

# MÉTHODES ITÉRATIVES POUR LES ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES NON LINÉAIRES DE TYPE MONOTONE

MOÏSE SIBONY

Faculté des Sciences - Laboratoire de Mathématiques Tours (France)  
et Département d'Analyse Numérique. Faculté des Sciences de Paris.

SUMMARY - Let  $V$  be a reflexive Real Banach space and let  $A$  be an operator (not necessarily linear) from  $V$  into its dual  $V'$ . We shall suppose that  $X$  is a closed convex subset of  $V$ . We shall denote by  $(,)$  the duality relation between  $V$  and  $V'$ . For a fixed element  $f \in V'$  we shall try to determine  $u \in X$  such that

$$(1) \quad (Au, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in X.$$

Problems of type (1) occur in optimal control theory and contain a fairly large class of type of linear and non linear partial differential equations (and inequations).

We use certain iterative processes to solve (1).

The main method is based on the calculation of the operator  $P_X$  (the projector on the closed convex set  $X$ )

We consider two cases:

i) the operator  $P_X$  is accessible, in which case we indicate how to obtain a numerical solution.

ii) the operator  $P_X$  is not accessible, in which case we indicate a variety of methods to approximate the solution.

## Introduction.

Soit  $V$  un espace de Banach réel réflexif,  $A$  un opérateur non nécessairement linéaire de  $V$  dans son dual  $V'$ . On se donne un élément fixe

$f \in V'$  et on cherche à résoudre dans  $V$  l'équation

$$(1) \quad Au = f.$$

On se donne maintenant un convexe fermé  $X$  de  $V$ . On désigne par  $(,)$  la dualité entre  $V$  et  $V'$ .

Plus généralement on cherche  $u \in X$  solution du problème

$$(2) \quad (Au, v - u) \geq (f, v - u) \quad v \in X.$$

Si  $X = V$  on retrouve l'équation (1) (cf [3], [14]).

Par ailleurs, minimiser une fonctionnelle  $F$  sur le convexe  $X$  est un problème qui peut se ramener à résoudre une inégalité de la forme (2) (cf. [11] et [14]).

Des problèmes du genre (1) et (2) interviennent en théorie du contrôle optimal et contiennent une classe assez large d'équation et inéquations aux dérivées partielles linéaires et non linéaires.

Dans [14] nous assurons l'existence et l'unicité de  $u \in X$  solution de (2) et nous élargissons le cadre de l'inéquation (2) aux problèmes d'optimisation (cf aussi [13]).

Par ailleurs nous donnons toujours dans [14] de nombreux procédés systématiques pour l'approximation de  $u$  solution (1) et (2).

Ensuite nous approchons l'espace  $V$  par des espaces de dimension finie  $V_h$ ; ce qui revient à discrétiser le problème.

Il reste alors à donner des méthodes constructives permettant de résoudre le nouveau problème en dimension finie.

On utilise pour cela un procédé itératif valable d'ailleurs en dimension infinie. Il est basé sur le calcul de  $P_X$  (projection sur le convexe fermé  $X$ ).

Nous distinguons alors deux cas :

#### 1er cas

L'opérateur  $P_X$  est accessible. Dans ce cas le calcul optimal de certains paramètres, combiné éventuellement avec un changement de norme permet d'aboutir à la solution numérique au bout de quelques itérations seulement.

#### 2ème cas

L'opérateur  $P_X$  est accessible.

Nous introduisons alors plusieurs méthodes.

1 — On peut supprimer les contraintes  $X$  par « pénalisation » ; adaptation d'une idée de Courant (cf. théorème 6.1 de [14] et bibliographie).

2 — On peut « éclater » le convexe  $X = \bigcap_{i=1}^n X_i$  en plusieurs  $X_i$  en adaptant une méthode de J. L. Lions et R. Temam (cf. théorème 7.1 de [14] et bibliographie).

- 3 — On « mélange » 1 — et 2 — (cf. le paragraphe 1-7 de [14]).
- 4 — On peut transformer  $A$  et  $X$  par changement de variable.
- 5 — On peut aussi calculer  $P_X$  par approximation.
- 6 — Enfin si l'opérateur  $A$  est un gradient, (1) et (2) équivalent à un problème de minimisation d'une fonctionnelle (cf. [14] § I-2, I-3); problème que l'on peut résoudre par une méthode directe de minimisation, variantes des méthodes des variations locales de Čenausko et Moiseiev et nettement plus opérationnelles.

Dans le chapitre I nous exposons les méthodes théoriques d'approximation de la solution des problèmes (1) (2).

Aux chapitres II et III nous mettons ces idées en application jusqu'aux résultats numériques sur de nombreux exemples d'équations d'inéquations aux dérivées partielles et problèmes d'optimisation.

Le plan est le suivant :

## I — Quelques méthodes générales d'approximation.

### I — 1. Une méthode itérative pour inégalité variationnelles.

- 1.1 — Itérations avec paramètres fixes. P. 69
- 1.2 — Itérations où le paramètre  $\varrho$  est variable. P. 72
- 1.3 — Itérations avec changement de paramètre et de norme ;  
accélération de la convergence. P. 76

### I — 2. Méthode des changements de variables. P. 77

### I — 3. Méthodes itératives régularisantes. P. 83

- 3.1 — Méthode I : Régularisation et passage à la limite. P. 84
- 3.2 — Méthode II : Méthode itérative régularisante. P. 87
- 3.3 — Méthode III : Méthode mixte. P. 89

## II — Equation aux dérivées partielles non linéaires et problème d'optimisation sur l'espace entier.

### II — 1. Problème 1. P. 93

- Résultats numériques du problème 1. P. 98

### II — 2. Problème 2. P. 101

- Influence du paramètre  $\varepsilon$ . P. 102
- Influence du paramètre  $\varrho$ . P. 103
- Accélération de la convergence. P. 109

II — 3. <i>Problème 3.</i>	P. 113
1ère méthode : méthode de décomposition de l'opérateur $A_h$	P. 114
2ème méthode : méthode itératives directes.	P. 120
II — 4. <i>Problème 4 : régularisation elliptique.</i>	P. 126
II — 5. <i>Problème 5 :</i>	P. 129
— Une nouvelle estimation du paramètre $\rho$ .	P. 130
II — 6. <i>Problème 6.</i>	P. 132
III — <i>Inéquations aux dérivées partielles non linéaires et problème d'optimisation sur un convexe ferme.</i>	P. 136
III — 1. <i>Problème 1 : Le convexe <math>X</math> est une boule.</i>	P. 138
— Résultats numériques : un exemple unidimensionnel.	P. 141
— Résultats numériques : Exemple bidimensionnel.	P. 144
III — 2. <i>Problème 2 : Régularisation elliptique.</i>	P. 146
III — 3. <i>Problème 3 : Le convexe <math>X</math> est un cône.</i>	P. 147
— 1ère expérience numérique.	P. 152
— 2ème expérience numérique.	P. 154
— 3ème expérience numérique ; méthode de pénalisation.	P. 156
III — 4. <i>Problème 4 :</i>	P. 160
Un exemple unidimensionnel : $X$ est un convexe sur lequel on ne sait pas projeter directement.	
— 1ère méthode.	P. 161
— 2ème méthode.	P. 164
— Résultats numériques.	P. 166
III — 5. <i>Un problème unidimensionnel : <math>X</math> est un convexe sur lequel on ne sait pas projeter explicitement.</i>	P. 169
III — 6. <i>Résolution d'un problème de mécanique.</i>	P. 177
<i>Résultats numériques</i>	P. 179

## I. — Quelques méthodes générales d'approximation.

### I — 1. *Une méthode itérative pour inégalités variationnelles.*

Soit  $\mathcal{H}$  un Hilbert sur  $\mathbb{R}$  muni du produit scalaire  $(,)$  et de la norme  $\| \cdot \|$ . Soit  $X$  un convexe fermé de  $\mathcal{H}$  contenant l'origine. On se propose de

résoudre par une méthode itérative l'inéquation :

$$(1.1) \quad (Au, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in X,$$

pour  $f$  donné dans  $\mathcal{H}'$

où  $A$  est un opérateur non nécessairement linéaire de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{H}'$ .

Dans le cas où l'opérateur  $A$  applique un banach  $V$  dans son dual, on se ramène après discrétisation à une inégalité de la forme :

$$(1.2) \quad (A_h u_h, v_h - u_h)_h \geq (f_h, v_h - u_h)_h \quad \forall v_h \in X_h$$

pour  $f_h$  donné dans  $V_h'$ ;

où  $X_h$  est un convexe fermé d'un espace de dimension fini  $V_h$  associé au paramètre  $h$  de discrétisation. L'espace  $V_h$  est muni du produit scalaire  $(,)_h$  et l'opérateur  $A_h$  applique  $V_h$  dans son dual  $V_h'$ .

Pour effectuer cette discrétisation on se sert du théorème 5.1 de [14] ou d'autres méthodes cf. [1], [6].

L'inégalité (1.2) est alors un cas particulier de (1.1).

Dans de nombreux cas le problème (1.1) est posé dans un hilbert  $\mathcal{H}$  sous espace de

$$H^m(\Omega) = \{u \mid u \in L^2(\Omega), D_i u \in L^2(\Omega) \mid i \mid \leq m\}$$

$\Omega$  étant un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ .

Dans ce cas on peut appliquer directement la méthode itérative qui suit sans passer par l'étape de discrétisation (1.2).

La difficulté pratique de notre méthode est dans le calcul numérique de  $P_X(u)$  quand  $u \notin X$ , où  $P_X$  est l'opérateur de projection sur le convexe  $X$ .

Dans la suite de ce chapitre nous donnons diverses méthodes permettant de résoudre cette difficulté dans de nombreux cas pratiques cf. aussi les paragraphes I-6, I-7 et I-8 de [14]. Dans le paragraphe I-8 en particulier, nous donnons une méthode conduisant au calcul numérique de la projection sur un convexe quelconque de  $\mathbb{R}^n$ .

### 1.1. Itérations avec paramètres fixes.

On se donne une application  $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$  vérifiant

- H1)    i)                     $(Su, v) = (u, Sv) \quad \forall u, v \in \mathcal{H}$
- ii)                 $\exists$  une constante  $\sigma > 0$  telle que  $(Su, u) > \sigma \|u\|^2$ .

Posons  $[u]^2 = (Su, u)$ ; alors  $[u]$  définit sur  $\mathcal{H}$  une norme équivalente à  $\|\cdot\|$ .

On suppose que l'opérateur  $A$  vérifie l'hypothèse

- H2) i)  $(Au - Av, u - v) \geq k[u - v]^2 \forall u, v \in \mathcal{H}, k > 0.$   
 ii)  $\forall N$  constante positive  $\exists$  une constante  $C(N) > 0$  telle que  $\forall u, v \in \mathcal{H}$  avec  $[u] \leq N, [v] \leq N$  alors  
 $(Au - Av, w) \leq C(N)[u - v][w] \forall w \in \mathcal{H}$

LEMME 1.1. Si  $P_X^S$  est l'opérateur de projection sur  $X$  au sens du produit scalaire  $[u, v] = (Su, v)$  alors toute solution de (1.1) est solution de

$$(1.3) \quad P_X^S(u - \varrho S^{-1}(Au - f)) = u \quad \varrho > 0$$

et réciproquement.

DÉMONSTRATION. Posons  $g = \varrho(Au - f)$  avec  $\varrho > 0$ . Alors (1.3) s'écrit :

$$P_X^S(u - S^{-1}g) = u; \text{ ce qui équivaut à } [-S^{-1}g, v - u] \leq 0 \forall v \in X$$

c'est-à-dire,  $(-g, v - u) \leq 0 \forall v \in X$  ce qui équivaut à  $(Au - f, v - u) \geq 0 \forall v \in X$ . D'où le

THÉORÈME 1.1. On fait les hypothèses H1) et H2) alors

1<sup>o</sup>)  $\forall f \in \mathcal{H}' \exists u \in X$  unique solution de

$$(1.1) \quad (Au, v - u) \geq (f, v - u) \forall v \in X$$

2<sup>o</sup>) La suite  $(u_n)$  définie par l'itération :

$$(1.4) \quad u_{n+1} = P_X^S(u_n - \varrho S^{-1}(Au_n - f))$$

converge fortement dans  $\mathcal{H}$  vers  $u$  pour  $\varrho > 0$  et  $u_0$  convenablement choisis ( $u_0 = 0$  par exemple).

DÉMONSTRATION. 1<sup>o</sup>) L'existence et l'unicité de la solution résultent du théorème 1.1 de [14].

2<sup>o</sup>) Posons  $\varepsilon_{n+1} = u_{n+1} - u$ . Par soustraction de (1.4) et (1.3) on a :

$$\varepsilon_{n+1} = P_X^S(u_n - \varrho S^{-1}(Au_n - f)) - P_X^S(u - \varrho S^{-1}(Au - f))$$

$$[\varepsilon_{n+1}]^2 = [P_X^S(u_n - \varrho S^{-1}(Au_n - f)) - P_X^S(u - \varrho S^{-1}(Au - f))]^2$$

ce qui donne :

$$(1.5) \quad [\varepsilon_{n+1}]^2 \leq [\varepsilon_n - \varrho S^{-1}(Au_n - Au)]^2.$$

Or,

$$[\varepsilon_n - \varrho S^{-1}(Au_n - Au)]^2 = (S\varepsilon_n, \varepsilon_n) - 2\varrho(Au_n - Au, \varepsilon_n) + \varrho^2(Au_n - Au, S^{-1}(Au_n - Au))$$

Donc

$$[\varepsilon_{n+1}]^2 \leq [\varepsilon_n]^2 - 2\varrho(Au_n - Au, \varepsilon_n) + \varrho^2[S^{-1}(Au_n - Au)]^2.$$

Soit  $N_0$  tel que  $[u] \leq \frac{N_0}{2}$ . On fait l'hypothèse de récurrence :

$[\varepsilon_n] = [u_n - u] \leq \frac{N_0}{2}$ , ce qui entraîne,  $[u_n] \leq N_0$  et d'après H2),  $\exists C(N_0) = C$  tel que

$$(Au_n - Au, S^{-1}(Au_n - Au)) \leq C[\varepsilon_n][S^{-1}(Au_n - Au)].$$

De plus H 2) donne

$$(Au_n - Au, \varepsilon_n) \geq k[\varepsilon_n]^2.$$

D'où

$$(1.6) \quad [\varepsilon_{n+1}]^2 \leq (1 - 2\varrho k + \varrho^2 C^2)[\varepsilon_n]^2 = \theta[\varepsilon_n]^2.$$

On choisit  $\varrho > 0$  tel que  $\theta < 1$  et l'hypothèse de récurrence est vérifiée. Par conséquent  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ , ce qui achève la démonstration.

REMARQUE 1.1 1<sup>o</sup>) En particulier la suite  $(u_n)$  converge vers  $u$  pour  $u_0 = 0$

$$N_0 = \frac{2}{k\sqrt{\sigma}} \|f - A(o)\|, \quad C = C(N_0) \text{ et } \varrho \text{ opt} = k/C^2;$$

ce qui donne  $\theta = 1 - \frac{k^2}{C^2} < 1$ .

2<sup>o</sup>) Nous avons alors la majoration à priori de l'erreur :

$$\sqrt{\sigma} \|u_n - u\| \leq [u_n - u] \leq \theta_S^{\frac{n}{2}} [u] \text{ avec } \theta_S = 1 - k/C^2(N).$$

Si on prend  $S = Id$  on a

$$\|u_n - u\| \leq \theta_I^{\frac{n}{2}} \|u\|.$$

On voit alors que la convergence est d'autant plus rapide que le coefficient  $\theta_S$  est loin de l'unité. Un bon choix de l'opérateur  $S$  assure ceci dans la pratique (cf les exemples du chapitre II).

REMARQUE 1.2. On peut décomposer les itérations (1.4) en deux étapes de la manière suivante :

$$(1.7) \quad u^{n+\frac{1}{2}} = P_X^S(u^n - \rho S^{-1}(Au^n - f))$$

$$(1.8) \quad u^{n+1} = u^n - \frac{\alpha_n^2}{\alpha_{n+\frac{1}{2}} - \alpha_n}$$

avec  $\alpha^n = P_X^S(u^n - \rho S^{-1}(Au^n - f)) - u^n$ .

C'est la décomposition d'Aitken. Cette méthode accélère très nettement la convergence (cf. chap. II, problèm 2 ; (2.22), (2.23)).

REMARQUE 1.3. Le théorème 1.1 ci-dessus généralise au cas des inégalités non linéaires le théorème 7.1 de [3]. De plus les itérations (1.4) semblent plus opérationnelles que d'autres méthodes [12], telles que celles du gradient et du gradient projeté [8]. Comme on le verra dans les exemples du chapitre II, les itérations (1.4) ont un domaine d'application très large.

REMARQUE 1.4. Si l'opérateur  $A$  monotone hemicontinu ne vérifie pas l'hypothèse H 2) i) on s'y ramène moyennant une régularisation elliptique cf. [14] théorème 4.1.

Dans la suite de ce paragraphe nous allons définir des itérations où les paramètres  $\rho$  et  $S$  sont variables.

### 1.2. Itérations où le paramètre $\rho$ est variable.

Tout d'abord nous faisons les remarques suivantes :

1°) Dans les itérations (1.4) on peut poser

$$(1.9) \quad \rho = \rho_1 = \frac{(Au_n - Au_{n-1}, u_n - u_{n-1})}{[S^{-1}(Au_n - Au_{n-1})]^2}$$

dans le calcul de  $u_{n+1}$  ou de  $u_{n+1}$  et  $u_{n+2}$  après avoir démarré les calculs avec un paramètre  $\rho$  fixe ou bien après  $n_0$  itérations effectuées avec  $\rho$  fixe donné par la remarque 1.1.



2°) Si on fait  $X = V$  on peut alors résoudre l'équation

(1.10)  $Au = f$  pour  $f$  donné dans  $\mathcal{Q}'$ , avec  $A$  linéaire à l'aide des itérations suivantes :

$$(1.11) \quad u_{n+1} = u_n - \varrho_n (Au_n - f)$$

où  $\varrho_n$  est un paramètre positif que nous allons déterminer.

Posons  $v_n = Au_n - f$ ; il vient :

$$(1.12) \quad v_{n+1} = v_n - \varrho_n Av_n$$

on a alors

$$\|v_{n+1}\|^2 = \|v_n\|^2 - 2\varrho_n (Av_n, v_n) + \varrho_n^2 \|Av_n\|^2$$

et  $\|v_{n+1}\|^2$  est minimum si  $\varrho_n = \frac{(Av_n, v_n)}{\|Av_n\|^2}$ .

Si par exemple  $A$  est un opérateur linéaire sur un Hilbert  $\mathcal{H}$  et tel que

$$(Av_n, v_n) \geq \alpha \|v_n\|^2 \quad \text{et} \quad \|Av_n\| \leq M \|v_n\|$$

on a alors

$$\|v_{n+1}\|^2 \leq \left(1 - \frac{\alpha^2}{c^2}\right) \|v_n\|^2$$

ce qui assure la convergence des itérations (1.11).

3°) Sous les hypothèses du théorème 1.1; on sait que la suite  $(u_n)$  définie par les itérations

$$(1.13) \quad u_{n+1} = u_n - \varrho (Au_n - f)$$

converge vers  $u$  solution de

$$(1.14) \quad Au = f$$

pour  $u_0$  et  $\varrho$  convenables.

La convergence est d'autant plus rapide que le paramètre  $\varrho$  est proche de l'optimalité.

Dans certains cas le paramètre  $\varrho$  fixé calculé à partir de majorations a priori sur l'opérateur ( $\varrho = k/C^2(N)$ ) conduit à un coefficient de contraction  $\theta = 1 - \frac{k^2}{C^2(N)}$  très voisin de l'unité; il faudrait alors plusieurs millions d'itérations pour que le procédé converge ou bien la machine n'est pas

assez sensible tout simplement à ce coefficient  $\theta$  très voisin de 1. On opère alors (avec succès !) de la manière suivante :

1) On se donne  $u_0$  et  $\varrho_1 = 1$  on calcule alors

$$u_1^1 = u_0 - \varrho_1 (Au_0 - f).$$

Si  $\|Au_1^1 - f\| \leq \|Au_0 - f\|$  on fait  $\varrho_2 < \varrho_1$  (par exemple) et on calcule

$$u_1^2 = u_0 - \varrho_2 (Au_0 - f)$$

Si  $\|Au_1^p - f\| \leq \|Au_1^{p-1} - f\|$  on fait  $\varrho_{p+1} < \varrho_p$  et on calcule

$$u_1^{p+1} = u_0 - \varrho_{p+1} (Au_0 - f).$$

2) Pour un certain  $\varrho_p$  on n'a plus d'amélioration. On pose alors

$$u_1 = u_1^p$$

et on reprend le calcul de

$$u_2^p = u_1 - \varrho_p (Au_1 - f)$$

ce qui donne  $u_2 = u_2^p$

et ainsi de suite jusqu'à  $u_n = u_n^p$  pour  $n$  assez grand.

4<sup>0</sup>) Les itérations (1.4) ou (1.13) convergent bien avec un paramètre  $\varrho = k/C^2(N)$  fixe et calculé à partir des hypothèses H2) sur l'opérateur  $A$ . Mais en surestimant ce paramètre  $\varrho$  à partir de sa valeur théorique on obtient une convergence nettement plus rapide ; (au lieu de quelques centaines d'itérations, il suffit parfois de quelques dizaines) cf. les résultats numériques du chap. II.

5<sup>0</sup>) Dans la remarque 1.1, nous avons vu que dans les itérations (1.4) on pouvait prendre :  $u_0 = 0$  et

$$(1.15) \quad \varrho = \varrho_0 = k/C^2(N_0) \text{ avec } N_0 = \frac{2}{k\sqrt{\sigma}} \|f - A(0)\|$$

au lieu de poursuivre les itérations (1.4) avec  $\varrho = \varrho_0$  on peut faire

$$(1.16) \quad \varrho = \varrho_{n+1} = k/C^2(N_{n+1}) \text{ avec } N_{n+1} = [u_n]$$

ou bien (ce qui est justifié expérimentalement), on peut poser dans (1.4)

$$\varrho = \varrho_0 \text{ jusqu'à } n = n_0 \text{ puis poursuivre pour } n > n_0$$

avec

$$\varrho = \varrho_n \text{ donné par (1.16).}$$

6°) Dans la démonstration du théorème 1.1 on a posé

$$(1.17) \quad N_0 = 2[u] \text{ u étant la solution exacte du problème (1.1).}$$

Nous allons donner une estimation de cette constante  $N_0$  dans le cas où  $X = \mathcal{V}$ .

Nous avons successivement :

$$[u] \leq [u - u^n] + [u^n]$$

$$k[u - u^n]^2 \leq \langle Au^n - Au, u^n - u \rangle \leq \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \|f - Au^n\|^* [u - u^n]$$

Donc

$$(1.18) \quad [u] \leq \frac{1}{k\sqrt{\sigma}} \|f - Au^n\|^* + \sqrt{\sigma} \|u^n\|$$

on peut alors poser

$$(1.19) \quad N_n = \frac{2}{k\sqrt{\sigma}} \|f - Au^n\|^* + 2\sqrt{\sigma} \|u^n\|$$

Nous avons alors

$$(1.20) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} N_n = N_0 = 2[u].$$

Dans la pratique  $N_n \approx N_0 = 2[u]$  après quelques dizaines d'itérations et pour  $n > n_0$  nous itérons avec le meilleur paramètre  $\varrho = \varrho_0$  possible.

Sous les hypothèses H1) et H2) on démontre alors la

**PROPOSITION 1.1.** La suite définie par les itérations

$$(1.21) \quad u_{n+1} = u_n - \varrho_n S^{-1}(Au_n - f)$$

avec

$$\varrho_n = k/C^2(N_n) \text{ et } N_n = \frac{2}{k\sqrt{\sigma}} \|f - Au_n\| + 2\sqrt{\sigma} \|u_n\|$$

converge vers la solution  $u$  de l'équation

$$(1.22) \quad Au = f.$$

7°) Dans le cas où  $X = V$  les itérations (1.4) deviennent

$$(1.23) \quad u_{n+1} = u_n - \varrho S^{-1}(Au_n - f) = u_n - \varrho g_n$$

avec

$$g_n = S^{-1}(Au_n - f)$$

Il s'agit alors de minimiser l'expression

$$(1.24) \quad \varphi(\varrho) = \|u_n - u\|^2 = \|u_{n-1} - u - \varrho g_{n-1}\|^2$$

$u$  étant la solution de  $Au = f$  ce qui donne

$$(1.25) \quad \varrho = \frac{(g_{n-1}, u_n - u)}{\|g_{n-1}\|^2}.$$

Nous pouvons alors poser dans (1.23) :

$$(1.26) \quad \varrho = \varrho_n = \frac{(g_{n-1}, u_n - u_{n-1})}{\|g_{n-1}\|^2}$$

on peut toujours demarrer les itérations (1.23) avec un paramètre  $\varrho$  fixe.

### 1.3 Itérations avec changement de paramètre et de norme ; accélération de la convergence.

On fait les hypothèses H1) et H2) du paragraphe 1.1.

Si on pose  $S = Id$  on a alors les itérations

$$(1.27) \quad u_{n+1} = P_X(u_n - \varrho_{Id}(Au_n - f)) \text{ avec } \varrho_{Id} = k_{Id}/C_{Id}^2(N).$$

Si on pose  $S \neq Id$  on a alors les itérations

$$(1.28) \quad u_{n+1} = P_X^{\varrho_s}(u_n - \varrho_s S^{-1}(Au_n - f)) \text{ avec } \varrho_s = k_s/C_s^2(N).$$

Les itérations (1.27) impliquent que la projection suivant  $(,)$  est accessible.

Les itérations (1.28) impliquent que l'on sache projeter suivant le produit scalaire  $[, ]$ .

Nous avons alors la

**PROPOSITION 1.2.** Supposons que l'on sache projeter suivant  $(,)$  et non suivant  $[, ]$  et que les itérations (1.28) soient plus rapidement convergentes que les itérations (1.27). Alors, il existe un opérateur  $S_i$  et un paramètre

$\varrho_i$  tels que les itérations

$$(1.29) \quad u_{n+1} = P_X^{S_i}(u_n - \varrho_i S_i^{-1}(Au - f)) \text{ soient possibles.}$$

De plus les itérations (1.29) sont plus rapidement convergentes que (1.27).

DÉMONSTRATION. Posons dans (1.29)  $S_i = S$  et  $\varrho_i = \varrho_s$ .

Si  $f_n = u_n - \varrho_s S^{-1}(Au_n - f) \in X$  alors

$$(1.30) \quad u_{n+1} = P_X^s(f_n) = f_n$$

et les itérations (1.29) sont plus rapides que (1.27).

Si  $f_n = u_n - \varrho_s S^{-1}(Au_n - f) \notin X$

On pose  $S_i = Id$  et  $\varrho_i = \varrho_{Id}$  et on est conduit aux itérations (1.27) qui sont accessibles.

REMARQUE 1.5. On peut aussi faire  $S_i = Id$  jusqu'à  $n = n_0$  et à partir de ce rang  $n_0$  on aura toujours  $f_n \in X$ . On poursuit alors avec les itérations (1.29). Pour les applications cf. théorème 3.2 § III-3.

## I — 2. Méthode des changements de variables.

Le théorème 1.1 donne une méthode itérative

$$(2.1) \quad u_{n+1} = P_X^S(u_n - \varrho S^{-1}(Au_n - f))$$

permettant de résoudre numériquement le problème :

$$(2.2) \quad (Au, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in X;$$

où  $X$  est un convexe fermé de  $\mathcal{H}$ .

En général on ne peut calculer explicitement

$P_X^S(u)$  pour  $u \notin X$  que pour un nombre restreint de convexes que nous appellerons les « bons convexes ».

Nous allons donner deux méthodes permettant de résoudre très simplement le problème (2.2) dans de nombreux cas où  $X$  n'est pas un « bon convexe ».

Dans la première méthode, on « calcule »  $P_X$  par transformation de  $X$  en un convexe  $\tilde{X}$  sur lequel on sait projeter numériquement.

Dans la deuxième méthode on transforme l'inéquation (2.2) en une iné-

quation de la forme

$$(\tilde{A} \tilde{u}, \tilde{v} - \tilde{u}) \geq (\tilde{f}, \tilde{v} - \tilde{u}) \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{X}$$

$\tilde{X}$  étant un convexe sur lequel on sait projeter explicitement. La solution  $\tilde{u} \in \tilde{X}$  de ce problème peut alors être calculée à l'aide des itérations toujours possibles :

$$\tilde{u}_{n+1} = P_{\tilde{X}}^S(\tilde{u}_n - \tilde{f} S^{-1}(\tilde{A} \tilde{u}_n - \tilde{f})).$$

Plus précisément on fait l'hypothèse suivante :

H.3) Il existe un isomorphisme  $T$  (pour la structure hilbertienne) de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{H}$  tel que  $\tilde{X} = T^{-1}(X)$  soit un « bon convexe ».

(une hypothèse plus faible est donnée dans la remarque 2.2)

Nous avons alors le

THÉORÈME 2.1. On se place dans les conditions du théorème 1.1. De plus on suppose H.3). Posons  $f_n = u_n - \varrho S^{-1}(Au_n - f)$ ,  $n$  fixé ; alors

1°) La suite  $(\tilde{v}_m^n)$  définie par les itérations ;

$$(2.3) \quad \tilde{v}_{m+1}^n = P_{\tilde{X}}(\tilde{v}_m^n - \tilde{f}(\tilde{B} \tilde{v}_m^n - \tilde{f}_n)), \quad n \text{ fixé}$$

où  $\tilde{B} = T^* S T$  et  $\tilde{f}_n = T^* S f_n$  converge fortement dans  $\mathcal{H}$  vers un élément  $\tilde{v}^n$  pour  $\tilde{v}_0^n (= 0)$  et  $\tilde{\varrho} > 0$  convenablement choisis.

2°) La suite  $(u_n)$  définie par l'itération

$$(2.4) \quad u_{n+1} = T(\tilde{v}^n)$$

converge fortement dans  $\mathcal{H}$  vers  $u$  solution de (2.2) pour  $u_0 = 0$  et  $\varrho = k/C^2(N)$ .

DÉMONSTRATION. Il s'agit de rendre possible les itérations

$$(2.5) \quad u_{n+1} = P_X^S(u_n - \varrho S^{-1}(Au_n - f)) = P_X^S(f_n)$$

on part de  $u_0 = 0$  par exemple. Or projeter  $f_n$  suivant le produit scalaire  $[u, v] = (Su, v)$ , équivaut à résoudre :

$$(2.6) \quad (Su_{n+1}, w - u_{n+1}) \geq (Sf_n, w - u_{n+1}) \quad \forall w \in X.$$

Posons  $u_{n+1} = T\tilde{v}^n$ ,  $w = T\tilde{w}$  pour  $n$  fixé.

Il vient alors

$$(ST\tilde{v}^n, T(\tilde{w} - \tilde{v}^n)) \geq (Sf_n, T(\tilde{w} - \tilde{v}^n)) \quad \forall \tilde{w} \in \tilde{X}$$

ce qui équivaut à

$$(2.7) \quad (\tilde{B}\tilde{v}^n, \tilde{w} - \tilde{v}^n) \geq (\tilde{f}_n, \tilde{w} - \tilde{v}^n) \quad \forall w \in \tilde{X}$$

en posant  $\tilde{B} = T^*ST$  et  $\tilde{f}_n = T^*Sf_n$ .

L'équation (2.7) se résoud alors à l'aide des itérations suivantes :

$$(2.8) \quad \tilde{v}_{m+1}^n = P_{\tilde{X}}(\tilde{v}_m^n - \tilde{\varrho}(\tilde{B}\tilde{v}_m^n - \tilde{f}_n))$$

qui convergent pour  $\tilde{v}_0^n = 0$  et  $\tilde{\varrho} > 0$  convenablement choisi, vers  $\tilde{v}^n$ , ne dépendant que de l'indice  $n$ .

Les itérations (2.5) deviennent maintenant possibles et s'écrivent :

$$u_{n+1} = T(\tilde{v}^n).$$

D'après le théorème 1.1, on a  $u_n \rightarrow u$  dans  $\mathcal{H}$  fort quand  $n \rightarrow \infty$ , pour  $u_0 (= 0)$  et  $\varrho = k/C^2(N)$ ;  $u$  étant l'unique solution du problème (2.2).

REMARQUE 2.1. 1°) Si l'opérateur linéaire  $\tilde{B} = T^*ST$  vérifie

$$(\tilde{B}\tilde{u}, \tilde{u}) \geq \alpha \|u\|^2 \quad \text{et} \quad (\tilde{B}\tilde{u}, \tilde{v}) \leq c \|\tilde{u}\| \|\tilde{v}\|$$

on peut prendre alors dans (2.8),  $\tilde{\varrho} = \alpha/C^2$ .

On peut aussi faire  $\tilde{\varrho} = \tilde{\varrho}^n$  (cf. les remarques du paragraphe I.1, I.2).

2°) Dans la méthode précédente, pour résoudre l'inéquation

$$(2.9) \quad (Au, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in X$$

avec  $A$  non linéaire et  $X =$  convexe fermé sur lequel on ne sait pas projeter explicitement, à l'aide des itérations ;

$$(2.10) \quad u_{n+1} = P_X^S(u_n - \varrho S^{-1}(Au_n - f));$$

On se ramène à résoudre à chaque itération  $n$ , une inéquation de la forme :

$$(2.11) \quad (\tilde{B} \tilde{u}, \tilde{v} - \tilde{u}) \geq (\tilde{f}, \tilde{v} - \tilde{u}) \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{X}$$

où  $\tilde{B}$  est un opérateur linéaire et  $\tilde{X}$  est un convexe fermé sur lequel on sait projeter.

Bien entendu on peut résoudre aussi (2.11) avec des itérations analogues à (2.10).

3<sup>o</sup>) Si  $\mathcal{H} = V_h$  nous avons bien entendu  $u_n \rightarrow u_h$  avec  $u_h$  solution d'un problème discret :

$$(A_h u_h, v_h - u_h)_h \geq (f_h, v_h - u_h)_h \quad \forall v_h \in X_h$$

et de plus on a  $p_h u_h \rightarrow u$  dans  $V$  fort quand  $h \rightarrow 0$  où  $u$  est la solution du problème continu :

$$(Au, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in X$$

avec  $A$  opérateur cette fois d'un Banach  $V$  dans son dual  $V'$  qui dans la pratique est un espace de distributions ; cf. [14].

THÉORÈME 2.2. On se place dans les conditions du théorème 1.1. De plus on suppose H3). Alors

1<sup>o</sup>) Toute solution  $u$  de (2.2) s'écrit

$$(2.12) \quad u = T\tilde{u}$$

où  $\tilde{u}$  est solution de l'inégalité

$$(2.13) \quad (\tilde{A} \tilde{u}, \tilde{v} - \tilde{u}) \geq (\tilde{f}, \tilde{v} - \tilde{u}) \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{X} \text{ avec } \tilde{A} = T^* A T, \tilde{f} = T^* f, X = T(\tilde{X})$$

et réciproquement

2<sup>o</sup>) La suite  $(\tilde{u}_n)$  définie par les itérations

$$(2.14) \quad \tilde{u}_{n+1} = P_{\tilde{X}}^s(\tilde{u}_n - \tilde{\varrho} S^{-1}(\tilde{A} \tilde{u} - \tilde{f}))$$

converge fortement dans  $\mathcal{H}$  vers  $u$  solution de (2.13) pour  $\tilde{u}_0 (= 0)$  et  $\tilde{\varrho} > 0$  convenablement choisis.



DÉMONSTRATION. 1<sup>o</sup>) Posons dans (2.2)  $u = T\tilde{u}$ ,  $v = T\tilde{v}$  il vient alors

$$(2.15) \quad (AT\tilde{u}, T(\tilde{v} - \tilde{u})) \geq (f, T(\tilde{v} - \tilde{u})) \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{X}$$

ce qui équivaut à (2.13).

2<sup>o</sup>) Comme  $T$  est un isomorphisme alors l'opérateur  $\tilde{A}$  vérifie les hypothèses du théorème 2.1, ce qui assure la convergence de la suite  $(\tilde{u}_n)$  vers  $\tilde{u}$  solution de (2.13).

REMARQUE 2.2. Plus généralement on peut remplacer l'hypothèse H3) par H4)

H4) i) Il existe une application  $\theta$  de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$  linéaire continue et injective telle que  $\theta(X) = \tilde{X}$  soit un « bon convexe ».

ii) Il existe une application  $T$  de  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$  dans  $\mathcal{H}$  linéaire continue et surjective telle que  $T\theta = \text{Identité}$ .

Nous verrons au paragraphe III-5 un exemple où cette hypothèse est fort utile et simplifie la résolution d'un problème.

REMARQUE 2.3. 1<sup>o</sup>) Comme on ne suppose pas  $X$  borné, notre méthode s'applique au cas où  $X = \mathcal{H}$  et permet de résoudre simplement l'équation  $Au = f$ .

2<sup>o</sup>) Un choix judicieux des opérateurs  $S$  et  $T$  peut conduire à un problème

$$(\tilde{A}\tilde{u}, \tilde{v} - \tilde{u}) \geq (\tilde{f}, \tilde{v} - \tilde{u}) \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{X}$$

très facile à résoudre. C'est ce que nous verrons dans les exemples du Chapitre II.

3<sup>o</sup>) Chaque fois que l'opérateur  $A$  est linéaire auto-adjoint, en prenant  $S = A$  et  $[u]^2 = (Au, u)$  l'itération

$$(2.16) \quad u_{n+1} = P_X^A(u_n - \rho S^{-1}(Au_n - f))$$

devient

$$u = P_X^A(A^{-1}f) \quad (\text{car } \rho = 1)$$

ce qui permet de trouver  $u$  sans passer par les itérations (2.16).

Cela suppose bien entendu que l'on a une autre méthode plus simple pour inverser l'opérateur  $A$  (par exemple si  $A = -\Delta$ ).

Si  $A$  est auto-adjoint alors  $\tilde{A} = T^*AT$  l'est. On prendra alors  $S = \tilde{A}$

et  $[\tilde{u}]^2 = (\tilde{A} \tilde{u}, \tilde{u})$  et l'itération

$$(2.17) \quad \tilde{u}_{n+1} = P_{\tilde{X}}^{\tilde{A}}(\tilde{u}_n - \tilde{\varrho} S^{-1}(\tilde{A} \tilde{u}_n - \tilde{f}))$$

devient

$$(2.18) \quad \tilde{u} = P_{\tilde{X}}^{\tilde{A}}(\tilde{A}^{-1} \tilde{f}) = P_{\tilde{X}}^{\tilde{A}}(T^{-1} A^{-1} f).$$

D'où

$$(2.19) \quad u = TP_{\tilde{X}}^{\tilde{A}}(T^{-1} A^{-1} f).$$

REMARQUE 2.4. Soit  $F$  une fonctionnelle sur un convexe  $X$  d'un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  sur  $R$ . On pose le problème numérique suivant : trouver  $u \in X$  tel que

$$(2.20) \quad F(u) \leq F(v) \quad \forall v \in X.$$

1°) Si  $F$  est différentiable au sens de Gateaux on a vu cf. [14] que toute solution de (2.20) est solution de

$$(2.21) \quad (F'(u), v - u) \geq 0 \quad \forall v \in X$$

et réciproquement.

Pour résoudre numériquement (2.21) on applique alors les méthodes des paragraphes I-1 et I-2.

2°) Si  $F$  n'est pas différentiable, on a vu que (2.20) pouvait se mettre sous la forme

$$(2.22) \quad (A_1 u_1, v_1 - u_1) \geq (f_1, v_1 - u_1) \quad \forall v_1 \in X_1 \quad \text{cf. [14]}$$

et on applique ensuite les méthodes précédentes pour résoudre (2.22) numériquement.

Dans le chapitre II et dans [14] nous donnons de nombreux exemples d'inéquations variationnelles et de problèmes d'optimisation et les formes (2.20) correspondants.

REMARQUE 2.5. Pour résoudre numériquement l'inéquation (2.22) il est essentiel de savoir projeter explicitement sur le convexe

$$X_1 = \{v_1 \mid v_1 = (v, \lambda) \in X \times R, G(v) \leq \lambda\}.$$

La proposition qui suit traite un cas particulier important.

PROPOSITION 2.1. Soit  $\mathcal{H}$  un Hilbert sur  $\mathbb{R}$  de norme  $\| \cdot \|$ .

On pose

$$(2.23) \quad X_1 = \{v_1 \mid v_1 = (v, \lambda) \in \mathcal{H} \times \mathbb{R}; [v]^2 \leq \lambda\}$$

où  $[ \ ]$  est une norme hilbertienne quelconque.

Alors pour tout  $v_1 = (v_0, \lambda_0) \notin X_1$  on a :

$$(2.24) \quad P_{X_1}(v_1) = (\theta v_0, \mu)$$

$$(2.25) \quad \mu = \theta^2 [v_0]^2$$

et  $\theta$  est solution de l'équation :

$$(2.26) \quad \theta^3 + \theta \left( \frac{\|v_0\|^2 - 2\lambda_0 [v_0]^2}{2 [v_0]^4} \right) - \frac{\|v_0\|^2}{2 [v_0]^4} = 0$$

avec  $\theta < 1$  et  $\theta^2 [v_0]^2 > \lambda_0$ .

DÉMONSTRATION. Soit  $v_1 = (v_0, \lambda_0) \notin X_1$ .

Comme la norme  $[ \ ]$  est hilbertienne la projection sur  $X_1$  de  $v_1$  est dans le même plan que  $v_0$ . On a donc :

$$P_{X_1}(v_1) = (\theta v_0, \mu).$$

Nous allons déterminer les constantes  $\theta$  et  $\mu$ . On a  $[\theta v_0]^2 = \mu$ .

Il s'agit maintenant de minimiser la distance :

$$d^2 = (\theta - 1)^2 \|v_0\|^2 + (\mu - \lambda_0)^2;$$

ce qui donne

$$d^2 = (\theta - 1)^2 \|v_0\|^2 + (\theta^2 [v_0]^2 - \lambda_0)^2.$$

On doit avoir

$$d' = 0.$$

ce qui donne :

$$\theta^3 + \theta \left( \frac{\|v_0\|^2 - 2\lambda_0 [v_0]^2}{2 [v_0]^4} \right) - \frac{\|v_0\|^2}{2 [v_0]^4} = 0.$$

La racine qui convient est celle pour laquelle on a

$$\theta < 1 \text{ et } \theta^2 [v_0]^2 > \lambda_0.$$

### I — 3. Methodes iteratives regularisantes.

Dans ce paragraphe, nous étudions plus particulièrement l'approximation de la solution d'équations aux dérivées partielles non linéaires. Tous ces

résultats se généralisent facilement au cas des inégalités variationnelles non linéaires.

On se propose de résoudre dans un espace de dimension finie  $V_h$  l'équation

$$(3.1) \quad A_h u_h = f_h \text{ pour } f_h \text{ donné dans } V'_h$$

où  $A_h$  est un opérateur non nécessairement linéaire qui applique  $V_h$  dans  $V'_h$ . Les hypothèses faites sur l'opérateur  $A_h$  seront plus générales que celles considérées dans le théorème 1.1 de ce chapitre et dans le théorème 7.1 de [3].

Si par ailleurs on se donne un espace de Hilbert  $V$  et un opérateur  $A$  non nécessairement linéaire de  $V$  dans son dual  $V'$ ; notre méthode permettra de résoudre directement et sans passer par l'étape de discrétisation, l'équation

$$(3.2) \quad Au = f \text{ pour } f \text{ donné dans } V'.$$

Dans ce cas les conditions supposées sur l'opérateur  $A$  seront les mêmes que celles que nous allons supposer sur l'opérateur  $A_h$  de l'équation (3.1).

### 3.1 Méthode I : Régularisation et passage à la limite.

On fait les hypothèses suivantes :

H5) Soit  $S_h \in \mathcal{L}(V_h, V'_h)$  tel que

$$i) \quad (S_h u_h, v_h)_h = (u_h, S_h v_h)_h \quad \forall u_h, v_h \in V_h$$

ii) Il existe une constante  $\sigma > 0$  telle que

$$(S_h u_h, u_h)_h = [u_h]^2 \geq \sigma \|u_h\|_h^2$$

$[u_h]$  sera alors une norme équivalente à  $\|u_h\|_h$

H6)  $A_h$  est hemicontinu de  $V_h$  dans  $V'_h$  et vérifie :

$$(A_h u_h - A_h v_h, u_h - v_h)_h \geq (\varphi(\|u_h\|_h) - \varphi(\|v_h\|_h))(\|u_h\|_h - \|v_h\|_h)$$

avec  $\varphi : R_+ \rightarrow R$  strictement croissante et tel que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(r) = +\infty.$$

H7) Soit  $B_h : V_h \rightarrow V'_h$  linéaire (continue bornée si  $V_h = \mathcal{H}$  de dimension

infinie) tel que

$$i) \quad (B_h u_h, u_h)_h \geq k [u_h]^2, \quad k > 0$$

ii) quelle que soit la constante  $N > 0 \exists C(N)$  tel que si  $[u_h] \leq N$ ,  $[v_h] \leq N$ , on a pour tout  $\lambda > 0$ :

$$(A_h u_h - A_h v_h, w_h)_h + \lambda (B_h (u_h - v_h), w_h) \leq C(N) [u_h - v_h] [w_h] \quad \forall w_h \in V_h.$$

Nous avons alors le

**THÉORÈME 3.1.** On suppose H5), H6), H7) alors

1<sup>o</sup>) L'équation (3.1) admet une solution unique  $u_h \in V_h$ .

2<sup>o</sup>) La suite  $(u_{h,p}^n)$  définie par l'itération

$$(3.3) \quad u_{h,p}^{n+1} = u_{h,p}^n - \rho S_h^{-1} (A_h u_{h,p}^n + \varepsilon_p B_h u_{h,p}^n - f_h - \varepsilon_p g_h)$$

converge dans  $V_h$  vers  $u_h$  quand  $n \rightarrow \infty$  et  $p \rightarrow \infty$  pour tout  $g_h$  donné dans  $V_h'$  ( $\varepsilon_p$  étant une suite de réels tendant vers 0 quand  $p \rightarrow \infty$ ), pour  $u_h^0 = 0$  et  $\rho = k/C^2(N)$ .

**DÉMONSTRATION.** 1<sup>o</sup>) L'hypothèse H6) assure l'existence et l'unicité de la solution  $u_h \in V_h$  de (3.1).

2<sup>o</sup>) Fixons l'entier  $p$ . Alors l'opérateur  $A_h + \varepsilon_p B_h$  vérifie les hypothèses du théorème 1.1 (il suffit de faire  $X = V_h$ ). Donc la suite  $(u_{h,p}^n)$  définie par l'équation (3.3) converge vers la solution  $u_{n,p}$  de l'équation

$$(3.4) \quad A_h u_{h,p} + \varepsilon_p B_h u_{h,p} = f_h + \varepsilon_p g_h$$

et d'après le théorème 4.1 de [14] on a:

$$u_{h,p} \rightarrow u_h \quad \text{quand } p \rightarrow \infty, \quad u_h \text{ étant la solution de l'équation (3.1).}$$

**REMARQUE 3.1.** 1<sup>o</sup>) Le théorème 3.1 est encore valable si on remplace  $V_h$  par un espace de Hilbert et l'étape de discrétisation est inutile.

Nous donnons dans le chap. II paragraphe II-1 un exemple pour illustrer cette situation. Nous verrons que bien que l'on soit obligé d'opérer une certaine « discrétisation » au stade de l'exploitation numérique, on peut prendre le paramètre  $h$  aussi petit que l'on veut (suivant les possibilités de la machine) et l'erreur de discrétisation devient ainsi nulle. En général on obtient une très haute précision.

2<sup>o</sup>) Les itérations (3.3) sont indépendantes des conditions aux limites (Dirichlet, Neumann ou mixtes) pourvu que l'on ait un schéma de discrétisation convergent, ce qui rend inutile de recourir aux opérateurs  $p_h$  et  $r_h$

d'AUBIN (cf. [1]) qui sont très difficiles à expliciter dans le cas de conditions aux limites de types Neumann par exemple.

REMARQUE 3.2. L'algorithme de calcul (3.3) consiste à fixer  $p$  et à itérer en  $n$  jusqu'à la solution  $u_{n,p}$  de (3.4), en prenant  $u_{0,p} = 0$  par exemple,

$$N = \frac{2}{k \sqrt{\sigma}} \|f_h + \varepsilon_p g_h - A_h(o) - \varepsilon_p B_h(o)\|_h \quad \text{et} \quad \varrho = k/C^2(N).$$

Puis après avoir diminué  $\varepsilon_p$  on reprend les itérations (3.3). Bien entendu on peut faire le tout en une seule itération en prenant  $\varepsilon_p = \varepsilon_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$  et la formule

$$(3.5) \quad u_h^{n+1} = u_h^n - \varrho S_h^{-1} (A_h u_h^n + \varepsilon_n B_n u_h^n - f_h - \varepsilon_n g_h)$$

mais des considérations techniques sur la rapidité de convergence conduisent à préférer la méthode (3.3) avec  $\varepsilon_p \neq \varepsilon_n$ . En effet nous avons :

$$(3.6) \quad [u_{h,p}^{n+1} - u_{h,p}^n]^2 \leq \theta_p [u_{h,p}^n - u_{h,p}^{n-1}]^2 \quad \text{avec} \quad \theta_p = 1 - \varepsilon_p^2/C^2(N).$$

Pour que  $\theta_p$  ne soit pas dès le début des itérations, très voisin de l'unité; il est nécessaire dans le calcul des premières solutions  $u_{h,p}$  ( $p = 0, 1, 2, \dots$ ) que le paramètre  $\varepsilon_p$  ne soit pas trop petit.

REMARQUE 3.3. 1<sup>o</sup>) Si nous prenons à priori  $g_h = B_h u_h$  les équations (3.1) et (3.4) deviennent identiques et en posant  $\varepsilon_p = \varepsilon_n$ , les itérations

$$(3.7) \quad u_h^{n+1} = u_h^n - \varrho S_h^{-1} (A_h u_h^n + \varepsilon_n B_h u_h^n - f_h - \varepsilon_n B_h u_h)$$

conduisent directement à la solution  $u_h$  de (3.1).

Ceci montre l'intérêt technique de l'estimation à priori de  $B_h u_h$ .

L'opérateur  $B_h$  choisi devra donc vérifier H7) et permettre si possible cette estimation.

2<sup>o</sup>) On aura aussi intérêt à utiliser  $\varrho = \varrho_n$  cf. les remarques de I-1, 1.2.

REMARQUE 3.4. Toujours dans le cadre du théorème 3.1, on peut relier l'erreur sur la discrétisation  $\|p_h u_h - u\| = \delta(h)$  à l'erreur sur l'itération. Plus précisément on a :

$$\begin{aligned} \|p_h u_h^n - u\| &\leq \|p_h u_h^n - p_h u_h\| + \|p_h u_h - u\| \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\sigma}} [u_h^n - u_h] + \delta(h), \quad u_h^0 = 0. \end{aligned}$$

Donc

$$(3.8) \quad \|p_h u_h^n - u\| \leq \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \theta^{\frac{n}{2}} [u_h] + \delta(h).$$

Il suffira donc de prendre

$$(3.9) \quad n \asymp \frac{2 C^2(N)}{k^2} \quad \text{avec } \theta = 1 - k^2/C^2(N)$$

pour avoir  $\|p_h u_h^n - u\| \asymp \delta(h)$ .

### 3.2 Méthode II: Méthode itérative régularisante.

Nous allons donner maintenant une autre méthode itérative directement suggérée par la remarque 3.3.

Son but essentiel est de se passer de l'hypothèse (assez restrictive pour certains opérateurs non linéaires) du théorème 1.1, sur l'opérateur  $A_h$  :

$$(3.10) \quad (A_h u_h - A_h v_h, u_h - v_h)_h \geq \alpha \|u_h - v_h\|_h^2, \quad \alpha > 0.$$

Plus précisément nous supposerons seulement que l'opérateur  $A_h$  vérifie la condition :

$$(3.11) \quad (A_h u_h - A_h v_h, u_h - v_h)_h \geq (\varphi(\|u_h\|_h) - \varphi(\|v_h\|_h)) (\|u_h\|_h - \|v_h\|_h).$$

Cette condition est plus faible que (3.10) et entraîne l'existence et l'unicité de la solution  $u_h \in V_h$  de l'équation :

$$(3.12) \quad A_h u_h = f_h \quad \text{pour } f_h \text{ donné dans } V_h'.$$

Dans la méthode I on avait des difficultés techniques quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Dans la méthode II on régularise l'opérateur  $A_h$  en lui ajoutant un opérateur  $\lambda B_h$  où  $\lambda$  est une constante quelconque ; si bien que la difficulté du  $\varepsilon \rightarrow 0$  disparaît. Nous avons alors le

**THEOREME 3.2.** On fait les hypothèses H5), H6) et

H8)  $B_h : V_h \rightarrow V_h'$  est linéaire et tel que

$$i) (B_h u_h, v_h)_h \leq M [u_h] [v_h];$$

$$(B_h u_h, u_h)_h \geq k [u_h]^2 \text{ avec } \frac{M}{k} \leq 1$$

ii) Quelle que soit la constante  $N > 0$ ,  $\exists C(N)$  tel que si

$$[u_h] \leq N, \quad [v_h] \leq N$$

on a pour  $\lambda > 0$

$$(A_h u_h - A_h v_h, w_h)_h + \lambda (B_h (u_h - v_h), w_h)_h \leq C(N) [u_h - v_h] [w_h] \quad \forall w_h \in V_h.$$

Alors

1<sup>o</sup>) L'équation  $A_h u_h = f_h$  admet une solution unique  $u_h \in V_h$

2<sup>o</sup>) La suite  $(u_h^n)$  définie par l'itération

$$(3.13) \quad A_h u_h^n + \lambda B_h u_h^n = f_h + \lambda B_h u_h^{n-1}$$

converge dans  $V_h$  vers  $u_h$ .

DEMONSTRATION. 1<sup>o</sup>) L'existence et l'unicité de la solution résulte de l'hypothèse H6).

2<sup>o</sup>) L'itération (3.13) a un sens puisque l'opérateur  $A_h + \lambda B_h$  vérifie les hypothèses du théorème 1.1.

Pour  $u_h^0$  donné on peut calculer  $u_h^1$  à l'aide de la formule :

$$(3.14) \quad u_{h,m+1}^1 = u_{h,m}^1 - \rho S_h^{-1} (A_h u_{h,m}^1 + \lambda B_h u_{h,m}^1 - f_h - \lambda B_h u_h^0)$$

en prenant  $\rho = k/C^2(N)$  où  $k$  et  $C(N)$  sont donnés par l'hypothèse H8) et

$$N = \frac{2}{k \vee \sigma} \|f_h + \lambda B_h u_h^0 - A_h(o) - \lambda B_h(o)\| \quad (\text{si } u_h^0 = 0).$$

Par ailleurs nous avons successivement :

$$A_h u_h^n + \lambda B_h u_h^n = f_h + \lambda B_h u_h^{n-1}$$

$$A_h u_h + \lambda B_h u_h = f_h + \lambda B_h u_h.$$

En posant  $\varepsilon_h^n = u_h^n - u_h$  il vient :

$$(A_h u_h^n - A_h u_h, \varepsilon_h^n)_h + \lambda (B_h \varepsilon_h^n, \varepsilon_h^n)_h = \lambda (B_h \varepsilon_h^{n-1}, \varepsilon_h^n)_h.$$

D'après H8) on a :

$$[\varepsilon_h^n] \leq \frac{M}{k} [\varepsilon_h^{n-1}] \quad (1).$$

---

(1) Si au lieu de H5) on suppose (3.10) on obtient alors l'inégalité  $[\varepsilon_h^n] \leq \frac{M}{k + \alpha} [\varepsilon_h^{n-1}]$  ce qui termine la démonstration si  $\frac{M}{k} \leq 1$ .



Si  $\frac{M}{k} < 1$ , le théorème est démontré. Si  $\frac{M}{k} = 1$  alors  $[e_h^n] \leq cte$ , donc  $[u_h^n] \leq cte \forall n$ . Donc suivant un ultrafiltre  $\mathcal{U}$  on a :  $u_h^n \rightarrow \xi_h$  dans  $V_h$ . De la relation

$$(3.15) \quad (A_h u_h^n, u_h^n) = (f_h, u_h^n) + \lambda_n (B_h u_h^{n-1} - B_h u_h^n, u_h^n)_h$$

avec  $\lambda_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$  on en déduit que  $\limsup_{\mathcal{U}} (A_h u_h^n, u_h^n)_h \leq (f_h, \xi_h)_h$ .

Il en résulte que  $A_h \xi_h = f_h$ .

D'où  $\xi_h = u_h$  d'après l'unicité de la solution.

ce qui démontre le théorème.

REMARQUE 3.5. Le théorème 3.2 est encore valable si on remplace  $V_h$  par un Hilbert  $\mathcal{H}$ ; les opérateurs  $A_h$  et  $B_h$  étant remplacés par  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  et  $B : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  vérifiant H5), H6 et H8). On démontre comme précédemment que l'on a :

$$u^n \rightarrow u \text{ dans } \mathcal{H} \text{ faible.}$$

A partir de H6) on montre que  $\|u^n\| \rightarrow \|u\|$ ; ce qui donne

$$u^n \rightarrow u \text{ dans } \mathcal{H} \text{ fort.}$$

Dans  $V_h$  de dimension finie on a évidemment directement la convergence forte.

### 3.3 Méthode III: « Méthode mixte ».

La méthode qui suit a les mêmes avantages que la précédente. La régularisation de l'opérateur  $A_h$  consiste essentiellement à lui ajouter l'opérateur  $\frac{\varepsilon}{k} I$ ; les paramètres  $\varepsilon$  et  $k$  jouant un rôle particulier. Les hypothèses sur  $A_h$  seront bien entendu moins restrictives que celles du théorème 1.1.

Plus précisément nous avons le

THEOREME 3.3. Soit  $T$  un paramètre fixé et  $N$  un entier. On se donne deux paramètres  $\varepsilon \rightarrow 0$  et  $k = \frac{T}{N} \rightarrow 0$  de façon que  $\frac{k}{\varepsilon} \rightarrow 0$ . On suppose H6). De plus  $A_h$  est lipschitzien sur les ensembles bornés. Alors

1<sup>o</sup>) la suite  $u_h^n$  définie par les itérations

$$(3.16) \quad A_h u_h^n + \frac{\varepsilon}{k} u_h^n = f_h + \frac{\varepsilon}{k} u_h^{n-1} \quad (\text{avec } u_h^0 = 0)$$

est telle que  $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u_h^n \rightarrow u_h$  dans  $V_h$  fort où  $u_h$  est la solution de l'équation

$$(3.17) \quad A_h u_h = f_h .$$

2°) Pour  $n$  fixé, la suite  $(u_{h,m}^n)$  définie par les itérations :

$$(3.18) \quad u_{h,m+1}^n = u_{h,m}^n - \varrho \left( \left( A_h + \frac{\varepsilon}{k} \right) u_{h,m}^n - f_h - \frac{\varepsilon}{k} u_{h,m}^{n-1} \right)$$

converge fortement vers  $u_h^n$  quand  $m \rightarrow \infty$  pour  $u_{h,0}^m$  convenable et

$$f = \frac{\varepsilon C_1^2(h)}{k(C(N) + \frac{\varepsilon}{k} C_2^2(h))^2}$$

où  $C(N)$  est la constante de Lipschitz de l'opérateur  $A_h$  (on peut prendre, si  $u_{h,0}^m = 0$  ;  $N = \frac{2k}{\varepsilon} \left\| f_h + \frac{\varepsilon}{k} u_h^{n-1} - A_h(o) \right\|$ ) et  $C_1(h)$  et  $C_2(h)$  sont deux constantes assurant l'équivalence des normes :

$$C_1(h) \| u_h \|_h \leq | u_h |_h \leq C_2(h) \| u_h \|_h .$$

DÉMONSTRATION. 1°) On se donne deux espaces de Hilbert  $V$  et  $H$   $V \subset H$  avec injection continue on muni  $V$  de la norme  $\| \|$  et  $H$  de la norme  $| |$ . Nous allons démontrer le théorème dans le cas où  $V_h = V =$  espace de Banach.

a) l'équation (3.16) s'écrit alors

$$(3.19) \quad Au^n + \frac{\varepsilon}{k} u^n = f + \frac{\varepsilon}{k} u^{n-1} \quad (u^0 = 0) \quad \text{avec } f \text{ donné dans } V'.$$

Or (3.19) équivaut à

$$(3.20) \quad (Au^n, v - u^n) + \frac{\varepsilon}{k} (u^n - u^{n-1}, v - u^n) \geq (f, v - u^n) \quad \forall v \in V.$$

Faisons  $v = 0$  dans (3.20) on a :

$$- (Au^n, u^n) - \frac{\varepsilon}{2k} ( | u^n|^2 - | u^{n-1}|^2 + | u^n - u^{n-1}|^2 ) \geq - (f, u^n)$$

or

$$(Au - A(0), u) \geq (\varphi(\|u\|) - \varphi(0)) \|u\|.$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2k} (|u^n|^2 - |u^{n-1}|^2 + |u^n - u^{n-1}|^2) &\leq \|u^n\| (\|f\|^* + \varphi(0) + \|A(0)\|^*) \\ &\quad - \|u^n\| \varphi(\|u^n\|) \end{aligned}$$

or l'application  $r \rightarrow \alpha r - r\varphi(r)$  est borné dans  $R_+$  pour  $\alpha \in R$ . D'où

$$(3.21) \quad \frac{\varepsilon}{2k} (|u^n|^2 - |u^{n-1}|^2 + |u^n - u^{n-1}|^2) \leq C_1.$$

On en déduit

$$(3.22) \quad \frac{\varepsilon}{2k} |u^n|^2 \leq C_2 = C_1 N$$

et

$$(3.23) \quad \frac{\varepsilon}{2k} \sum_{n=1}^N |u^n - u^{n-1}|^2 \leq C_2 = C_1 N$$

b) posons  $u_\varepsilon = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u^n$  et montrons que  $\|u_\varepsilon\|$  est borné.

La relation (3.20) équivaut à

$$(3.24) \quad (Av, v - u^n) + \frac{\varepsilon}{k} (u^n - u^{n-1}, v - u^n) \geq (f, v - u^n) \quad \forall v \in V.$$

Sommons (3.24) de  $n = 1$  à  $n = N$  divisons par  $N$  et faisons  $v = \frac{u_\varepsilon}{2}$  on a :

$$\begin{aligned} \left( A \frac{u_\varepsilon}{2}, \frac{u_\varepsilon}{2} \right) &\leq \left( f, \frac{u_\varepsilon}{2} \right) - \frac{\varepsilon}{2T} \sum_{n=1}^N (|u^n|^2 - |u^{n-1}|^2 + |u^n - u^{n-1}|^2) \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2T} \sum_{n=1}^N (u^n - u^{n-1}, u_\varepsilon) \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\frac{\left( A \frac{u_\varepsilon}{2}, \frac{u_\varepsilon}{2} \right)}{\left\| \frac{u_\varepsilon}{2} \right\|} \leq C_3.$$

D'où  $\|u_\varepsilon\| \leq C_4$ .

c) montrons que  $u_\varepsilon \rightarrow u$  dans  $V$  fort  $u$  étant la solution de  $Au = f$ .  
 Suivant un ultrafiltre  $\mathcal{U}$  on a  $u_\varepsilon \rightarrow \xi$  dans  $V$  faible quand  $\varepsilon, k \rightarrow 0$  avec  $k/\varepsilon \rightarrow 0$ .

En passant à la limite dans

$$(3.25) \quad (Av, v - u_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{T} \sum_{n=1}^N (u^n - u^{n-1}, v) - \\ - \frac{\varepsilon}{2T} \sum_n (|u^n|^2 - |u^{n-1}|^2 + |u^n - u^{n-1}|^2) \geq (f, v - u_\varepsilon).$$

On a compte tenu de (3.21), (3.22), (3.23):

$$(Av, v - \xi) \geq (f, v - \xi) \quad \forall v \in V$$

ce qui équivaut à

$$(3.26) \quad A\xi = f$$

comme l'équation  $Au = f$  admet une solution unique  $u \in V$ ; il résulte que  $\xi = u$ .

Puisque  $u_\varepsilon \rightarrow u$  dans  $V$  faible alors  $w_\varepsilon = \frac{u_\varepsilon + u}{2} \rightarrow u$  dans  $V$  faible.

Posons  $v = w_\varepsilon$  dans (3.25); on en déduit  $\limsup (Aw_\varepsilon, w_\varepsilon - u) \leq 0$ .

Or

$$(\varphi(\|w_\varepsilon\|) - \varphi(\|u\|))(\|w_\varepsilon\| - \|u\|) \leq (Aw_\varepsilon - Au, w_\varepsilon - u) \\ \leq (Aw_\varepsilon, w_\varepsilon - u) - (Au, w_\varepsilon - u) \rightarrow 0.$$

Donc

$$w_\varepsilon \rightarrow u \quad \text{et} \quad \|w_\varepsilon\| \rightarrow \|u\|$$

et alors  $w_\varepsilon \rightarrow u$  dans  $V$  fort.

Il en résulte que  $u_\varepsilon \rightarrow u$  dans  $V$  fort

2°) On applique les itérations du théorème 1.1 à l'équation (3.16), où  $n$  est fixé.

**REMARQUE 3.6.** Dans les théorèmes 3.1 et 3.2 les constantes  $k$  et  $C(N)$ ,  $N$  et par conséquent le paramètre  $\varrho$  dépendent du pas  $h$  de discrétisation. Ceci provient d'équivalence de deux normes  $\|\cdot\|_h$  et  $|\cdot|_h$  sur l'espace  $V_h$ .

En général les constantes  $C_i(h) \rightarrow \infty$  quand  $h \rightarrow 0$ .

Dans la pratique le problème discrétisé est résolu au stade numérique avec  $h$  petit et fixé à l'avance. Il ne reste plus donc qu'à faire le passage à la limite pour  $n$  grand.

REMARQUE 3.7. Si on suppose  $\varepsilon/k \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

On peut montrer que la suite  $(u^n)$  définie par (3.19) converge fortement vers  $u$  solution de l'équation  $Au = f$ .

Nous avons en effet

$$(3.27) \quad (Au^n, u^n) \leq (f, u^n) - \frac{\varepsilon}{2k} (|u^n|^2 - |u^{n-1}|^2 + |u^n - u^{n-1}|^2).$$

De (3.27) et (3.21) on déduit que  $u^n$  est borné.

Donc suivant un ultrafiltre  $\mathcal{U}$  on a  $u^n \rightarrow \xi$  dans  $V$  faible. Or (3.20) peut encore s'écrire :

$$(3.28) \quad (Av, v - u^n) + \frac{\varepsilon}{k} (u^n - u^{n-1}, v) - \frac{\varepsilon}{2k} (|u^n|^2 - |u^{n-1}|^2 + |u^n - u^{n-1}|^2) \geq (f, v - u^n).$$

En passant à la limite suivant  $\mathcal{U}$  on a

$$(Av, v - \xi) \geq (f, v - \xi) \quad \forall v \in X.$$

D'où

$$(3.29) \quad A\xi = f \text{ et } \xi = u$$

On montre encore que

$$\limsup (Au, u^n) \leq (f, u).$$

ce qui donne :

$$(\varphi(\|u^n\|) - \varphi(\|u\|)) (\|u^n\| - \|u\|) \leq (Au, u^n - u) \rightarrow 0.$$

Donc

$$\|u^n\| \rightarrow \|u\|.$$

D'où

$$u^n \rightarrow u \text{ dans } V \text{ fort.}$$

## II — Equations aux derivees partielle non lineaires et problemes d'optimisation sur l'espace entier.

### II — 1. Problème 1.

Soit  $H_0^1(0, 1) = \left\{ u \mid u \in L^2(0, 1), \frac{du}{dx} \in L^2(0, 1); u(0) = u(1) = 0 \right\}$  la dérivée étant prise au sens des distributions. On désigne par  $H^{-1}(0, 1)$  le dual de  $H_0^1(0, 1)$  et on munit  $H_0^1(0, 1)$  de la norme  $\|u\| = \left\| \frac{du}{dx} \right\|_{L^2}$ .

On cherche  $u \in H_0^1(0, 1)$  vérifiant

$$(2.1) \quad u'' = f(x, u) \quad (1)$$

on fait les hypothèses suivantes

i)  $f(x, u) \in C^0([0, 1] \times R)$

ii) Il existe une constante  $\gamma > 0$  telle que

$$\frac{f(x, u_1) - f(x, u_2)}{u_1 - u_2} \geq -\gamma > -\infty; u_1 \neq u_2, \forall x \in [0, 1] \text{ et } \gamma \geq 0.$$

iii) Quelque soit  $N > 0$ ,  $\exists$  une constante  $C(N)$  telle que si  $|u_1| \leq N$ ,  $|u_2| \leq N$  on a

$$\frac{f(x, u_1) - f(x, u_2)}{u_1 - u_2} \leq \alpha(N) < +\infty \text{ pour } u_1 \neq u_2, \forall x \in [0, 1].$$

Nous avons alors le

THEOREME 2.1. On suppose i), ii) et iii) alors

1 — Il existe  $u \in H_0^1(0, 1)$  unique tel que  $u'' = f(x, u)$

2 — Posons  $Au = -u'' + f(x, u)$ ;  $Su = -\frac{d^2 u}{dx^2}$  alors la suite  $(u_n)$  définie par les itération :

$$(2.2) \quad u_{n+1} = u_n - \rho S^{-1} Au_n$$

converge dans  $H_0^1(0, 1)$  fort vers la solution  $u$  de (2.1) pour  $u_0 = 0$  et  $\rho > 0$  convenable donné par (2.5).

DÉMONSTRATION. L'opérateur  $Au = -u'' + f(x, u)$  applique  $H_0^1(0, 1)$  dans  $H^{-1}(0, 1)$ . Vérifions les hypothèses du théorème 1.1 paragraphe I — 1.

Posons  $[u] = \|u\|$ . D'après (i) on a :

$$(Au - Av, u - v) \geq \|u' - v'\|_{L^2(0, 1)}^2 - \gamma \|u - v\|_{L^2(0, 1)}^2.$$

---

(1) Ce problème a été étudié dans [7] par d'autres méthodes.

Il résulte du calcul des variations que

$$\pi^2 = \operatorname{Inf}_{v \in H_0^1(0,1)} \frac{\int_0^1 |v'|^2 dx}{\int_0^1 |v|^2 dx}.$$

Donc

$$\|v\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \frac{1}{\pi^2} \|v'\|_{L^2(0,1)}^2 \quad \forall v \in H_0^1(0,1).$$

D'où

$$(2.3) \quad (Au - Av, u - v) \geq k[u - v]^2 \quad \text{avec } k = 1 - \frac{\gamma}{\pi^2}; \quad 0 \leq \gamma < \pi^2.$$

D'après ii) et iii), si  $|u| \leq N$ ,  $|v| \leq N$  nous avons

$$|f(x, u) - f(x, v)| \leq |u - v| \sup(|\alpha(N)|, |\gamma|).$$

Supposons que  $[u] \leq N$  et  $[v] \leq N$ . Alors

$$|(Au - Av, w)| \leq \|u' - v'\|_{L^2} \|w'\|_{L^2} + \|f(x, u) - f(x, v)\| \|w\|.$$

D'où

$$(2.4) \quad |(Au - Av, w)| \leq C(N)[u - v][w] \quad \text{avec } C(N) = 1 + \frac{1}{\pi^2} \operatorname{Sup}(|\alpha|, |\gamma|).$$

Les hypothèses du théorème 1.1 chap. I sont donc vérifiées. Si on pose :

$$X = H_0^1(0, 1); \quad u_0 = 0, \quad N = \frac{2}{k} \|A(0)\|_{L^2} \quad \text{et} \quad \varrho = k/C^2(N)$$

REMARQUE 2.1. Les itérations (2.2) convergent pourvu que  $\varrho$  vérifie :

$$(2.5) \quad 0, < \varrho < \frac{2k}{C^2(N)} \quad \text{où } k = 1 - \frac{\gamma}{\pi^2}; \quad C(N) = 1 + \frac{1}{\pi^2} \operatorname{Sup}(|\alpha|, |\gamma|); \quad 0 \leq \gamma < \pi^2.$$

Nous allons montrer maintenant que la discrétisation n'introduit aucune erreur dans le problème et pourvu que l'on prenne un paramètre  $h > 0$  suffisamment petit; tout se passe comme si on itérait effectivement dans l'espace de l'Hilbert  $H_0^1(0, 1)$ . Ceci est d'ailleurs valable chaque fois que le problème aux limites est bien posé dans un Hilbert quelconque  $\mathcal{H}$ .

Soit  $N$  un entier et  $h$  un paramètre  $> 0$  tel que  $Nh = 1$ . On divise l'intervalle  $(0, 1)$  en  $N$  intervalles  $(0, h), (h, 2h) \dots ((N - 1)h, Nh)$ . Soit  $\theta_h^i$  la fonction caractéristique de  $]ih, (i + 1)h[$ ;  $i = 0, \dots, N - 1$ .

Posons :

$$V_h = \left\{ u_h \mid u_h = \sum_{i=0}^{N-1} u_h^i \theta_h^i, u_h^i \in R; u_h^0 = u_h^{N-1} = 0 \right\}$$

$V_h$  est un espace de dimension finie que nous mettons en dualité avec  $V'_h$  à l'aide du produit scalaire

$$(u_h, v_h)_h = h \sum_{i=0}^{N-1} u_h^i v_h^i.$$

Posons

$$\mathcal{V}_h u_h(x) = \frac{u_h\left(x + \frac{h}{2}\right) - u_h\left(x - \frac{h}{2}\right)}{h}; \mathcal{V}_h^2 u_h = \mathcal{V}_h(\mathcal{V}_h u_h).$$

Soit  $\chi_h = \frac{1}{h} \theta_h^0$ . On pose  $p_h u_h = \sum_{i=0}^{N-1} u_h^i \chi_h * \theta_h^i$  (où le signe  $*$  désigne le produit de convolution)

$$r_h u(x) = u(ih), \text{ pour } x \in ]ih, (i + 1)h[, i = 1, \dots, N - 1.$$

PROPOSITION 2.1. Posons

$$f_h(x, u_h) = \widehat{r_h} f(x, u) \quad u_h \in V_h, u \in H_0^1(0, 1)$$

$$(2.6) \quad A_h u_h = -\mathcal{V}_h^2 u_h + f_h(x, u_h). \quad \text{Alors}$$

Il existe  $u_h \in V_h$  unique tel que

$$(2.7) \quad A_h u_h = 0.$$

De plus on a  $p_h u_h \rightarrow u$  dans  $H_0^1(0, 1)$  fort  $u$  étant la solution de (2.1).

PROPOSITION 2.2. La suite  $(u_h^n)$  définie par les itérations

$$(2.8) \quad u_h^{n+1} = u_h^n - \varrho S_h^{-1} A_h u_h^n$$

où  $S_h = -\mathcal{V}_h^2$  et  $A_h$  donné par (2.6) converge vers  $u_h$  solution de (2.7) pour  $u_h^0 = 0$  et  $\varrho > 0$  donné par (2.9).



DÉMONSTRATION. Nous avons en effet :

$$(A_h u_h - A_h v_h, u_h - v_h)_h = (A p_h u_h - A p_h v_h, p_h u_h - p_h v_h) = X$$

$$X \geq \left(1 - \frac{\gamma}{\pi^2}\right) \left\| \frac{d}{dx} (p_h u_h - p_h v_h) \right\|_{L^2}^2 = \left(1 - \frac{\gamma}{\pi^2}\right) \|\nabla_h u_h - \nabla_h v_h\|_{L^2}^2.$$

D'où

$$(A_h u_h - A_h v_h, u_h - v_h)_h \geq k [u_h - v_h]^2 \text{ avec } k = 1 - \frac{\gamma}{\pi^2}.$$

Si on pose  $[u_h] = \|\nabla_h u_h\|_{L^2}$ .

De même on a :

$$(A_h u_h - A_h v_h, w_h) \leq C(N) [u_h - v_h] [w_h]$$

où

$$C(N) = 1 + \frac{1}{\pi^2} \text{Sup} (|\alpha|, |\gamma|).$$

Il suffit donc de poser

$$(2.9) \quad u_h^0 = 0, N = \frac{2}{k} \|A_h(0)\|_{L^2} \text{ et } \varrho = k/C^2(N).$$

REMARQUE 2.2. 1. — Nous avons donc  $u_h^n \rightarrow u_h$  dans  $V_h$  et

$$p_h u_h \rightarrow u \text{ dans } H_0^1(0, 1) \text{ fort ;}$$

$u$  étant la solution de (2.1).

2. — Comme le paramètre  $\varrho$  est indépendant de  $h$ , il résulte que l'on peut prendre  $h$  aussi petit que l'on veut ; ce qui annule l'erreur de discrétisation.

3. A priori nous avons les majorations de l'erreur suivantes :

$$\|u_h^n - u_h\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{C_1} \|\nabla_h u_h^n - \nabla_h u_h\|_{L^2}^2 \leq \theta^n \|\nabla_h u_h\|^2$$

où  $C_1$  est une constante de l'ordre de  $\pi^2$  d'après un calcul de variation « discret ».

$$\theta = 1 - \frac{k^2}{C^2(N)} ; k = 1 - \frac{\gamma}{\pi^2} ; C(N) = 1 + \frac{1}{\pi^2} \text{Sup} (a(N), \gamma)$$

et

$$N = \frac{2}{k} \|f(x, 0)\|_{L^2}.$$

En ce qui concerne l'erreur sur la convergence de  $p_h u_h$  vers  $u$  nous avons à priori la majoration  $\|p_h u_h - u\| \leq C_2 h$ .

En effet d'après la remarque 5.3 chap. I de [14] nous avons

$$\|p_h u_h - u\| \leq C_3 \|p_h r_h u - u\|.$$

On montre dans [2] que si  $v \in H^q(0, 1)$  on a :

$$\|p_h r_h u - u\|_{H^m(0,1)} \leq C_u h^{q-m} \quad q \geq m, C_u > 0,$$

Comme  $u'' = f(x, u) \in C^0([0, 1] \times R)$ ; il résulte que  $u \in H^2(0, 1)$ . Donc  $\|p_h u_h - u\| \leq C_2 h$ .

*Résultats numériques du problème 1.*

On cherche  $u \in H_0^1(0, 1)$  vérifiant :

$$(2.10) \quad u'' = \frac{1}{2} (u + x + 1)^3, \quad x \in [0, 1].$$

Ce problème admet pour solution exacte

$$(2.11) \quad u(x) = \frac{2}{2-x} - x - 1 \quad \text{cf [7].}$$

Posons

$$Au = -u'' + \frac{1}{2} (u + x + 1)^3.$$

On montre facilement que

$$(Au - Av, u - v) \geq [u - v]^2 \quad \text{avec} \quad [u] = \|u'\|_{L^2(0,1)}.$$

Si  $[u] \leq N$  et  $[v] \leq N$  on a :

$$(Au - Av, w) \leq C(N) [u - v] [w] \quad \forall w \in H_0^1(0, 1)$$

où  $C(N) = 1 + \frac{3}{2} \left( \frac{N+2}{\pi} \right)^2$  et l'on peut prendre

$$N = 2 \left\| \left\| \frac{(x+1)^3}{2} \right\| \right\|_{L^2(0,1)}.$$

Au problème (2.10) on associe alors le problème discrétisé

$$(2.12) \quad A_h u_h = 0 \quad \text{avec} \quad A_h u_h = -V^2 u_h + \frac{1}{2} (u_h + ih + 1)^3$$

$i = 0, 1, \dots, p$  où  $p$  est un entier réel tel que  $ph = 1$ . Alors la suite  $(u_h^n)$  définie par l'itération

$$(2.13) \quad u_h^{n+1} = u_h^n - \varrho S_h^{-1} A_h u_h^n \text{ avec } u_h^0 = 0$$

où

$$S_h = -\nabla^2 \text{ et } \varrho = 1/C^2(N)$$

converge vers  $u$  solution de (2.10) pour  $n$  suffisamment grand et  $h$  suffisamment petit.

Nous inversons l'opérateur  $S_h$  à l'aide de la méthode bien connue de Gauss-Seidel cf. [16] en réinitialisant chaque fois à zéro, pour les itérations internes.

Nous donnons ci-dessous les résultats numériques de

$$\|u_h^n - u\|_{L^2(0,1)} \text{ et } \|u_h^n - u\|_{L^\infty(0,1)}$$

en fonction du pas  $h$  après stabilisation des résultats dans les itérations (2.13)

$h$	$\ u_h^n - u\ _{L^2}$	$\ u_h^n - u\ _{L^\infty}$
1/10	1,965.10 <sup>-3</sup>	2,8.10 <sup>-3</sup>
1/20	5,214.10 <sup>-4</sup>	6,8.10 <sup>-4</sup>
1/40	1,325.10 <sup>-4</sup>	1,8.10 <sup>-4</sup>
1/80	3,356.10 <sup>-5</sup>	4,6.10 <sup>-5</sup>

REMARQUE 2.3. L'exemple numérique ci-dessus a été traité par Ciarlet dans [7] par d'autres méthodes.

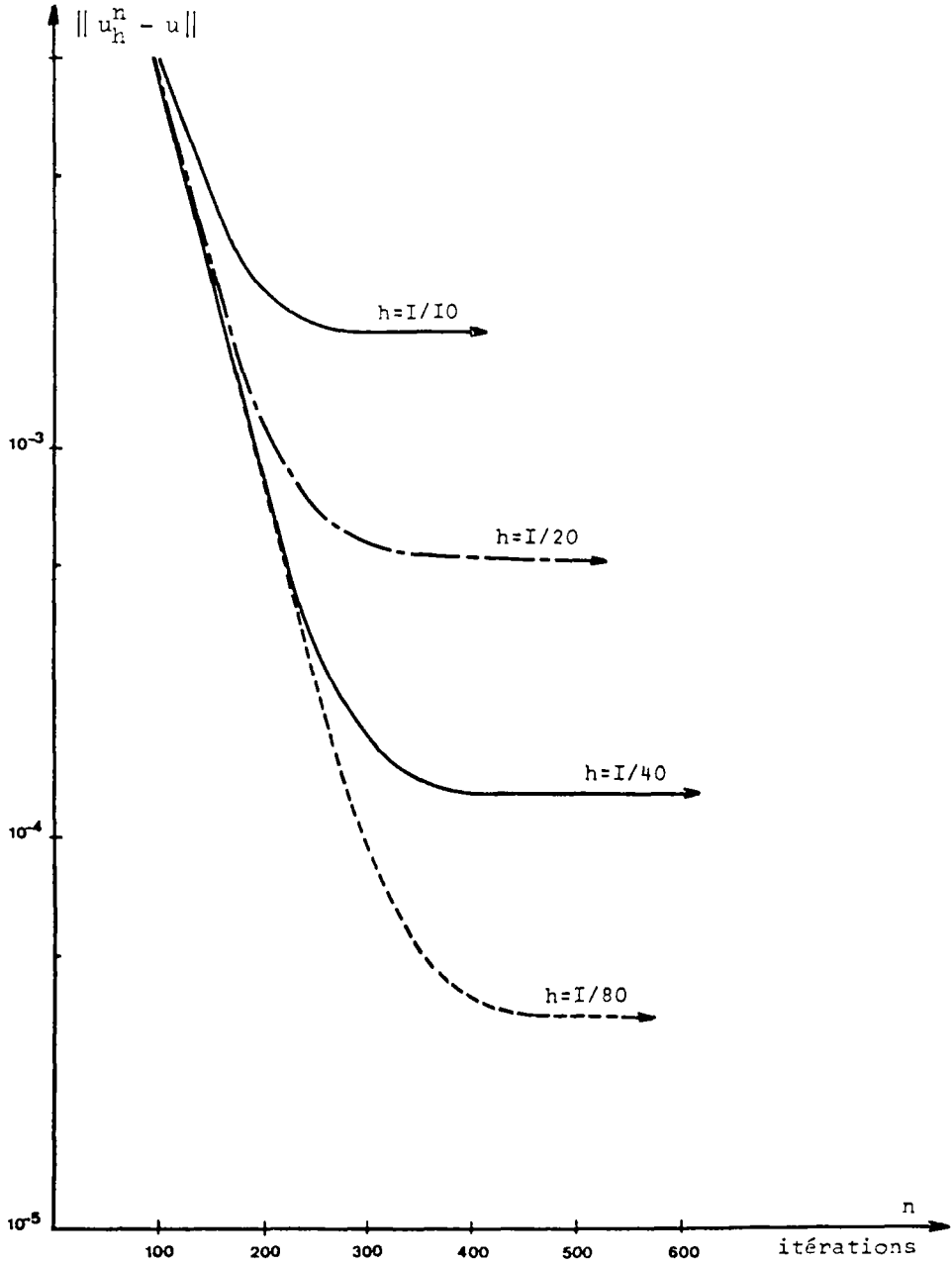
Notre méthode s'applique bien entendu pour des dimensions supérieures (cf problème 2).

Les courbes n° 1 donnent l'évolution de  $\|u_h^n - u\|_{L^2}$  en fonction de  $n$  (itérations) pour  $h = 1/10$ ,  $h = 1/20$ ,  $h = 1/40$  et  $h = 1/80$ .

*Temps de calcul.*

Le temps de calcul (compilation + exécution) pour  $h = 1/20$  et 500 itérations en C. D. C. 3 600 est de 55 s. Il y a lieu de signaler que les résultats se stabilisent complètement dès la 400ème itération.

COURBES n° 1



II — 2. Problème 2.

Cet exemple généralise le précédent au cas de la dimension  $n = 2$ . La théorie est analogue à celle du problème 1.

Soit

$$\Omega = (0, \alpha) \times (0, \alpha), \quad \alpha > 0 \text{ un ouvert de } \mathbb{R}^2.$$

On cherche  $u \in H_0^1(\Omega)$  solution de

$$(2.14) \quad \Delta u = f(x, y, u(x, y)) \quad (x, y) \in \Omega$$

où  $f$  est une application non linéaire de  $\Omega \times \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  on pose :

$$[u] = \left( \sum_{i=1}^2 \|D_i u\|_{L_2} \right)^{1/2} = (Su, u) \text{ avec } S = -\Delta$$

pour

$$f(x, y, u) = 2 \frac{x^2 + y^2}{(\alpha - x - y)^2} \left( u + 1 + \frac{1}{\alpha - 1} (x - 1)(y - 1) \right)^3 - \frac{2(x + y)}{(\alpha - 1 - xy)^2}$$

la solution exacte de (2.14) est donnée par

$$(2.15) \quad u(x, y) = \frac{\alpha - x - y}{\alpha - 1 - xy} - 1 - \frac{1}{\alpha - 1} (x - 1)(y - 1) \quad \alpha > 2.$$

Posons alors

$$(2.16) \quad Au = -\Delta u + f(x, y, u) = 0$$

au problème (2.16) on associe le problème discrétisé

$$(2.17) \quad A_h u_h = 0 \quad \text{avec } h_1 = h_2 = h$$

et l'itération :

$$(2.18) \quad u_h^{n+1} = u_h^n - \varrho S_h^{-1} (A u_h^n) \quad \text{avec } u_h^0 = 0$$

avec

$$(2.19) \quad \varrho = 1/C^2(N)^*$$

où  $C(N) = 1 + \frac{\alpha(N)}{2\pi^2}$  avec  $\alpha(N) = \frac{12}{(\alpha - 2)^2} \left( N + \frac{\alpha}{\alpha - 1} \right)^2$  et

$$N = 2 \|f(x, y, 0)\|_{L_2}.$$

\*Le paramètre  $\varrho$  est calculé comme dans le problème 1.

On sait que  $u_h^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u_h$  et que  $p_h u_h \rightarrow u$  quand  $h \rightarrow 0$  où  $u$  est la solution de (2.14).

Dans les itérations (2.18) on résoud en outre l'équation :

$$(2.20) \quad -\Delta(A_h u_h^n) = 0 = -\Delta g, \quad \text{en posant } g = A_h u_h^n,$$

à l'aide des itérations internes (de Gauss-Seidel cf. [16]) :

$$(2.21) \quad g_{p+1}(x, y) = \frac{1}{4}(g_{p+1}(x-h, y) + g_p(x+h, y) + g_{p+1}(x, y-h) + g_p(x, y+h)).$$

A chaque itération principale  $n$ , il est *beaucoup plus rentable* d'utiliser comme valeur initiale de  $g_0$  dans (2.21) la valeur finale du calcul précédent qui peut être très voisine du nouveau résultat.

Nous prenons comme test d'arrêt pour les itérations (2.21) :

$$\frac{\|g_{p+1} - g_p\|}{\|g_{p+1}\|} < \varepsilon, \quad \varepsilon \text{ donné.}$$

on prendra pour  $\| \cdot \| = \| \cdot \|_{L^\infty(\Omega)}$  qui nécessite moins d'opérations que  $\| \cdot \|_{L_2}$  ou  $\| \cdot \|_{H_0^1}$ .

*Influence de paramètre  $\varepsilon$*  cf. courbes n° 2a, n° 2b et n° 2c).

Le nombre d'itérations nécessaires pour inverser le laplacien augmente bien sûr lorsqu'on diminue l'erreur tolérable  $\varepsilon$ . Comme le temps de calcul est directement lié au nombre d'itérations, il est avantageux de choisir  $\varepsilon$  pas trop petit. Afin de mettre en évidence cette valeur suffisante de  $\varepsilon$ , les courbes donnant  $\|u_n - u\|/\|u\|$  en fonction de  $\varepsilon$  ont été tracées.

On constate que pour  $M = \frac{1}{h} = 10$   $\alpha = 5$ ,  $\varrho = 0,796068$  ;

Il suffit de choisir  $10^{-6} < \varepsilon < 10^{-4}$ . (cf. tableau n° 2a).

Pour

$$M = \frac{1}{h} = 20, \quad \alpha = 5, \quad \varrho = 0,985 ;$$

il suffit de choisir  $10^{-7} < \varepsilon < 2 \cdot 10^{-6}$  (cf. tableau n° 2b).

Un tel choix permet d'obtenir dès les premières itérations une meilleure précision que celle qui est obtenue lorsque les résultats deviennent stationnaires.

Ainsi : (cf. tableau n° 2a)

pour

$$M = 10 \quad \varrho = 0,796068, \quad \varepsilon = 10^{-5}$$

on a

$$\|u_n - u\| / \|u\| = 1,611 \cdot 10^{-4} \quad \text{dès l'itération 10 ;}$$

alors que pour  $\varepsilon = 10^{-7}$

on a

$$\frac{\|u_u - u\|}{\|u\|} = 2,205 \cdot 10^{-4} \quad \text{après 40 itérations.}$$

pour

$$M = 20, \quad \varrho = 0,985, \quad \varepsilon = 10^{-8} \quad (\text{tableau n° 2b})$$

on a :

$$\frac{\|u_u - u\|}{\|u\|} = 3,70 \cdot 10^{-5} \quad \text{dès la 3ème itération.}$$

alors que pour  $\varepsilon = 10^{-10}$

on a

$$\|u_u - u\| / \|u\| = 5,84 \cdot 10^{-5} \quad \text{après 90 itérations.}$$

REMARQUE 2.4. Il est possible de déterminer cette valeur suffisante de  $\varepsilon$  en calculant  $D_\varepsilon = \|u_2 - u_1\| / \|u_2\|$  pour  $\varepsilon = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \dots$  Lorsque

$$\frac{D_\varepsilon - D_{\varepsilon_1}}{D_{\varepsilon_1}} < 10^{-2}, \quad \text{la valeur de } \varepsilon \text{ est suffisante.}$$

*Influence du paramètre  $\varrho$  — cf. courbes n° 2d, n° 2e et tableau n° 2c).*

On a constaté que  $\|u_n - u_{n-1}\| / \|u_n\|$  décroît d'autant plus vite que  $\varrho$  est plus proche de la valeur de  $\varrho$  optimale, pour décroître plus lentement dès que la stabilisation est obtenue.

Pour  $\varrho$  petit la stabilisation est obtenue tard

Pour  $\varrho$  très grand ( $\varrho \cong 2$ )  $\|u_n - u\| / \|u\|$  décroît puis oscille sans se stabiliser.

Entre ces cas extrême on peut obtenir une valeur de  $\varrho$  optimale pour laquelle la stabilisation a lieu dès les premières itérations et sans oscillation.

Pour

$$M = 10, \quad \alpha = 5, \quad \varepsilon = 10^{-8}, \quad \varrho = 0,987$$

la stabilisation est obtenue dès la 4ème itération.

On est donc amené à chercher de façon plus précise cette valeur optimale de  $\varrho$  (cf. chap. I proposition 1.1).

TABLEAU n° 2a

$M = 10$   
 $\alpha = 5$   
 $\rho = 0,796068$

Erreur relative totale  $\|u_n - u\| / \|u\|$

iter.	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$	$10^{-8}$	$10^{-9}$	$10^{-10}$
1	5.673.10 <sup>-1</sup>	2.626.10 <sup>-1</sup>	2.005.10 <sup>-1</sup>	1.944.10 <sup>-1</sup>	1.937.10 <sup>-1</sup>	1.937.10 <sup>-1</sup>	1.936.10 <sup>-1</sup>	1.936.10 <sup>-1</sup>	1.936.10 <sup>-1</sup>	1.936.10 <sup>-1</sup>
2	3.898	7.023.10 <sup>-2</sup>	5.220.10 <sup>-3</sup>	6.610.10 <sup>-3</sup>	7.382.10 <sup>-3</sup>	7.452.10 <sup>-3</sup>	7.460.10 <sup>-3</sup>	7.461.10 <sup>-3</sup>	7.461.10 <sup>-3</sup>	7.461.10 <sup>-3</sup>
5	3.165	5.120	3.531	4.126.10 <sup>-4</sup>	3.954.10 <sup>-4</sup>	4.786.10 <sup>-4</sup>	4.866.10 <sup>-4</sup>	4.874.10 <sup>-4</sup>	4.875.10 <sup>-4</sup>	4.875.10 <sup>-4</sup>
10	1.918	3.041	2.224	3.693	1.611	2.197	2.197	2.205	2.206	2.206
15	1.158	1.828	1.305	1.632	1.844	2.164	2.200	2.205	2.205	2.205
30	2.540.10 <sup>-2</sup>	4.114.10 <sup>-3</sup>	1.641.10 <sup>-4</sup>	1.538	2.125	2.196	2.204	2.205	2.205	2.205
45	5.578.10 <sup>-3</sup>	1.055	1.544	2.055	2.188	2.203	2.205	2.205	2.205	2.205

Erreur relative Cauchy  $\|u_n - u_{n-1}\| / \|u_n\|$

iter.	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$	$10^{-8}$	$10^{-9}$	$10^{-10}$
2	2.200.10 <sup>-1</sup>	1.748.10 <sup>-1</sup>	1.693.10 <sup>-1</sup>	1.634.10 <sup>-1</sup>	1.633.10 <sup>-1</sup>	1.621.10 <sup>-1</sup>	1.621.10 <sup>-1</sup>	1.621.10 <sup>-1</sup>	1.621.10 <sup>-1</sup>	1.621.10 <sup>-1</sup>
3	9.122.10 <sup>-2</sup>	3.980.10 <sup>-2</sup>	3.337.10 <sup>-2</sup>	3.069.10 <sup>-2</sup>	3.044.10 <sup>-2</sup>	3.042.10 <sup>-2</sup>	3.042.10 <sup>-2</sup>	3.041.10 <sup>-2</sup>	3.041.10 <sup>-2</sup>	3.041.10 <sup>-2</sup>
5	4.907	7.152.10 <sup>-3</sup>	1.197.10 <sup>-3</sup>	1.127.10 <sup>-3</sup>	1.136.10 <sup>-3</sup>	1.138.10 <sup>-3</sup>	1.132.10 <sup>-3</sup>	1.132.10 <sup>-3</sup>	1.132.10 <sup>-3</sup>	1.132.10 <sup>-3</sup>
10	2.500	3.985	2.750.10 <sup>-4</sup>	5.859.10 <sup>-5</sup>	6.348.10 <sup>-6</sup>	3.897.10 <sup>-7</sup>	2.573.10 <sup>-7</sup>	3.110.10 <sup>-7</sup>	3.108.10 <sup>-7</sup>	3.107.10 <sup>-7</sup>
15	1.390	1.987	1.563	3.635	4.159	4.673	5.891.10 <sup>-8</sup>	6.128.10 <sup>-9</sup>	6.652.10 <sup>-10</sup>	2.446.10 <sup>-11</sup>
30	2.767.10 <sup>-3</sup>	4.210.10 <sup>-4</sup>	3.649.10 <sup>-5</sup>	8.099.10 <sup>-6</sup>	9.300.10 <sup>-7</sup>	1.051	1.339	1.416	1.757	1.583
45	5.899.10 <sup>-4</sup>	9.109.10 <sup>-5</sup>	8.041.10 <sup>-6</sup>	1.765	2.027	2.292.10 <sup>-8</sup>	2.928.10 <sup>-9</sup>	3.096.10 <sup>-10</sup>	4.419.10 <sup>-11</sup>	2.689.10 <sup>-12</sup>
nbre d'itérations	> 98	> 115	> 138	≧ 200	271	267	495	655	764	1107



T ABLEAU n° 2 b

$M = 20$   
 $\alpha = 5$   
 $\rho = 0.985$

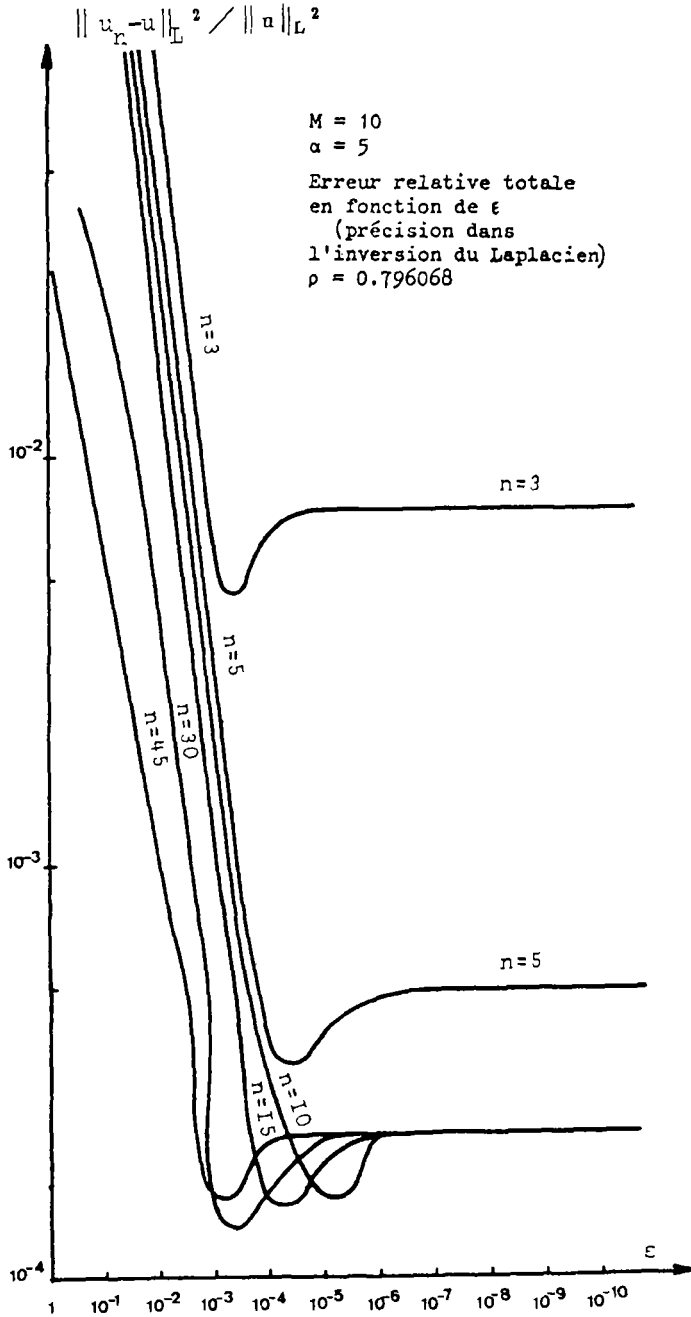
Erreur relative totale:  $\|u_n - u\| / \|u\|$

iter.	10 <sup>-1</sup>	10 <sup>-2</sup>	10 <sup>-3</sup>	10 <sup>-4</sup>	10 <sup>-5</sup>	10 <sup>-6</sup>	10 <sup>-7</sup>	10 <sup>-8</sup>	10 <sup>-9</sup>	10 <sup>-10</sup>
1	7.9756.10 <sup>-1</sup>	2.8651.10 <sup>-1</sup>	4.0171.10 <sup>-2</sup>	7.4397.10 <sup>-3</sup>	4.6624.10 <sup>-3</sup>	4.4446.10 <sup>-3</sup>	4.4238.10 <sup>-3</sup>	4.4217.10 <sup>-3</sup>	4.4215.10 <sup>-3</sup>	4.4215.10 <sup>-3</sup>
3	7.5620	2.6257	2.4940	3.8204	3.8869.10 <sup>-4</sup>	3.7099.10 <sup>-5</sup>	5.5521.10 <sup>-5</sup>	5.8178.10 <sup>-5</sup>	5.8480.10 <sup>-5</sup>	5.8510.10 <sup>-5</sup>
5	7.1951	2.4977	2.3587	3.6341	3.2037	3.7655	5.5602	5.8182	5.8424	5.8448
10	6.3562	2.2042	2.0571	3.2038	2.7694	3.8524	5.5910	5.8211	5.8427	5.8448
15	5.6160	1.9451	1.7986	2.8250	2.3874	3.3825	5.6191	5.8237	5.8429	5.8448
30	3.8720	1.3362	1.2140	1.9344	1.4976	4.4382	5.0873	5.8301	5.8485	5.8449
45	2.6662	9.1759.10 <sup>-2</sup>	8.2687.10 <sup>-3</sup>	1.3183	9.0140.10 <sup>-5</sup>	4.8370	7.7358	5.8346	5.8440	5.8449
90	3.6575.10 <sup>-2</sup>	2.9710	2.6823	3.9602.10 <sup>-4</sup>	3.0966	5.5050		5.8416	5.8447	5.8450

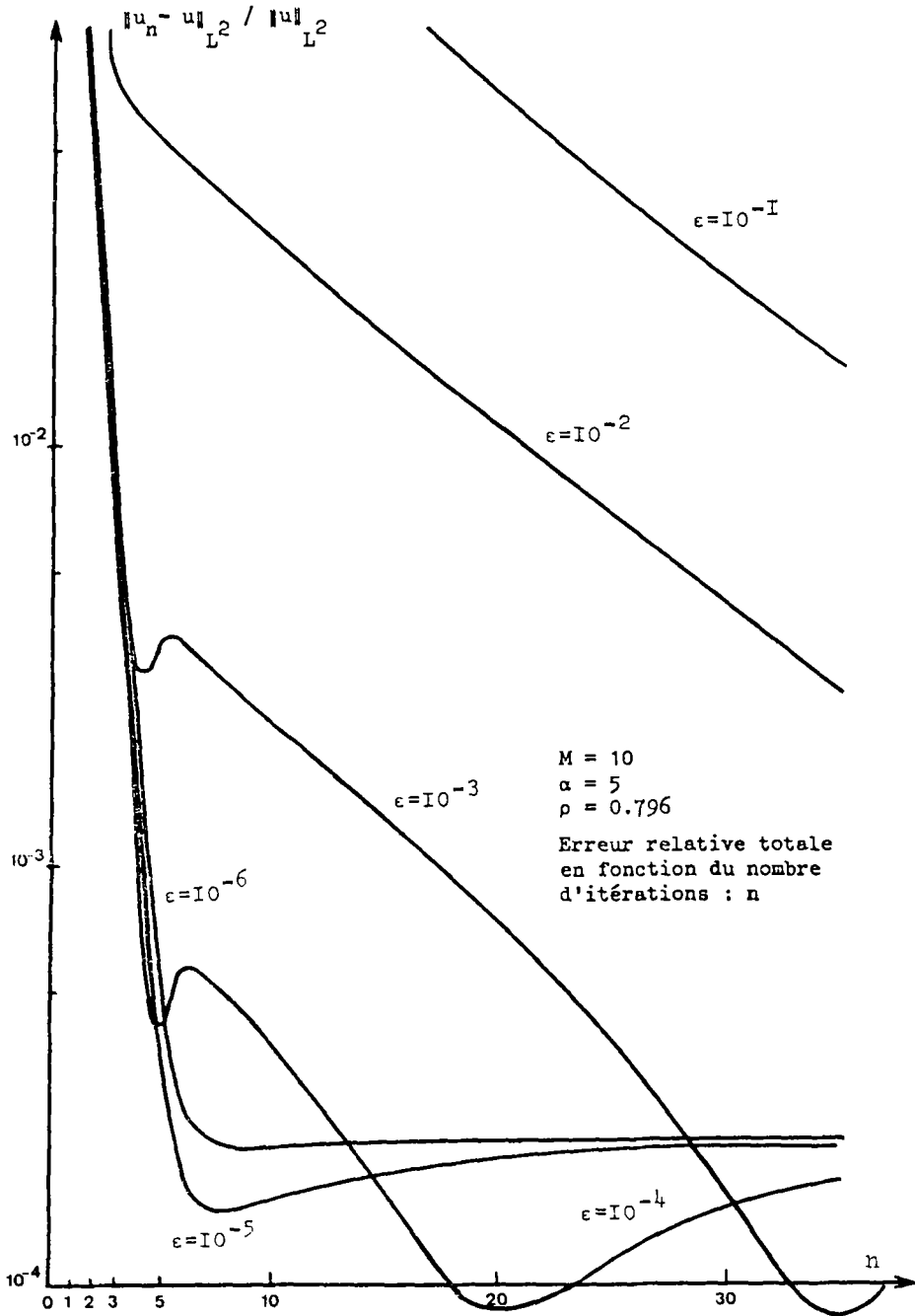
Erreur relative Cauchy:  $\|u_n - u_{n-1}\| / \|u_n\|$

iter.	10 <sup>-1</sup>	10 <sup>-2</sup>	10 <sup>-3</sup>	10 <sup>-4</sup>	10 <sup>-5</sup>	10 <sup>-6</sup>	10 <sup>-7</sup>	10 <sup>-8</sup>	10 <sup>-9</sup>	10 <sup>-10</sup>
2	9.5138.10 <sup>-2</sup>	2.3539.10 <sup>-2</sup>	1.5568.10 <sup>-2</sup>	1.0566.10 <sup>-2</sup>	4.8475.10 <sup>-3</sup>	4.4077.10 <sup>-3</sup>	4.3673.10 <sup>-3</sup>	4.3633.10 <sup>-3</sup>	4.3629.10 <sup>-3</sup>	4.3629.10 <sup>-3</sup>
3	7.5058.10 <sup>-2</sup>	9.1389.10 <sup>-3</sup>	9.4661.10 <sup>-4</sup>	1.0655.10 <sup>-4</sup>	6.0576.10 <sup>-5</sup>	5.3580.10 <sup>-5</sup>	5.0346.10 <sup>-5</sup>	5.0046.10 <sup>-5</sup>	5.0037.10 <sup>-5</sup>	5.0036.10 <sup>-5</sup>
5	6.2042.10 <sup>-2</sup>	8.3567.10 <sup>-3</sup>	7.0647.10 <sup>-4</sup>	9.5940.10 <sup>-5</sup>	9.3959.10 <sup>-6</sup>	9.6777.10 <sup>-7</sup>	9.2163.10 <sup>-8</sup>	8.9008.10 <sup>-9</sup>	8.4729.10 <sup>-9</sup>	8.3163.10 <sup>-9</sup>
10	4.2419.10 <sup>-2</sup>	7.1102.10 <sup>-3</sup>	5.9147.10 <sup>-4</sup>	8.3535.10 <sup>-5</sup>	8.2821.10 <sup>-6</sup>	8.36 .10 <sup>-7</sup>	8.6141.10 <sup>-8</sup>	8.7430.10 <sup>-9</sup>	9.2981.10 <sup>-10</sup>	1.3006.10 <sup>-10</sup>
15	3.1334.10 <sup>-2</sup>	6.0823.10 <sup>-3</sup>	5.0364.10 <sup>-4</sup>	7.3121.10 <sup>-5</sup>	7.2983.10 <sup>-6</sup>	7.2269.10 <sup>-7</sup>	7.47 .10 <sup>-8</sup>	7.4715.10 <sup>-9</sup>	7.9245.10 <sup>-10</sup>	1.1966.10 <sup>-10</sup>
30	1.5675.10 <sup>-2</sup>	3.8976.10 <sup>-3</sup>	3.2405.10 <sup>-4</sup>	4.9957.10 <sup>-5</sup>	5.0006.10 <sup>-6</sup>	4.7893.10 <sup>-7</sup>	4.9609.10 <sup>-8</sup>	4.8433.10 <sup>-9</sup>	5.0485.10 <sup>-10</sup>	9.9632.10 <sup>-11</sup>
45	9.0998.10 <sup>-3</sup>	2.5530.10 <sup>-3</sup>	2.1508.10 <sup>-4</sup>	3.4465.10 <sup>-5</sup>	3.4284.10 <sup>-6</sup>	3.2308.10 <sup>-7</sup>	3.3484.10 <sup>-8</sup>	3.2317.10 <sup>-9</sup>	3.3581.10 <sup>-10</sup>	9.8886.10 <sup>-11</sup>
90	2.3986.10 <sup>-3</sup>	7.7619.10 <sup>-4</sup>	6.7285.10 <sup>-5</sup>	1.1282.10 <sup>-5</sup>	1.1068.10 <sup>-6</sup>	1.0271.10 <sup>-7</sup>		1.0227.10 <sup>-9</sup>	1.2895.10 <sup>-10</sup>	7.9316.10 <sup>-11</sup>

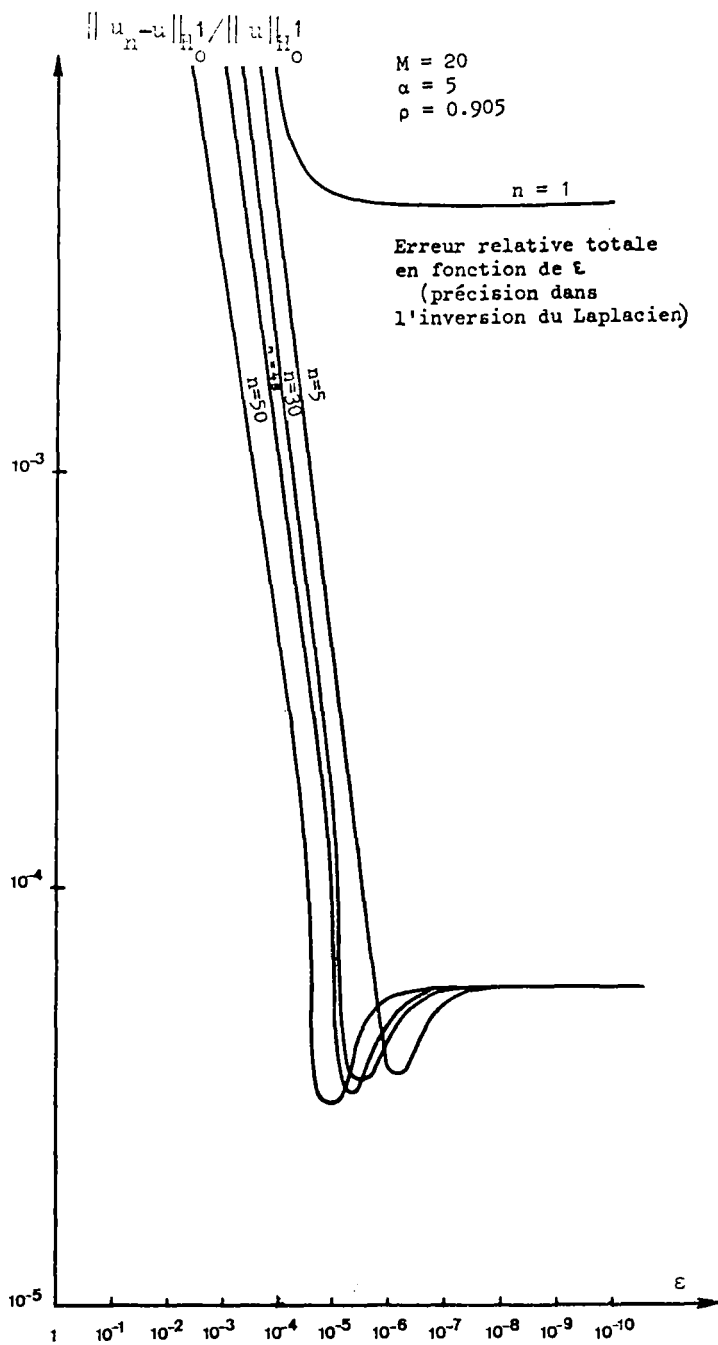
COURBES n° 2a



COURBES n° 2b



## COURBES n° 2c



Partant de  $u_0 = 0$

$$u_n = u_{n-1} - \varrho (u_{n-1} - g_{n-1}) \text{ avec } \Delta g_{n-1} = f(x, y, u_{n-1})$$

donne

$$u_1 = \varrho g_0 \text{ avec } \Delta g_0 = f(x, y, 0)$$

donc

$$\| u_1 - u \| / \| u \| = \varphi(\varrho)$$

est une hyperbole.

Le minimum  $\varrho$  de  $\| u_1 - u \| / \| u \|$  est atteint pour

$$\varrho = (g_0, u) / (g_0, g_0).$$

Ne connaissant pas  $u$  on est amené à rechercher une valeur approchée de ce minimum.

On ne peut en fait que rechercher le minimum de  $\| u_2 - u_1 \| / \| u_2 \|$  ce qui donne une localisation assez précise de  $\varrho_{\min}$ .

*Accélération de la convergence.*

Posons

$$G(u_h^n) = u_h^n - \varrho S_h^{-1}(A_h u_h^n), \quad u_h^0 = 0$$

$$l_n = -\varrho S_h^{-1}(A_h u_h^n) = G(u_h^n) - u_h^n$$

On étudie alors la convergence de la suite  $u_h^n$  définie par (cf. chap. I remarque 1.2)

$$(2.22) \quad u_h^{n+1/2} = G(u_h^n), \quad u_h^0 = 0$$

$$(2.23) \quad u_h^{n+1} = u_h^n - \frac{l_n^2}{l_{n+1/2} - l_n}.$$

Un seul résultat suffit à montrer l'énorme supériorité de cette deuxième méthode par rapport aux itérations (2.18).

Pour

$$M = 1/h = 10, \alpha = 5, \varepsilon = 10^{-5}, \varrho = 0.796$$

On obtient le résultat :

$$\| u_h^n - u \| / \| u \| = 2,205 \cdot 10^{-4}$$

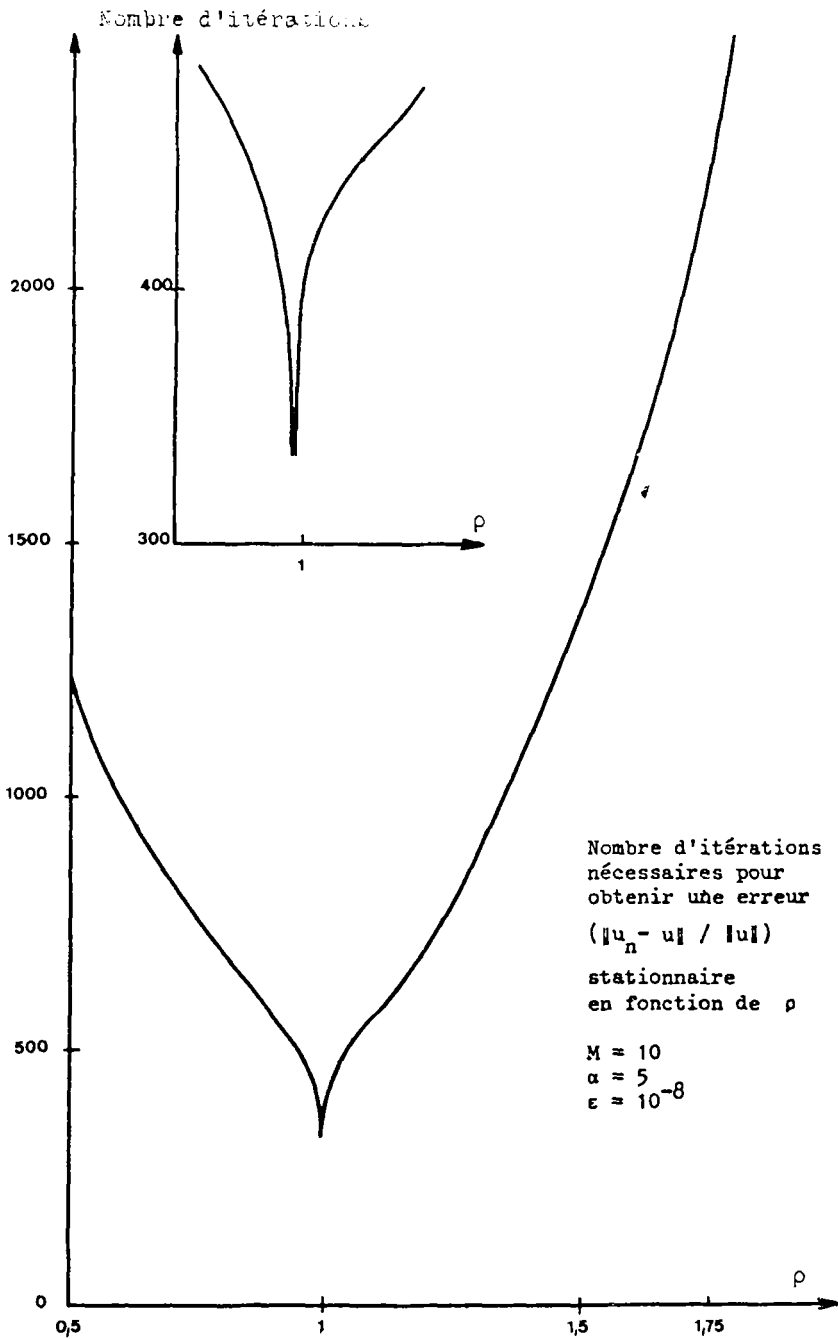
après 37 itérations par la 2ème méthode  
et 77 itérations par la 1ère méthode.

TABLEAU 2c

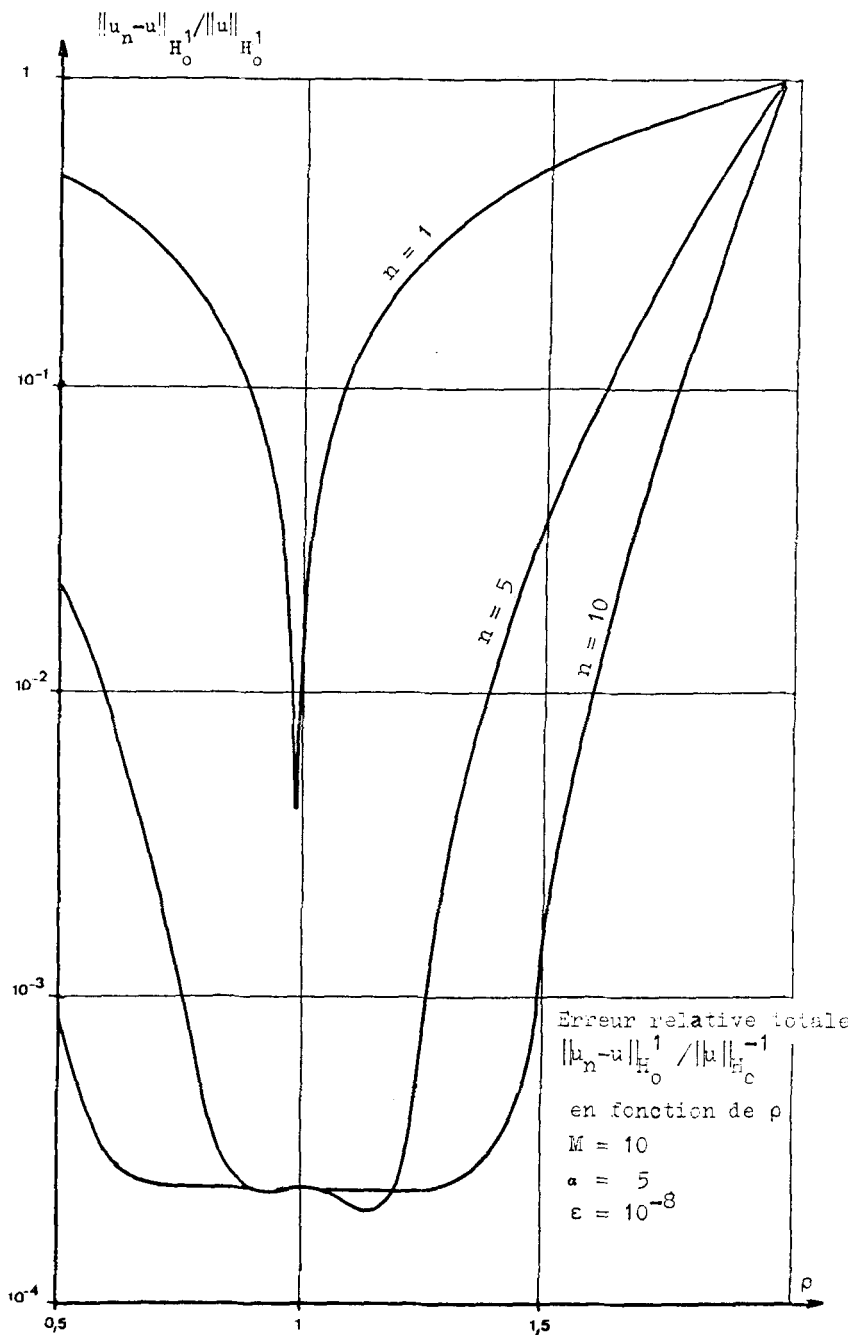
$M = 10$   
 $\alpha = 5$   
 $\varepsilon = 10$

0.55	$1.0686 \cdot 10^{-1}$	$4.4284 \cdot 10^{-4}$	$1.7228 \cdot 10^{-2}$	$5.1265 \cdot 10^{-4}$	1080
0.60	2.8164	3.9219	$9.4836 \cdot 10^{-3}$	3.1408	984
0.67	2.4307	3.2129	3.6354	2.4414	869
0.74	2.0013	2.5038	1.0085	2.3434	769
0.8	$1.5925 \cdot 10^{-2}$	1.8961	$4.6716 \cdot 10^{-4}$	2.3352	691
0.84	1.2960	1.4910	3.0128	2.3348	640
0.9	$8.0996 \cdot 10^{-2}$	$8.8352 \cdot 10^{-2}$	2.3814	2.3348	542
0.92	6.3578	6.8117	2.3471	2.3349	535
0.94	4.5508	4.7903	2.3368	2.3349	505
0.96	2.6794	2.7758	2.3348	2.3350	468
0.97	1.7259	1.7785	2.3348	2.3350	445
0.98	$7.9530 \cdot 10^{-3}$	$8.2045 \cdot 10^{-3}$	2.3348	2.3350	412
0.982	6.2911	6.4920	2.3349	2.3351	402
0.983	5.5431	5.7132	2.3349	2.3351	395
0.984	4.8868	5.0188	2.3350	2.3352	387
0.985	4.3650	4.4485	2.3350	2.3352	375
0.986	4.0318	4.0548	2.3357	2.3356	335
0.987	3.9370	3.8918	2.3350	2.3352	337
0.988	4.0988	3.9879	2.3350	2.3352	381
0.989	4.4909	4.3259	2.3347	2.3350	393
0.990	5.0613	4.8555	2.3347	2.3350	402
0.995	9.1928	8.8698	2.3349	2.3351	423
1.00	$1.4048 \cdot 10^{-2}$	$1.3605 \cdot 10^{-2}$	2.3352	2.3353	431
1.02	3.4960	3.3524	2.3358	2.3358	458
1.05	6.8455	6.3807	2.3249	2.3350	529
1.1	$1.2954 \cdot 10^{-1}$	$1.1441 \cdot 10^{-1}$	2.1382	2.3358	577
1.2	2.7547	2.1568	2.5598	2.3374	712
1.3	4.6476	3.1697	$3.0083 \cdot 10^{-3}$	2.4369	907
1.4	7.2004	4.1827			
1.75	3.4093	7.7282	$2.7662 \cdot 10^{-1}$	$7.7161 \cdot 10^{-2}$	2264
1.85	6.9638	8.7412	5.1209	$2.6360 \cdot 10^{-1}$	
1.95	3.8615	9.7542	8.8592	$7.8801 \cdot 10^{-1}$	
	$n = 2$	$n = 1$	$n = 5$	$n = 10$	nombre total d'itérations pour avoir une erreur stationnaire
$\varepsilon$	$\frac{\ u_n - u_{n-1}\ _{H_0^1}}{\ u_n\ _{H_0^1}}$	$\frac{\ u_n - u\ _{H_0^1}}{\ u\ _{H_0^1}}$			

COURBES n° 2d



## COURBES n° 2e





Ceci correspond à un temps de calcul identique si le phénomène suivant n'avait pas lieu :

Alors qu'à l'itération 2 ;  $\|u_h^2 - u\| / \|u\| = 3,76 \cdot 10^{-2}$  par la première méthode ;

on a dès l'itération 1 ;  $\|u_h^1 - u\| / \|u\| = 1,056 \cdot 10^{-4}$  par la deuxième méthode ! Ceci résulte aussi du bon choix de  $\varepsilon$ .

Je remercie M. J. F. Boutemy pour avoir effectué la programmation de ce problème.

II — 3. *Problème 3.*

Soit  $\Omega = (0,1) \times (0,1)$  un ouvert de  $R^2$ . On cherche

$$u \in W_0^{1,3}(\Omega) = \{u \mid u \in L^3(\Omega), D_i u \in L^3(\Omega) \ i = 1,2\}$$

vérifiant l'équation

$$(2.24) \quad Au = f \text{ pour } f \text{ donné dans } L^{3/2}(\Omega)$$

avec

$$Au = \sum_{i=1}^2 D_i(|D_i u| D_i u) - \lambda \Delta u, \lambda > 0.$$

Au problème (2.24) on associe comme dans [3] et [14] l'équation discrétisée.

$$(2.25) \quad A_h u_h = f_h ; h = (h_1, h_2)$$

étant le paramètre de discrétisation d'un réseau  $\mathcal{R}_h$  associé à l'ouvert  $\Omega$  avec

$$A_h u_h = - \sum_{i=1}^2 \nabla_i(|\nabla_i u_h| \nabla_i u_h) - \lambda \sum_{i=1}^2 \nabla_i^2 u_h$$

où

$$\nabla_i u_h(x) = \frac{u_h\left(x + \frac{h_i}{2}\right) - u_h\left(x - \frac{h_i}{2}\right)}{h_i} \quad i = 1,2$$

Si

$$i = 1 \text{ on a : } u_h\left(x + \frac{h_i}{2}\right) = u_h\left(x_1 + \frac{h_1}{2}, x_2\right).$$

De même nous avons

$$\nabla_i^2 u_h(x) = \frac{u_h(x + h_i) + u_h(x - h_i) - 2u_h(x)}{h_i^2} \quad i = 1, 2.$$

Pour l'étude détaillée de la discrétisation du problème (2.24) cf. [3] et [14].

On se propose maintenant de résoudre le problème (2.25) à l'aide des méthodes itératives du chapitre I.

1ère méthode : méthode de décomposition de l'opérateur  $A_h$ .

Nous allons appliquer ici la méthode de la remarque 7.3 du chap. I de [14] en décomposant uniquement l'opérateur  $A_h$ . cf [10'], [14'], [17].

Plus précisément posons :

$$(2.26) \quad A_h = A_h^1 + A_h^2 \text{ et } f_h = f_h^1 + f_h^2$$

avec

$$A_h^i u_h = -V_i(|V_i u_h| V_i u_h) - \lambda V_i^2 u_h \quad i = 1, 2.$$

Soient  $\varepsilon$  et  $k$  deux paramètres  $> 0$  et  $N$  un entier tel que  $kN = 1$ . On suppose que  $\varepsilon \rightarrow 0$  et  $k = \frac{1}{N} \rightarrow 0$  et  $\frac{k}{\varepsilon} \rightarrow 0$ .

On applique alors la méthode de décomposition donnée par les formules :

$$(2.27) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_h u_h^{1/2} + \frac{\varepsilon}{k} u_h^{1/2} = f_1 + \frac{\varepsilon}{k} u_h^{(0)} \quad (\text{on prend } u_h^{(0)} = 0) \\ A_h^2 u_h^{(1)} + \frac{\varepsilon}{k} u_h^{(1)} = f_2 + \frac{\varepsilon}{k} u_h^{(1/2)} \\ A_h^1 u_h^{(3/2)} + \frac{\varepsilon}{k} u_h^{(3/2)} = f_1 + \frac{\varepsilon}{k} u_h^{(1)} \\ A_h^2 u_h^{(2)} + \frac{\varepsilon}{k} u_h^{(2)} = f_2 + \frac{\varepsilon}{k} u_h^{(3/2)} \quad \text{etc.} \end{array} \right.$$

Comme les opérateurs  $\left(A_h^1 + \frac{\varepsilon}{k} I\right)$  et  $\left(A_h^2 + \frac{\varepsilon}{k} I\right)$

vérifient les hypothèses du théorème 1.1 chap. I sur les itérations ; on peut donc procéder comme suit : (on supprime l'indice  $h$  pour simplifier).

1) On se donne  $u^{(0)} = 0$

2) On calcule  $u^{(1/2)}$  donné pour (2.27) à l'aide des itérations :

$$(2.28) \quad u_{n+1}^{(1/2)} = u_n^{(1/2)} - \varrho_1 S_1^{-1} \left( A_1 u_n^{(1/2)} + \frac{\varepsilon}{k} u_n^{(1/2)} - f_1 - \frac{\varepsilon}{k} u^{(0)} \right)$$

avec

$$S_1 = -\mathcal{V}_1^2 \text{ et } \varrho_1 = \frac{\lambda}{\left(\frac{4}{\lambda\sqrt{h}} \left\| \left\| f_1 + \frac{\varepsilon}{k} u^{(0)} \right\|_{L_2} + \lambda + \frac{\varepsilon}{k} \right\| \right)^2}; u_0^{(1/2)} = 0$$

on a :  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n^{(1/2)} = u^{(1/2)}$

3) Puis on calcule  $u^{(1)}$  donné par (2.27) à l'aide des itérations :

$$(2.29) \quad u_{n+1}^{(1)} = u_n^{(1)} - \varrho_2 S_2^{-1} \left( A_2 u_n^{(1)} + \frac{\varepsilon}{k} u_n^{(1)} - f_2 - \frac{\varepsilon}{k} u^{(1/2)} \right)$$

avec

$$S_2 = -\mathcal{V}_2; \varrho_2 = \frac{\lambda}{\left(\frac{4}{\lambda\sqrt{h}} \left\| f_2 + - u^{(1/2)} \right\|_{L_2} + \lambda + \frac{k}{\varepsilon} \right)^2}$$

et  $u_0^{(1)} = 0$ .

On a alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n^{(1)} = u^{(1)}$

4) On sait alors que

$$\frac{1}{N} (u^{(0)} + u^{(1/2)} + u^{(3/2)} + \dots) \rightarrow u_h$$

et

$$\frac{1}{N} (u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)} + \dots) \rightarrow u_h$$

Si on suppose à priori que la solution exacte du problème (2.24) est donnée par la formule (en vue d'une expérience numérique) :

$$(2.30) \quad u = (x - x^2)(y - y^2) \quad (x, y) \in \Omega.$$

On en déduit, d'après (2.24) :

$$(2.31) \quad \begin{cases} f_1 = -D_1(|D_1 u| D_1 u) - \lambda D_1^2 u \\ f_2 = -D_2(|D_2 u| D_2 u) - \lambda D_2^2 u. \end{cases}$$

Inversement on pose dans (2.27)  $f_1$  et  $f_2$  données par (2.31) et on calcule

$$(2.32) \quad \begin{cases} \frac{1}{N} (u^{(0)} + u^{(1/2)} + u^{(3/2)} + \dots) = v_h \\ \text{et} \\ \frac{1}{N} (u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)} + \dots) = w_h. \end{cases}$$

Les fonctions  $v_h$  et  $w_h$  sont à comparer ensuite avec  $u$  solution de (2.24) donnée par (2.30).

Les résultats numériques sont les suivants :

1) Si on pose  $\lambda = 20$  ;  $h = \frac{1}{10}$  ;  $\varepsilon = 10^{-1}$  ;  $k = 10^{-3}$  ; on a :

$$\frac{k}{\varepsilon} = 10^{-2} \text{ et } N = \frac{1}{k} = 10^3$$

itérations à effectuer par les formules (2.27).

Chacun des termes  $u^{(p)}$  de cette sommation est obtenu comme limite d'une suite  $u_n^{(p)} (n \rightarrow \infty)$  définie par les formules itératives (2.28) et (2.29).

Plus précisément le calcul de  $v_h$  et  $w_h$  donné par les formules (2.32) nécessite deux sommations,  $10^3$  fois l'inversion des opérateurs  $\left(A_h^1 + \frac{\varepsilon}{k} I\right)$  et  $\left(A_h^2 + \frac{\varepsilon}{k} I\right)$  et dans chacune de ces inversions, il y a l'inversion d'un Laplacien en dimension une et à chaque itération.

Le choix initial de  $u_h^{(0)}$  et  $u_0^{(p)}$  est toujours identiquement nul. Nous obtenons alors

$$\|u - v_h\|_{L_2} = 8,307 \cdot 10^{-5} \quad \left(h = \frac{1}{10}\right)$$

$$\|u - w_h\|_{L_2} = 5,312 \cdot 10^{-5} \quad \left(h = \frac{1}{10}\right).$$

L'exécution et la compilation du programme entier en C. D. C. 3600 ont duré 6 mn 54 s.

2) Pour  $\lambda = 10$ ,  $h = 10^{-1}$ ,  $\varepsilon = 10^{-1}$ ,  $k = 10^{-3}$ ,  $\frac{k}{\varepsilon} = 10^{-2}$  et  $N = 10^3$  nous obtenons les résultats suivants :

$$\|u - v_h\|_{L^2} = 7,7 \cdot 10^{-4} \quad (h = 1/10)$$

$$\|u - w_h\|_{L^2} = 7,4 \cdot 10^{-4} \quad (h = 1/10)$$

$u$  étant la solution exacte du problème initial (2.24).

Temps de Calcul = 1 mn 6 s (compilation + exécution) en C. D. C. 3600.

Nous donnons maintenant pour  $\lambda = 20$  et  $\lambda = 10$  ;  $h = 10^{-1}$  fixé ; l'évolution des erreurs

$$E_1 = \|u - v_h\|_{L^2} \text{ et } E_2 = \|u - w_h\|_{L^2}$$

en fonction de  $n$  itérations ; où

$$v_h = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u_h^{n+1/2} \text{ et } w_h = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u_h^n$$

Dans les courbes  $n^0$  3a on a fait :  $\varepsilon = 10^{-1}$ ,  $k = 10^{-3}$ , et  $N = 1000$ , ( $h = 1/10$ ).

Dans les courbes  $n^0$  3b on a :  $\varepsilon = 10^{-1}$ ,  $k = 10^{-2}$ , et  $N = 100$ , ( $h = 1/10$ ).

REMARQUE 2.5. Nous avons montré que

$$v_h = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u_h^{n+1/2} \rightarrow u_h \text{ et } w_h = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u_h^n \rightarrow u_h$$

où  $u_h$  est la solution du problème (2.25)

On peut montrer les convergences suivantes :

$$(2.33) \quad \lim_{n \rightarrow 0} u^{n+1/2} = u_h \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} u^n = u_h$$

Numériquement, la convergence (2.33) est réalisée pour  $n \ll N$  ce qui est très avantageux.

REMARQUE 2.6. La méthode (2.26) de décomposition de l'opérateur  $A_h$  ramène donc un problème de dimension  $n = 2$  à deux problèmes de dimension  $n = 1$ .

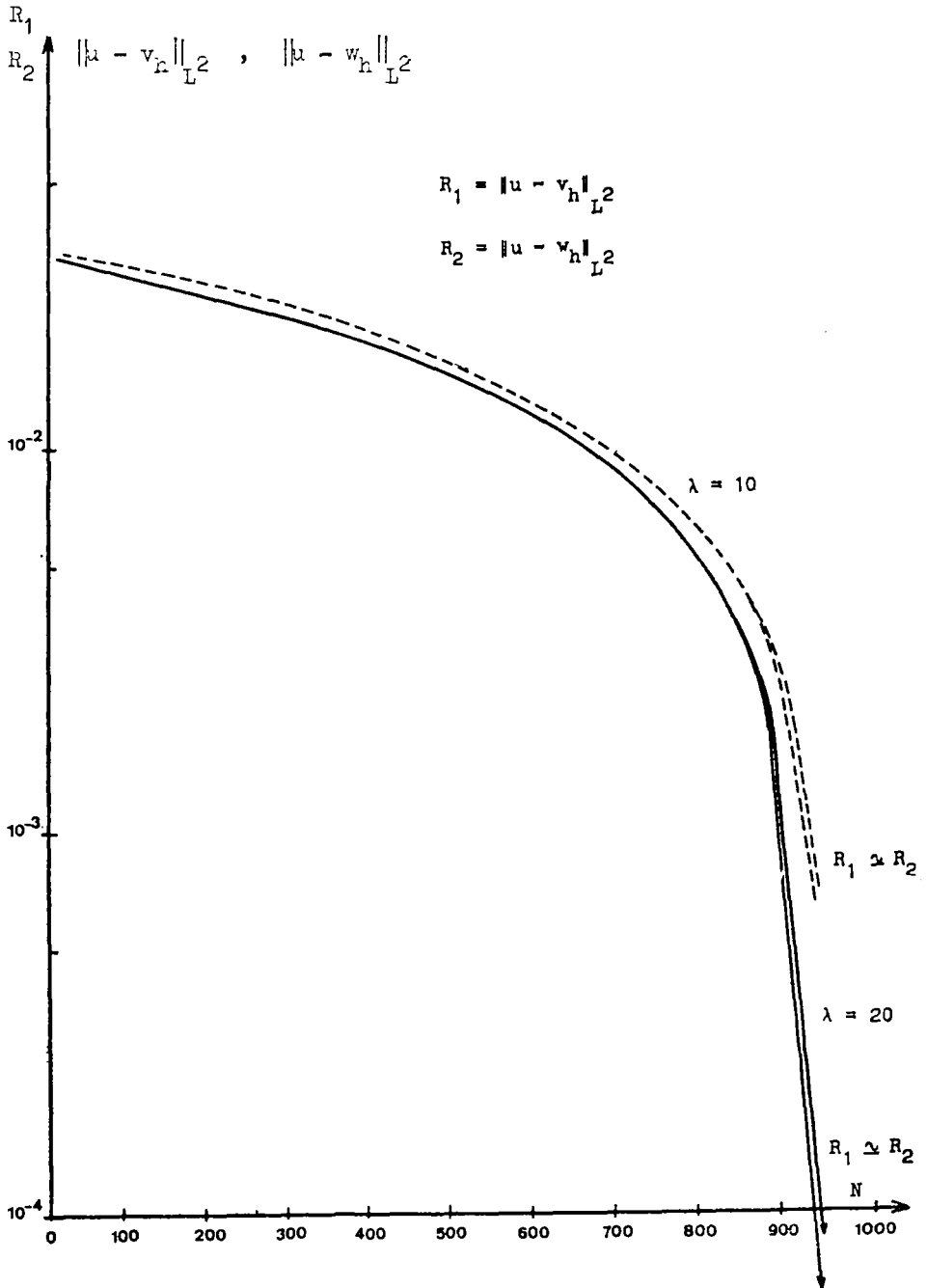
Nous pouvons encore augmenter la compétitivité de la méthode en opérant comme suit :

A chaque étape, nous avons à résoudre les équations :

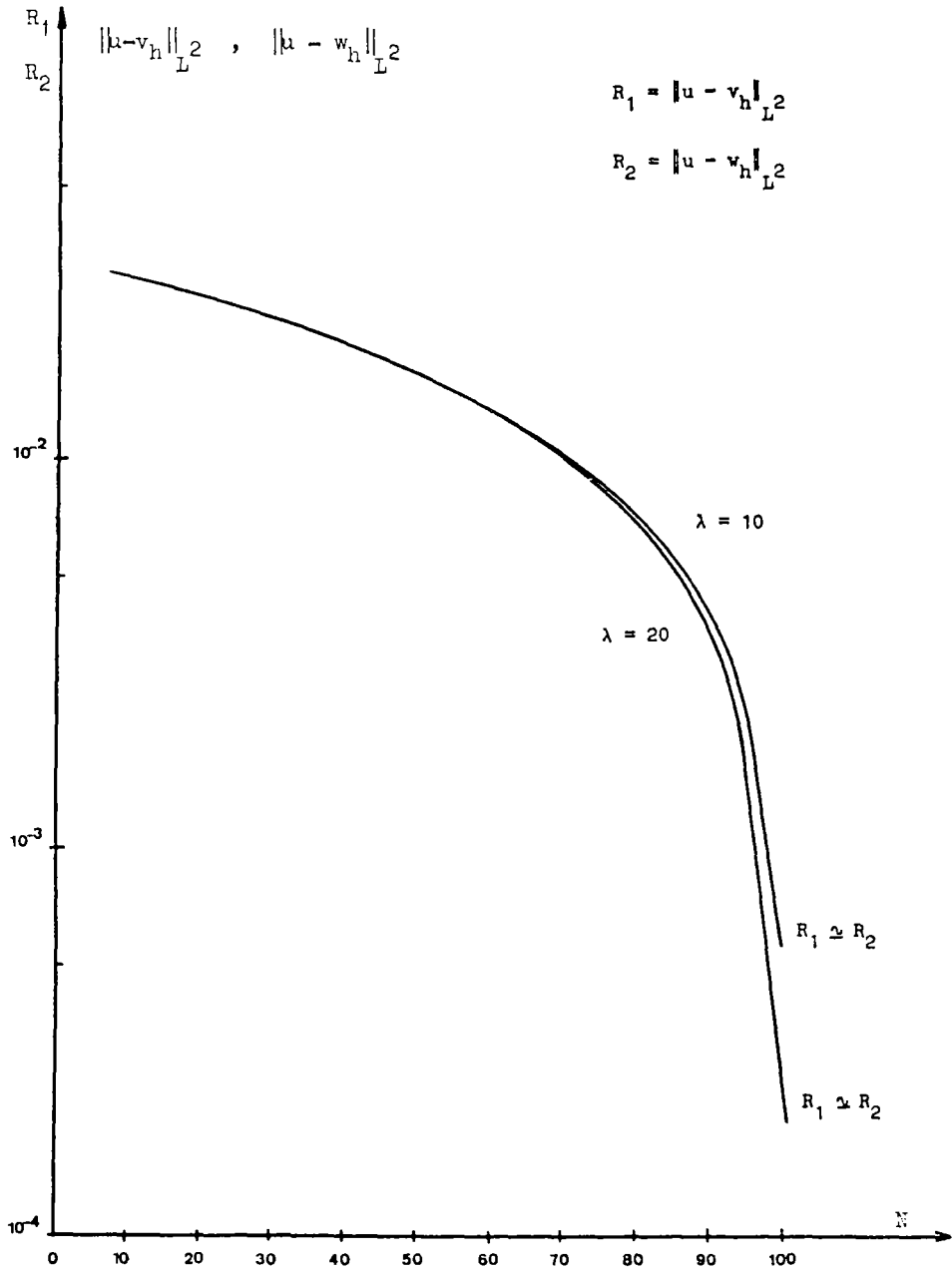
$$(2.34) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_h^1 u_h^{n+1/2} + \frac{3}{k} u_h^{n+1/2} = f_1 + \frac{3}{k} u_h^n \\ \text{où} \\ A_h^1 u = -\mathcal{V}_1 (|\mathcal{A}_1 u| |\mathcal{A}_1 u) - \lambda \mathcal{V}_1^2 u \end{array} \right.$$

$$(2.35) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_h^2 u_h^{n+1} + \frac{\varepsilon}{k} u_h^{n+1} = f_2 + \frac{\varepsilon}{k} u_h^{n+1/2} \\ \text{où} \\ A_h^2 u = -\mathcal{V}_2 (|\mathcal{V}_2 u| |\mathcal{V}_2 u) - \lambda \mathcal{V}_2^2 u \end{array} \right.$$

COURBES n° 3a



COURBES n° 3b



Au lieu de résoudre ces deux équations à l'aide des itérations internes (2.28), (2.29) on peut aussi remplacer (2.27), (2.32) par

$$(2.36) \quad -V_1(|V_1 u_h^n| |V_1 u_h^{n+1/2}) - \lambda V_1^2 u_h^{n+1/2} + \frac{\varepsilon}{k} u_h^{n+1/2} = f_1 + \frac{\varepsilon}{k} u_h^n$$

$$(2.37) \quad -V_2(|V_2 u_h^{n+1/2}| |V_2 u_h^{n+1}) - \lambda V_2^2 u_h^{n+1} + \frac{\varepsilon}{k} u_h^{n+1} = f_2 + \frac{\varepsilon}{k} u_h^{n+1/2}.$$

Les deux équations (2.36), (2.37) se résolvent alors très rapidement par la méthode de Gauss.

Cette méthode semble générale.

2ème méthode: méthodes itératives directes.

1) Cas où le paramètre  $\varrho$  est fixe.

On résoud le problème (2.24) par la méthode itérative suivante :

$$(2.38) \quad S_h u_h^{n+1} = S_h u_h^n - \varrho (A_h u_h^n - f)$$

avec

$$S_h = - \sum_{i=1}^2 V_i^2 \text{ et } \varrho = \lambda / C^2(N)$$

avec

$$N = \frac{\sqrt{2}}{\lambda} \|f_h\|_{L^2}, \text{ et } C(N) = 2 \frac{N}{h} + \lambda, u_h^0 = 0.$$

On suppose à priori que la solution exacte s'écrit :

$$(2.39) \quad u = (x - x^2)(y - y^2).$$

On prendra alors

$$f_h = f = -D_1(|D_1 u| |D_1 u|) - D_2(|D_2 u| |D_2 u|) - \lambda \Delta u.$$

Les itérations (2.38) permettent alors de calculer  $(u_h^n)$  pour  $h$  fixé, que l'on pourra comparer à  $u$  donné par (2.39).

A chaque itération principale (2.38) nous inversons l'opérateur  $S_h = - \sum_{i=1}^2 V_i^2$  par la méthode bien connue de Gauss-Seidel cf [16] d'ailleurs moins rapide que la méthode de « relaxation successive » [16] utilisée dans la première méthode pour l'inversion de ce même  $S_h$ .



Dans les itération internes de Gauss-Seidel on réinitialise chaque fois à 0. Le tableau suivant résume les résultats numériques de cette expérience pour  $\lambda = 20$ .

$h$	$\ u - u_h^n\ _{L_1}$	Temps d'exécution en C. D. C. 3 600
1/10	$6,34 \cdot 10^{-5}$	30,39 s pour 60 itérations
1/20	$2,43 \cdot 10^{-5}$	6mn 26 s pour 150 itérations

L'évolution de l'erreur  $\|u - u_h^n\|_{L_1}$  pour  $h = \frac{1}{10}$  et  $h = \frac{1}{20}$  en fonction du nombre  $n$  d'itérations est résumée dans la courbe n° 3c.

Dans les calculs précédents, nous avons posé

$$(2.40) \quad \mathcal{V}_1^2 u(i, j) = \frac{u(i+2, j) + u(i-2, j) - 2u(i, j)}{4h^2}$$

et une formule analogue pour  $\mathcal{V}_2^2 u(i, j)$ .

Quand on pose :

$$(2.41) \quad \widehat{\mathcal{V}}_1^2 u(i, j) = \frac{u(i+1, j) + u(i-1, j) - 2u(i, j)}{h^2}$$

et une formule analogue pour  $\widehat{\mathcal{V}}_2^2 u(i, j)$ ; nous obtenons les courbes n° 3d et bien entendu les limites de convergences sont exactement les mêmes; *mais le temps d'exécution est approximativement divisé par deux.*

Pour  $h = 1/10$  on effectue 60, itérations en 11 s.

Pour  $h = 1/20$  on effectue 150 itérations en 3 mn 28 s.

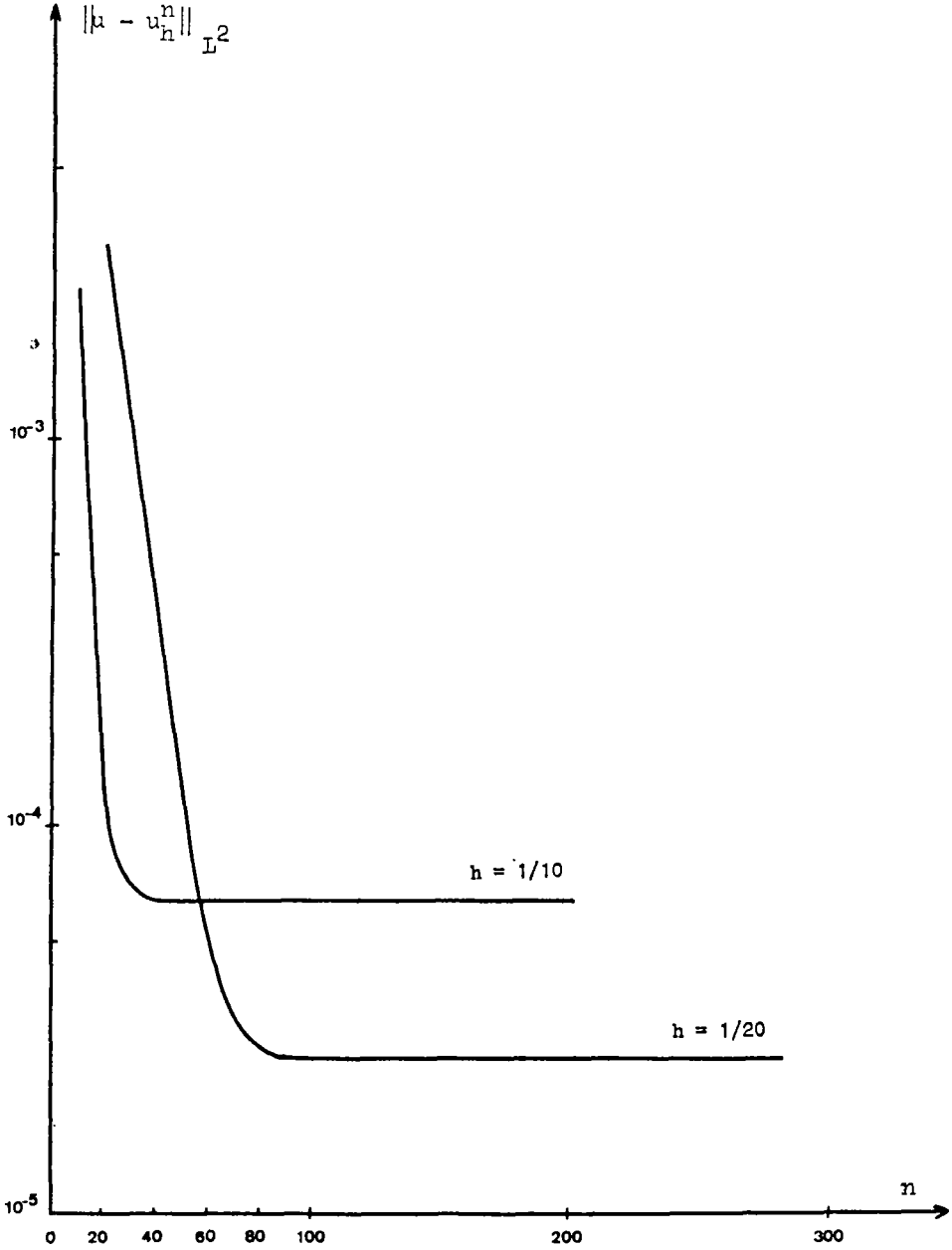
## 2) Quelques remarques.

1 — L'équation (2.38) peut encore s'écrire

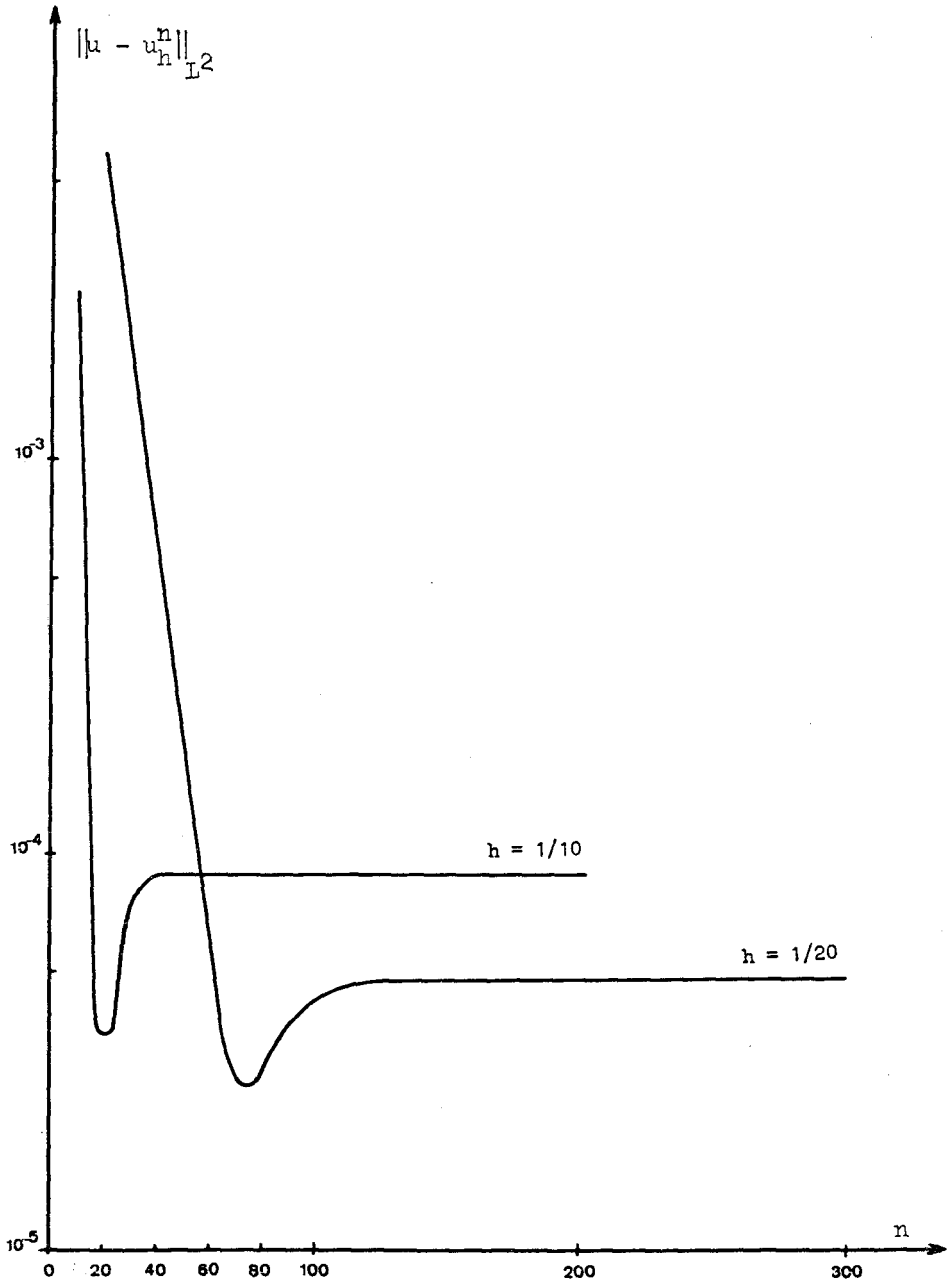
$$(2.42) \quad u_h^{n+1} = S_h^{-1} (S_h u_h^n - \varrho (A_h u_h^n - f_h)).$$

Comme on inverse l'opérateur  $S_h$  par la méthode itérative de Gauss-Seidel, on peut prendre comme valeur initiale de  $u_{h,m}^{n+1}$  pour  $m = 0$  le vecteur  $u_h^n$  de l'itération précédente. *Ceci améliore grandement la convergence (le Laplacien est alors inversé en quelques itérations seulement) et le temps d'exécution du programme.*

COURBES n° 3c



COURBES n° 3d



2 — L'équation (2.42) peut encore s'écrire

$$(2.43) \quad u_h^{n+1} = u_h^n = \varrho S_h^{-1} (A_h u_h^n - f_h).$$

Sous cette forme, les erreurs d'arrondi interviennent moins dans l'exécution des calculs.

Compte tenu de la remarque précédente, et si de plus on fait  $f_h = A_h u$  dans (2.43) on obtient pour  $\lambda = 10$ ,  $h = 1/15$  au bout de  $n = 500$  itérations  $\|u_h^n - u\|_{L_2} = 7 \cdot 10^{-12}$  soit à peu de chose près la solution exacte. Les calculs ont duré (compilation + exécution) 2mn en C.D.C. 3600.

3 — Si on fait  $\varrho_0 = \lambda/C(N)$  avec  $C(N) = 2 \frac{N}{h} + \lambda$  et  $N = \left(\frac{1}{2^{1/3}} \|f\|_{L_{3/2}}\right)^{1/2}$  la convergence est plus lente. On peut la rendre plus rapide en surestimant le paramètre  $\varrho$ .

Les courbes n° 3e donnent l'évolution de l'erreur  $\|u_h^n - u\|_{L_2}$  en fonction du nombre d'itérations  $n$  pour  $h = 1/10$  et pour  $\varrho = \varrho_0$ ,  $\varrho = 40 \varrho_0$ ,  $\varrho = 50 \varrho_0$  et  $\varrho = 60 \varrho_0$  (on a fait  $f_h = f$ ).

Nous avons alors les résultats suivants : ( $h = 1/10$ ,  $\lambda = 10$ ).

On pose

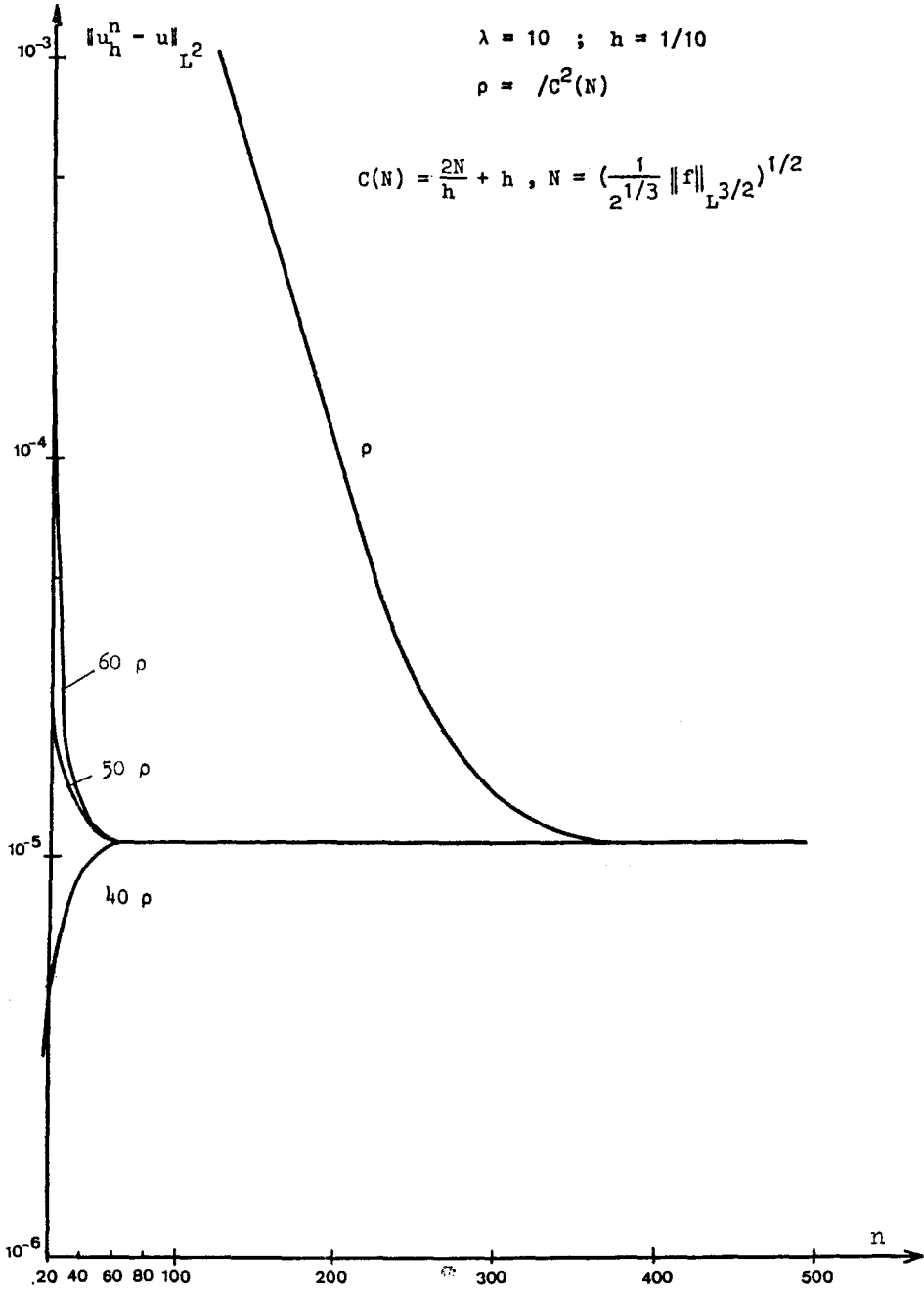
$$E = \|u_h^n - u\|_{L_2}.$$

$N$  = nombre d'itérations à partir duquel on obtient la stabilisation des résultats

$T$  = temps de calcul (compilation + exécution) en C.D.C. 3600.

	$\varrho$	$40 \varrho_0$	$50 \varrho_0$	$60 \varrho_0$
$E$	$1,12 \cdot 10^{-5}$	$1,12 \cdot 10^{-5}$	$1,12 \cdot 10^{-5}$	$1,12 \cdot 10^{-5}$
$N$	480	80	100	80
$T$	1 mn 09 s pour 500 itérations	13 s pour 100 itérations	15 s pour 100 itérations	14 s pour 100 itérations

COURBES n° 3e



3) Cas où le paramètre  $\rho$  est variable avec les itérations  $n$ .

Les itérations (2.43) peuvent aussi être effectuées avec un paramètre  $\rho$  variable donné par

$$\rho_n = \frac{(Au_n - Au_{n-1}, u_n - u_{n-1})}{[S^{-1}(Au_n - Au_{n-1})]^2}.$$

Nous avons fait l'expérience pour  $h = 1/10$ ,  $\lambda = 10$ ,  $f_h = A_h u$ .

Au bout de  $n = 400$  itérations on a :  $\|u_h^n - u\|_{L^2} = 3,59.10^{-12}$  soit pratiquement une erreur relative de l'ordre de  $10^{-10}$ .

Le temps de calcul (compilation + exécution) en C.D.C. 3600 est de 2 mn 6 s pour 400 itérations.

## II — 4 Problème 4 : régularisation elliptique.

On cherche  $u \in W_0^{1,3}(\Omega)$  vérifiant l'équation

$$(2.44) \quad Bu = f \text{ pour } f \text{ donné dans } L^{3/2}(\Omega)$$

avec

$$Bu = - \sum_{i=1}^2 D_i (|D_i u| D_i u).$$

Au problème (2.44) on associe alors le problème (cf. théorème 4.1 de [14]).

$$(2.45) \quad Au = f$$

avec

$$Au = - \sum_{i=1}^2 D_i (|D_i u| D_i u) - \lambda \Delta u = Bu - \lambda \Delta u$$

avec

$$\lambda > 0 \text{ destiné à tendre vers } 0.$$

Nous reprenons alors le problème discrétisé (2.25) sous la forme

$$(2.46) \quad A_h u_h = f_h = f$$

et les itérations

$$(2.47) \quad u_h^{n+1} = u_h^n - \rho_h S_h^{-1} (A_h u_h^n - f_h)$$

avec

$$S_h = - \sum_{i=1}^2 \nabla_i^2$$

$$A_h u_h^n = - \sum_{i=1}^2 \nabla_i (|\nabla_i u_h^n| \nabla_i u_h^n) - \lambda \sum_{i=1}^2 \nabla_i^2 u_h^n$$

$$\varrho_n = \frac{(A_h u_h^n - A_h u_h^{n-1}, u_h^n - u_h^{n-1})}{[S_h^{-1}(A_h u_h^n - A_h u_h^{n-1})]^2}.$$

On sait alors qu'on a les converges suivantes : (cf. théorème 4.1 de [14])

$$u_h^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} u_h, u_h \text{ étant la solution de (2.46)}$$

$$p_h u_h \xrightarrow[h \rightarrow \infty]{} u_\lambda, u_\lambda \text{ étant la solution de (2.45).}$$

$$\text{Enfin } u_\lambda \xrightarrow[\lambda \rightarrow \infty]{} u, u \text{ étant la solution du problème (2.44).}$$

Pour approcher la solution  $u$  du problème (2.44) nous allons résoudre (2.47) pour  $n$  suffisamment grand,  $\lambda = 1/50$  et  $h = 1/10$ .

On se donne une solution exacte du problème (2.44) :

$$(2.48) \quad u = (x - x^2)(y - y^2)$$

on pose alors

$$f_h = f = Bu.$$

On calcule  $(u_{h,\lambda}^n)$  à l'aide des itérations (2.47) et on compare le résultat avec  $u$  donné par (2.48). Nous obtenons au bout de  $n = 360$  itérations l'erreur suivante :

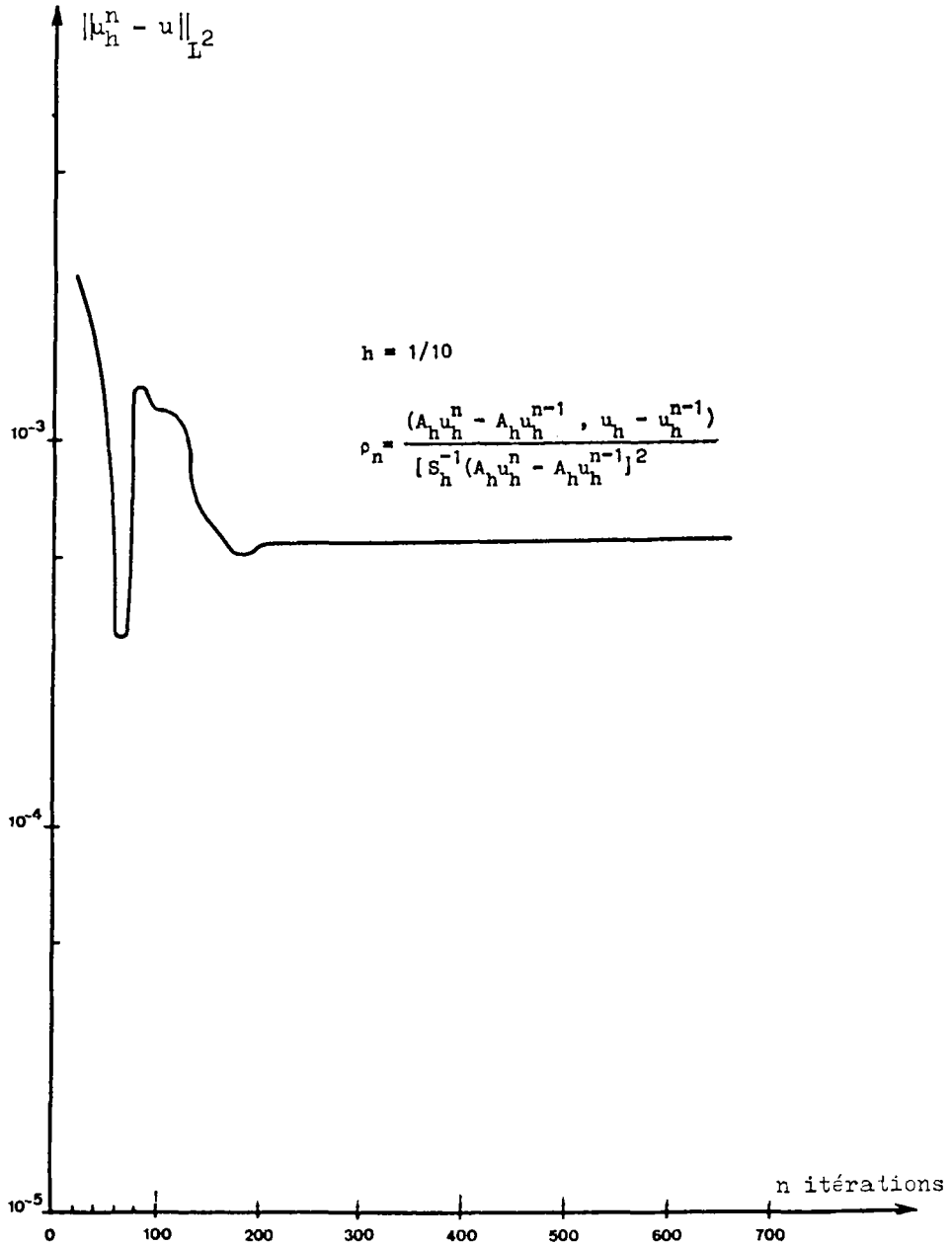
$$\|u_{h,\lambda}^n - u\|_{L_2} = 5,289.10^{-5}$$

pour  $N \geq 360$  les résultats sont stationnaires.

Le calcul (compilation + exécution) en C.D.C. 3600 a duré 2mn 12 s pour  $n = 500$  itérations.

Dans la courbe n° 4 nous donnons pour  $h = 1/10$  l'évolution de l'erreur  $\|u_h^n - u\|_{L_2}$  en fonction des itérations  $n$ .

## COURBES n° 4





II — 5. Problème 5.

Soit

$$\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[.$$

On cherche  $u \in W_0^{1,3}(\Omega)$  vérifiant l'équation :

$$(2.49) \quad -\Delta u + |u|u = f \text{ où } f \in L^{2/3}(\Omega).$$

Le problème discrétisé s'écrit dans l'espace  $V_h$ . (cf. [14])

$$(2.50) \quad -\sum_{i=1}^n \nabla_i^2 u_h + |u_h|u_h = f_h.$$

La suite  $(u_h^n)$  définie par l'itération

$$(2.51) \quad u_h^{n+1} = u_h^n - \varrho S_h^{-1} (A_h u_h^n - f_h)$$

où

$$A_h u_h = -\sum_{i=1}^n \nabla_i^2 u_h + |u_h|u_h$$

$$S_h = -\sum_{i=1}^n \nabla_i^2$$

$$(2.52) \quad \varrho = 1 \left/ \left( 1 + \frac{\|f_h\|}{h} \right)^2 \right.$$

Converge vers  $u_h$  solution de (2.50) et on a  $p_h u_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} u$  solution de (2.49);

où  $p_h$  est l'opérateur de prolongement de  $V_h$  dans  $V = W_0^{1,3}(\Omega)$ .

Nous savons alors qu'on a la relation : (cf. théorème 1.1 chap. I)

$$(2.53) \quad \|u_h^{n+1} - u_h^n\|^2 \leq \theta \|u_h^n - u_h^{n-1}\|^2$$

avec

$$(2.54) \quad \theta = 1 - \varrho$$

$\theta$  est alors le coefficient de contraction des itérations (2.51).

Nous voyons alors que

pour  $h = 1/10$   $\varrho = 1,510^{-2}$  et  $\theta = 0,985$

pour  $h = 1/20$   $\varrho = 4,3410^{-3}$  et  $\theta = 0,995$

la convergence est donc très mauvaise pour  $h = 1/10$  (domaine de 100 points) et impossible matériellement pour  $h = 1/20$  (réseau à 400 points). Pour la dimension  $n = 1$  cette méthode était encore suffisante

*Une nouvelle estimation du paramètre  $\varrho$ .*

Dans la formule (2.52) on peut encore écrire

$$(2.55) \quad \varrho = 1/C^2(N) \quad \text{avec} \quad C(N) = 1 + \frac{2N}{2^{3/2} h}$$

et

$$(2.56) \quad N = \sqrt{2} \|f_h\|.$$

Par ailleurs on sait que (cf. Théorème 1.1 chap. I)

$$(2.57) \quad N \geq 2 [u_h] = 2 \sqrt{2} \|u_h\|_{L_1}.$$

Le meilleur choix de la constante  $N$  est bien entendu  $2 [u_h] = 2 \sqrt{2} \|u_h\|_{L_1}$ , où  $u_h$  est la solution inconnue de (2.49). L'estimation (2.56) est trop large par rapport à l'estimation

$$(2.58) \quad N = 2 [u_h].$$

Mais

$$(2.59) \quad [u_h] = [u_h^n - u_h^n + u_h^n] \leq [u_h - u_h^n] + [u_h^n].$$

Par ailleurs

$$[u_h^n - u_h^n]^2 \leq (A_h u_h^n - A_h u_h, u_h^n - u_h) \leq \|A_h u_h - A_h u_h^n\|^* \|u_h - u_h^n\|.$$

Mais

$$\|u_h - u_h^n\| = \frac{[u_h - u_h^n]}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad A_h u_h = f_h.$$

Donc

$$[u_h - u_h^n]^2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|f - A_h u_h^n\|^* [u_h - u_h^n].$$

Soit

$$(2.60) \quad [u_h - u_h^n] \leq \frac{\|f_h - A_h u_h^n\|^*}{\sqrt{2}}.$$

Les formules (2.59) et (2.60) donnent :

$$[u_h] \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|f_h - A_h u_h^n\| + \sqrt{2} \|u_h^n\|.$$

On pose alors

$$(2.61) \quad N_n = \sqrt{2} \|f_h - A_h u_h^n\| + 2\sqrt{2} \|u_h^n\|.$$

Et d'après (2.55) on a :

$$(2.62) \quad \varrho = \varrho_n = 1 / \left( 1 + \frac{\|f_h - A_h u_h^n\| + 2 \|u_h^n\|}{h} \right)^2.$$

On prendra  $u_h^0 = 0$ .

REMARQUE 2.7. Dans (2.61) on voit que  $\lim_{n \rightarrow \infty} N_n = N_0 = 2[u_h]$  qui est la meilleure estimation possible.

REMARQUE 2.8. On peut donc effectuer les itérations (2.51) de plusieurs manières :

a) utiliser  $\varrho$  fixe donné par (2.52); ce qui est encore possible quand  $h = 1/10$ .

b) utiliser  $\varrho = \varrho_n$  donné par (2.62).

c) utiliser  $\varrho = \varrho_n$  jusqu'à  $n = p$  itératives et continuer avec  $\varrho = \varrho_p$  fixe.

d) on peut aussi faire  $p$  itérations avec  $\varrho$  fixe donné par (2.52) et poursuivre avec (ou reprendre les calculs avec)

$$(2.63) \quad \varrho = \varrho_p = 1/C^2(N_p) \text{ avec } C(N_p) = 1 + \frac{2N_p}{2^{3/2}h} \text{ et } N_p = 2[u_h^n].$$

Nous avons essayé toutes ces méthodes. Nous notons par  $R_a, R_b, R_c, R_d$  les résultats obtenus par les procédés a), b), c), d) successivement.

On se donne une solution exacte de (2.49)

$$(2.64) \quad u(x, y) = (x - x^2)(y - y^2).$$

Ce qui donne

$$(2.65) \quad f = 2[(x - x^2) + (y - y^2)] + (x - x^2)^2 + (y - y^2)^2$$

on pose dans (2.51)  $f_h = f$  et on calcule  $u_h^n$  à l'aide de (2.51) que l'on compare à  $u$  donné par (2.64).

Nous avons les résultats suivants pour  $h = 1/10$  (domaine de 100 points intérieurs) :

	Nombre d'itérations	$\ u_h^n - u\ _{L_2}$	Exécution + compilation en C. D. C. 3600
Résultats $R_a$ $h = 1/10$	250 la convergence se poursuit	$7,48.10^{-4}$	9 mn
Résultats $R_b$ $h = 1/10$	90 après résultats stationnaires	$1,59.10^{-11}$	3 mn 18 s
Résultats $R_d$ $p = 40$ $h = 1/10$	80 après résultats stationnaires	$9,80.10^{-12}$	4 mn pour 40 + 80 itérations

REMARQUE 2.9. Dans la méthode b) de la remarque précédente, le coefficient de contraction des itérations (2.51) est donné par la relation

$$\theta = 1 - \varrho_n$$

$$\text{pour } n = 10; \quad \theta_{10} = 0,981$$

$$\text{pour } n = 10; \quad \theta_{90} = 0,640.$$

## II — 6 Problème 6.

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $R^n$  suffisamment régulier. On munit l'espace  $W_0^{1,p}(\Omega)$  de la norme  $\|u\| = \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}$  avec

$$\|\nabla u\| = \left( \sum_{i=1}^n |D_i u|^2 \right)^{1/2},$$

qui en fait un Banach uniformément convexe. On cherche  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  vérifiant

$$(2.66) \quad Au = f \quad \text{pour } f \text{ donné dans } W^{-1,q}(\Omega), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1;$$

avec

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n D_i (|\nabla u|^{p-2} D_i u)$$

on sait (cf. [14] chap. II, § II — 3) que le problème (1.66) admet une solution unique.

Nous lui associons alors comme dans [14] l'équation discrétisée avec les notations habituelles :

$$(2.67) \quad A_h u_h = f_h \quad u_h \in V_h$$

avec

$$A_h u_h = - \sum_{i=1}^n \nabla_i (|\nabla_h u_h|^{p-2} \nabla_i u_h) \quad \text{où} \quad \nabla_h u_h = \left( \sum_{i=1}^n |\nabla_i u_h|^2 \right)^{1/2}$$

$$f_h = \frac{1}{h_1 \dots h_n} \int_{\Omega} f \theta_h^M dx.$$

Nous allons maintenant résoudre l'équation (2.67) à l'aide d'une méthode itérative en nous plaçant dans le cadre du théorème 3.1 chap. I.

Posons

$$S_h u_h = - \Delta_h u_h = - \sum_{i=1}^n \nabla_i^2 u_h.$$

On munit  $V_h$  du produit scalaire  $(u_h, v_h)_h = (u_h, v_h)_{L^2}$  et d'une nouvelle norme  $[u_h]^2 = \sum_{i=1}^n \|\nabla_i u_h\|_{L^2}^2$  équivalente à  $\|u_h\|_h^2 = (u_h, u_h)_h$ . Soit  $B_h u_h = \Delta_h u_h$ . Nous avons alors la

PROPOSITION 2.3. La suite  $(u_{h,r}^{n+1})$  définie par l'itération  $(u_{h,r}^0 = 0)$

$$(2.68) \quad u_{h,r}^{n+1} = u_{h,r}^n - \varrho S_h^{-1} (A_h u_{h,r}^n + \varepsilon_r \Delta_h u_{h,r}^n - f_h - \varepsilon_r g_h)$$

avec  $g_h$  donné dans  $V_h$ ; converge vers la solution  $u_h$  de l'équation (2.66), quand  $n, r \rightarrow \infty$  (avec  $\varepsilon_r \rightarrow 0$  quand  $r \rightarrow \infty$ ).

DÉMONSTRATION. Les hypothèses H5), H6) du paragraphe I — 3. chap. I sont trivialement vérifiées. Nous allons vérifier H7) en calculant explicitement les paramètres  $k, N, C(N)$  et enfin  $\varrho$ .

Posons

$$L_h u_{h,r} = A_h u_{h,r} - \varepsilon_r \Delta_h u_{h,r}.$$

Nous avons alors

$$a) \quad (L_h u_{h,r} - L_h v_{h,r}, u_{h,r} - v_{h,r}) \geq \varepsilon_r [u_{h,r} - v_{h,r}]$$

ce qui donne

$$k = \varepsilon_r.$$

b) Supposons que  $[u_{h,r}] \leq N$  et  $[v_{h,r}] \leq N$ ; il vient :

$$[u_{h,r}]^2 = \sum_{i=1}^n \|\nabla_i u_{h,r}\|_{L^2}^2 = \sum_{i=1}^n h_1 \dots h_n \sum_{M \in \Omega'_h} |\nabla_i u_{h,r}(M)|^2.$$

Done

$$|\nabla_i u_{h,r}(x)| \leq \frac{[u_{h,r}]}{(h_1 \dots h_n)} = N'.$$

Par ailleurs

$$(2.69) \quad |(A_h u_{h,r} - A_h v_{h,r}, w_{h,r})_h| \leq \\ \leq \left( \sum_{i=1}^n \left| |\nabla_h u_{h,r}|^{p-2} \nabla_i u_{h,r} - |\nabla_h v_{h,r}|^{p-2} \nabla_i v_{h,r} \right|^2 \right)^{1/2} \times \left( \sum_{i=1}^n \|\nabla_i w_{h,r}\|^2 \right)^{1/2}.$$

On montre facilement que si

$$|\alpha_i| \leq N', \quad |\beta_i| \leq N'; \quad \alpha_i, \beta_i \text{ réels } i = 1, \dots, n.$$

On a l'inégalité :

$$(2.70) \quad \left| \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \right)^{\frac{p-2}{2}} \alpha_i - \left( \sum_{i=1}^n \beta_i^2 \right)^{\frac{p-2}{2}} \beta_i \right| \leq (p-1) n^{\frac{p-2}{2}} N'^{p-2} \sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_i|.$$

En posant  $\alpha_i = \nabla_i u_{h,r}(x)$ ;  $\beta_i = \nabla_i v_{h,r}(x)$ , (2.69) devient :

$$(2.71) \quad |(A_h u_{h,r} - A_h v_{h,r}, w_{h,r})_h| \leq (p-1) n^{\frac{p-2}{2}} N'^{p-2} [u_{h,r} - v_{h,r}] [w_{h,r}].$$

Ce qui donne :

$$(2.72) \quad (L_h u_{h,r} - L_h v_{h,r}, w_{h,r}) \leq C(N) [u_{h,r} - v_{h,r}] [w_{h,r}]$$

avec

$$(2.73) \quad C(N) = \frac{(p-1) n^{\frac{p-2}{2}}}{(h \dots h)^{\frac{p-2}{2}}} N^{p-2} + \varepsilon_r.$$

Calcul de  $N$ .

Nous avons successivement

$$|\nabla_i u_h| \leq \sqrt{n} \left( \sum_{i=1}^n |\nabla_i u_h|^2 \right)^{1/2} \quad i = 1, \dots, n.$$

$$\sum_{i=1}^n \|\nabla_i u_h\|_{L^p}^p \leq n^{\frac{p+2}{2}} \|\nabla_h u_h\|_{L^p}^p = n^{\frac{p+2}{2}} (A_h u_h, u_h)_h.$$

D'après une inégalité de Poincaré :

$$\|u_h\|_{L^p} \leq C_1(\Omega) \left( \sum_{i=1}^n \|\nabla_i u_h\|_{L^p}^p \right)^{1/p}$$

où  $C_1(\Omega)$  est une constante ne dépendant que de l'ouvert  $\Omega$ . On en déduit que

$$\left( \sum_{i=1}^n \|\nabla_i u_h\|_{L^p}^p \right)^{1/p} \leq (C_1(\Omega) n^{\frac{p+2}{2}} \|f_h + \varepsilon_r g_h\|_{L^q})^{q/p}$$

or  $L_p \subset L_2$  avec injection continue pour  $p \geq 2$ . Donc

$$[u_h] = \left( \sum_{i=1}^n \|\nabla_i u_h\|_{L^2}^2 \right)^{1/2} \leq (C_1(\Omega) n^{\frac{p+2}{2}} \|f_h + \varepsilon_r g_h\|_{L^q})^{q/p}.$$

D'où

$$(2.74) \quad N = (C_1(\Omega) n^{\frac{p+2}{2}} \|f_h + \varepsilon_r g_h\|_{L^q})^{q/p}.$$

Enfin en posant

$$u_{h,r}^0 = 0 \quad \text{et} \quad \varrho = \varepsilon_r / C^2(N)$$

nous avons la proposition.

REMARQUE 2.10. 1.  $\Omega = (0, 1)$  nous avons

$$N = \|f_h + \varepsilon_r g_h\|_{L^q}^{q/p}$$

et

$$C(N) = (p-1) \frac{N^{p-2}}{h^2} + \varepsilon_r$$

enfin

$$\varrho = \varepsilon_r / C^2(N).$$

2. Nous sommes aussi dans les hypothèses du théorème 3.3 chap. I. On a les itérations :

$$A_h u_h^n + \frac{\varepsilon}{k} u_h^n = f_h + \frac{\varepsilon}{k} u_h^{n-1}; \quad u_h^0 = 0$$

et  $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u_h^n \rightarrow u_h$  solution de (2.67); où  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow 0$  ( $\varepsilon, k > 0$ ) avec  $\frac{k}{\varepsilon} > 0$  et  $N$  est un entier tel que  $kN = 1$ .

3. Il peut être avantageux de prendre un paramètre  $\varrho = \varrho_n$  variable avec les itérations. En particulier on peut poser  $\varepsilon_r = \varepsilon$  et  $\varrho_n = \varrho$  donné par (2.74) jusqu'à  $n = n_0$  et pour  $n \geq n_0$  on pose :

$$\varrho_{n+1} = \varepsilon / C^2(N'_n)$$

avec

$$C(N'_n) = (p-1) n^{\frac{p-2}{2}} N_n^{p-2} + \varepsilon$$

et

$$N'_n = \text{Sup}_i |V_i u_h^n|$$

ou encore

$$\varrho_{n+1} = \varepsilon / C^2(N_n)$$

avec

$$C(N_n) = \frac{(p-1) n^{\frac{p-2}{2}} N_n^{p-2}}{(h_1 \dots h_n)^{\frac{p-2}{2}}} + \varepsilon$$

et

$$N_n = [u_n].$$

### III. Inéquations aux dérivées partielles non linéaires et problème d'optimisation sur un convexe fermé.

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $R^n$  de frontière  $\Gamma = \partial\Omega$  suffisamment régulière. On note par  $x = (x_1, \dots, x_n)$  un point de  $R^n$ . On désigne par  $W^{1,p}(\Omega)$ ,  $1 < p < +\infty$  l'espace des (classes de) fonctions  $u \in L^p(\Omega)$  telles que  $D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$ ; les dérivées étant prises au sens des distributions.  $W_0^{1,p}(\Omega)$  désigne l'adhérence de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $W^{1,p}(\Omega)$ .

On note par  $W^{-1,q}(\Omega)$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , le dual de  $W_0^{1,p}(\Omega)$ .



Posons  $V = W_0^{1,p}(\Omega)$ . On sait (cf. [9]) que,  $V$  coïncide avec l'espace

$$\{u \mid u \in L^p(\Omega), D_i u \in L^p(\Omega), \quad i = 1, \dots, n; u|_{\Gamma} = 0\}$$

et

$$V' = W^{-1,q}(\Omega) = \left\{ f \mid f = f_0 + \sum_{i=1}^n D_i f_i, f_0, f_i \in L^q(\Omega) \right\}.$$

Muni de la norme  $\|u\| = \left( \sum_{i=1}^n \|D_i u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$ ,  $V$  est un espace uniformément convexe.

Soit  $X$  un convexe de  $V$  contenant l'origine.

On pose :

$$Au = - \sum_{i=1}^n D_i (|D_i u|^{p-2} D_i u) - \lambda Au \quad \lambda > 0 \quad p \geq 2$$

et l'on cherche  $u \in X$  tel que

$$(3.1) \quad (Au, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in X$$

pour  $f$  donné dans  $V'$ .

Nous avons montré dans [14] chap. II, que le problème (3.1) admettait une solution unique. Le problème (3.1) se discrétise alors (cf. [14] chap. II) sous la forme :

$$(3.2) \quad (A_h u_h, v_h - u_h)_h \geq (f_h, v_h - u_h)_h \quad \forall v_h \in X_h$$

avec

$$(A_h u_h, v_h)_h = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |V_i u_h|^{p-2} V_i u_h V_i v_h dx + \lambda \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} V_i u_h V_i v_h dx$$

$$V_i u_h(x) = \frac{u_h\left(x + \frac{h_i}{2}\right) - u_h\left(x - \frac{h_i}{2}\right)}{h_i}$$

$$f_h = \frac{1}{h_1 \dots h_n} \int_{\Omega} f \theta_h^M dx \quad \text{où } \theta_h \text{ est la fonction caractéristique d'un pavé}$$

de centre  $x$  et de côtés  $h_1, \dots, h_n$  respectivement parallèles aux axes de coordonnées  $Ox_1 \dots Ox_n$ .

Nous avons vu dans [14] (cf. théorème 1.4 chap. II) que  $p_h^i u_h \rightarrow u_h$  dans  $W_i^{1,p}(\Omega)$  fort pour  $i = 1, \dots, n$ ;  $u_h$  étant la solution de (3.2) dans  $X_h \subset V_h$ , espace de dimension fini associé au paramètre  $h = (h_1, \dots, h_n)$  de discrétisation; et  $u$  étant la solution du problème (3.1).

On se propose maintenant de résoudre numériquement le problème (3.2) discrétisé en précisant chaque fois les convexes  $X$  et  $X_h$ .

III — 1. *Problème 1 : le convexe  $X$  est une boule.*

Posons

$$X = \left\{ u \mid u \in W_0^{1,p}(\Omega); \sum_{i=1}^n \|D_i u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 1 \right\}.$$

On cherche  $u \in X$  solution de

$$(3.1) \quad (Au, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in X$$

pour  $f$  donné dans  $W^{-1,q}(\Omega)$  avec

$$Au = - \sum_{i=1}^n D_i (|D_i u|^{p-2} D_i u) - \lambda Au \quad \lambda > 0.$$

Dans un espace  $V_h(\Omega_h)$  de dimension finie (cf. [14]) (3.1) s'écrit sous la forme (3.2) avec

$$(3.3) \quad X_h = \left\{ u_h \mid u_h \in V_h(\Omega_h); \sum_{i=1}^n \|\nabla_i u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 1 \right\}.$$

Nous allons maintenant résoudre par itérations le problème (3.2), (3.3).

Posons

$$S_h u_h = - \sum_{i=1}^n \nabla_i^2 u_h.$$

On munit  $V_h(\Omega_h)$  du nouveau produit scalaire

$$[u_h, v_h] = (S_h u_h, v_h)_h = \sum_{i=1}^n (\nabla_i u_h, \nabla_i v_h)_{L^2(\Omega)}$$

et de la norme associée

$$[u_h] = \left( \sum_{i=1}^n \|\nabla_i u_h\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}.$$

On définit alors

$$P_{X_h}^S(v_h) \begin{cases} v_h & \text{si } [v_h] \leq 1 \\ \frac{v_h}{[v_h]} & \text{si } [v_h] > 1 \end{cases}$$

et l'on cherche une suite  $(u_h^n)$  approchant la solution  $u_h \in X_h$  ( $X_h$  étant défini

par (3.3) de l'inéquation

$$(3.2) \quad (A_h u_h, v_h - u_h)_h \geq (f_h, v_h - u_h)_h \quad \forall v_h \in X_h$$

avec

$$(3.4) \quad A_h u_h = - \sum_{i=1}^n \nabla_i (|\nabla_i u_h|^{p-2} \nabla_i u_h) - \lambda \sum_{i=1}^n \nabla_i^2 u_h.$$

Nous avons alors le

THÉORÈME 3.1. 1. La suite  $(u_h^n)$  définie par l'itération

$$(3.5) \quad u_h^{n+1} = P_{X_h}^{S_h} (u_h^n - \varrho S_h^{-1} (A_h u_h^n - f_h))$$

où  $X_h$  et  $A_h$  sont donnés par (3.3) et (3.4); converge vers  $u_h$  solution de (3.2) quand  $n \rightarrow \infty$  pour  $u_h^0 = 0$ ,  $\varrho = \lambda/C^2(N)$  et

$$C(N) = (p-1) \frac{N^{p-2}}{(h_1 \dots h_n)^{\frac{p-2}{2}}} + \lambda;$$

la constante  $N$  pouvant être prise égale à  $\frac{2}{\lambda \sqrt{2}} \|f_h\|_{L^q(\Omega)}$ .

2. De plus on a  $p_h^i u_h \rightarrow u$  dans  $W_i^{1,p}(\Omega)$  fort  $i = 1, 0, \dots, n$  quand  $h \rightarrow 0$ ; où  $u$  est la solution (3.1) avec

$$X = \left\{ u \mid u \in W_0^{1,p}(\Omega); \sum_{i=1}^n \|D_i u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 1 \right\}.$$

DÉMONSTRATION. On se place dans le cadre du théorème 1.1 chap. I.

1. On vérifie facilement la relation

$$(3.6) \quad (A_h u_h - A_h v_h, u_h - v_h)_h \geq \lambda [u_h - v_h]^2 \quad u_h, v_h \in V_h.$$

Calcul de  $C(N)$ .

Supposons que  $[u_h] \leq N$ ,  $[v_h] \leq N$ . On a alors :

$$[u_h]^2 = \sum_{i=1}^n \|\nabla_i u_h\|_{L^2}^2 = \sum_{i=1}^n h_1 \dots h_n \sum_x |\nabla_i u_h(x)|^2.$$

Donc

$$|\mathcal{V}_i u_h(x)| \leq \frac{[u_h]}{(h_1 \dots h_n)^{1/2}} = N' \quad \forall x \quad \text{et} \quad \forall i.$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} |(A_h u_h - A_h v_h, w_h)_h| &\leq \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^n \|\mathcal{V}_i u_h\|^{p-2} \mathcal{V}_i u_h - \|\mathcal{V}_i v_h\|^{p-2} \mathcal{V}_i v_h \right)_{L^2}^2 \left( \sum_{i=1}^n \|\mathcal{V}_i w_h\|_{L^2}^2 \right)^{1/2} + \\ &\quad + \lambda \sum_{i=1}^n \|\mathcal{V}_i(u_h - v_h)\|_{L^2} \|\mathcal{V}_i w_h\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$|(A_h u_h - A_h v_h, w_h)_h| \leq C(N) [u_h - v_h] [w_h].$$

En posant :

$$(3.7) \quad C(N) = (p-1) N'^{p-2} + \lambda = (p-1) \frac{N^{p-2}}{(h_1 \dots h_n)^{\frac{p-2}{2}}} + \lambda.$$

Calcul de  $N$ .

On a successivement :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \|\mathcal{V}_i u_h\|_{L^p}^p &\leq (A_h u_h, u_h)_h \leq \|f_h\|_{L^q} \|u_h\|_{L^p} \\ \sum_{i=1}^n \|\mathcal{V}_i u_h\|_{L^p}^p &\leq C_1^{1/p}(\Omega) \|f_h\|_{L^q} \left( \sum_{i=1}^n \|\mathcal{V}_i u_h\|_{L^p}^p \right)^{1/p} \end{aligned}$$

où  $C_1(\Omega)$  est une constante ne dépendant que de l'ouvert  $\Omega$ .

Comme  $L^p \subset L^2$  avec une injection continue pour  $p \geq 2$ ; on a :

$$[u_h] = \left( \sum_{i=1}^n \|\mathcal{V}_i u_h\|_{L^2}^2 \right)^{1/2} \leq \left( \sum_{i=1}^n \|\mathcal{V}_i u_h\|_{L^p}^p \right)^{1/p} \leq C_1^{q/p}(\Omega) \|f_h\|_{L^q}^{1/p} = N.$$

Donc  $N = c^{\text{te}}$  indépendante de  $h$ .

En posant  $\varrho = \lambda/C^2(N)$  les itérations (3.5) sont convergentes d'après le théorème 1.1 chap. I.

2. Cette assertion découle du théorème 1.4 chap. II de [14].

REMARQUE 3.1. 1. D'après le théorème 1.1 chap. I on peut aussi prendre

$$N = \frac{2}{\lambda \sqrt{\sigma}} \|f_h\|_{L^q} \quad \text{avec } \sigma \text{ tel que } [u_h]^2 \geq \sigma \|u_h\|_{L^2}^2.$$

2. La formule (1.6) du chap. I donne les majorations de l'erreur suivantes :

$$C_1(\Omega) \|u_h^n - u_h\|_{L^2}^2 \leq \sum_{i=1}^n \|\nabla_i u_h^n - \nabla_i u_h\|_{L^2}^2 \leq \theta^n \|u_n\|_{L^2}^2$$

où  $C_1(\Omega)$  est une constante ne dépendant que de l'ouvert  $\Omega$  et  $\theta = 1 - \lambda^2/C^2(N)$

3. Si  $n \asymp \frac{-2 \text{Log} \|u_h\| + 2 \text{Log} \varepsilon}{\text{Log} \theta}$  on a alors

$$\|u_h^n - u_h\|_{L^2} < \varepsilon/C_1(\Omega) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^n \|\nabla_i u_h^n - \nabla_i u_h\|_{L^2}^2 < \varepsilon.$$

Dans la pratique ces majorations sont réalisées pour des valeurs de  $n$  bien inférieures.

REMARQUE 3.2 : 1. Si  $\Omega = (0, 1)$ ,  $h > 0$  on montre par un calcul facile que l'on peut prendre selon la convenance

$$N = \frac{2}{\lambda} \|f_h\|_{L^2} \quad \text{ou} \quad N = \|f\|_{L^q}^{1/p} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

et

$$C(N) = (p-1) \frac{N^{-2}}{h^2} + \lambda \quad p \geq 2.$$

2. Si  $\Omega = (0,1) \times (0,1)$  et  $h_1 = h_2 = h$  on peut prendre

$$N = \frac{\sqrt{2}}{\lambda} \|f_h\|_{L^2} \quad \text{ou} \quad N = \frac{1}{2^{q/p^2}} \|f_h\|_{L^q}^{1/q}$$

et

$$C(N) = (p-1) \frac{N^{p-2}}{h^{p-2}} + \lambda$$

3. D'autres estimations de la constante  $N$  conduisant à un meilleur coefficient de contraction  $\theta = 1 - \frac{\lambda^2}{C^1(N)}$  sont possibles (cf. chap. I, 1.2)

*Résultats numériques : un exemple unidimensionnel.*

On cherche  $u \in X \cap C W_0^{1,3}(0, 1)$  vérifiant

$$(3.8) \quad (Au, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in X \quad \text{pour } f \text{ donné dans } L^{3/2}(0,1)$$

avec

$$Au = - \frac{d}{dx} \left( \left| \frac{du}{dx} \right| \frac{du}{dx} \right) - \lambda \frac{d^2 u}{dx^2}$$

$$X = \left\{ u \mid u \in W_0^{1,3}(0,1), \left\| \frac{du}{dx} \right\|_{L^3} \leq 1 \right\}.$$

Au problème (3.8) on associe le problème discrétisé

$$(3.9) \quad \begin{cases} (A_h u_h, v_h - u_h)_h \geq (f_h, v_h - u_h)_h \quad \forall v_h \in X_h; f_h = f \\ A_h u_h = - \nabla (|\nabla u_h| \nabla u_h) - \lambda \nabla^2 u_h \\ X_h = \{u_h \in V_h \mid \|\nabla u_h\|_{L^3} \leq 1\} \end{cases}$$

et l'itération

$$(3.10) \quad \begin{cases} u_h^{n+1} = P_{X_h}^{S_h} (u_h^n - \varrho S_h^{-1} (A_h u_h^n - f_h)); & u_h^0 = 0 \\ \text{avec} \\ S_h = - \nabla^2, \varrho = \frac{\lambda}{C^2(N)} \text{ et } C(N) = \frac{4 \|f_h\|_{L^2}}{\lambda \sqrt{h}} + \lambda \end{cases}$$

Cherchons une solution exacte de la forme

$$u(x) = \alpha (x - x^2) \quad x \in (0,1) \quad \alpha > 0.$$

Elle doit bien entendu vérifier l'équation

$$(3.11) \quad u = P_X^S \left[ u - \varrho \left( - \frac{du}{dx} \right)^{-1} (Au - f) \right]; \quad S = \frac{d^2}{dx^2}.$$

Posons alors  $f = Au + 2$ ce qui donne  $\left( - \frac{du}{dx} \right)^{-1} (Au - f) = -(x - x^2)$ .

Ce qui donne

$$P_X^S \{ u - \varrho S^{-1} (Au - f) \} = P_X^S \{ (\alpha + \varrho) (x - x^2) \}$$

or

$$[(\alpha + \varrho) (x - x^2)] = (\alpha + \varrho) \left\| \frac{d}{dx} (x - x^2) \right\|_{L^3} = \frac{\alpha + \varrho}{\sqrt{3}} > 1$$

si on pose  $\alpha = \sqrt{3}$  on a alors

$$P_{\mathcal{X}}^S \{u - \varrho S^{-1}(Au - f)\} = \sqrt{3}(x - x^2) = u \text{ ce qui vérifie (2.4)}$$

Nous prenons donc  $u = \sqrt{3}(x - x^2)$  comme solution exacte et  $f = Au + 2$ . Nous calculons alors par nos méthodes  $(u_h^n)$  ( $h \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ ) que nous comparons à la solution  $u(x) = \sqrt{3}(x - x^2)$ . L'opérateur  $S_h = -\varrho^2$  est inversé à l'aide de la méthode bien connue de Gauss-Seidel [16]; les itérations internes devant se poursuivre jusqu'à ce que

$$(\sum_1 |u^{m+1}(i) - u^m(i)|^2)^{1/2} \leq 10^{-4}.$$

Nous obtenons les résultats suivants pour  $\lambda = 10$  :

$$\|u_h^n - u\|_{L^2} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ pour } h = 1/10$$

$$\|u_h^n - u\|_{L^2} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ pour } h = 1/20.$$

Nous constatons que les résultats sont un peu moins précis que dans le problème 2 pourtant plus compliqué. Cela tient à la manière dont on calcule la projection sur  $\mathcal{X}_h$  (cf. remarque 3.4).

Pour ce problème à une dimension nous n'avons pas cherché à obtenir des « performances » numériques (cf. problème 2 en dimension  $n = 2$ ).

REMARQUE 3.3. 1) L'étude des majorations à priori de la solution exacte  $u$ , conduit à une meilleure estimation du coefficient de contraction  $\theta$  correspondant aux itérations et par conséquent à une estimation du nombre d'itérations à effectuer pour avoir  $\|u_h^n - u\| < \varepsilon$  pour  $\varepsilon$  donné à l'avance. Si l'on a des renseignements sur la norme  $\|u\|$ , le nombre d'itérations pour avoir la solution diminue grandement. Mais le problème peut toujours être résolu rien qu'avec des estimations à priori de  $\|u\|$  obtenues à partir de l'opérateur  $A$ .

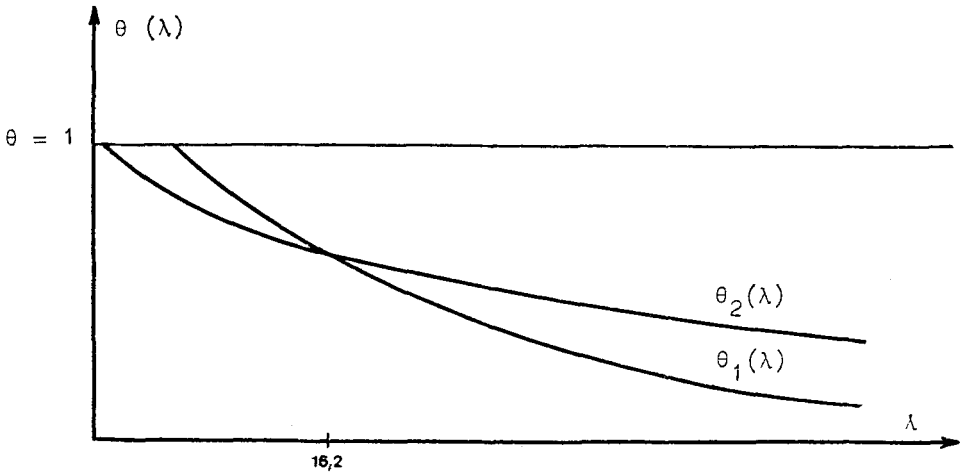
Nous donnons à titre d'exemple l'évolution du coefficient de contraction pour les itérations (3.10) en fonction de  $\lambda$  pour  $h$  fixé ( $h = \frac{1}{10}$ ) selon que l'on estime  $\|u\|$  par

$$N_1 = \frac{2}{\lambda} \|f\|_{L^2}, \text{ ce qui conduit à } \theta_1 = 1 - \frac{\lambda^2}{\left(\frac{4}{\lambda \sqrt{h}} \|f\|_{L^2} + \lambda\right)^2}$$

ou par

$$N_2 = \|f\|_{L^{3/2}} ce qui conduit à  $\theta_2 = 1 - \frac{\lambda^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{h}} \|f\|_{L^{3/2}} + \lambda\right)^2}$$$

Nous voyons que la majoration  $[u] < N_2$  est plus avantageuse pour  $\lambda < 16$ . Pour  $\lambda$  assez grand les deux majorations a priori sont équivalentes.



2) Pour d'autres estimations de  $N$  cf remarque 3.5.

*Résultats numériques : Exemple bidimensionnel.*

Soit

$$\Omega = (0,1) \times (0,1)$$

on cherche

$$(3.12) \quad u \in X = \left\{ u \mid u \in W_0^{1,3}(\Omega); \left( \sum_{i=1}^2 \|D_i u\|_{L^2}^2 \right)^{1/2} \leq 1 \right\}$$

vérifiant l'équation

$$(3.13) \quad (Au, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in X \text{ pour } f \text{ donné dans } L^{3/2}(\Omega)$$

avec

$$Au = - \sum_{i=1}^2 D_i (|D_i u| D_i u) - \lambda A \quad \lambda > 0$$



Au problème (3.13) on associe le problème discrétisé

$$(3.14) \quad (A_h u_h, v_h - u_h)_h \geq (f_h, v_h - u_h)_h \quad \forall v_h \in X_h$$

avec

$$(3.15) \quad X_h = \left\{ u_h \in V_h \mid \left( \sum_{i=1}^2 \| \nabla_i u_h \|_{L_2}^2 \right)^{1/2} \leq 1 \right\}$$

$$A_h u_h = - \sum_{i=1}^2 \nabla_i ( | \nabla_i u_h | \nabla_i u_h ) - \lambda \sum_{i=1}^2 \nabla_i^2 u_h$$

et l'itération

$$(3.16) \quad u_h^{n+1} = P_{X_h}^{S_h} (u_h^n - \varrho S_h^{-1} (A_h u_h^n - f_h))$$

où

$$u_h^0 = 0, S_h = - \sum_{i=1}^2 \nabla_i^2, \varrho = \lambda / C^2(N) \text{ et } C(N) = \frac{2\sqrt{2}}{\lambda h} \|f_h\|_{L_2} + \lambda$$

Les mêmes considérations qu'en dimension  $n = 1$  (problème 1) conduisent à prendre comme solution exacte

$$(3.17) \quad u = \sqrt{45} (x - x^2) (y - y^2) (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1).$$

Posons alors

$$(3.18) \quad f_h = f(x, y) = Au + 2(x - x^2) + 2(y - y^2).$$

Nous calculons par (3.16) la suite  $(u_h^n)$  que nous comparons à  $u$  donné par (3.17).

L'opérateur  $S_h = - \sum_{i=1}^2 \nabla_i^2$  est inversé par la méthode de relaxation successive cf. [16].

REMARQUE 3.4. On a choisi la solution exacte telle que  $[u] = 1$ . Quand on calcule  $[u]$  par la machine on trouve  $[u] = \alpha$  voisin de 1 suivant les valeurs du pas  $h$ . Aussi dans les itérations (3.16) on définit la projection de la manière suivante;

Posons :

$$\text{Si } v_h^n = u_h^n - \varrho S_h^{-1} (A_h u_h^n - f_h)$$

Si

$$[v_h^n] \leq \alpha \text{ alors } u_h^{n+1} = v_h^n$$

Si

$$[v_h^n] > \alpha \text{ alors } u_h^{n+1} = v_h^n \frac{\alpha}{[v_h^n]}$$

ce qui élimine l'erreur sur le calcul de la norme [ ].

Nous obtenons alors les résultats suivants :

1) Pour  $\lambda = 10$ ,  $h = 1/10$  on a

$$\|u_h^n - u\|_{L^2} = 4 \cdot 10^{-5} \text{ avec } n = 70 \text{ itérations}$$

2) Pour  $\lambda = 10$ ,  $h = 1/15$  on a

$$\|u_h^n - u\|_{L^2} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ avec } n = 80 \text{ itérations.}$$

REMARQUE 3.5. Nous pouvons aussi améliorer l'estimation du paramètre  $\varrho$  de la manière suivante :

on a vu que

$$\varrho = \lambda/C(N) \text{ avec } C(N) = 2 \frac{N}{h} + \lambda$$

et  $N$  est une constante telle que  $[u] \leq N$ .

Nous pouvons aussi écrire :

$$(3.19) \quad \varrho = \lambda/C(N') \text{ avec } C(N') = 2N' + h \text{ (cf. formule (3.7))}$$

avec

$$\text{Sup } |V_i u_h| \leq N'$$

nous pouvons alors poser :

$$(3.20) \quad \varrho = \varrho_n = \lambda/C^2(N'_n) \quad C(N'_n) = 2N'_n + \lambda$$

en prenant

$$N'_n = \text{Sup } |V_i u_h^{n-1}|$$

Ceci améliore beaucoup les résultats puisqu'on a :

$$\text{pour } \lambda = 10, h = 1/10 \quad \|u_h^n - u\|_{L^2} = 8,4 \cdot 10^{-6} \text{ avec } n = 18$$

itérations et après, les résultats sont stationnaires.

L'erreur relative est de l'ordre de  $10^{-5}$ . 44 s suffisent on C. D. C. 3600 pour exécuter 50 itérations (compilation + exécution).

### III — 2. Problème 2 : régularisation elliptique.

On veut résoudre dans  $W_0^{1,3}(\Omega)$  l'inégalité :

$$(3.21) \quad (Bu, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in X$$

avec

$$Bu = - \sum_{i=1}^n D_i (|D_i u| D_i u)$$

où  $X$  est donné par (3.12).

Le théorème 4.1 chap. I de [14], montre qu'il suffirait de résoudre (3.13) pour  $\lambda$  assez petit.

On alors  $u_\lambda \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} u$  (solution de (3.21)) dans  $W_0^{1,3}(\Omega)$  fort.

Nous utilisons alors les itérations (3.16) en posant

$$(3.22) \quad \varrho = \varrho_n = \frac{k\lambda}{2N'_n + k\lambda} \quad \text{avec} \quad N'_n = \text{Sup} |\mathcal{V}_i; u_h^{n-1}|$$

où  $k$  est une constante à choisir.

(Ce paramètre  $\varrho$  est en fait une variante de (3.20)).

Nous obtenons alors les résultats suivants :

Pour  $h = 1/10$  (domaine à 100 points intérieurs).

Il suffit de prendre  $\lambda = 1/100$  ( $K = 1000$ ) pour avoir au bout de  $n = 900$  itérations

$$\|u_{h,\lambda}^n - u\|_{L_4} = 1,10 \cdot 10^{-5}$$

où  $u$  est la solution exacte de (3.21), (3.12).

6 mn 25 s suffisent pour le calcul de 1000 itérations en C. D. C. 3600 (exécution + compilation).

Nous avons donc en fait les convergences suivantes :

- 1)  $u_{h,\lambda}^n$  solution de (3.16) converge vers  $u_{h,\lambda}$  solution de (3.14)
- 2)  $p_h u_{h,\lambda} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} u_\lambda$  où  $u_\lambda$  est la solution de (3.13)
- 3)  $u_\lambda \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} u$  où  $u$  est la solution de (3.21).

REMARQUE 3.6. Cet exemple montre qu'on peut encore avec un choix optimum du paramètre  $\varrho = \varrho_n$  se passer encore des méthodes à double itérations du chap. I paragraphe I-3.

### III — 3. Problème 3: le convexe $X$ est cône.

Soit  $E$  un compact de  $\Omega$ . Posons le même problème que dans l'exemple III — 1 en prenant cette fois comme convexe :

$$X = \{u \mid u \in W_0^{1,p}(\Omega), u \geq 0 \text{ p.p sur } E\}.$$

Un problème analogue pour l'opérateur du 2ème ordre est posé dans [10]. On montre facilement que

$$(3.23) \quad X_h = \{u_h \in V_h \mid u_h(x) \geq 0 \text{ p.p sur } E\}.$$

Il s'agit de trouver  $u_h \in X_h$  solution de

$$(3.24) \quad (A_h u_h, v_h - u_h)_h \geq (f_h, v_h - u_h)_h \quad \forall v_h \in X_h$$

avec

$$A_h u_h = - \sum_{i=1}^n \mathcal{V}_i (| \mathcal{V}_i u_h |^{p-2} \mathcal{V}_i u_h) - \lambda \sum_{i=1}^n \mathcal{V}_i^2 u_h \quad \lambda > 0.$$

Nous désignons par  $\mathcal{R}_h$  le réseau des points  $M$  de la forme

$$M = (m_1 h_1, \dots, m_n h_n); \quad m_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \dots, n; \quad h_i > 0.$$

Nous posons

$$\omega_{h,q}^M = \prod_{i=1}^n \left[ \left( m_i - \frac{q_i + 1}{2} \right) h_i, \left( m_i + \frac{q_i + 1}{2} \right) h_i \right]$$

avec  $q_i$  entier positif non nul.

$$\varrho_h^M = \bigcup_{|q| \leq 1} \omega_{h,q}^M \quad \text{et} \quad \Omega_h = \{M \mid M \in \mathcal{R}_h, \varrho_h^M \subset \Omega\}$$

$$V_h = \{u_h \mid u_h = \sum_{M \in \Omega_h} \xi_M W_M, \xi_M \in \mathbb{R}\} \quad \text{où} \quad W_M$$

est la fonction caractéristique du pavé de centre  $M$  de côtés  $h_1, \dots, h_n$  respectivement parallèles aux axes de coordonnées  $ox_1, \dots, ox_n$ .

Pour tout  $u_h \in V_h$  on peut écrire :

$$u_h = \sum_{M \in \Omega_h^1} \xi_M W_M + \sum_{M \in \Omega_h^2} \eta_M W_M$$

où

$$\Omega_h^1 = \{M \mid M \in \mathcal{R}_h, \varrho_h^M \cap E \neq \emptyset\}$$

$$\Omega_h^2 = \Omega_h - \Omega_h^1.$$

Soit alors  $v_h = \sum_{M \in \Omega_h^1} \xi'_M W_M + \sum_{M \in \Omega_h^2} \eta'_M W_M$  alors

$$v_h \in X_h \iff \xi'_M \geq 0 \quad p \cdot p \quad \text{sur} \quad \Omega_h^1.$$

**PROPOSITION 3.1.** Si  $u_h \in V_h$  alors

$$P_{X_h}(u_h) = \begin{cases} \eta_M & \text{si } M \in \Omega_h^2 \\ \xi_M & \text{si } M \in \Omega_h^1 \text{ et } \xi_M \geq 0 \\ 0 & \text{si } M \in \Omega_h^1 \text{ et } \xi_M < 0 \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Nous avons en effet à minimiser l'expression

$$\|u_h - v_h\|^2 = \sum_{M \in \Omega_h^1} |\xi_M - \xi'_M|^2 + \sum_{M \in \Omega_h^2} |\eta_M - \eta'_M|^2$$

ce qui donne  $\eta'_M = \eta_M$  et

$$\xi'_M = \begin{cases} \xi_M & \text{si } \xi_M \geq 0 \\ 0 & \text{si } \xi_M < 0 \end{cases}$$

D'où le

THÉORÈME 3.2. 1 — La suite  $(u_h^n)$  définie par les itérations :

$$(3.25) \quad u_h^{n+1} = P_{X_h}^{S_i} (u_h^n - \varrho_i S_i^{-1} (A_h u_h^n - f_h))$$

où

$$X_h = \{u_h \in V_h \mid u_h(x) \geq 0 \text{ p.p sur } E\}$$

converge vers  $u_h$  solution de (3.24) pour  $u_h^0$  et  $S_i$  convenables (cf. démonstration du théorème).

2 — De plus on a  $p_h^i u_h \rightarrow u$  dans  $W_i^{1,p}(\Omega)$  fort quand  $h \rightarrow 0$  ; où  $u$  est la solution de (3.1) avec

$$X = \{u \mid u \in W_0^{1,p}(\Omega), u \geq 0 \text{ p.p sur } E\}.$$

DÉMONSTRATION. 1<sup>0</sup>)

$$a) \text{ Posons } S_i u_h = S_1 u_h = - \sum_{i=1}^n \nabla_i^2 u_h$$

$$\varrho_i = \varrho_1 = \lambda / C_1^2(N) \text{ avec } C_1(N) = (p-1) \frac{N^{p-2}}{(h_1 \dots h_n)^{\frac{p-2}{2}}} + \lambda$$

et

$$N = \frac{2}{\lambda \sqrt{\sigma}} \|f_h\|_{L_2} \text{ si } u_h^0 = 0$$

si

$$f_n^1 = u_h^n - \varrho_1 S_1^{-1} (A u_h^n - f_h) \in X$$

alors on a

$$u_h^{n+1} = f_n^1$$

et les itérations (3.25) convergent.

$$b) \quad \text{si } f_n^1 = u_h^n - \varrho_1 S_1^{-1} (A_h u_h^n - f_h) \notin X_h$$

alors on pose

$$S_i u_h = S_2 u_h = u_h \text{ et } [u_h] = \|u_h\|_{L_2}$$

on démontre facilement que

$$(A_h u_h - A_h v_h, u_h - v_h)_h \geq \lambda \sigma \|u_h - v_h\|^2$$

car

$$[u_h]^2 = \sum_{i=1}^n \|\nabla_i u_h\|_{L_2}^2 \geq \sigma \|u_h\|_{L_2}^2.$$

De même si

$$\|u_h\| \leq N_0 \text{ et } \|v_h\| \leq N_0$$

on a :

$$\|u_h\|^2 = h_1 \dots h_n \sum_{M \in \Omega_h} |u_h(M)|^2$$

ce qui entraîne

$$\|u_h\|^2 \geq h_1 \dots h_n \text{ Sup}_M |u_h(M)|^2$$

De même nous avons

$$|\nabla_i u_h(x)| \leq \frac{2}{h_i} \text{ Sup}_y |u_h(y)|.$$

D'où

$$|\nabla_i u_h(x)| \leq \frac{2}{h_i (h_1 \dots h_n)^{1/2}} \|u\| \leq \frac{2N}{h_i (h_1 \dots h_n)^{1/2}} = N'.$$

Par ailleurs

$$(A_h u_h - A_h v_h, w_h)_h \leq \left( \sum_{i=1}^n \left( \left| |\nabla_i u_h|^{p-2} \nabla_i u_h - |\nabla_i v_h|^{p-2} \nabla_i v_h \right|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{i=1}^n \|\nabla_i w_h\|^2 \right)^{1/2} \right. \\ \left. + \lambda \left( \sum_{i=1}^n \|\nabla_i (u_h - v_h)\|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{i=1}^n \|\nabla_i w_h\|^2 \right)^{1/2} \right)$$

or pour  $|\alpha| \leq N'$ ,  $|\beta| \leq N'$ ,  $\alpha, \beta$  réels on a :

$$||\alpha|^{p-2} \alpha - |\beta|^{p-2} \beta| \leq (p-1) N'^{p-2} |\alpha - \beta|$$

ce qui donne

$$\sum_{i=1}^n \left( \left| |\nabla_i u_h|^{p-2} \nabla_i u_h - |\nabla_i v_h|^{p-2} \nabla_i v_h \right| \right) \leq (p-1) \sum_{i=1}^n N_i'^{p-2} \|\nabla_i (u_h - v_h)\|.$$

Donc

$$(A_h u_h - A_h v_h, w_h)_h \leq C(N') \|u_h - v_h\| \|w_h\|$$

avec

$$C_2(N') = (p-1) \left( \sum_{i=1}^n 4 \frac{N_i'^{2(p-2)}}{h_i^2} \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_{i=1}^n \frac{4}{h_i^2} \right)^{1/2} + \lambda \left( \sum_i \frac{4}{h_i^2} \right)$$

$$N_i' = \frac{2N_0}{h_i (h_1 \dots h_n)^{1/2}}.$$

D'où

$$(A_h u_h - A_h v_h, w_h)_h \leq C_2(N_0) \|u_h - v_h\| \|w_h\|$$

avec

$$C_2(N) = (p-1) N_0^{p-2} \frac{2^p}{(h_1 \dots h_n)^{\frac{p-2}{2}}} \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i^{2p-2}} \right)^{1/2} \left( \sum_{i=1}^n \frac{4}{h_i^2} \right)^{1/2} + \lambda \left( \sum_{i=1}^n \frac{4}{h_i^2} \right).$$

Alors les itérations (3.25) convergent d'après le théorème 1.1 pour

$$\varrho_1 = \varrho_2 = \lambda \sigma / C_2^2(N) \quad N = \frac{2}{\lambda \sqrt{2}} \|f_h\|_{L_1} \text{ si } u = 0$$

et d'après la proposition 3.1, on sait projeter

$$f_n^2 = u_h^n - \varrho_2 (A_h u_h^n - f_h) \text{ suivant la norme } \|u_h\|_h = \|u_h\|_{L_1}.$$

D'où la détermination de  $u^{n+1}$  à l'aide de (3.25).

De plus, on voit que les itérations (3.25) convergent plus rapidement avec  $S_i = S_1$  et  $\varrho_i = \varrho_1$  qu'avec le choix  $S_i = S_2 = Id$  et  $\varrho_i = \varrho_2$ .

REMARQUE 3.7. On peut approcher le problème

$$(3.26) \quad (A_h u_h, v_h - u_h)_h \geq (f_h, v_h - u_h)_h \quad \forall v_h \in X_h$$

où

$$X_h = \{u_h \in V_h \mid u_h \geq 0 \text{ p.p sur } E\}$$

par le problème

$$(3.27) \quad A_h u_h + \frac{1}{\varepsilon} F_h' u_h = f_h$$

où  $\varepsilon$  est un paramètre positif destiné à tendre vers 0; et  $F_h'$  est la dérivée de Gateaux de la fonctionnelle

$$F_h(v_h) = \int_{\Omega} v_h^2 H_h dx \quad \text{avec} \quad H_h = \begin{cases} 0 & \text{si } v_h \geq 0 \\ 1 & \text{si } v_h < 0. \end{cases}$$

On sait alors (cf. théorème 6.1 de [14]) que  $u_{h,\varepsilon}$  solution de (3.27) converge fortement vers  $u_h$  solution de (3.26) quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

REMARQUE 3.8. Soit  $\lambda_p$  une suite de réels tels que  $\lambda_p \rightarrow 0$  quand  $p \rightarrow \infty$  considérons l'inégalité

$$(3.28) \quad (A_h u_h, v_h - u_h)_h \geq (f_h, v_h - u_h)_h \quad \forall v_h \in X_h$$

où

$$A_h u_h = - \sum_{i=1}^n \nabla_i (|\nabla_i u_h|^{p-2} \nabla_i u_h).$$

Alors la suite  $(u_{h,\varrho}^{n+1})$  définie par les itérations :

$$(3.29) \quad u_{h,p}^{n+1} = P_{X_h}^{S_i} \left( u_{h,p}^n - \varrho_i S_i^{-1} \left( A_h u_{h,p}^n - \lambda_p \sum_{i=1}^n \nabla_i^2 u_{h,p}^n - f_h \right) \right)$$

converge dans  $V_h$  quand  $n \rightarrow \infty$  et  $p \rightarrow \infty$  vers  $u_h$  solution de (3.28) pour  $u_{h,p}^0 = 0$   $\varrho_i$  et  $S_i$  étant choisis comme dans le théorème 3.2.

(Cf. théorème 3.1 au chapitre I.)

*1ère expérience numérique.*

Soit  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$  on cherche

$$(3.30) \quad u \in X = \{u \in W_0^{1,3}(\Omega) \mid u \geq 0 \text{ p.p dans } \Omega\}$$

vérifiant l'inégalité (3.13).

On écrit alors les itérations

$$(3.31) \quad u_h^{n+1} = P_{X_h}^{S_i} (u_h^n - \varrho_i S_i^{-1} (A_h u_h^n - f_h));$$

avec

$$A_h u_h = - \sum_{i=1}^2 \nabla_i (|\nabla_i u_h| \nabla_i u_h) - \lambda \sum_{i=1}^2 \nabla_i^2 u_h$$

$$X_h = \{u_h \in V_h \mid u_h \geq 0\}$$

1) Si  $f_n = u_h^n - \varrho_2 S_2^{-1} (A_h u_h^n - f_h) \in X_h$  où

$$S_2 = - \sum_{i=1}^2 \nabla_i^2; \quad \varrho_2 = \lambda / C_2^2(N); \quad C_2(N) = \frac{2}{h} N + \lambda$$

et

$$N = \frac{\sqrt{2}}{\lambda} \|f_h\|_{L_2}$$

alors on calcule

$$u_h^{n+1} = P_{X_h}^{S_2}(f_n) = f_n$$

2) Si  $f_n \notin X_h$  alors on fait  $S_i = S_1 = Id$  et

$$\varrho_i = \varrho_1 = 2\lambda / C_1^2(N) \quad \text{avec} \quad C_1(N) = \frac{32\sqrt{2}N}{h^6} + \frac{8\lambda}{h^2} \quad N = \frac{\sqrt{2}}{2} \|f\|_{L_2}$$

et  $u^{n+1}$  est donné par la formule

$$u_h^{n+1} = P_{X_h} (u_h^n - \varrho_1 (A_h u_h^n - f_h)).$$



Pour l'expérience on se donne comme solution exacte

$$(3.32) \quad u = (x - x^2)(y - y^2)$$

et on pose

$$f_h = f = Au$$

On vérifie alors que l'on a bien

$$u = P_X^{S_i} (u - \rho_i S_i^{-1} (Au - f)).$$

Nous calculons  $(u_h^n)$  (quand  $n \rightarrow \infty$  et  $h \rightarrow 0$ ) à l'aide des itérations (3.31) que nous comparons à  $u$  donné par (3.32).

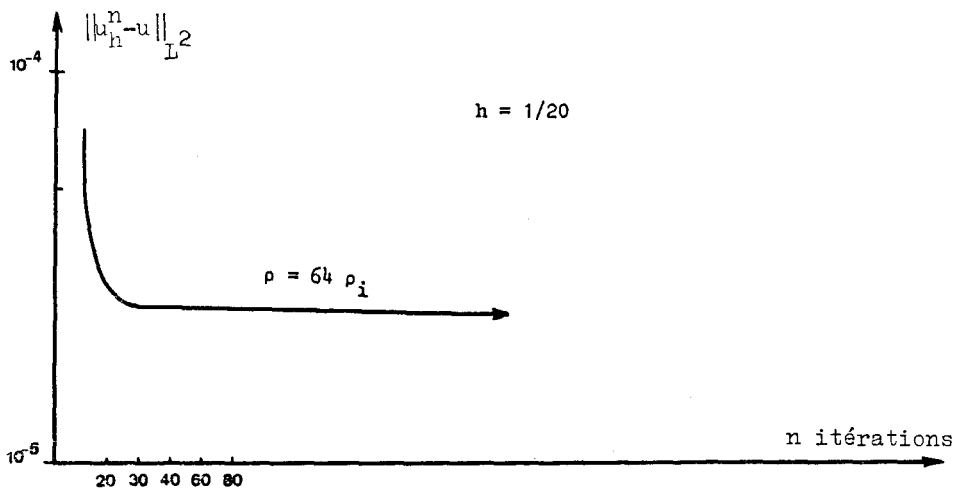
Pour être sûr que nous avons effectivement résolu l'inéquation (3.13) et non l'équation correspondante (cas où  $X = V$ ) on vérifie ensuite qu'avec  $f$  quelconque on obtient une solution  $u_h^n$  qui réalise les contraintes de  $X$ .

Nous avons posé  $h = 1/20$ ; ce qui donne un domaine  $\Omega$  de 400 points intérieurs. Pour  $\rho = \rho_i$  la convergence est assez lente. Pour  $\rho = 8\rho_i$  (surestimé) la convergence est nettement plus rapide.

Enfin pour  $\rho = 64\rho_i$  (cf. courbe n° 3a) on obtient au bout de  $n = 20$  itérations  $\|u_h^n - u\|_{L_2} = 2,5 \cdot 10^{-5}$ ; ensuite les résultats sont stationnaires. L'exécution de 20 itérations en C. D. C. 3.600 dure 27,1s.

En posant  $N_{1,n} = \|u_{n-1}\|$  et  $N_{2,n} = [u_{n-1}]$  on est conduit à des paramètres  $\rho_{i,1}^n$  et  $\rho_{i,2}^n$  variables avec les itérations.

COURBES n° 3a



2ème expérience numérique.

Pour  $\Omega = (0,1) \times (0,1)$  on cherche  $u$  vérifiant (3.30) et solution de l'inégalité (3.13) avec  $\lambda = 1$ .

On pose maintenant les itérations :

$$(3.33) \quad u_h^{n+1} = P_{X_h}^{S_i} (u_h^n - \varrho_i^n S_i^{-1} (A_h u_h^n - f_h))$$

avec

$$A_h u_h = - \sum_{i=1}^2 \nabla_i (|\nabla_i u|^{p-2} \nabla_i u) - \lambda \sum_{i=1}^2 \nabla_i^2 u_h$$

$$X_h = \{u_h \in V_h \mid u_h \geq 0\}$$

et où le paramètre  $\varrho_i^n$  varie avec les itérations.

Un calcul de variations montre que l'on a :

$$\sigma^2 \int_{\Omega} |v|^2 dx \leq \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|^2 dx \text{ pour } v \in H_0^1(\Omega)$$

ce qui donne

$$\sigma \|v\|_{L^2}^2 \leq [v]^2 = \sum_{i=1}^2 \|D_i u\|_{L^2}^2 \text{ avec } \sigma = 2\pi^2$$

Nous procédons maintenant de la manière suivante

1) On pose dans (3.33)

$$S_i = S_2 = - \sum_{i=1}^2 \nabla_i^2 ; \varrho_2^n = \lambda / C_2^2(N_n) \text{ avec } C_2^2(N_n) = \frac{2N_n}{h} + \lambda, N_n = [u_h^n]$$

si

$$f_n = u_h^n - \varrho_2^n S_2^{-1} (A_h u_h^n - f_h) \in X_h$$

alors  $u_h^{n+1} = f_h$

2) Si  $f_n \in X_h$  alors on pose dans (3.33)

$$S_i = S_1 = Id, \varrho_1^n = \lambda \sigma / C_1^2(N_n) \text{ avec } C_1(N_n) = \frac{64N_n}{h^4} + \frac{8\lambda}{h^2}, N_n = \|u_h^n\|$$

et  $u_h^{n+1}$  est donné par la formule

$$u_h^{n+1} = P_{X_h} (u_h^n - \varrho_1^n (A_h u_h^n - f_h)).$$

Pour l'expérience numérique on se donne une solution exacte du problème

(3.13), (8.30) par la formule :

$$(3.34) \quad u(x, y) = \frac{1}{2} (x^3 - x^2) (y^3 - y^2)$$

et on pose dans (3.33)

$$\begin{aligned} f_h = f = Au = & x(y^3 - y)^2 (3x - 1) | 3x - 2 | \\ & + y(x^3 - x)^2 (3y - 1) | 3y - 2 | \\ & - \lambda [(3x - 1)(y^3 - y) + (3y - 1)(x^3 - x)]. \end{aligned}$$

Nous calculons alors  $u_h^n$  à l'aide des itérations (3.33) pour  $h$  suffisamment petit que nous comparons à  $u$  donné par (3.34).

Pour  $h = 10^{-1}$  nous constatons qu'à partir de la 8ème itérations les paramètres  $\varrho_1^n$  et  $\varrho_2^n$  se stabilisent à leur valeurs optimales :

$$\varrho_1^n = 0,798 \text{ et } \varrho_2^n = 0,249 \cdot 10^{-4}.$$

Le tableau n° 3b donne l'évolution de l'erreur  $\|u_n - u\| / \|u\|$  dans  $L^2(\Omega)$  en fonction de  $M = 1/h$  lorsque  $\varrho_1^n$  varie à partir de la 2ème itération et  $\varrho_2^n$  varie à partir de la 50ème (pour  $n < 50$   $\varrho_2^n = \varrho_2 =$  valeur théorique).

Lorsqu'on augmente la dimension  $M = 1/h$  le temps de calcul devient rapidement élevé car il est directement lié au nombre d'itérations nécessaires pour inverser le Laplacien  $S_2 = -\Delta$  dans les itérations (3.33) ainsi pour

$$M = 20 \quad \frac{\|u - u_n\|}{\|u\|} = 1,15 \cdot 10^{-4}$$

$$M = 26 \quad \frac{\|u - u_n\|}{\|u\|} = 7,11 \cdot 10^{-5}$$

à la 40ème itération.

Alors que le nombre total d'itérations dans les diverses inversion du Laplacein est pour

$$M = 20 \quad N = 1793$$

pour

$$M = 26 \quad N = 2823.$$

Le tableau n° 3c donne l'évolution de l'erreur de Cauchy  $\frac{\|u_n - u_{n-1}\|}{\|u\|}$  dans

$L^2$  en fonction de  $M = 1/h$  pour  $\varepsilon = 10^{-6}$  (précision dans l'inversion du Laplacien) et pour un nombre donné d'itérations.

3ème expérience numérique. Méthode de pénalisation.

On résoud l'équation (3.27), à l'aide des itérations :

$$(3.35) \quad u_h^{n+1} = u_h^n - \varrho_n S_h^n (C_h^\varepsilon u_h^n - f_h)$$

où

$$C_n^\varepsilon u_h = - \sum_{i=1}^2 V_i (|V_i u_h| |V_i u_h|) - \lambda \sum_{i=1}^2 V_i^2 u_h + \frac{1}{\varepsilon} F' u_h \quad \text{avec } \lambda = 2.$$

$$S_h = - \sum_{i=1}^n V_i^2$$

pour  $n = 0; 1, \dots, 10$  on pose

$$\varrho_1 = \varrho_0 = \frac{2}{\lambda \sqrt{\sigma}} \|f_h - C_h^\varepsilon(0)\|_h^* \quad \lambda = 2, \quad \sigma = 2.$$

pour  $n > 10$  on pose

$$\varrho_n = \lambda / C^2(N_n) \text{ avec } C(N_n) = \frac{2N}{h} + \lambda + \frac{1}{2\varepsilon}$$

$$N_{n+1} = \frac{1}{\lambda \sqrt{\sigma}} \|f - C_h^\varepsilon u_h^n\|_h^* + \sqrt{\sigma} \|u_h^n\|.$$

Plus précisément on procède de la manière suivante :

1) Posons  $h_1 = h_2 = h^0 = 1/10$  ; on calcule alors

$$u_{h^0, \varepsilon_i}^n \quad i = 0, 1, \dots \text{ pour } \varepsilon_0 = 2 \text{ on pose } u_{h^0, \varepsilon_0}^0 = 0.$$

Nous avons alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{h^0, \varepsilon_0}^n = u_{h^0, \varepsilon_0}$$

pour  $\varepsilon_1 = 0,5$  on pose

$$u_{h^0, \varepsilon_1}^0 = u_{h^0, \varepsilon_0}.$$

Nous avons alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{h^0, \varepsilon_1}^n = u_{h^0, \varepsilon_1}$$

on refait les calculs pour  $\varepsilon_2 = 0,125$

$$\varepsilon_3 = 0,313 \cdot 10^{-1}; \quad \varepsilon_4 = 0,781 \cdot 10^{-2}; \quad \varepsilon_5 = 0,195 \cdot 10^{-2};$$

$$\varepsilon_6 = 0,488 \cdot 10^{-3}; \quad \varepsilon_7 = 0,305 \cdot 10^{-4}; \quad \text{et } \varepsilon_8 = 0,763 \cdot 10^{-5}$$

ce qui donne alors

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} u_{h^0, \varepsilon}^n = u_{h^0}$$

2) On pose alors  $h^1 = h^0/2 = 1/20$ .

On initialise  $u_{h^1, \varepsilon_0}^0 = \tilde{u}_{h^0} =$  interpolation linéaire de  $u_{h^0}$ ; et on effectue les itérations (3.35) pour  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_8$ .

3) Si nous posons dans (3.27)  $f = Au$  où

$$u(x, y) = P_X [2(x - x^2)(y - y^2) \left(\frac{1}{4} - y\right) \left(\frac{1}{4} - x\right)]$$

on montre facilement que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} u_h^n = u.$$

Les expériences numériques effectuées en double précision donnent les résultats suivants:

Pour  $h^0 = 1/10$  nous obtenons le tableau suivant:

paramètre $\varepsilon$ de pénalisation	erreur $\ u_h^\varepsilon - u\ _{L_2}$
$\varepsilon_1 = 0.500$	$0.6589 \cdot 10^{-19}$
$\varepsilon_2 = 0.125$	$0.6065 \cdot 10^{-19}$
$\varepsilon_3 = 0.313$	$0.6005 \cdot 10^{-19}$
.....	.....
$\varepsilon_5 = 0.763 \cdot 10^{-5}$	$0.3593 \cdot 10^{-13}$

Pour  $h^1 = 1/20$  nous obtenons  $\|u_h^n - u\|_{L_2} = 0,86 \cdot 10^{-19}$  pour les mêmes valeurs du paramètre  $\varepsilon$ .

TABLEAU n° 3b

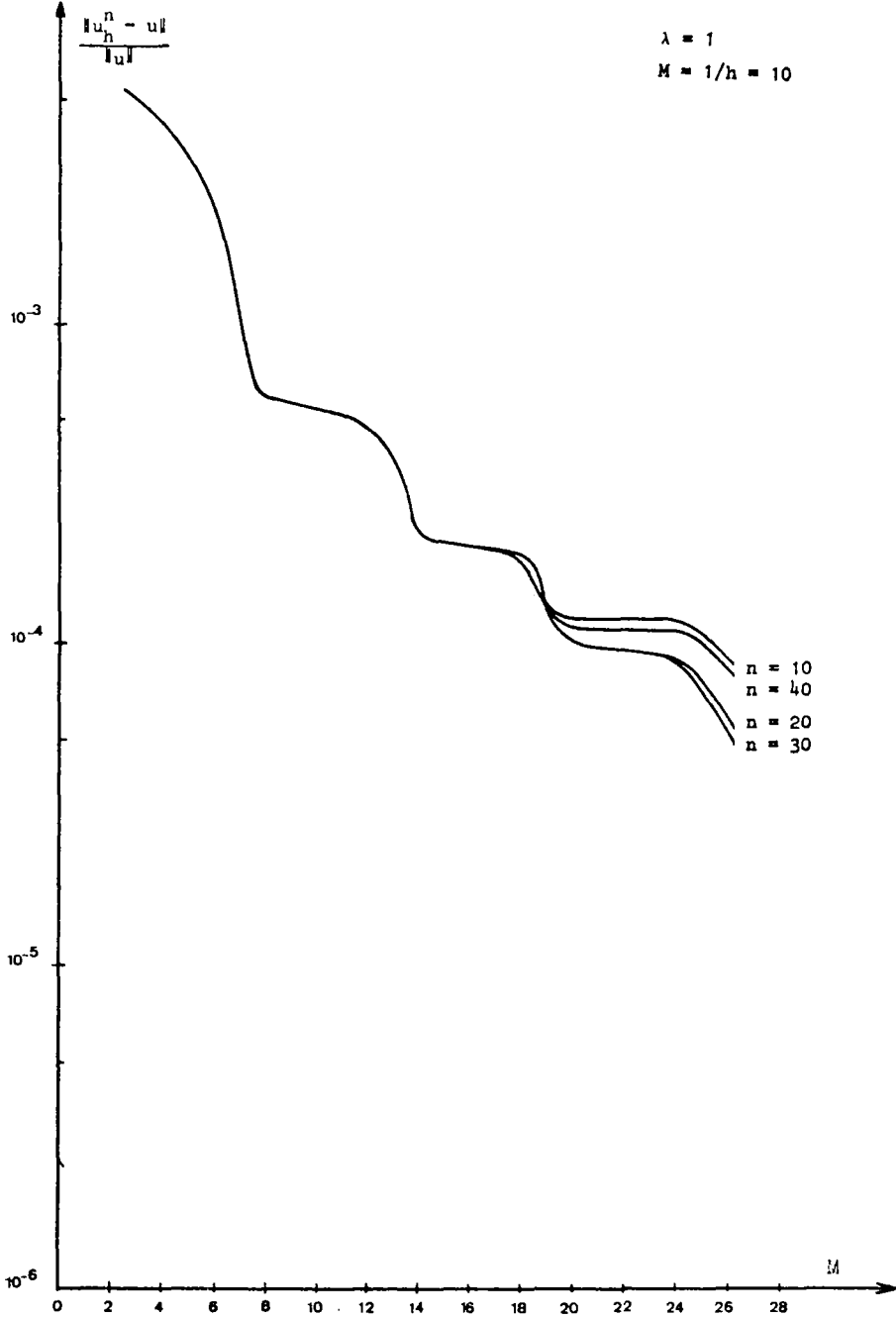
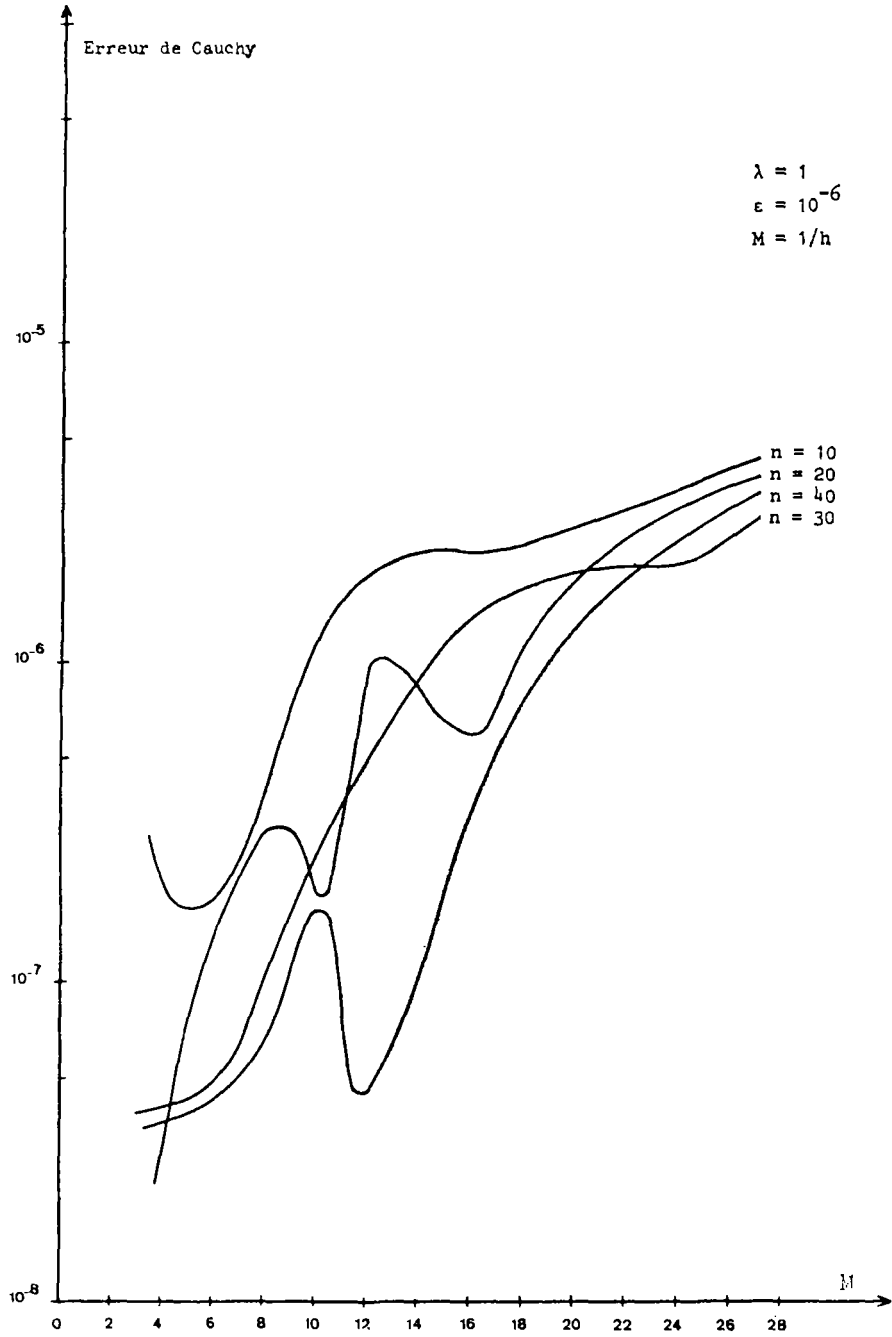


TABLEAU n° 3c



REMARQUE 3.9. On cherche à résoudre le problème (3.13) dans le cas où le convexe  $X$  est de la forme

$$(3.36) \quad X = \{u \in W_0^{1,3}(\Omega) \mid |u| \leq 1 \text{ p.p dans } \Omega\}.$$

On applique les itérations (3.25) dans lesquels  $X_h$  signifie :

$$X_h = \{u_h \in V_h \mid |u_h| \leq 1 \text{ p.p}\}.$$

Dans une première étape on se donne une solution exacte

$$(3.37) \quad u = (x - x^2)(y - y^2)$$

et on pose :

$$f_h = f = Au.$$

On calcule par (3.25)  $u_h^n$  que l'on compare à  $u$  donné par (3.37).

1) Pour  $h = 1/10$  et  $\varrho = \varrho_i$ .

Nous obtenons à partir de  $n = 50$  itérations

$$\|u_h^n - u\|_{L^2} = 8,60.10^{-5}$$

2) Pour  $h = 1/15$  fixé et  $\varrho = 4\varrho_i$  nous obtenons à partir de  $n = 20$  itérations, l'erreur suivante :

$$\|u_h^n - u\|_{L^2} = 6,34.10^{-5}.$$

Pour les deux cas le temps d'exécution en C.D.C., 3600 est de l'ordre de quelques secondes.

Pour être sûr que nous avons effectivement résolu l'inéquation (3.13) sur le convexe  $X$  donné par (3.36); en effectuant les itérations (3.25) nous avons fait

$f_h = f(x, y)$  quelconque ( $= e^{xy}$  pour l'expérience) et on vérifie que la solution  $u_h^n$  obtenue après stationarité des résultats appartient bien au convexe  $X$ .

### III — 4. Problème 4.

*Un exemple unidimensionnel:  $X$  est un convexe sur lequel on ne sait pas projeter directement.*

On cherche  $u \in X$  convexe fermé de  $W_0^{1,p}(0,1)$  vérifiant :

$$(3.38) \quad (A, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in X \quad f \in W^{-1,q}(0,1)$$



où

$$(3.39) \quad Au = \frac{d}{dx} \left( \left| \frac{du}{dx} \right|^{p-2} \frac{du}{dx} \right) - \lambda \frac{d^2 u}{dx^2}, \quad \lambda > 0; p \geq 2$$

$$(3.40) \quad X = \left\{ u \mid u \in W_0^{1,p}(0,1); \left| \frac{du}{dx} \right| \leq 1 \text{ p.p sur } (0,1) \right\}.$$

Soient  $m$  un entier et  $h$  un paramètre positif tel que  $mh = 1$ .

On divise l'intervalle  $(0,1)$  en  $m$  intervalles:  $(0, h), (h, 2h), \dots, ((m-1)h, mh)$ . Soit  $\theta_h^i$  la fonction caractéristique de  $]ih, (i+1)h[$  pour  $i = 0, \dots, m-1$

$$V_h = \left\{ u_h \mid u_h = \sum_{i=0}^{m-1} u_h^i \theta_h^i, u_h^i \in R; u_h^0 = \dots = u_h^{m-1} = 0 \right\}.$$

Posons

$$\nabla u_h(x) = \frac{u_h\left(x + \frac{h}{2}\right) - u_h\left(x - \frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$\nabla^2 u_h = \nabla(\nabla u_h).$$

Enfin

$$\widehat{\nabla} u_h(x) = \frac{u_h(x) - u_h(x-h)}{h}.$$

Le problème (3.38), (3.39), (4.40) peut alors être approché par

$$(3.41) \quad (A_h u_h, v_h - u_h)_h \geq (f_h, v_h - u_h)_h \quad \forall v_h \in X_h$$

où

$$(3.42) \quad A_h u_h = -\nabla(|\nabla u_h|^{p-2} \nabla u_h) - \lambda \nabla^2 u_h \quad p \geq 2, \lambda > 0.$$

$$(3.43) \quad X_h = \{u_h \mid u_h \in V_h; |\widehat{\nabla} u_h| \leq 1 \text{ p.p}\}.$$

Nous allons résoudre numériquement (3.41), (3.42), (3.41) par deux méthodes.

1ère méthode.

Posons

$$S_h u_h = -\nabla^2 u_h.$$

On munit  $V_h$  du nouveau produit scalaire

$$[u_h, v_h] = (S_h u_h, v_h)_h = (\nabla u_h, \nabla v_h)_{L^2}$$

et de la norme associée  $\|u_h\| = \|\nabla u_h\|_{L^2}$ .

On a alors la

PROPOSITION 3.2. 1. La suite  $(u_h^n)$  définie par les itérations :

$$(3.44) \quad u_h^{n+1} = P_{X_h}^{S_h} (u_h^n - \varrho S_h^{-1} (A_h u_h^n - f_h))$$

où  $S_h = -\nu^2$  converge dans  $V_h$  vers  $u_h$  solution du problème (3.41), (3.42), (3.43) pour

$$u_h^0 = 0, \quad \varrho = \lambda / C^2(N) \quad \text{où} \quad N = \frac{2}{\lambda} \|f_h\|_{L^2}$$

et

$$C(N) = (p-1) \frac{N^{p-2}}{h^2} + \lambda; \quad p \geq 2.$$

2. De plus on a  $p_h u_h \rightarrow u$  dans  $W_0^{1,p}(\Omega)$  fort quand  $h \rightarrow 0$ , où  $u$  est la solution du problème (3.38) (3.39), (3.40).

Pour que les itérations (3.44) soient possibles numériquement; il est nécessaire de savoir projeter explicitement sur le convexe  $X_h$  donné par (3.43). On se propose maintenant de résoudre ce point.

*Notations.*

Comme on est dans  $V_h$  espace de dimension finie on écrira dorénavant

$$u_h(x) = u(i) \quad i = 1, \dots, m$$

$$f_h(x) = f(i) \quad i = 1, \dots, m.$$

Soit  $T_h$  une application de  $V_h$  dans  $V_h'$  définie par

$$T_h u(i) = \sum_{j=1}^i h u(j) \quad (4)$$

Nous avons alors

$$T_h \widehat{V} u(i) = \widehat{V} T_h u(i) = u(i) \quad \forall i.$$

Donc  $T_h$  est un isomorphisme de  $V_h$  dans  $V_h'$  d'inverse  $T_h^{-1} = \widehat{V}$ .

---

(4) C'est une intégration discrète. Il y a d'autres formules bien plus précises. Plus précisément l'inverse de  $\widehat{V}$  sera  $\widehat{V}_\varepsilon^{-1} = (\widehat{V} - \varepsilon \widehat{V}^2)^{-1}$  avec  $\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon > 0$ .

Il s'agit maintenant de calculer explicitement la projection sur  $X_h$  de

$$f_n(i) = u_n(i) - \rho S_h^{-1} (A_h u_n(i) - f(i)).$$

On va projeter sur le convexe  $\tilde{X}_h$  et on se ramènera ensuite au convexe  $X_h$ . Plus précisément, posons :

$$\tilde{X}_h = T_h^{-1}(X_h) = \{\tilde{w} \mid |\tilde{w}(i)| \leq 1 \text{ pour } i = 1, \dots, m\}$$

$$\tilde{B}_h = T_h^* S_h T_h = (\widehat{V}_\varepsilon^{-1})^* (-V^2) \widehat{V}_\varepsilon^{-1}(1)$$

$$\tilde{f}_n = T_h^* S_h f_n.$$

Pour  $n$  fixé le calcul de

$$v_n = P_{X_h}^{S_h}(f_n)$$

équivalent à résoudre

$$(S_h v_n, w - v_n) \geq (S_h f_n, w - v_n) \quad \forall w \in X_h.$$

Posons  $v_n = T \tilde{v}_n$   $w = T \tilde{w}$ . Il vient alors

$$(3.45) \quad (\tilde{B}_h \tilde{v}_n, \tilde{w} - \tilde{v}_n) \geq (\tilde{f}_n, \tilde{w} - \tilde{v}_n) \quad \forall \tilde{w} \in \tilde{X}_h.$$

Comme  $\tilde{B} \tilde{v}_n \simeq \tilde{v}_n$  pour  $h$  suffisamment petit la relation (3.45) s'écrit alors

$$(3.46) \quad \tilde{v}_n = P_{\tilde{X}_h}(\tilde{V} f_n)$$

on sait donc par (3.46) résoudre la projection sur  $\tilde{X}_h$  où

$$\tilde{X}_h = \{\tilde{w} \mid |\tilde{w}(i)| \leq 1 \text{ p.p}\}$$

On peut maintenant combiner les deux formules itératives (3.44) et (3.46) en une seule.

**PROPOSITION 3.3. 1.** La suite  $(u_h^n)$  définie par les itérations

$$(3.47) \quad u_h^{n+1} = T [P_{\tilde{X}}(\widehat{V} f_h^n)] \text{ où } T = \widehat{V}^{\varepsilon-1} = (\widehat{V} - \varepsilon \widehat{V}^2)^{-1} \quad \varepsilon > 0 \text{ et } \varepsilon \rightarrow 0.$$

avec

$$f_h^n = u_h^n - \varrho S_h^{-1} (A_h u_h^n - f_h); S_h = -\nabla^2.$$

Converge dans  $V_h$  vers  $u_h$  solution du problème (3.41), (3.42), (3.43) pour

$$u_h^0 = 0, \varrho = \lambda / C^2(N) \text{ où } C(N) = (p-1) \frac{N^{p-2}}{h^2} + \lambda \quad p \geq 2$$

et

$$N = \frac{2}{\lambda} \|f_h\|_{L^2}.$$

2. De plus, on a  $p_h u_h \rightarrow u$  dans  $W_0^{1,p}(0,1)$  fort quand  $h \rightarrow 0$ ;  $u$  étant la solution du problème (3.38), (3.39), (3.40).

REMARQUE 3.10. Pour  $n$  fixé (3.46) s'écrit, pour  $i = 1, \dots, m$

$$v_n(i) = \begin{cases} \widehat{V} f_n(i) & \text{si } -1 \leq \widehat{V} f_n(i) \leq 1 \\ -1 & \text{si } \widehat{V} f_n(i) < -1 \\ 1 & \text{si } \widehat{V} f_n(i) > 1 \end{cases}$$

2ème méthode.

Posons comme dans la 1ère méthode

$$T_h u(i) = \sum_{j=1}^i h u(j) \quad i = 1, \dots, m \text{ ou encore } T_h u = \nabla_s^{-1} u.$$

Posons

$$\widetilde{X}_h = \{\tilde{v} \mid |\tilde{v}(i)| \leq 1 \text{ pour } i = 1, \dots, m\}.$$

Le problème (3.41), (3.42), (3.43) équivaut alors à résoudre

$$(3.48) \quad (\widetilde{A}_h \widetilde{u}_h, \widetilde{v}_h - \widetilde{u}_h) \geq (\widetilde{f}_h, \widetilde{v}_h - \widetilde{u}_h) \quad \forall \widetilde{v}_h \in \widetilde{X}_h$$

où

$$\begin{aligned} \widetilde{A}_h \widetilde{u}_h &= T_h^* A_h T_h \widetilde{u}_h = \widehat{V}_s^{-1} \nabla (|\nabla \widehat{V}_s^{-1} \widetilde{u}_h|^{p-2} \nabla \widehat{V}_s^{-1} \widetilde{u}_h) \\ &+ \lambda \widehat{V}_s^{-1} \nabla^2 \widehat{V}_s^{-1} \widetilde{u}_h \quad \lambda > 0 \end{aligned}$$

$$\widetilde{f}_h = T_h^* f_h$$

et (3.48) se résoud alors par itérations.

PROPOSITION 3.4. 1. La suite  $(\tilde{u}_h^n)$  définie par les itérations

$$(3.49) \quad \tilde{u}_h^{n+1} = P_{\tilde{X}_h} (\tilde{u}_h^n - \tilde{\varrho} (\tilde{A}_h \tilde{u}_h^n - \tilde{f}_h))$$

et convergente pour  $\tilde{u}_h^0 = 0$  et  $\tilde{\varrho} > 0$  convenable.

2. La solution  $u_h$  du problème (3.41), (3.42), (3.43) est donnée par

$$(3.50) \quad u_h = T \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{u}_h^n \right).$$

3. De plus on a :  $u = \lim_{h \rightarrow 0} p_h u_h$  dans  $W_0^{1,p}(0,1)$  fort où  $u$  est la solution du problème (3.38), (3.39), (3.40).

REMARQUE 3.11. Si on travaille avec un opérateur de prolongement  $p_h$  de  $V_h$  dans  $V$  conduisant à l'inéquation

$$(3.51) \quad (A_h u_h, v_h - u_h)_h \geq (f_h, v_h - u_h) \quad \forall v_h \in X_h$$

avec

$$A_h u_h = -\widehat{V} (|\widehat{V} u_h|^{p-2} \widehat{V} u_h) - \lambda \widehat{V}^2 u_h$$

et

$$X_h = \{u_h \in V_h \mid |\widehat{V} u_h| \leq 1 \ p \cdot p\}.$$

Alors le choix  $T_h = \widehat{V}_\varepsilon^{-1}$  conduit à l'inégalité

$$(3.52) \quad (\tilde{A}_h \tilde{u}_h, v_h - \tilde{u}_h)_h \geq (\tilde{f}_h, v_h - \tilde{u}_h)_h \quad \forall v_h \in \tilde{X}_h$$

avec

$$\tilde{A}_h \tilde{u}_h = T_h^* A_h T_h \tilde{u}_h \simeq |\tilde{u}_h|^{p-2} \tilde{u}_h + \lambda \tilde{u}_h \lambda > 0$$

$$\tilde{f}_h(i) = T_h^* f_h(i) \quad i = 1, \dots, m$$

$$\tilde{X}_h = \{\tilde{u}_h \mid |\tilde{u}_h| \leq 1 \ p \cdot p\}.$$

L'inégalité (3.52) peut alors se résoudre par la formule itérative suivante :

$$(3.53) \quad \tilde{u}_h^{n+1} = P_{\tilde{X}} (\tilde{u}_h^n - \tilde{\varrho} (\tilde{A}_h \tilde{u}_h^n - \tilde{f}_h))$$

qui converge pour  $\tilde{u}_h^0 = 0$  et  $\tilde{\varrho} > 0$  qu'il est maintenant aisé de calculer. En effet :

$$(\tilde{A}_h \tilde{u}_h - \tilde{A}_h \tilde{v}_h, \tilde{u}_h - \tilde{v}_h)_h \geq \lambda \|\tilde{u}_h - \tilde{v}_h\|_{L^2}^2.$$

Si  $\|\tilde{u}_h\| \leq N$  et  $\|\tilde{v}_h\| \leq N$  on a :

$$(\tilde{A}_h \tilde{u}_h - \tilde{A}_h \tilde{v}_h, \tilde{v}_h) \leq C(N) \|\tilde{u}_h - \tilde{v}_h\| \|\tilde{v}_h\| \text{ avec } C(N) = (p-1)N^{p-2} + \lambda$$

d'où  $\varrho = \lambda/C^2(N)$ .

*Résultats numériques.*

On veut résoudre l'inéquation :

$$(3.54) \quad (Au, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in X \text{ pour } f \text{ donné dans } L^{3/2}(0, 1)$$

avec

$$Au = -\frac{d}{dx} \left( \left| \frac{du}{dx} \right| \frac{du}{dx} \right) - \lambda \frac{d^2u}{dx^2}; \quad \lambda = 10$$

$$X = \left\{ u \in W_0^{1,3}(0, 1) \mid \left| \frac{du}{dx} \right| \leq 1 \quad p \cdot p \right\}.$$

Au problème (3.54) on associe le problème

$$(3.55) \quad (A_h u_h, v_h - u_h)_h \geq (f_h, v_h - u_h)_h \quad \forall v_h \in X_h$$

avec

$$A_h u_h = -V(|V u_h| V u_h) - \lambda V^2 u_h$$

$$X_h = \{u_h \in V_h \mid |\widehat{V} u_h| \leq 1 \quad p \cdot p\}.$$

Ce problème est alors résolu à l'aide des itérations

$$(3.56) \quad u_h^{n+1} = \widehat{V}_\varepsilon^{-1} P_{\tilde{X}_h}(\widehat{V} f_h^n) \quad \text{avec } u_h^0 = 100, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

$$f_h^n = u_h^n - \varrho S_h^{-1} (A_h u_h^n - f_h); \quad S_h = -V^2$$

$$\varrho = \lambda/C^2(N) \quad \text{et} \quad C(N) = \frac{4}{\lambda \sqrt{\lambda}} \|f_h\|_{L^2} + \lambda$$

$$\tilde{X}_h = \{\tilde{W}_h \mid |\tilde{W}_h| \leq 1 \quad p \cdot p\}.$$

Plus précisément nous avons procédé de la manière suivante :

1) On se donne une solution exacte

$$(3.57) \quad u = x - x^2; \quad x \in (0, 1)$$

et on pose

$$f = Au$$

ce qui donne

$$P_X^S(u - \rho S^{-1}(Au - f)) = u; \quad \text{car } u \in X.$$

La formule itérative (3.56) donne alors une solution  $(u_h^n)$  que l'on compare  $u$  donné par (3.57).

2) Pour bien voir si le programme de projection sur  $X_h$  fonctionne bien, nous avons donné comme première valeur initiale  $u_h^0 = 100$  et il y a alors nécessité de projeter.

3) Il est essentiel pour l'exemple (3.54) de connaître la région de l'intervalle  $(0, 1)$  sur laquelle on a  $\left| \frac{du}{dx} \right| = 1$ . Pour cela on se donne un second membre  $f$  ( $f = \exp(3x^3)$  pour l'expérience); on calcule  $u_h^n$  par itérations jusqu'à stabilisation des résultats.

Pour  $n$  assez grand (cf. tableau ci-dessous) on a :

$$|\text{grad } u_h^n| < 1 \quad \text{pour } 0 \leq x \leq 0,7$$

et

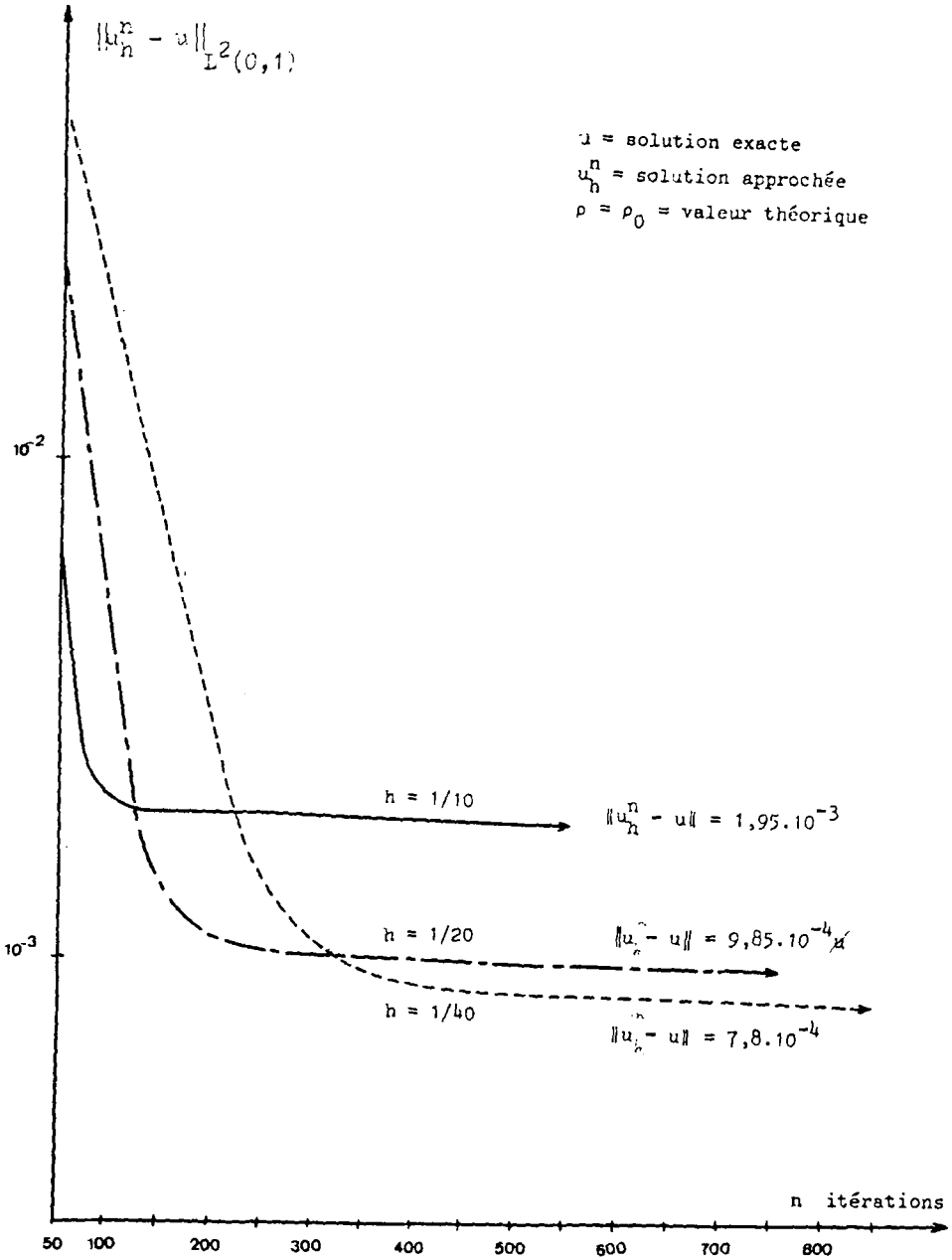
$$|\text{grad } u_h^n| = 1 \quad \text{pour } 0,7 \leq x \leq 1.$$

Nous obtenons les résultats numériques suivants : (sur C. D. C. 3.600)

	$h = 1/10$	$h = 1/20$	$h = 1/40$	$h = 1/40$
Nombre d'itérations	300	700	1 000	2 000
Temps d'exécution	4,7 s	30 s	3 mn 47 s	4 mn 21 s
Erreur $\ u_h^n - u\ _{L^1}$	$1,95 \cdot 10^{-3}$	$9,85 \cdot 10^{-4}$	$7,86 \cdot 10^{-4}$	$6,31 \cdot 10^{-4}$

REMARQUE 3.12. Dans le tableau ci dessus on remarque que pour  $h = 1/40$  pour faire 1000 itérations il a fallu 3 mn 47 s et pour effectuer 2000 itérations seulement 4 mn 21 s. Cela tient à ce qu'au bout d'un certain nombre d'itérations, la solution  $u_h^n$  est dans le convexe et le programme de projection a été évité.

COURBES n° 4





Les courbes n° 4 donnent l'évolution de l'erreur  $\|u_h^n - u\|_{L^2}$ , en fonction du nombre  $n$  d'itérations et pour  $h = 1/10$ ,  $h = 1/20$ ,  $h = 1/40$ .

REMARQUE 3.13. Quand on effectue les itérations en prenant  $\varrho = 4\varrho_0$ ,  $\varrho_0$  étant la valeur théorique, on a une accélération très nette de la convergence :

Pour

$$h = 1/20 \quad \text{et} \quad n = 50 \quad \text{on a} \quad \|u_h^n - u\|_{L^2} = 9 \cdot 10^{-4}$$

Pour

$$h = 1/40 \quad \text{et} \quad n = 70 \quad \text{on a} \quad \|u_h^n - u\|_{L^2} = 2 \cdot 10^{-4}$$

(résultats à comparer avec le tableau ci-dessus).

Le temps d'exécution est inférieur à la minute (exécution + compilation).

III — 5. *Un problème  $n$ -dimensionnel :  $X$  est un convexe sur lequel on ne sait pas projeter explicitement.*

Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert sur  $\mathbb{R}^n$  et  $\Omega$  un ouvert borné de  $R^n$  de frontière  $\Gamma = \partial\Omega$  suffisamment régulière. On se donne un convexe fermé  $X$  de  $\mathcal{H}$  défini par

$$(3.58) \quad X = \{u \in \mathcal{H} \mid |\text{grad } u| \leq 1 \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

PROBLÈME 1. On cherche  $u \in X$  tel que

$$(3.59) \quad (Au, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in X$$

pour  $f$  donné dans  $\mathcal{H}'$  et  $A$  est un opérateur non nécessairement linéaire vérifiant les hypothèses H2) du théorème 1.1 § I.

PROBLÈME 2. On se donne un opérateur  $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$  vérifiant les hypothèses H1) du théorème 1.1 § I.

On cherche  $u \in X$  tel que

$$(3.60) \quad (Su, v - u) \geq (g, v - u) \quad \forall v \in X$$

pour  $g$  donné dans  $\mathcal{H}'$  et  $X$  donné par (3.58).

*Problème 2 et projection sur  $X$  suivant une norme associée à  $S$ .*

Le théorème 1.1 § I dit que la suite  $(u_n)$  définie par

$$(3.61) \quad u_{n+1} = P_X^S(u_n - \varrho S^{-1}(Au_n - f))$$

converge fortement dans  $\mathcal{H}$  vers  $u$  solution de (3.59). Mais la relation (3.61) suppose que l'on sache calculer explicitement  $P_X^S(w)$  pour  $w \notin X$ ; la projection sur  $X$  donné par (3.58) étant prise au sens du produit scalaire  $[u, v] = (Su, v)$ .

Nous allons maintenant chercher à résoudre (3.60) pour le convexe  $X$  donné par (3.58) et pour un certain opérateur  $S$ . La résolution de (3.59) ne posera ensuite aucun problème.

PROPOSITION 3.5.

1. Le problème (3.60) admet une solution unique  $u \in X$ .

2. Toute solution de (3.60) est solution de

$$(3.62) \quad u = P_X^S(S^{-1}g)$$

la projection étant prise au sens de la norme  $[u]^2 = (Su, u)$  et réciproquement.

DÉMONSTRATION. 1. Soit  $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$  et vérifiant

$$(Su, v) = (u, Sv) \quad \forall u, v \in \mathcal{H}.$$

On munit alors  $\mathcal{H}$  du nouveau produit scalaire

$$[u, v] = (Su, v) \quad \text{et de la norme} \quad [u]^2 = (Su, u).$$

On suppose qu'il existe une constante  $\sigma > 0$  telle que  $[u]^2 \geq \sigma \|u\|^2$  où  $\| \cdot \|$  est la norme de  $\mathcal{H}$  associée au produit scalaire  $(,)$ .

Il suffit alors d'appliquer le théorème 1.1 § I.

2. (3.60) est équivalent à (3.62) par définition de la projection sur  $X$  suivant le produit scalaire  $[u, v]$ .

*Discrétisation.*

Soit  $h = (h_1, \dots, h_n)$  un paramètre positif de  $R^n$  destiné à tendre vers 0. On suppose qu'il existe une famille d'approximations de l'espace  $\mathcal{H}$ ;  $\{\mathcal{H}, V_h, p_h, r_h\}$  stable et consistante, cf. [1] où  $V_h$  est un espace de dimension finie.  $p_h$  est un prolongement linéaire continu de  $V_h$  dans  $\mathcal{H}$  et  $r_h$  est une restriction linéaire continue de  $\mathcal{H}$  dans  $V_h$ . On note par  $\widehat{r}_h$  la

transposée de  $p_h$ . Nous avons alors le schéma suivant

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{H} & \xrightarrow{S} & \mathcal{H}' \\
 p \uparrow & & \downarrow \hat{r}_h \\
 & & V_h \\
 & & \downarrow r_h \\
 V_h & \longrightarrow & V_h'
 \end{array}$$

On munit  $V_h$  des produits scalaires  $(\cdot, \cdot)_h$  et  $[\cdot, \cdot]_h$  et des normes associées  $\|\cdot\|_h$  et  $[\cdot]_h$ .

Posons

$$\widehat{V}_i u_h(x) = \frac{u_h(x) - u_h(x - h_i)}{h_i} \quad i = 1, \dots, n \quad \forall u_h \in V_h.$$

Le problème (3.58), (3.60) s'écrit alors en dimension finie sous la forme:

$$(3.63) \quad (S_h u_h, v_h - u_h)_h \geq (g_h, v_h - u_h)_h \quad \forall v_h \in X_h$$

$$(3.64) \quad X_h = \left\{ u_h \in V_h \mid \sum_{i=1}^n |\widehat{V}_i u_h|^2 \leq 1 \quad p, p' \right\}.$$

REMARQUE 3.14. Si  $u_h$  est solution de (3.63), (3.64) la question de la convergence de  $p_h u_h$  vers  $u$  solution de (3.58), (3.60) ne pose aucun problème. Il est néanmoins utile de discrétiser le problème car sur un ordinateur, on ne peut travailler qu'en dimension finie.

Cas où  $\Omega$  est un ouvert de  $R^2$ .

Nous allons résoudre numériquement en dimension  $n = 2$  les problèmes (3.63), (3.64). Par commodité, on supprime l'indice  $h$ . On posera en particulier :

$$u_h(x) = u(i, j) \quad i = 1, \dots, l_1; \quad j = 1, \dots, l_2.$$

Le couple  $(i, j)$  désignant alors le point générique d'un réseau  $\mathcal{R}_h$  de  $R^2$  associé au pas  $h$ .

PROPOSITION 3.6. Soit  $\theta : V \rightarrow V \times V$  défini par

$$(3.65) \quad \theta u = \frac{1}{2} (\widehat{V}_1 u, \widehat{V}_2 u).$$

Soit  $T : V \times V \rightarrow V$  défini par

$$(3.66) \quad T(u_1, u_2) = A_1^{-1} u_1 + A_2^{-1} u_2$$

où

$$A_1 = -\varepsilon \widehat{V}_1^2 + \widehat{V}_1$$

$$A_2 = -\varepsilon \widehat{V}_2^2 + \widehat{V}_2 \quad \square$$

avec des conditions aux limites Duichlet et  $\varepsilon$  étant un paramètre positif arbitrairement petit destiné à tendre vers 0.

Posons

$$W = \{ \tilde{u} \mid \tilde{u} = (u_1, u_2) \mid \widehat{V}_1 u_2 = \widehat{V}_2 u_1 \}$$

$$\tilde{X} = \{ \tilde{v} \in W \mid |\tilde{u}|^2 = |u_1|^2 + |u_2|^2 \leq 1 \}$$

$$\tilde{S} = T^* S T \text{ où } T^* \text{ est l'adjoint de } T.$$

On suppose que  $\tilde{g} = T^* g \in W$

On munit alors  $W$  de la norme

$$[\tilde{u}]_1 = (\tilde{S} \tilde{u}, \tilde{u})^{1/2}$$

Alors la solution du problème (3.63), (3.64) s'écrit :

$$(3.67) \quad u = T \tilde{u} = TP_{\tilde{X}}(\theta S^{-1} g)$$

où la projection sur  $\tilde{X}$  est prise au sens de la norme  $[\tilde{u}]_1$ .

DEMONSTRATION Posons  $u = T \tilde{u}, v = T \tilde{v}$  dans (3.63); il vient alors

$$(S T \tilde{u}, T \tilde{v} - T \tilde{u}) \geq (T^* g, \tilde{v} - \tilde{u}) \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{X}$$

Donc

$$(3.68) \quad (\tilde{S} \tilde{u}, \tilde{v} - \tilde{u}) \geq (\tilde{g}, \tilde{v} - \tilde{u}) \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{X}$$

où

$$\tilde{S} = T^* S T, \tilde{g} = T^* g$$

Si on munit  $W$  de la norme  $[\tilde{u}]_1 = (\tilde{S} \tilde{u}, \tilde{u})^{1/2}$  d'après la proposition 3.5 le problème (3.68) est équivalent à :

$$(3.69) \quad \tilde{u} = P_{\tilde{X}}(\tilde{S}^{-1} \tilde{g})$$

où la projection sur  $\tilde{X}$  est prise au sens de la norme  $[\tilde{u}]_1$ .

Par ailleurs, on a :

$$T\theta u = T \frac{1}{2} (\widehat{V}_1 u, \widehat{V}_2 u) = u$$

et

$$\widetilde{S}^{-1} \widetilde{g} = (T^* ST)^{-1} T^* g = \theta S^{-1} g$$

car

$$(T^* ST) \theta g = T^* g.$$

D'où (3.67).

En général ce que l'on sait faire explicitement, c'est projeter sur le convexe

$$\widetilde{X} = \{ \widetilde{u} \in W \mid |\widetilde{u}| \leq 1 \text{ p.p.} \}$$

suivant la norme usuelle  $|\widetilde{u}|$ .

PROPOSITION 3.7. On se place sous les hypothèses de la proposition

Si de plus on a  $\widetilde{S} = T^* ST = Id$ , alors on peut calculer explicitement la solution  $u$  du problème

$$\varphi_{ij} = |\widetilde{u}|^2 = |u_1(i, j)|^2 + |u_2(i, j)|^2$$

$$\widetilde{g} = T^* g = (g_1, g_2)$$

$$(3.70) \quad \widetilde{u}(i, j) \begin{cases} (g_1(i, j), g_2(i, j)) & \text{si } \varphi_{ij} \leq 1 \\ \left( \frac{g_1(i, j)}{\sqrt{\varphi_{ij}}}, \frac{g_2(i, j)}{\sqrt{\varphi_{ij}}} \right) & \text{si } \varphi_{ij} > 1 \end{cases}$$

Alors

$$(371) \quad u(i, j) = T\widetilde{u}(i, j) = A_1^{-1} u_1(i, j) + A_1^{-1} u_2(i, j)$$

est la solution du problème (3.63, (3.64).

DEMONSTRATION. Si

$$\widetilde{S} = T^* ST = Id$$

alors (3.68),

$$(\widetilde{u}, \widetilde{v} - \widetilde{u}) \geq (\widetilde{g}, \widetilde{v} - \widetilde{u}) \quad \forall \widetilde{u} \in \widetilde{X}$$

ce qui équivaut à

$$(3.72) \quad \widetilde{u} = P_{\widetilde{X}}(\widetilde{g})$$

où la projection est prise cette fois au sens de la norme usuelle

$$|\tilde{u}|^2 = |u_1|^2 + |u_2|^2.$$

Pour  $(i, j)$  fixé, le convexe  $\tilde{X}$  est un disque et l'on sait projeter explicitement sur  $X$  suivant la norme  $|\tilde{u}|$ . D'où les formules (3.70), (3.71).

Si  $\tilde{S} = T^*ST \neq Id$ , on peut seulement calculer la solution de (3.63), (3.64) avec des itérations.

Plus précisément, on a la

PROPOSITION 3.8. On pose  $\tilde{S} = T^*ST \neq Id$ ;  $\tilde{g} = T^*g \in W$ ; alors

1. La suite  $(\tilde{u}_n)$  définie par l'itération

$$(3.73) \quad \tilde{u}_{n+1} = P_{\tilde{X}}(\tilde{u}_n - \varrho(\tilde{S}\tilde{u}_n - \tilde{g}))$$

où la projection est prise au sens de la norme  $|u|$  est convergente dans  $W$  fort pour  $\tilde{u}_0 (= 0)$  et  $\tilde{\varrho} > 0$  convenables.

2. La solution  $u \in X$  de l'inéquation

$$(Su, v - u) \geq (g, v - u) \quad \forall v \in X$$

s'écrit alors

$$(3.74) \quad u = T \left( \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \right)$$

DÉMONSTRATION. On se propose de résoudre (3.68) par itérations :  
Nous avons :

$$(\tilde{S}\tilde{u}, \tilde{v}) \leq C|\tilde{u}||\tilde{v}| \quad \text{et} \quad (\tilde{S}\tilde{u}, \tilde{u}) \geq k|\tilde{u}|^2.$$

On pose  $\tilde{\varrho} = k/C^2$ . D'après le théorème 1.1 chap. I la suite  $(\tilde{u}_n)$  définie par (3.73) converge fortement dans  $W$  vers  $\tilde{u}$  solution de (3.68) et par définition on a  $u = T\tilde{u}$ . D'où (3.74).

REMARQUE 3.15. Dans les itérations (3.73) le calcul explicite de  $\tilde{\varrho}$  est difficile, mais on peut toujours prendre  $\tilde{\varrho} = \tilde{\varrho}_n$  et appliquer les remarques du paragraphe I — 1.2.

REMARQUE 3.16. 1. Le fait de supposer dans la proposition 3.7  $\tilde{S} = T^*ST = Id$  est raisonnable. Voici un exemple en dimension  $n = 1$ .

$$\text{On pose } T = \widehat{V}_\varepsilon^{-1} \text{ et } S = -\widehat{V}^2 \simeq -\frac{d^2}{dx^2}; \text{ où } \widehat{V}_\varepsilon^{-1} = (\widehat{V} - \varepsilon \widehat{V}^2)^{-1}.$$

2. Si  $S = (T^* T)^{-1}$  d'après la proposition 3.7 on peut alors résoudre explicitement et sans itérations le problème (3.63), (3.64).

Résolution du problème 1 avec un opérateur  $A \neq S$ .

La résolution numérique de l'inéquation :

$$(3.75) \quad (Su, v - u) \geq (g, v - u) \quad \forall v \in X$$

pour

$$X = \{u \mid |\text{grad } u| \leq 1 \text{ p.p}\}$$

n'est qu'un moyen pour résoudre l'inéquation plus générale

$$(3.76) \quad (Au, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in X$$

considérée dans le problème 1.

Nous allons montrer que dans ce cas l'opérateur  $S$  de (3.75) est à notre disposition et on pourrait le choisir de manière que  $\tilde{S} = T^* S T = Id$ ; ce qui permettra de résoudre (3.76) avec une formule itérative unique.

PROPOSITION 3.9. Soit  $A$  un opérateur non nécessairement linéaire de  $V_h$  dans  $V_h'$  vérifiant les hypothèses du théorème 1.1 chap. I. Alors

1. Il existe  $u \in X = \{u \mid |\text{grad } u| \leq 1 \text{ p.p}\}$  unique solution de

$$(3.76) \quad (Au, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in X.$$

2. La suite  $(u_n)$  définie par les itérations :

$$(3.77) \quad u_{n+1} = P_X^S(u_n - \rho S^{-1}(A u_n - f))$$

converge dans  $V_h$  vers  $u$  solution de (3.76) quand  $n \rightarrow \infty$  pour  $u_0 (= 0)$  et  $\rho$  convenables.

3. Posons  $f_n = u_n - \rho S^{-1}(A u_n - f)$ . Pour calculer explicitement sur le convexe  $X$

$$u_{n+1} = P_X^S(f_n)$$

il suffit alors de résoudre

$$(3.78) \quad (S u_{n+1}, w - u_{n+1}) \geq (S f_n, w - u_{n+1}) \quad \forall w \in X.$$

DÉMONSTRATION. Les assertions 1 et 2 sont évidentes. Démontrons 3. On doit calculer explicitement  $u_{n+1} = P_X^S(f_n)$  la projection étant prise au

sens du produit scalaire  $[u, v] = (Su, v)$ . Il revient alors au même de résoudre (3.78). On est alors dans le cadre du problème 2 que l'on vient de résoudre en posant  $g = Sf_n$  pour  $n$  fixé.

REMARQUE 3.17. Pour passer du convexe  $X$  au convexe  $\tilde{X}$ , les opérateurs  $T$  et  $\theta$  s'imposent. Par contre le choix de l'opérateur  $S$  est libre. Si on pose  $S = (TT^*)^{-1}$  dans (3.78) on aura :

$$u_{n+1} = T\tilde{u}_{n+1}; \quad w = T\tilde{w}$$

donc

$$(\tilde{u}_{n+1}, \tilde{w} - \tilde{u}_{n+1}) \geq (\tilde{g}_n, \tilde{w} - \tilde{u}_{n+1})$$

avec

$$\tilde{g}_n = T^*(TT^*)^{-1}f_n = \theta f_n.$$

On a alors

$$\tilde{u}_{n+1} = P_{\tilde{X}}(\theta f_n).$$

D'où la

PROPOSITION 3.10. La suite  $(u_n)$  définie par les itérations

$$u_{n+1} = TP_{\tilde{X}}(\theta u_n - \varrho T^*(Au_n - f))$$

où

$$\tilde{X} = \{\tilde{u} \in \tilde{W} \mid |\tilde{u}|^2 = |u_1|^2 + |u_2|^2 \leq 1 p \cdot p\}$$

et où la projection sur  $\tilde{X}$  est prise au sens de la norme  $|\tilde{u}|$  converge dans  $V_h$  fort pour  $u_0 = 0$  et  $\varrho = k/C^2(N)$  vers  $u_h$  solution de

$$(A_h u_h, v_h - u_h)_h \geq (f_h, v_h - u_h)_h \quad \forall v_h \in X_h$$

où

$$X_h = \{u_h \in V_h \mid |V_1 u_h|^2 + |V_2 u_h|^2 \leq 1 p \cdot p\}.$$

Par ailleurs on a  $P_h u_h \rightarrow u$  dans  $V$  fort;  $u$  étant la solution de

$$(Au, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in X$$

où

$$X = \{u \in V \mid |\text{grad } u| \leq 1 p \cdot p\}$$

REMARQUE 3.18 On sait que le problème

$$(A_h u_h, v_h - u_h)_h \geq (f_h, v_h - u_h)_h \quad \forall v_h \in X_h$$

où

$$A_h u_h = - \sum_{i=1}^n \nabla_i (|\nabla_i u_h|^{p-2} \nabla_i u_h) - \lambda \sum_{i=1}^n \nabla_i^2 u_h$$

$$X_h = \left\{ u_h \in V_h; \left( \sum_{i=1}^n |\nabla_i u_h|^2 \right)^{1/2} \leq 1 p \cdot p \right\}$$



est équivalent au problème

$$F_h(u_h) \leq F_h(v_h) \quad \forall v_h \in X_h$$

où

$$F_h(u_h) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n \|\nabla_i u_h\|_{L_p}^p + \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^n \|\nabla_i u_h\|_{L_1}^2 - (f, u_h).$$

La méthode de la mire que nous avons introduit dans [14] permet de résoudre ce problème directement.

L'utilisation d'une méthode directe (méthode de la mire par exemple) semble s'imposer chaque fois que le convexe  $X_h$  est très « compliqué » (cf. les résultats numériques dans [14]).

### III — 6. Résolution d'un problème de mécanique.

Soit à résoudre l'inéquation

$$(3.79) \quad (Au, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in X$$

où

$$X = \{v \in H_0^1(\Omega); |\text{grad } u| \leq 1 \text{ p.p sur } \Omega\}$$

$\Omega$  étant un ouvert borné de  $R^n$

avec

$$A = -\Delta = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

et  $f = c^e$  donnée.

L'inégalité (3.79) est le problème physique correspondant à la torsion élastoplastique (cf. [4], [14], [15]). C'est en outre un cas particulier du problème (3.59).

On se propose maintenant de résoudre numériquement (3.79) par une méthode simple.

Plus précisément, nous avons le

THEOREME 3.3. (cf. H. Brezis et M. Sibony [4]).

1. Le problème (3.79) équivaut à trouver  $\tilde{u} \in \tilde{X}$  solution de

$$(3.80) \quad (A\tilde{u}, \tilde{v} - \tilde{u}) \geq (f, \tilde{v} - \tilde{u}) \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{X}$$

où

$$\tilde{X} = \{\tilde{v} \in H_0^1(\Omega) \mid -\delta \leq v \leq \delta \text{ sur } \Omega\}$$

$$A = -\Delta$$

$$\delta(x) = \text{distance}(x, \partial\Omega).$$

2. Les problèmes (3.79) et (3.80) admettent une solution unique et on a  $u = \tilde{u}$ .

3. La solution  $u$  de (3.79) est alors donnée par

$$(3.81) \quad u = P_{\tilde{X}}^A (A^{-1} f).$$

REMARQUE 3.19. Le calcul numérique de  $\tilde{u}$  solution de (3.80) peut se faire de plusieurs manières :

1. On calcule  $v = A^{-1} f$  par la méthode de Gauss-Seidel [16] et on projette  $v$  sur  $\tilde{X}$  suivant la norme [ ] ce qui donne  $u$  suivant la formule (3.81). Mais en général on ne sait pas projeter numériquement suivant la norme

$$|u| = \left( \sum_{i=1}^n \|D_i u\|_{L_2}^2 \right)^{1/2}.$$

2. On applique la méthode de la mire à la fonctionnelle

$$F(v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \|D_i v\|_{L_2}^2 - (f, \tilde{v})$$

avec les contraintes  $\tilde{v} \in \tilde{X} = \{\tilde{v} \in H_0^1(\Omega); -\delta \leq \tilde{v} \leq \delta \text{ sur } \Omega\}$ . Cf. résultats numériques dans [14] paragraphe II — 4.

3. On peut aussi utiliser une méthode itérative

$$u_{n+1} = P_{\tilde{X}}(\tilde{u}_n - \varrho_n (A \tilde{u}_n - f))$$

avec

$$A = -\Delta \text{ et } \tilde{X} = \{\tilde{u} \in H_0^1(\Omega); |\tilde{u}| \leq \delta \text{ sur } \Omega\}.$$

La projection sur  $\tilde{X}$  étant au sens de la norme  $\|\cdot\|_{L_2}$ .

On montre alors que  $\tilde{u}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \tilde{u}$  solution de (3.80) dans  $H_0^1(\Omega)$  fort. (voir les résultats numériques).

4. On combine 1) et 3) dans les itérations

$$\tilde{u}_{n+1} = P_{\tilde{X}}^{S_i} (u_n - \varrho_i S_i^{-1} (A \tilde{u}_n - f))$$

en prenant alternativement

$$S_i = S_1 = A \quad \text{et} \quad \varrho_i = \varrho_1 = 1 \quad \text{si} \quad f_n = u_n - \varrho_1 S_1^{-1} (Au_n - f) \in X$$

$$\text{et} \quad S_i = S_2 = Id \quad \text{et} \quad \varrho_i = \varrho_n \quad \text{si} \quad f_n \notin X$$

(Voir proposition 1.2 chap. I).

*Résultats numériques.*

1) Si  $f$  est tel que  $A^{-1}f \in X$  la solution  $u$  de (3.79) est alors donné par (3.81) qui s'écrit alors sous la forme

$$(3.82) \quad u = A^{-1}f.$$

L'opérateur  $A = -\Delta$  peut alors être inversé à l'aide de la méthode bien connue de relaxations successives cf. [16] ou bien à l'aide de la méthode itérative suivante :

$$(3.83) \quad u_{n+1} = u_n - \varrho_n (Au_n - f)$$

avec  $u_0 = 0$  et  $\varrho_n = \frac{(Av_n, v_n)}{\|Av_n\|^2}$  où  $v_n = u_n - u_{n-1}$ .

2) Si  $A^{-1}f \notin X$  alors la solution de (3.79) est calculée à l'aide des itérations :

$$(3.84) \quad u_{n+1} = P_{\bar{X}}(u_n - \varrho_n (Au_n - f))$$

avec  $u_0 = 0$  et  $\varrho_n = \frac{(Av_n, v_n)}{\|Av_n\|^2}$  où  $v_n = u_n - u_{n-1}$ .

Pour  $n \leq 5$  nous prenons un paramètre  $\varrho_n = \varrho = \frac{2 + \lambda}{(8/h^2 + \lambda)^2}$  calculé comme dans les hypothèses du théorème 1.1 chap. I.

Nous procédons alors de la manière suivante :

On se donne un paramètre  $h_1 = 1/10$  de discrétisation (ce qui correspond à un réseau de 121 points associé à l'ouvert  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ ). On calcule  $u_{h_1}^n$  à l'aide des itérations (3.84) jusqu'à stabilisation des résultats.

Ensuite on fait  $h_2 = h_{1/2} = 1/20$  (ce qui correspond à un réseau de 441 points) on pose  $u_{h_2}^0 = \tilde{u}_{h_1}^n$  ( $\tilde{u}_{h_1}^n$  étant l'interpolé de  $u_{h_1}^n$  pour un réseau double) et on calcule alors  $u_{h_2}^n$  à l'aide (3.84).

Puis on recommence le procédé avec  $h_3 = h_2/2$ ; ce qui donne la solution finale  $u_{h_3}^n$  pour un réseau associé à l'ouvert  $\Omega$  de 1.681 points.

Le tableau 6a résume les expériences faites.

TABLEAU n° 6a

	Nombre d'itérations pour $h_1 = 1/10$	Nombre d'itérations pour $h_2 = 1/20$	Nombre d'itérations pour $h_3 = 1/40$
$f = 5$	70	150	530
$f = 10$	30	70	210
$f = 15$	10	50	110

Les tableaux 6b, 6c, 6d donnent les répartitions des contraintes pour  $h = 1/10$ ,  $h = 1/20$ ,  $h = 1/40$ . On a noté (1) le point  $(i, j)$  de  $\Omega$  où  $u(i, j) = \delta = \text{distance}(x, \partial\Omega)$ .

Ces points coïncident à l'intérieur du domaine  $\Omega$  avec ceux pour lesquels  $|\text{grad } u| = 1$ .

La durée des calculs en C. D. C. 3600 est de l'ordre de 1mm pour 100 itérations.





## BIBLIOGRAPHIE

- [1] AUBIN J. P. *Approximation des espaces de distributions et des opérateurs différentiels*. Bull. Société Math. France mémoire 12, (1967), 139.
- [2] AUBIN J. P. *Behaviour of the error of the approximate solutions of boundary value problems for linear elliptic operators by Galerkin's and finite difference methods*, Annali della Scuola Norm. Pisa. (3) 21 (1967), 599-637.
- [3] BREZIS H. et SIBONY M. *Méthodes d'approximation et d'itération pour les opérateurs monotones*. Archive for Rat. Meca. and Analysis 28 (1) (1968), 59-82.
- [4] BREZIS H. et SIBONY M. *Équivalence de deux inéquations variationnelles et applications* (A paraître Archive for Rat. Meca, and Analysis).
- [5] BREZIS H. et F. STAMPACCHIA *Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques* Bull. Soc. Math. France 96, (1968), 153-180.
- [6] CEA J. *Approximation variationnelle des problèmes aux limites*. Annales Inst. Fourier 14 (1964) p. 345-444.
- [7] CIARLET P. G. *Variational methods for non linear boundary value problems* (Thèse Case Institute of Technology 1966)
- [8] GOLDESTEIN A. *A Minimizing functionals on Hilbert Spaces Computing methods in optimisation problems*. Acad. Press 1964.
- [9] LIONS J. L. *Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles*. Université de Montréal 1962.
- [10] LIONS J. L. et STAMPACCHIA G. *Variational inequalities*. Comm. Pure and Applied Math, Sept. 1967. t. 20, 493-519.
- [10'] J. L. LIONS et R. TEMAM *Une méthode d'éclatement pes opérateurs et des contraintes en calcul des variations*. C. R. Acad. Sciences Paris, t. 263 (24 Oct. 1966) série A 563-564.
- [11] MOSCO U. *A remark on a theorem of F. E. Browder*. Journal of Math. Analysis and Applications 20 (1) (1967).
- [12] PETRYSHIN W. V. *On the extension and the solution of non linear operator equations*. III. Journal of Math. 10, (2) (1966).
- [13] SIBONY M. *Minimisation de fonctionnelles non différentiables*. (A paraître dans Israël Journal of Mathematics)
- [14] SIBONY M. *Sur l'approximation d'équations aux dérivées partielles non linéaires de type monotone* (A paraître dans Journal of Math. Analysis and applications).
- [14'] TEMAM R. *Sur la stabilité et la convergence de la méthode des pas fractionnaires*. Thèse Fac. Sciences de Paris 1967.
- [15] TINK *Elastic Plastic Xorsion*. Arch. Mech. Anal. t. 25 (1967),
- [16] VARGA R. S. *Matrix iterative analysis*. Englewood Cliffs (Prentice Hall Series in automatic computation). 1962.
- [17] YANENKO N. N. *Méthode des pas fractionnaires pour la résolution numérique des problèmes de la physique mathématique* (en russe), Novosibirsk (1966) et la bibliographie de ce livre.