigt die Anordnung der Rechnung für einige Intervalle. Wir haben dabei den Durchmesser des Zylinders mit 12 angenommen.

Wenn die Werte  $F_1$ ,  $F_2$  innen und außen längs der Wand des Zylinders berechnet sind, bestimmt man nach (2, 5)  $F_x$  und erhält nach (4, 4) sofort die Auftriebsverteilung. Figur 6 zeigt die Verteilung des Auftriebsbeiwertes

$$\frac{d\bar{c}}{dx} = \frac{1}{R^2 \pi \sin \theta} \cdot \frac{d\bar{W}}{dx}$$

für die Außenseite, die Innenseite und den Gesamtauftrieb, bezogen auf den Querschnitt  $R^2\pi$  des Ringes.

Wenn die Störungscharakteristik (II in Figur 5) die Rotationsachse trifft, gibt es eine neue Unstetigkeit, auf die wir hier nicht eingehen wollen.

## 6. Zylindrischer Ring über Rotationskörper

Ein unendlich langer Drehzylinder erfährt bekanntlich keinen Auftrieb in einer idealen Gasströmung. Es sei etwa ein Rotationskörper gegeben, der vorn eine ogivale Spitze hat, die in einen Zylinder übergeht. Ist der zylindrische Teil hinreichend lang, so wird sich gegen sein Ende die von der Spitze verursachte Störung ausgeglichen haben. Am Ende des Zylinders wird sich die Strömung annähernd so wie bei einem unendlich langen Zylinder verhalten. Ein solcher zylindrischer Körper mit ogivaler Spitze ist nicht stabil. Man hat mehrfach versucht, ihn durch Überziehen eines zylindrischen Ringes über das Zylinderheck zu stabilisieren. Wir wollen den Auftrieb berechnen, der durch den Ring bewirkt wird. In Figur 7 ist die Anordnung der Körper skizziert. Durch die Vorderkante des Ringes sind die Machschen Linien I und II gezeichnet. Links davon herrscht die Strömung des unendlichen Zylinders. Längs der Linien I und II tritt eine (unstetige) Störung ein. Von besonderem Interesse ist das Verhalten der nach innen laufenden Störung, die mehrfache Reflexionen an den Wänden erfährt. Der in dem Gebiet zwischen Rotationskörper und Ring gezeichnete charakteristische Streckenzug stellt eine Unstetigkeitslinie dar. Beim Überschreiten der Linie ist entweder  $F_1$  oder  $F_2$  unstetig.

Wir wollen aber das Verfahren in der Reihenfolge erläutern, wie es durchzuführen ist. Zuerst müssen wir uns die Funktionen  $F$ ,  $F_1$ ,  $F_2$  im ungestörten Teil der Strömung links von I, II verschaffen; dabei interessiert uns nur der unsymmetrische Teil.

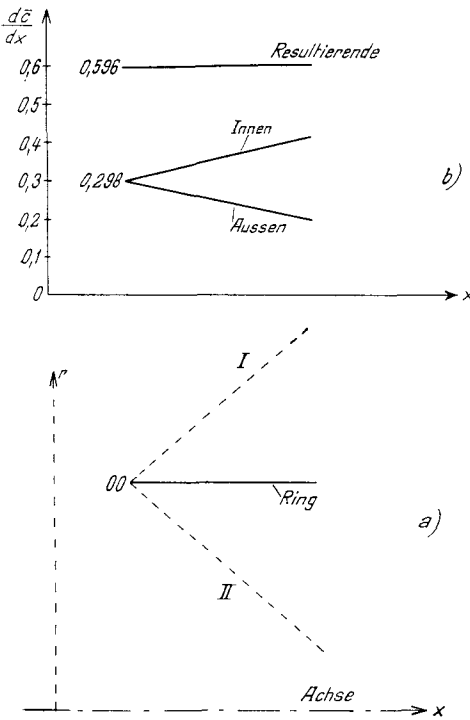


Fig. 6  
Auftriebsverteilung am freien Ring.

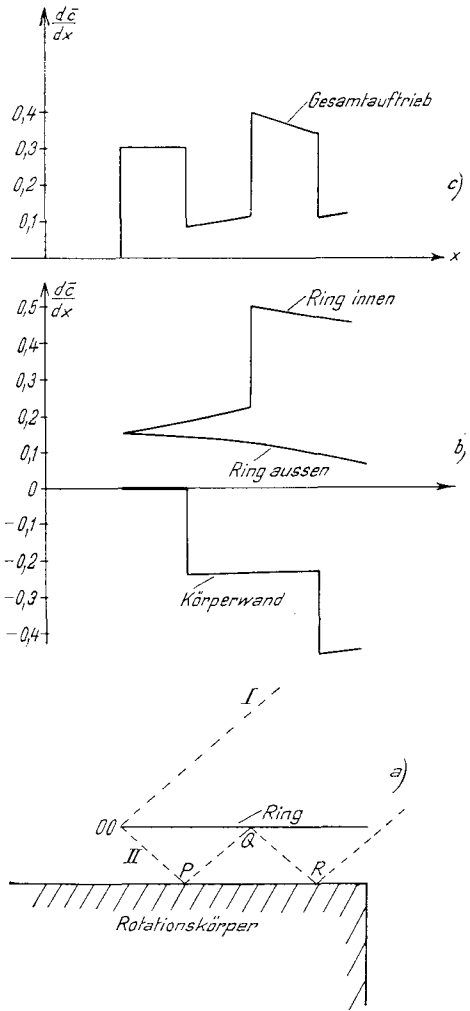


Fig. 7  
Auftriebsverteilung für Ring über Zylinder.

Für einen unendlich langen Zylinder läßt sich die Potentialfunktion  $F$  leicht angeben. Die Strömung um den Zylinder muß ungeändert bleiben, wenn man den Zylinder in sich, das heißt in der  $x$ -Richtung verschiebt. Deshalb ist  $F$  unabhängig von  $x$ , also  $F_x = 0$ . Dann geht Gleichung (2, 1) in die gewöhnliche Differentialgleichung über

$$F_{rr} + \frac{1}{r} F_r - \frac{1}{r^2} F = 0 \tag{6, 1}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$F = A r + \frac{B}{r}; \quad F_r = A - \frac{B}{r^2}.$$

Die Konstanten  $A, B$  sind so zu bestimmen, daß am Rande des Zylinders (für  $r = \bar{r}$ , wenn  $\bar{r}$  Zylinderradius ist)

$$F_r \Big|_{r=\bar{r}} = 0 \quad (6, 2)$$

ist; denn die Strömung muß tangential zur Wand verlaufen. Ferner muß für  $r \rightarrow \infty$  der Geschwindigkeitsvektor der Anströmung entsprechen, das heißt nach (5, 1)

$$F_r \Big|_{r \rightarrow \infty} = U \sin \vartheta. \quad (6, 3)$$

Daraus folgt schließlich:

$$F = U \sin \vartheta \left( r + \frac{\bar{r}^2}{r} \right) \quad (6, 4)$$

und dazu

$$F_x = 0; \quad F_r = U \sin \vartheta \left( 1 - \frac{\bar{r}^2}{r^2} \right). \quad (6, 5)$$

Aus (2, 4) folgen sofort  $F_1$  und  $F_2$ :

$$F_1 = \frac{U \sin \vartheta}{M} \left( 1 - \frac{\bar{r}^2}{r^2} \right); \quad F_2 = - \frac{U \sin \vartheta}{M} \left( 1 - \frac{\bar{r}^2}{r^2} \right). \quad (6, 6)$$

Auf den *Unstetigkeitslinien* I und II ist der Vorgang derselbe wie im vorigen Abschnitt. Auf der Linie I bleiben  $F$  und  $F_1$  ungestört (also stetig) und haben die Werte (6, 4) und (6, 6). Dagegen erfährt  $F_2$  bei (00) (Figur 7a) eine Störung, derart, daß die Randbedingung (3, 3) erfüllt ist. In unserem Falle ( $dr/dx = 0$ ) wird

$$F_2 \Big|_{00} = F_1 \Big|_{00} = \frac{U \sin \vartheta}{M} \left( 1 - \frac{\bar{r}^2}{R^2} \right) \quad (\text{für den Außenbereich}),$$

wenn  $R$  der Ringradius ist. Die Änderung von  $F_2$  längs I ist wieder durch (2, 8) bestimmt. Dabei hat man in (2, 8) für  $F_1$  und  $F$  längs I die ungestörten Werte gemäß (6, 6) und (6, 4) einzusetzen. Damit kennt man längs I alle Größen und kann das Verfahren durchführen.

Ganz entsprechend bleiben im Innenbereich  $F$  und  $F_2$  längs II erhalten nach (6, 4) und (6, 6); dagegen ist  $F_1$  unstetig und hat bei (00) den Wert

$$F_1 \Big|_{00} = F_2 \Big|_{00} = - \frac{U \sin \vartheta}{M} \left( 1 - \frac{\bar{r}^2}{R^2} \right) \quad (\text{für den Innenbereich}).$$

Die Änderung von  $F_1$  längs II erfolgt nach (2, 7). Jetzt läßt sich nach dem Charakteristikenverfahren der Ziffern 2 und 3  $F, F_1, F_2$  im Bereich des Dreiecks (00),  $P, Q$  berechnen. Die Linie  $PQ$  ist wieder eine Unstetigkeitslinie. Da

sie zur Schar I der Charakteristiken gehört, bleiben  $F$ ,  $F_1$  stetig,  $F_2$  wird unstetig.  $F_2$  ist aber in  $P$  aus der Randbedingung bekannt, so daß seine Änderung längs  $PQ$  aus (2, 8) berechnet wird. Die Berechnung geschieht daher folgendermaßen: Man bestimmt zunächst in  $P$  und auf  $PQ$  die Funktionen  $F$ ,  $F_1$ ,  $F_2$  so, als ob die Wand bei  $P$  nicht vorhanden wäre, also genau nach dem Charakteristikenverfahren von Ziffer 2. Dann wird die Störung berücksichtigt, die durch die Wand bei  $P$  entsteht. Längs  $II$  kommend, kennt man in  $P$  die Größe  $F_1$  und erhält aus der Randbedingung  $F_2$ . Längs  $PQ$  behält man  $F$ ,  $F_1$  aus der ersten Rechnung bei und bestimmt damit  $F_2$  nach (2, 8). In derselben Weise verfährt man auf  $QR$  usw. Die Durchführung bereitet keine Schwierigkeiten und verlangt wenig Aufwand (siehe Tabelle 2).

Es sei bemerkt, daß es im allgemeinen nicht nötig ist, die Unstetigkeiten längs der Linien  $PQR$  besonders zu beachten. Man kann das Verfahren der Ziffern 2 und 3 im ganzen Innengebiet hinter der Störlinie  $II$  anwenden. Der dadurch entstehende Fehler bleibt nach meinen Erfahrungen innerhalb der üblichen Rechengenauigkeit, wenn die Intervalle klein genug sind.

In Figur 7b sind die Auftriebsverteilungen, das heißt die Funktionen  $d\bar{c}/dx$ , bezogen auf den Querschnitt des Ringes, für die einzelnen Flächen aufgezeichnet. An der *Oberfläche des Zylinders* herrscht, wie beim unendlich langen Zylinder, zunächst der Auftrieb 0 bis zum Punkt  $P$ . Bei  $P$  entsteht ein *Abtrieb*, der bis  $R$  fast konstant bleibt und bei  $R$  nochmals beträchtlich abfällt. An der *Außenseite des Ringes* entsteht ein Auftrieb, der langsam nach hinten abklingt. An der *Innenseite des Ringes* beginnt die Auftriebskurve im gleichen Punkt wie an der Außenseite (da innen und außen  $dr/dx = 0$  sind), dann steigt der Auftrieb allmählich an bis zum Punkt  $Q$ . Hier springt er plötzlich auf etwa den dreifachen Wert.

Durch Vergleich mit Figur 6 erkennt man, daß der Auftrieb, der an der Vorderkante des Ringes entsteht, infolge des eingeschobenen Zylinders nur etwa halb so groß ist wie derjenige des freien Ringes von Figur 6.

Figur 7c zeigt schließlich die resultierende Auftriebsverteilung, die durch die Strömung auf die Kombination Zylinder mit Ring übertragen wird. Der Gesamtauftrieb ist nur ein Bruchteil desjenigen, den der frei stehende Ring erfährt. Das ist zum Teil durch die gestörte Anströmung, zum andern Teil durch die Reflexion der Störung an den Rändern bedingt. Der Rechnung lag ein Verhältnis Ringradius  $R$  zu Zylinderradius  $\bar{r}$  von

$$R : \bar{r} = 1,385$$

zugrunde.

## 7. Zylindrischer Ring über konischem Zapfen

Der gleiche zylindrische Ring kann einen wesentlich größeren Auftrieb erzeugen, wenn man die Anordnung etwas abändert. Dem zylindrischen Rota-





tionskörper geben wir ein konisches Heck, dessen Verjüngungswinkel wir so wählen, daß die Strömung gut folgen kann (ca.  $6,7^\circ$ ). Am Ende des Konus bringen wir den Ring an, und zwar so, daß die durch die Vorderkante [Punkt (00) in Figur 8a] gehende Machsche Linie nicht mehr am Rotationskörper reflektiert wird. Das Ende des konischen Teiles ist wieder zylindrisch ausgebildet, wie Figur 8a zeigt. Bei dieser Anordnung geht durch den Anfangspunkt  $T$  des konischen Teiles die erste Störlinie ( $I^0$ ). Durch die Vorderkante (00) des Ringes geht nach außen die Störlinie  $I^1$  und nach innen II. Schließlich geht durch das Ende des Konus ( $S$ ) noch eine Störlinie  $I^3$ . Die Durchführung

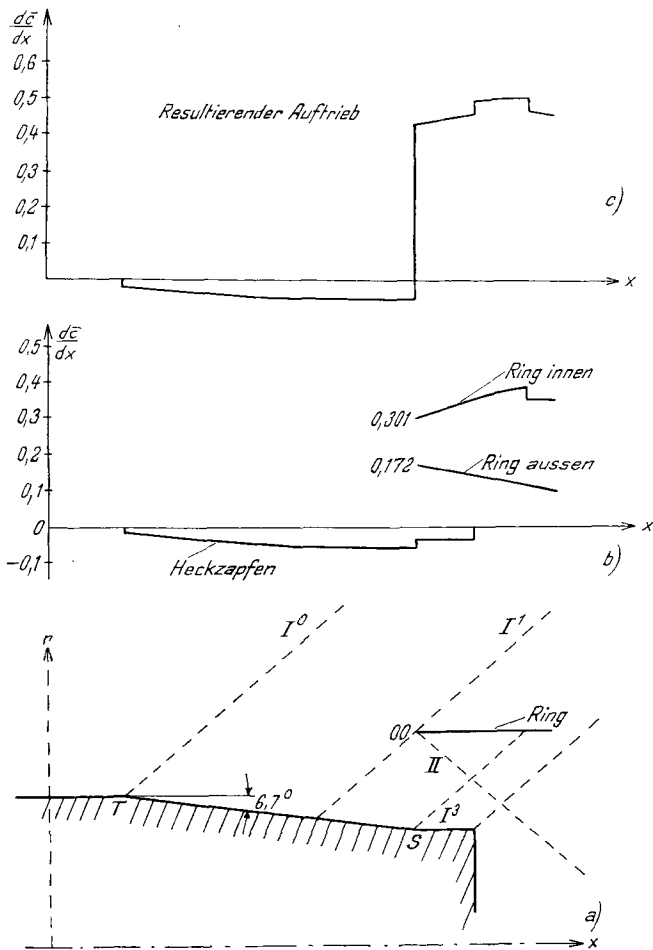


Fig. 8

Auftriebsverteilung für Ring über konischem Zapfen.

der Berechnung bietet nichts Neues. Sie verläuft genau wie im vorigen Abschnitt.

Das Ergebnis ist jedoch wesentlich verschieden. Wir wollen die in Figur 8*b* eingezeichneten Auftriebsverteilungen mit denen von Figur 7 vergleichen. Zunächst entsteht längs des konischen Zapfens ein kleiner Abtrieb, der über dem Punkt *S* einen Sprung hat. Die *Außenseite des Ringes* erfährt einen Auftrieb, der demjenigen von Figur 7*b* ähnlich ist. Er liegt aber höher; der Anfangswert ist 0,17, gegenüber 0,15 in Figur 7*a*. Besonders groß ist der Unterschied an der *Innenseite des Ringes*. Hier liegt der Anfangswert bei 0,30 im Gegensatz zu 0,15 bei Figur 7*b*. Dann steigt die Kurve der Figur 8*b* gleichmäßig an bis zur Störlinie  $I^3$ , wo eine kleine Unstetigkeit erscheint. Der Gesamtauftrieb des Ringes in der Anordnung 8*a* ist also beträchtlich größer als bei 7*a*. Wählt man etwa einen Ring von ca. 5 cm Länge bei  $R = 6$  cm, so ist der Auftrieb bei der Anordnung 8*a* ein Mehrfaches von demjenigen in 7*a*. Aber auch bei dieser günstigen Anordnung bleibt der Auftrieb unter demjenigen des freien Zylinder-ringes (Figur 5).

## 8. Beliebiger Ring über beliebigem Körper

Zum Schluß sei noch die Anwendung des Verfahrens auf allgemeinere Probleme erläutert. Wir betrachten einen beliebigen, jedoch schlanken und vorn spitzen Rotationskörper, über dessen Ende ein Ring von beliebigem Profil geschoben ist (Figur 1). Dabei muß das Profil des Ringes schlank und vorn scharfkantig sein. Zur Berechnung der Strömung um ein solches Gebilde empfiehlt sich folgender Vorgang: Man legt durch die Vorderkante des Ringes die Machsche Linie *I* und bestimmt ihren Schnittpunkt *B* mit dem Meridian des Körpers und *A* mit der Rotationsachse. Dann berechnet man die Strömung um den Rotationskörper von der Spitze *S* bis zum Parallelkreis durch *B* mittels einer Quellsenkenverteilung für den symmetrischen Teil und einer Dipolverteilung für den unsymmetrischen Teil. Die Quellen und Dipole verteilen sich auf dem Stück *SA* der Achse. Zur numerischen Bestimmung dieser Quell- und Dipolverteilungen sind verschiedene Verfahren entwickelt, die im wesentlichen auf den Untersuchungen von VON KÁRMÁN und MOORE<sup>1)</sup> und VON KÁRMÁN und TSIEN<sup>2)</sup> aufbauen und in den neueren Lehrbüchern eingehend beschrieben sind. Kennt man diese Verteilungen, so kennt man auch die Funktionen und  $F(1, 8)$  längs der Machschen Linie *I* durch (*A*). Von hier aus beginnt man mit dem Charakteristikenverfahren, welches sich in der gleichen Weise anwenden läßt wie unter Ziffer 6 oder 7. Man sieht unmittelbar, daß auch das Anbringen mehrerer Ringe keine neuen Schwierigkeiten bringt. Natürlich besteht die Möglichkeit, das Charakteristikenverfahren von der Spitze beginnend auch für den

<sup>1)</sup> VON KÁRMÁN und MOORE, Am. Soc. Mech. Eng. 54, 303 (1932).

<sup>2)</sup> TSIEN und SHUE-SHEN, J. Aeron. Sci. 5, 480-483 (1938).

Rotationskörper zu benützen, aber der Zeitaufwand dürfte etwas größer sein als beim Quell-Dipol-Verfahren. Der Vorteil des Charakteristikenverfahrens tritt besonders bei den Ringen und komplizierteren Anordnungen hervor.

### Summary

The supersonic flow of an ideal gas past an inclined slender body of revolution, can be approximately determined by linearization of the differential equations. For this purpose generally a distribution of sources, sinks and doublets is taken (VON KÁRMÁN, MOORE, TSIEN). For a composed body of revolution having a central body and several rings, this procedure is cumbersome. It is shown that such flows can very simply be determined by means of a characteristics-method. Surfaces of discontinuity and their multiple reflexion on the walls do not present much difficulty. The method is illustrated by some simple examples. It is to be mentioned that the method can be extended also to the general, not linearized, differential equations.

(Eingegangen: 26. 12. 1950.)

---

## Zur Theorie und Berechnung des elektrostatischen Durchgriffs der ebenen und zylindrischen Dreipolröhre im Falle zweidimensionaler Potentialverhältnisse

### 1. Mitteilung

VON MAX LANDSBERG, Dresden<sup>1)</sup>

Einen guten Einblick in die Feldverhältnisse der Elektrodensysteme der gebräuchlichen Vakuumröhren mit einem oder auch mit mehreren Gittern liefern schon die entsprechenden Untersuchungen für die verhältnismäßig einfach aufgebaute Platten- und Zylinderröhre. Derartige Untersuchungen sind sowohl experimentell mit Hilfe des elektrolytischen Trogs und des Gummimembranapparates [1], [2]<sup>2)</sup> als auch theoretisch durchgeführt worden. Im letzten Fall ist die Berechnung der Röhrenkapazitäten und des aus ihnen sich ergebenden elektrostatischen Durchgriffs von grundlegender Bedeutung. Über den gegenwärtigen Stand der Durchgriffsberechnung für die beiden genannten Systeme berichtet ausführlich eine Arbeit von I. RUNGE [3]. Hier sind alle wichtigen Formeln zusammengestellt, die aber ausnahmslos, was das ebene und zylindrische System (mit Stabgitter) anbetrifft, nicht nur zweidimensionale Verhältnisse, sondern auch noch weitere Einschränkungen hinsichtlich der Verhältnisse Gitterdrahradius zu Gitter-Anoden-Abstand usw. voraussetzen.

---

<sup>1)</sup> Technische Hochschule Dresden.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis auf Seite 393.