

DK 62-233.21-416 : 621.822.5-416 : 621.891

Grundlagen des Folienlagers

Von Wilfried J. Bartz, Hannover*)

Auf eine Erörterung der Betriebsbereiche sowie der Möglichkeiten, unter wechselnden Betriebsbedingungen bei Gleitlagern den optimalen Betriebspunkt beibehalten zu können, folgt eine Herleitung der Grundgleichungen des Folienlagers auf der Basis der Reynoldsschen Differentialgleichung sowie der Foliengleichgewichts-Gleichung. Nach der Behandlung des allgemeinen Falls werden einige Sonderfälle des Folienlagers untersucht und für den Fall einer flexiblen Folie und inkompressibler Schmierstoffe die nominelle Spaltweite sowie die Reibungsverhältnisse ermittelt. Ein theoretischer Vergleich des Folienlagers mit starren, herkömmlichen Gleitlagern und einige bisher vorliegende Versuchsergebnisse beschließen die Untersuchung.

1. Einführung

Durch Verändern der Betriebsbedingungen von Gleitlagern werden die Reibungsleistung und die Lagertemperatur beeinflusst. Darüber hinaus ergeben sich aber auch Auswirkungen auf die Verlagerung der Welle innerhalb der Lagerschale, da die Exzentrizität unmittelbar von der Drehzahl und der Belastung abhängt. Solche Relativbewegungen zwischen Welle und Lagerschale können sich nachteilig auf die Arbeitgenauigkeit von Präzisionswerkzeugmaschinen auswirken; denn das Wandern des Wellenmittelpunkts auf der Verlagerungsbahn ist gleichbedeutend mit einer Relativbewegung zwischen Werkzeug und Werkstück. Um einen ausgezeichneten Rundlauf der Welle zu gewährleisten, wählt man z. B. bei Spindellagerungen sehr kleine Lagerspiele. Dabei hat man dann wieder entsprechende Vorkehrungen zu treffen, um die erhöhte Reibungswärme zu beherrschen.

Nachstehend wird gezeigt, daß sog. Folienlager theoretisch eine kleinere Veränderung ihres Betriebspunkts bei wechselnden Betriebsbedingungen erfahren als starre Gleitlager. Auf die Behandlung der theoretischen Grundlagen der Folienlager folgt eine Abschätzung ihres Verhaltens in bezug auf den Lagerspalt, die Reibung und den Betriebspunkt bei Veränderungen von Drehzahl, Belastung und Ölviskosität. In einem rechnerischen und experimentellen Vergleich werden die Ergebnisse von Folienlagern denen von herkömmlichen starren Gleitlagern gegenübergestellt.

Als im wesentlichen verwendete Formelzeichen bedeuten

b	Lager- bzw. Folienbreite
$b^* = b/2 r_0 B$	Breitenverhältnis des Folienlagers
B	halber Umschließungswinkel
c_u	Übergangsfaktor
C, C_1 bis C_6	Integrationskonstanten
d	Nenn Durchmesser der Welle

$D = E t^3/12(1 - \nu^2)$	Biegesteifigkeit je Breitereinheit
E	Elastizitätsmodul
F_R	Reibungskraft je Breitereinheit
h	Lagerspaltweite, Abstand zwischen Folie und Wellenoberfläche
h_0	Spaltweite im zentralen Bereich des Folienlagers
h_{\min}	Mindestspaltweite, engste Spaltweite
$H = h/h_0$	dimensionslose Spaltweite
K	Spaltkonstante nach Gl. (36)
l	charakteristische Länge nach Gl. (16)
m	Faktor in Gl. (41)
M_s, M_x, M_{xs}	Biegemomente
n	Drehzahl
N_s, N_x, N_{xs}	Tangentialkräfte
p	Tragfilmdruck, Druck zwischen Folie und Wellenoberfläche
\bar{p}	mittlere Flächenbelastung des Lagers
p_a	Umgebungsdruck
P	Lagerbelastung
Q_s, Q_x	Normalkräfte
r	Krümmungshalbmesser der Folie
r_0	Wellenhalbmesser
s	Koordinate in Folienlängsrichtung
S	dimensionsloser Steifheitsparameter, nach Gl. (26)
$So = \bar{p} \psi^2/\eta \omega$	Sommerfeldzahl
$So' = \bar{p} \psi'^2/\eta \omega$	äquivalente Sommerfeldzahl für das Folienlager
t	Dicke der Folie
T	effektive Zugkraft je Breitereinheit
T_0	Anfangszugkraft je Breitereinheit (Zugkraft je Breitereinheit bei $s = \pm \infty$)
U	Umfangsgeschwindigkeit
x	Koordinate in Breitenrichtung

*) Mitteilung aus dem Institut für Erdölforschung, Hannover.

α	dimensionslose Druckkennzahl nach Gl. (13)
β	Umfangswinkelkoordinato auf der Welle
γ	dimensionslose Kennzahl nach Gl. (14)
ε	Folienlagerkennzahl
η	dynamische Viskosität
ϑ_u	Raumtemperatur
$\kappa = 1/r$	Krümmung der Folie in s -Richtung
Λ	Kompressibilitätszahl nach Gl. (21)
μ	Reibungszahl
ν	Poissonsche Zahl
$\xi = s/l$	dimensionslose Koordinate
$\bar{\xi} = s/r_0 K \varepsilon^{1/3}$	bezogene dimensionslose Koordinate in s -Richtung
ρ	Dichte
σ	Folienmasse je Flächeneinheit
σU^2	durch Fliehkraft hervorgerufene Verminderung von T_0 bei bewegter Folie
τ	Schubspannung
ψ	relatives Lagerspiel
$\psi' = h_0/r_0$	äquivalentes relatives Lagerspiel für das Folienlager
ω	Winkelgeschwindigkeit

2. Betriebsbereich und optimaler Betriebspunkt des Gleitlagers

Ziel der Berechnung und der Auslegung von Gleitlagerungen ist es, den betriebssicheren Lauf der Lager über einen langen Zeitraum zu gewährleisten. Dies bedeutet, daß weder ein unzulässig hoher Verschleiß noch übermäßig hohe Betriebstemperaturen das Verhalten des Lagers beeinträchtigen dürfen. Durch diese Forderungen läßt sich der sichere Betriebsbereich eines Lagers definieren; hier-nach muß sein Betriebspunkt im hydrodynamischen Gebiet liegen, ohne daß eine zulässige Höchsttemperatur überschritten wird.

Wie Bild 1 verdeutlicht, ist die untere Betriebs-grenze C durch eine Drehzahl n_{min} gekennzeichnet, die genügend weit vom Ausklinkpunkt B entfernt ist und sicherstellt, daß die Gleitpartner ständig durch einen hydrodynamischen Tragfilm von ausreichender Dicke getrennt sind. Demgegenüber charakterisiert die obere Betriebs-grenze D eine Höchstzahl n_{max} , bei der sich die maximal zulässige Dauerbetriebstemperatur des Lagers einstellt. Diese Drehzahl kann man nur so lange erhöhen, wie es gelingt, die entstehende Reibungswärme abzuführen, um die zulässige Höchsttemperatur nicht zu überschreiten. Bei niedrigen Belastungen und/oder hohen Drehzahlen ist es auch möglich, die Betriebsgrenze durch die Stabilität des Wellenlaufs zu begrenzen. Bei solchen Betriebsbedingungen liegt der Wellenmittelpunkt sehr nahe am Bohrungsmittelpunkt, was einen labilen Gleichgewichtszustand bedingt.

Durch geeignete Wahl der Konstruktionsdaten in Anpassung an die gegebenen Betriebsbedingungen läßt sich der Betriebspunkt für ein stationäres Gleitlager mehr oder weniger optimal festlegen. Diese Optimierung gilt aber nur für einen einzigen Betriebspunkt; bei jeder Änderung der Betriebsbedingungen müßten also gleichzeitig die Konstruktionsdaten ebenfalls geändert werden, wenn man den optimalen Betriebspunkt beibehalten und sein Wandern auf der Stribeckkurve nach Bild 1 unterbinden will. Sollen Gleitlager demnach mit wechselnden Drehzahlen und/oder wechselnden Belastungen betrieben werden, so ist beim Festlegen der Betriebsgrenzen ein weiterer Gesichtspunkt zu beachten. Dies sei an Hand von Bild 2 verdeutlicht. Das betrachtete Gleitlager soll bei unveränderter Belastung mit den beiden Drehzahlen n_1 und n_2 betrieben werden (bei $n_2 > n_1$). Für die niedrigere Drehzahl n_1 möge sich im Beharrungszustand des Lagers der Betriebspunkt b_1 einstellen, der genügend weit vom Ausklinkpunkt mit

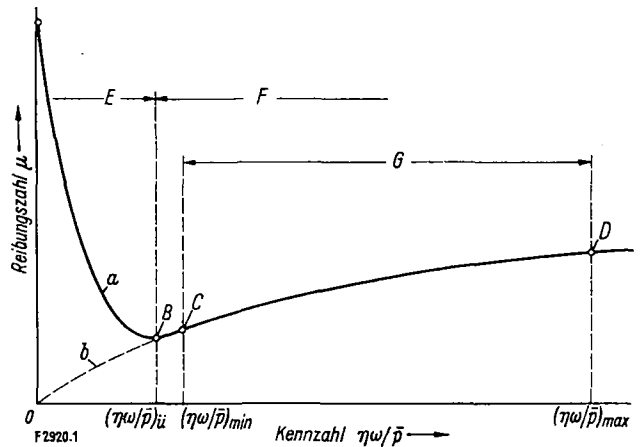


Bild 1. Verlauf der Reibungszahl μ bei einem Gleitlager über der Kennzahl $\eta \omega / \bar{p}$.

\bar{p} mittlere Flächenbelastung des Lagers, η dynamische Viskosität des Schmiermittels, ω Winkelgeschwindigkeit der Welle; A Anlaufreibung, B Ausklinkpunkt (durch Index \bar{u} für den Übergang von der Misch- zur Flüssigkeitsreibung gekennzeichnet), C untere Betriebsgrenze (durch Index \bar{u}_{min} gekennzeichnet), D obere Betriebsgrenze (durch Index \bar{u}_{max} gekennzeichnet), G Betriebsbereich, a Verlauf von μ (Stribeckkurve), b parabolische Extrapolation der Stribeckkurve zum Nullpunkt hin

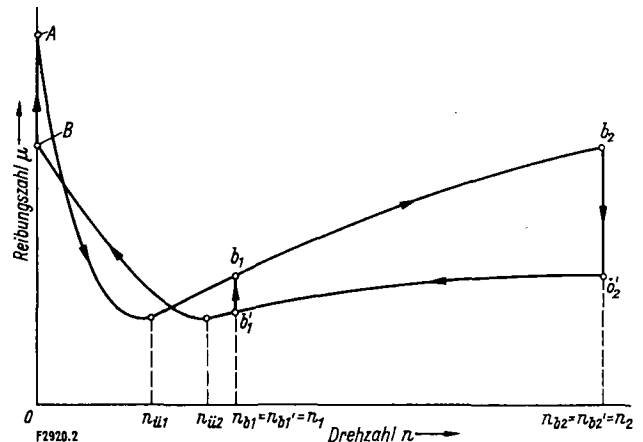


Bild 2. Änderung des Betriebspunkts eines Gleitlagers bei wechselnden Drehzahlen (schematisch).

Durchlaufen der Kurve für die Reibungszahl μ in Pfeilrichtung von der Anlaufreibung bei A für $n = 0$ über die Drehzahl n_{b2} bzw. n_{b2}' im Betriebspunkt b_2 nach Rückgang auf b_2' bis zur Auslaufreibung bei B für wieder $n = 0$; sonstige Erläuterungen im Text

der Drehzahl n_{u1} entfernt liegt. Nach dem Beschleunigen auf die höhere Drehzahl n_2 ergibt sich zunächst der vorläufige Betriebspunkt b_2 , der sich aber im Beharrungszustand infolge der Erwärmung und der dadurch verursachten Viskositätsverminderung des Öls zum Punkt b_2' verschiebt. Wird das Gleitlager jetzt wieder auf die niedrigere Drehzahl n_1 verzögert, so stellt sich zunächst der Betriebspunkt b_1' ein.

Da sich die Betriebstemperatur und damit die Ölviskosität nur mit einer bestimmten Verzögerung den neuen Bedingungen anpaßt, wird beim Herabsetzen der Wellendrehzahl das Gebiet der Mischreibung bereits bei einer höheren Übergangsdrehzahl n_{u2} erreicht, d. h. es gilt $n_{u2} > n_{u1}$. Wurde also bei der Auslegung des Lagers nicht für einen entsprechend großen Abstand zwischen der Drehzahl n_1 und der Übergangsdrehzahl n_{u1} gesorgt, so kann der zeitweilige Betriebspunkt b_1' im Gebiet der Mischreibung liegen. Sind die Drehzahlen n_1 und n_2 sehr unterschiedlich, so gelingt es schwer, ein Lagerspiel zu wählen, das den Reibungs- und damit den Temperaturgegebenheiten beider Betriebspunkte gerecht wird.

3. Konstanthalten des Betriebspunkts bei veränderten Betriebsbedingungen

3.1 Theoretische Möglichkeiten der Konstanthaltung des Betriebspunkts

Aus den bisher erörterten Zusammenhängen läßt sich der Schluß ziehen, daß es wünschenswert ist, bei geänderten Betriebsbedingungen einer Gleitlagerung den bei der Auslegung gewählten optimalen Betriebspunkt nicht zu verlassen. Den Betriebspunkt eines Lagers kann man durch die Sommerfeldzahl So kennzeichnen. Soll die Sommerfeldzahl bei geänderten Belastungen und/oder geänderten Drehzahlen gleich bleiben, so müßten das Lagerspiel und/oder die Viskosität andere Werte annehmen. Zunächst rein theoretisch bestehen somit drei Möglichkeiten, den Betriebspunkt eines Gleitlagers bei veränderlichen Betriebsbedingungen beizubehalten:

1. Änderung der Viskosität mit der Temperatur,
2. Änderung der Viskosität mit dem Geschwindigkeitsgefälle und
3. Änderung des Lagerspiels mit der Drehzahl und der Belastung.

Für ein hypothetisches Gleitlager, das bei konstanter Belastung mit Drehzahlen zwischen 10 und 10 000 U/min laufen soll, werden diese drei Möglichkeiten rechnerisch mit dem Ziel behandelt, die entsprechenden Einflüsse abzuschätzen. Tafel 1 enthält die Daten dieses Lagerbeispiels.

3.2 Änderung der Viskosität mit der Temperatur und dem Geschwindigkeitsgefälle

Damit sich die Sommerfeldzahl nicht ändert, müßte bei einer Erhöhung der Drehzahl n von 10 auf 10 000 U/min die dynamische Viskosität η in dem Maß absinken, daß das Produkt $\eta \omega$ konstant bliebe (mit ω als der Winkelgeschwindigkeit der Welle). Damit würde auch die Reibungszahl μ des Lagers unverändert bleiben, wie Bild 3 schematisch zeigt. Diese idealisierten Vorgänge lassen sich aber praktisch nicht verwirklichen, da sie für jede Drehzahl eine andere Ölviskosität bei gleicher Temperatur voraussetzen würden.

Bei einer früheren Untersuchung [1] darüber, inwieweit die Effekte der Temperaturabhängigkeit der Viskosität sowie des nichtnewtonschen Fließverhaltens ausreichen, bei geänderter Drehzahl das Produkt $\eta \omega$ konstant zu halten, hat sich gezeigt, daß für das gewählte Lagerbeispiel die Viskositätssenkung infolge der Reibungswärme nicht dazu ausreicht. Es wäre für $\eta \omega = \text{konst}$ eine zusätzliche Erwärmung des Öls nötig, doch ist klar ersichtlich, daß die erforderlichen Temperaturen weder vom Öl noch vom Lager zu beherrschen wären.

Bei strukturviskosen Ölen fällt infolge ihres nichtnewtonschen Fließverhaltens die scheinbare Viskosität selbst bei konstanter Temperatur mit steigendem Geschwindigkeitsgefälle ab [2; 3], so daß sich das Viskositätsverhalten solcher Öle ebenfalls in der gewünschten Richtung auswirken müßte. Für das genannte Lagerbeispiel ergab sich

Tafel 1. Lagerdaten für ein Berechnungsbeispiel.

Lagerbreite	$b = 35 \text{ mm}$
Lagerneurdurchmesser	$d = 35 \text{ mm}$
Lagerbelastung	$P = 122,5 \text{ kp}$
Spezifische Flächenlast	$\bar{p} = 10 \text{ kp/cm}^2$
Übergangsdrehzahl	$n_u = 10 \text{ U/min}$
Übergangsfaktor*)	$c_u = 1$
Faktor für die Mindestspaltweite°)	$m = 0,85$
Raumtemperatur	$\theta_u = 20^\circ \text{ C}$
Viskosität (für $n_u = 10 \text{ U/min}$)	$\eta = 364 \text{ cP bei } 20^\circ \text{ C}$

*) Definiert als $c_u = P/\eta n_u V$ (mit P als der Lagerbelastung und $V = \pi d^2 b/4$ als dem Lagervolumen)

°) Definiert als $m = So(1 - \varepsilon)/\varepsilon$ (mit So als der Sommerfeldzahl und ε als der Folienlagerkennzahl)

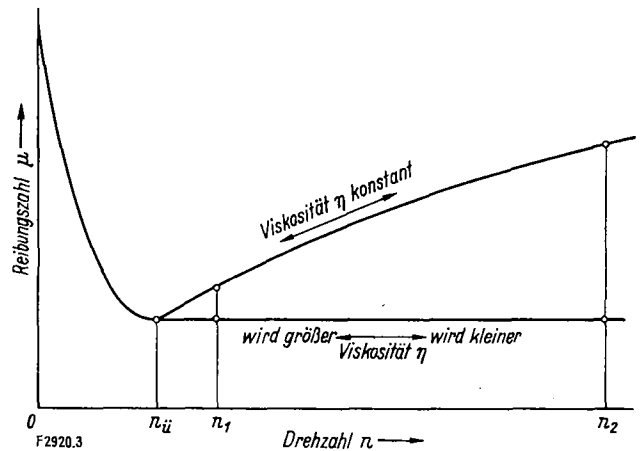


Bild 3. Verlauf der Reibungszahl μ in einem Gleitlager über der Drehzahl n bei konstanter und bei ideal veränderlicher Viskosität η (schematisch).

n_u Übergangsdrehzahl, n_1 und n_2 zwei verschiedene Betriebsdrehzahlen

zwar, daß sich bei Schmierung mit dem strukturviskosen Öl infolge der zusätzlichen Viskositätsverminderung durch das Geschwindigkeitsgefälle kleinere Änderungen des Produktes $\eta \omega$ mit steigender Drehzahl einstellen als beim Einsatz eines newtonschen Öls, doch wird der ideale Kurvenverlauf für die Viskositätsänderung zum Konstanthalten von $\eta \omega$ nicht erreicht.

3.3 Veränderung des Lagerspiels mit der Drehzahl und der Belastung

Wie bereits erwähnt wurde, läßt sich bei einem herkömmlichen Gleitlager das Lagerspiel nur für einen einzigen Betriebspunkt optimal wählen, weil man starre Oberflächen für beide Gleitpartner voraussetzt. Anders verhält sich ein elastisch verformbares Lager, das im Extremfall aus einer völlig elastischen Bandschleife besteht, die teil-

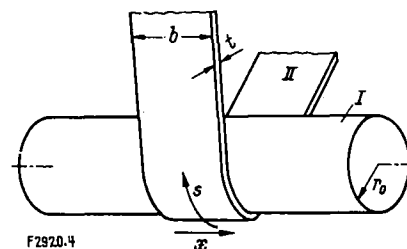


Bild 4. Schema eines Folienlagers.

I Welle vom Halbmesser r_0 , II Folie von der Breite b , s und x Koordinate in Folienlängsrichtung bzw. in Breitenrichtung

weise eine starre Welle umschlingt. Für solche Lagerungen hat sich der Begriff „Folienlager“ durchgesetzt.

Bei der hier betrachteten Anordnung soll der zylindrische Gleitpartner von einem mehr oder weniger nachgiebigen Band umschlungen werden, Bild 4. Für die Funktion der Lagerung ist es dabei gleichgültig, ob der zylindrische Teil rotiert, während das Band stillsteht, oder ob sich bei stationärem zylindrischen Teil das Band bzw. die Folie weiterbewegt. Die Bedeutung solcher Lagerungen erwuchs zunächst aus Anforderungen bei elektronischen Rechenanlagen, bei denen es um das Abstützen und Führen bewegter Magnetbänder ging. Doch auch in allen Fällen, in denen Kunststoffbahnen, Metallfolien, Papier und sogar Textilien kontinuierlich hergestellt und aufgewickelt werden, handelt es sich um luftgeschmierte Folienlager. Die Hauptbewegung wird dabei in der Regel dem Band mitge-

teit; der zylindrische Gleitpartner steht dabei still oder kann sich frei mitdrehen. Technisch denkbar ist jedoch auch der umgekehrte Fall, daß eine rotierende Welle in einer stillstehenden Bandschleife gelagert wird.

Bei einem herkömmlichen Lager mit starren Oberflächen beider Gleitpartner ist die Form des Lagerspalts und damit die Form des Schmier- und Tragfilms bekannt, wenn man durch Messungen an zwei Stellen die relative Lage der beiden Oberflächen zueinander bestimmt hat. In weiteren Untersuchungen gilt es dann, die Tragfilmdrücke und die resultierenden Kraftwirkungen zu ermitteln. Bei gegebenen Betriebsbedingungen sind die hydrodynamischen Tragfilmdrücke durch den sich verengenden Spalt und damit auch durch das Lagerspiel gegeben. Demgegenüber kann für das Foliengerät kein konstruktiv vorgegebenes Lagerspiel definiert werden. Hier sind die Verhältnisse schwieriger, da die Filmdrücke die Form des Spalts verändern. Deshalb muß man den gesamten Spaltbereich untersuchen, um die Form des Spalts zu bestimmen. Im Foliengerät verursacht also die hydrodynamische Druckverteilung im Tragfilm eine Deformation der mehr oder weniger flexiblen Oberfläche, was wiederum die Druckverteilung beeinflusst, so daß also die Filmdrücke die Form des Spalts bestimmen. Es wird sich also eine den Betriebsbedingungen entsprechende optimale Mindestspaltweite einstellen, die bei Änderung von Drehzahl und/oder Belastung ebenfalls selbsttätig ihren Wert ändert.

Zum Kennzeichnen des Foliengeräts reicht die Lösung der *Reynoldsschen* Differentialgleichung allein nicht aus, vielmehr ist diese simultan mit der Foliengleichgewichtsgleichung zu lösen, die ihrerseits ein Maß für die Steifigkeit darstellt, da sie das Gleichgewicht der Zugspannung in der Folie mit dem Tragfilmdruck ausdrückt.

Auch beim Foliengerät kann der Tragfilmdruck im Lagerspalt durch die Relativbewegung der Gleitflächen und/oder außerhalb des Lagerspalts erzeugt werden. Als Sonderfall wäre ein poröses Foliengerät anzusehen, dem man um den gesamten Umfang herum die zum Aufbau eines Tragfilms nötige Luft zuführt. Die folgenden Untersuchungen sollen sich jedoch vorwiegend auf das hydrodynamische Foliengerät beziehen.

4. Herleitung der Grundgleichungen für das Foliengerät

4.1 Allgemeine Gleichungen für das endlich breite Lager

Gemäß der Definition für das Foliengerät soll die Zylinderoberfläche starr sein und sich die Folie entsprechend den einwirkenden Kräften deformieren können. Zur Behandlung dieses Lagers ist das gleichzeitige Lösen von zwei Differentialgleichungen nötig, von denen die eine Gleichung das Verhalten des Schmiermittels und die andere das Verhalten der Folie beschreibt.

Den Zusammenhang zwischen Tragfilmdruck einerseits sowie Filmdicke, Relativgeschwindigkeit und Viskosität andererseits gibt die *Reynoldssche* Gleichung an. Demgegenüber kennzeichnet die Foliengleichgewichtsgleichung den Zusammenhang zwischen den elastischen Eigenschaften der Folie und den einwirkenden Kräften. Die Kombination der beiden Gleichungen führt zu einer nichtlinearen Differentialgleichung 6. Ordnung, für die es keine geschlossene Lösung gibt.

4.11 Reynoldssche Differentialgleichung: Für ein endlich breites Lager und einen kompressiblen Schmierstoff gilt die folgende Form der *Reynoldsschen* Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\rho h^3 \frac{\partial p}{\partial s} \right) = 6 \eta U \frac{\partial}{\partial s} (\rho h) \quad (1).$$

Darin bedeuten ρ die Dichte und η die dynamische Viskosität des Schmiermittels, p den örtlichen Tragfilmdruck, h die Spaltweite, s und x die Koordinate in Längs- bzw. in

Breitenrichtung der Folie sowie U die Umfangsgeschwindigkeit des bewegten Gleitpartners.

4.12 Foliengleichgewichtsgleichung: Es wird angenommen, daß die Folie den Zylinder über den Winkel $2B$ umfaßt (mit B als halbem Umschlingungswinkel) und unter der Zugkraft T je Breitereinheit steht. In genügender Entfernung vom Zylinder schließen die beiden Schenkel der Folie den Winkel $\pi - 2B$ ein, Bild 5.

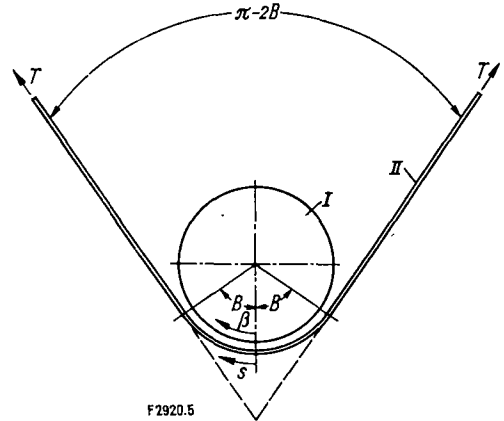


Bild 5. Querschnitt eines Foliengeräts (schematisch).

I Welle, II Folie, T Zugkraft je Breitereinheit, s Koordinate in Folienlängsrichtung, B halber Umschlingungswinkel, β Umfangswinkelkoordinate auf der Welle

Um die relative Lage der Folie zum Zylinder zu bestimmen, muß man eine Beziehung zwischen den einwirkenden Kräften und der Auslenkung der Folie aufstellen. Dazu wird die Folie als sehr dünnwandige zylindrische Schale behandelt [4], bei der die hiervon auftretenden Abweichungen klein bleiben müssen. Damit die für dünnwandige Schalen hergeleitete Theorie [5] angewendet werden kann, setzt man die Folie gedanklich zunächst einer Biegebeanspruchung aus, um die zylindrische Form zu erhalten. Aus dem Gleichgewicht der einwirkenden Kräfte und Momente gemäß Bild 6a bis c ergibt sich das Gleichungssystem

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xs}}{\partial s} = 0 \quad (2a),$$

$$\frac{\partial N_s}{\partial s} + \frac{\partial N_{sx}}{\partial x} - \kappa Q_s = \tau \quad (2b),$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_s}{\partial s} + \kappa N_s = p - p_a + \kappa \sigma U^2 \quad (2c),$$

$$-\frac{\partial M_{xs}}{\partial x} - \frac{\partial M_s}{\partial s} + Q_s = 0 \quad (2d),$$

$$-\frac{\partial M_{sx}}{\partial s} - \frac{\partial M_x}{\partial x} + Q_x = 0 \quad (2e).$$

Es bedeuten σ die Foliendichte je Flächeneinheit, $\kappa = 1/r$ die Krümmung der Folie (mit r als ihrem Krümmungshalbmesser), p den Tragfilmdruck, p_a den Umgebungsdruck, τ die von T herrührende Schubspannung, Q_s und Q_x die Normalkraft senkrecht zur s - bzw. zur x -Richtung, N_s und N_x die Tangentialkraft in s - bzw. in x -Richtung, N_{sx} und N_{xs} die Schubkraft senkrecht zur s - bzw. x -Richtung und in x - bzw. s -Richtung ($N_{sx} = N_{xs}$), M_s und M_x das Biegemoment um die s - bzw. die x -Achse sowie M_{sx} und M_{xs} die Torsionsmomente senkrecht zur s - bzw. zur x -Richtung ($M_{sx} = M_{xs}$).

Für den Zusammenhang zwischen den einwirkenden Kräften bzw. Momenten und der Auslenkung der Folie gilt

$$M_s = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} \left(-\kappa + \nu \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) \dots \dots \dots (3a),$$

$$M_x = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \nu \kappa \right) \dots \dots \dots (3b),$$

$$M_{xs} = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 h}{\partial s \partial x} \dots \dots \dots (3c),$$

$$N_s = \frac{E t}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial v}{\partial s} + \kappa(h-h_0) + \frac{T_0}{E t} (1-\nu^2) + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right] \dots \dots (3d),$$

$$N_x = \frac{E t}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial s} + \nu \kappa(h-h_0) + \nu \frac{T_0}{E t} (1-\nu^2) \right] \dots \dots (3e),$$

$$N_{sx} = \frac{E t}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s} \right) \dots \dots \dots (3f)$$

mit E als dem Elastizitätsmodul und ν als der *Poissonschen* Zahl des Werkstoffs, t als der Dicke der Folie, h_0 als der (engsten) Spaltweite im zentralen Bereich des Spalts, T_0 als der Anfangszugkraft je Breitereinheit sowie mit u und v als der Verformung der Folie in s - bzw. in x -Richtung.

Unter der Annahme, daß u und v verglichen mit $h-h_0$ vernachlässigbar klein bleiben, läßt sich eine einzige Beziehung für den Zusammenhang zwischen dem Druck p und der Spaltweite h aufstellen. Zunächst werden aus Gl. (2c) bis (2e) Q_s und Q_x eliminiert. Man erhält

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xs}}{\partial s \partial x} + \frac{\partial^2 M_s}{\partial s^2} + \kappa N_s = p - p_a + \kappa \sigma U^2 \dots \dots (4).$$

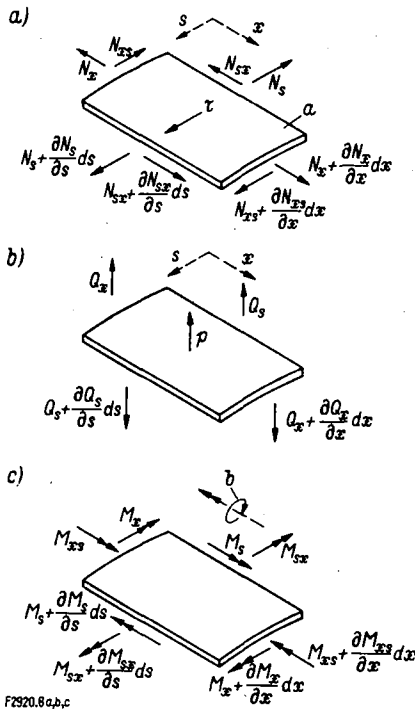


Bild 6a bis c. Auf eine dünne Schale einwirkende Kräfte und Momente (nach W. Flügge [5]).

a Ausschnitt aus der Schale, b Symbol für das Moment um die x -Achse, s und x Koordinate in Folienslängsrichtung bzw. in Breitenrichtung, p Tragfilmdruck, τ der Zugkraft entsprechende Schubspannung, Q_s und Q_x Normalkraft senkrecht zur s - bzw. zur x -Richtung, N_s und N_x Tangentialkraft in s - bzw. in x -Richtung, M_s und M_x Biegemoment um die s - bzw. die x -Achse, N_{sx} und N_{xs} die Schubkraft senkrecht zur s - bzw. x -Richtung und in x - bzw. s -Richtung (mit $N_{sx} = N_{xs}$), M_{sx} und M_{xs} die Torsionsmomente senkrecht zur s - bzw. x -Richtung (mit $M_{sx} = M_{xs}$); a) Schema der Tangentialkräfte, b) Schema der Normalkräfte, c) Schema der Biegemomente

Mittels Gl. (3a) bis (3d) werden aus Gl. (4) nun M_x , M_{xs} , M_s und N_s eliminiert. Dann ergibt sich für den Zusammenhang zwischen p und h die Beziehung

$$\frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial^4 h}{\partial x^4} - (2-\nu) \frac{\partial^4 h}{\partial x^2 \partial s^2} - \nu \frac{\partial^2 \kappa}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \kappa}{\partial s^2} \right] + \frac{E t \kappa^2}{(1-\nu^2)} (h-h_0) = p - p_a + \kappa \sigma U^2 - \kappa T_0 \dots (5).$$

Für die Krümmung der Folie gilt mit r_0 als Wellenhalbmesser der Ausdruck

$$\kappa = \frac{r_0^2 + 2 r_0 h + h^2 + 2 \left(\frac{\partial h}{\partial \beta} \right)^2 - r_0 \frac{\partial^2 h}{\partial \beta^2} - h \frac{\partial^2 h}{\partial \beta^2}}{\left[r_0^2 + 2 r_0 h + h^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \beta} \right)^2 \right]^{3/2}} \dots (6),$$

wenn β die Umfangswinkelkoordinate der Welle von h_0 aus bedeutet. Da r_0 viel größer als h ist, läßt sich Gl. (6) vereinfachen

$$\kappa = \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial^2 h}{\partial \beta^2} \dots \dots \dots (7)$$

schreiben. Die Kombination von Gl. (5) und (7) führt dann nach dem Ersetzen von β durch s/r_0 zum gewünschten Zusammenhang zwischen Druck und Spaltweite gemäß

$$\frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} \Delta \Delta h + \frac{E t}{(1-\nu^2)} \frac{h-h_0}{r_0^2} \left(1 - r_0 \frac{\partial^2 h}{\partial s^2} \right)^2 = p - p_a - \frac{T_0 - \sigma U^2}{r_0} \left(1 - r_0 \frac{\partial^2 h}{\partial s^2} \right) \dots \dots (8)$$

mit dem Laplace-Operator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \dots \dots \dots (9).$$

Zur Behandlung des anstehenden Problems wären Gl. (1) und (8) simultan zu lösen. Dies ist aber praktisch nicht möglich.

4.2 Allgemeine Gleichung für das unendlich breite Lager

Aus Gründen der Vereinfachung soll die folgende Behandlung des Folienslagers auf den eindimensionalen Fall beschränkt bleiben. Es wird daher eine unendlich breite Folie angenommen, d. h. das sog. Breitenverhältnis

$$b^* = \frac{b}{2 r_0 B} \dots \dots \dots (10)$$

des Folienslagers soll unendlich sein. Dann entfallen in Gl. (1) und (8) alle Glieder mit Ableitungen in x -Richtung. Die *Reynoldssche* Gleichung vereinfacht sich dann zu

$$\frac{d}{ds} \left(h^3 \varrho \frac{dp}{ds} \right) = 6 \eta U \frac{d}{ds} (\varrho h) \dots \dots \dots (11),$$

während die Foliengleichgewichts-Gleichung zu

$$\frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} \frac{d^4 h}{ds^4} - T \frac{d^2 h}{ds^2} = p - p_a - \frac{T}{r_0} \dots (12)$$

wird, wenn man für den Ausdruck $T_0 - \sigma U^2$ die effektive Zugkraft T je Breitereinheit einsetzt¹⁾. Während das erste Glied links in Gl. (12) die Flexibilität der Schale kennzeichnet, kommt das zweite Glied durch die Zugkraft zustande. Beim Folienslager überwiegt die Bedeutung des zweiten Glieds.

¹⁾ Dabei bedeutet σU^2 die durch die Fließkraft hervorgerufene Verminderung von T_0 bei bewegter Folie.

Nun wird Gl. (11) einmal integriert und mit Gl. (12) kombiniert. Es ergibt sich eine nichtlineare Differentialgleichung 5. Ordnung, die zur weiteren Behandlung in dimensionslosen Parametern geschrieben sei, damit sie übersichtlicher ist [4; 6; 7]. Im einzelnen seien als Ausdrücke verwendet:

die dimensionslose Druckkennzahl

$$\alpha = \frac{p_a}{T^2 h_0} \frac{E t^3}{12(1 - \nu^2)} \dots \dots \dots (13),$$

die dimensionslose Kennzahl

$$\gamma = \left(\frac{6 \eta U}{T} \right)^{1/3} \left[\frac{E t^3}{12(1 - \nu^2) T} \right]^{1/2} \frac{1}{h_0} \dots \dots \dots (14),$$

die dimensionslose Koordinate

$$\xi = s/l = s \left[\frac{12(1 - \nu^2) T}{E t^3} \right]^{1/2} \dots \dots \dots (15),$$

die charakteristische Länge

$$l = \left[\frac{E t^3}{12(1 - \nu^2) T} \right]^{1/2} \dots \dots \dots (16),$$

die dimensionslose Spaltweite

$$H = h/h_0 \dots \dots \dots (17)$$

und die dimensionslose Folienlagerkennzahl

$$\varepsilon = 6 \eta U/T \dots \dots \dots (18).$$

Die gesamte Gleichung in dimensionsloser Form lautet dann

$$\frac{d^5 H}{d\xi^5} - \frac{d^3 H}{d\xi^3} = \frac{\gamma^3}{H^3} \left[H - \frac{C}{\left(\frac{d^4 h}{d\xi^4} - \frac{d^2 h}{d\xi^2} + \alpha \right)} \right] \dots \dots (19)$$

mit C als einer Integrationskonstante. Leider existiert für Gl. (19) ebenfalls keine geschlossene Lösung. Vereinfacht man hingegen Gl. (19) durch Linearisieren, so lassen sich einige wertvolle Erkenntnisse gewinnen. Dazu werden H und C durch $1 + \Delta H$ bzw. $1 + \Delta C$ (mit ΔH und ΔC als kleinen Änderungen von H und C) ersetzt und die Glieder von der Ordnung $(\Delta H)^2$ und höher vernachlässigt. Dann erhält man

$$\frac{d^5 \Delta H}{d\xi^5} - \Delta \frac{d^4 \Delta H}{d\xi^4} - \frac{d^3 \Delta H}{d\xi^3} + \Delta \frac{d^2 \Delta H}{d\xi^2} - \gamma^3 \Delta H = \Delta C \dots \dots (20)$$

mit der Kompressibilitätszahl

$$\Delta = \frac{6 \eta U l}{p_a h_0^2} \dots \dots \dots (21).$$

Im folgenden soll Gl. (20) die Grundlage zur Erörterung verschiedener Grenzfälle des Folienlagers bilden.

5. Diskussion einiger Grenzfälle des Folienlagers

5.1 Folienlager unendlicher Breite und bestimmter Steifigkeit für inkompressible Schmierstoffe

Für inkompressible Schmierstoffe wird die *Reynoldssche* Gleichung für das unendlich breite Lager (Gl. (11)) zu

$$\frac{d}{ds} \left(h^3 \frac{dp}{ds} \right) = 6 \eta U \frac{dh}{ds} \dots \dots \dots (22).$$

Diese Bedingungen treffen hinreichend genau für Öl als Schmiermittel zu. Damit wird der Kompressibilitätsfaktor Δ gleich null, so daß die entsprechenden Glieder in Gl. (20) entfallen. Diese Gleichung lautet dann

$$\frac{d^5 \Delta H}{d\xi^5} - \frac{d^3 \Delta H}{d\xi^3} - \gamma^3 \Delta H = \Delta C \dots \dots \dots (23).$$

Zu dieser Beziehung gelangt man auch, wenn man von vornherein die *Reynoldssche* Gleichung für inkompressible Medien zum Herleiten der Grundgleichung, Gl. (20), verwendet. Die Lösung von Gl. (23) lautet

$$\Delta H = C_1 e^{i_1 \gamma \xi} + C_2 e^{i_2 \gamma \xi} + C_3 e^{i_3 \gamma \xi} + C_4 e^{i_4 \gamma \xi} + C_5 e^{i_5 \gamma \xi} + C_6 \dots \dots \dots (24)$$

mit C_1 bis C_6 als Integrationskonstanten und i_1 bis i_5 als Lösungen der Gleichung fünften Grades

$$\gamma^2 i^5 - i^3 - 1 = 0 \dots \dots \dots (25)$$

der Unbekannten i [6]. Die Diskussion dieser Lösung läßt folgende Schlußfolgerungen zu. Bei $\gamma < 0,571$ nimmt der Spalt in der Eingangszone exponentiell ab, während er in der Ausgangszone sinusförmig verläuft und exponentiell größer wird. Bei $\gamma > 0,571$ nimmt der Spalt auch in der Eingangszone einen sinusförmigen Verlauf.

5.2 Völlig flexibles Folienlager unendlicher Breite für kompressiblen Schmierstoff

Es ist theoretisch nachgewiesen worden, daß bei ausreichend dünnen und/oder sehr biegsamen Folien der Einfluß der Steifigkeit praktisch vernachlässigt bleiben kann. Die Steifigkeit wirkt sich dann nur wenig auf die Spaltweite und auf den Verlauf von Eingangs- und Ausgangszone aus. Allerdings gilt dies nur für Kunststoff-Folien (oder andere sehr flexible Werkstoffe), wie sie in Einrichtungen der Datenverarbeitung eingesetzt werden. *A. Eshel* und *H. G. Elrod* [7] haben die Änderung des Spaltverlaufs und der Spaltbreite in Abhängigkeit von einem Steifheitsparameter

$$S = \frac{D \varepsilon^{2/3}}{T \gamma_0^2} \dots \dots \dots (26)$$

mit ε nach Gl. (18) und $D = E t^3/12(1 - \nu^2)$ als der Biegesteifigkeit je Breitereinheit untersucht. Für Werte von S bis zu 0,2 scheint die Vernachlässigung der Steifigkeit der Folie zulässig zu sein [8]. Wegen des viel größeren Elastizitätsmoduls E kann S aber bei Stahl um den Faktor 10³ größere Werte erreichen.

Das Vernachlässigen der Steifigkeit der Folie bedeutet, daß das erste Glied in Gl. (12) entfällt [6]. Dann erhält Gl. (20) die Form

$$-\frac{d^3 \Delta H}{d\xi^3} + \Delta \frac{d^2 \Delta H}{d\xi^2} - \gamma^3 \Delta H = \Delta C \dots \dots (27).$$

Für Gl. (27) gilt die Lösung

$$\Delta H = C_1 e^{i_1 \gamma \xi} + C_2 e^{i_2 \gamma \xi} + C_3 e^{i_3 \gamma \xi} + C_4 \dots \dots (28)$$

mit i_1 bis i_3 als Lösungen der Gleichung

$$i^3 - \frac{\Delta}{\gamma} i^2 + 1 = 0 \dots \dots \dots (29).$$

Für den Spaltweitenverlauf ergibt sich eine ähnliche Form wie für den in Abschnitt 5.1 behandelten Lagerfall. Darüber hinaus läßt eine genauere Analyse des Lösungsansatzes die Schlußfolgerung zu, daß selbst bei gasgeschmierten Lagern die Kompressibilität des Schmiermittels einen verhältnismäßig kleinen Einfluß ausübt.

5.3 Völlig flexibles Folienlager unendlicher Breite für inkompressible Schmierstoffe

Wie A. Eshel [8] in einer theoretischen Untersuchung festgestellt hat, ist der Einfluß der Kompressibilität selbst bei gasgeschmierten Lagern meist klein. Bei ölgeschmierten Folienlagern dürfte er daher stets zu vernachlässigen sein. Bei Vernachlässigung der Steifigkeit der Folie und der Kompressibilität des Schmierstoffs entfallen in Gl. (20) das erste, zweite und vierte Glied. Diese Gleichung nimmt dann die Form

$$-\frac{d^3 \Delta H}{d\xi^3} - \gamma^3 \Delta H = \Delta C \dots \dots \dots (30)$$

mit der Lösung

$$\Delta H = C_1 e^{\gamma \xi} + C_2 e^{(\gamma/2)\xi} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \gamma \xi\right) + C_3 e^{(\gamma/2)\xi} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \gamma \xi\right) + C_4 \dots \dots \dots (31)$$

an. M. Wildmann [6] erörterte dieses Ergebnis und kam zu der Schlußfolgerung, daß der Spalt in der Eingangszone exponentiell kleiner wird und in der Ausgangszone bei sinusförmigem Verlauf wieder exponentiell zunimmt. Zwischen Eingangszone und Ausgangszone liegt ein Bereich konstanter Spaltweite. Bild 7 zeigt die für Folienlager charakteristische Spaltform. Zum grundsätzlich gleichen Ergebnis gelangten auch E. J. Barlow [9] sowie A. Eshel und H. G. Elrod [10].

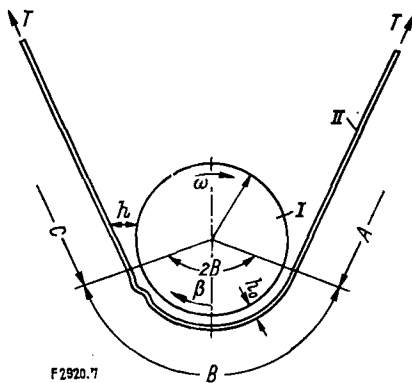


Bild 7. Spaltverlauf eines Folienlagers (schematisch).
 h Spaltweite, h₀ engste Spaltweite, ω Winkelgeschwindigkeit der Welle, A Eingangsbereich, B Zentral-, C Ausgangsbereich; sonstige Bezeichnungen wie in Bild 5

6. Nominelle Spaltweite des Folienlagers

Grundlage sämtlicher theoretischen Betrachtungen über das Folienlager ist die sehr vereinfachte Form mit unendlicher Breite, vernachlässigbarer Steifigkeit der Folie sowie mit Schmierung durch ein inkompressibles Medium. Wie man aus Bild 7 ersieht, stellt sich beim Folienlager ein zentraler Bereich mit konstanter Spaltweite h₀ ein. Demgemäß ist in dieser Zone auch der hydrodynamische Druck konstant. Mehrere Untersuchungen betreffen das Problem, die nominelle Spaltweite in diesem Zentralbereich rechnerisch zu ermitteln. Alle Betrachtungen fußen auf der Reynoldsschen Gleichung, Gl. (22), sowie auf der Foliengleichgewichts-Gleichung für diesen vereinfachten Fall in der Form

$$p = \frac{T}{r} = T \left(\frac{1}{r_0} - \frac{d^2 h}{ds^2} \right) \dots \dots \dots (32),$$

$$\frac{dp}{ds} = -T \frac{dh^3}{ds^3} \dots \dots \dots (33).$$

Durch Einsetzen von Gl. (33) in Gl. (22) ergibt sich die

Ausgangsgleichung für die weiteren Untersuchungen zu

$$\frac{d}{ds} \left(h^3 \frac{d^3 h}{ds^3} \right) = - \frac{6 \eta U}{T} \frac{dh}{ds} \dots \dots \dots (34).$$

Durch einmaliges Integrieren gelangt man zu der Beziehung

$$\frac{d^3 h}{ds^3} = \frac{6 \eta U}{T} \frac{h_0 - h}{h^3} \dots \dots \dots (35).$$

Hieraus erhielten verschiedene Verfasser [9 bis 13] die allgemeine Spaltgleichung für das Folienlager. Sie lautet

$$\frac{h_0}{r_0} = K \left(\frac{6 \eta U}{T} \right)^{2/3} \dots \dots \dots (36).$$

Diese Gleichung enthält keine Abhängigkeit mehr der Spaltweite vom Umfangswinkel auf der Welle oder vom Weg auf der Folie. Es handelt sich also um den endgültigen Ausdruck für die konstante Spaltweite h₀ im zentralen Bereich des Folienlagers.

Nach einem sehr vereinfachten Verfahren ermittelten H. Blok und J. J. van Rossum [13] die Spaltkonstante K zu

$$K = 0,426,$$

indem sie zur Lösung von Gl. (35) einen parabelförmigen Verlauf der Eingangs- und der Ausgangsspaltweite des Folienlagers und damit eine zum Lagerzentrum symmetrische Druckverteilung annahmen. Bei einer genaueren numerischen Lösung von Gl. (35) mittels einer elektronischen Rechenanlage bestimmten A. Eshel und H. G. Elrod [10] die Spaltkonstante zu

$$K = 0,643.$$

Diesen Wert haben auch H. K. Baumeister [11; 12] und E. J. Barlow [9] bestätigt; er dürfte als richtig angesehen werden. Bild 8 zeigt den von A. Eshel und H. G. Elrod [10] errechneten Spaltweitenverlauf. Deutlich erkennt man die drei Bereiche: a) exponentiell kleiner werdende Spaltweite im Eingangsbereich, b) konstante Spaltweite im zentralen Bereich und c) sinusförmige und exponentiell zunehmende Spaltweite im Ausgangsbereich.

Es ist zu betonen, daß der Wert K = 0,643 für die Spaltkonstante nur dann Gültigkeit hat, wenn man die Steifigkeit der Folie vernachlässigen kann. In Abschnitt 5.3 war bereits gesagt worden, daß dies nur für sehr dünne und flexible Folien zutrifft. A. Eshel und H. G. Elrod [7] wiesen nach, daß mit zunehmender Biegesteifigkeit die Spaltweite

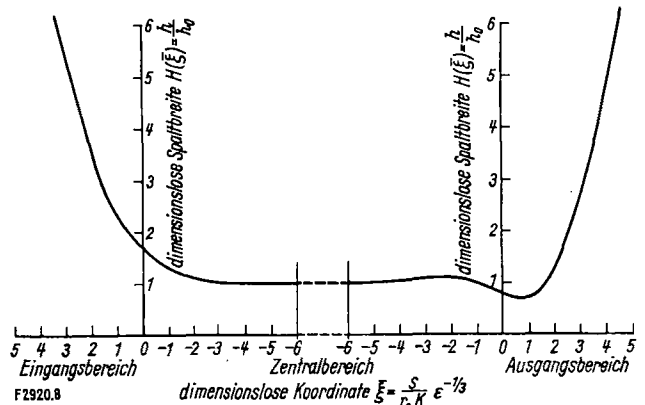


Bild 8. Spaltweitenverlauf im Folienlager (nach A. Eshel und H. G. Elrod [10]).

h Spaltweite, h₀ Spaltweite im zentralen Bereich, s Koordinate in Folienlängsrichtung, r₀ Wellenhalbmesser, K Spaltkonstante nach Gl. (36), ε Folienlagerkennzahl nach Gl. (18)

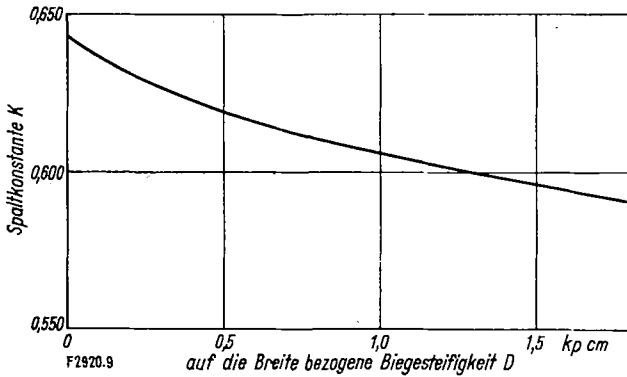


Bild 9. Einfluß der bezogenen Biegesteifigkeit D auf die Spaltkonstante K (nach A. Eshel und H. G. Elrod [7]).

im Bereich der zentralen Zone abnimmt. Bild 9 zeigt die von ihnen ermittelte Abhängigkeit der Spaltkonstante K von der auf die Breite bezogenen Biegesteifigkeit D .

Infolge des sinusförmigen Spaltweitenverlaufs im Ausgangsbereich ergibt sich eine minimale Spaltweite h_{\min} , die kleiner als die konstante Spaltweite h_0 ist. E. J. Barlow [9] gab in seiner Lösung von Gl. (35) auch einen Zusammenhang zwischen dieser engsten Spaltweite und dem Umfangswinkel an. Das Verhältnis zwischen der Mindestspaltweite und der konstanten Spaltweite ermittelte er zu 0,716.

7. Meßergebnisse bei der Untersuchung von Folienlagern

Erste Versuche mit einem Folienlager haben H. Blok und J. J. van Rossum [10] unternommen. Sie arbeiteten mit einer Zellophanfolie. Durch eine optische Messung der Krümmung des Folienlagers konnten sie zwar nicht die genaue Filmdicke bestimmen, wohl aber nachweisen, daß die Spaltweite im zentralen Bereich des Lagers praktisch konstant ist. Diese Verfasser haben auch Reibungsmessungen ausgeführt und dabei festgestellt, daß beim Folienlager die Reibungszahl mit zunehmender Drehzahl weniger steil als beim herkömmlichen starren Lager ansteigt. Dies deckt sich mit den Angaben in Abschnitt 3.3.

Demgegenüber arbeiteten B. J. Patel und A. Cameron [14] mit einer 0,35 mm dicken Stahlfolie. Sie bestimmten für verschiedene Betriebsbedingungen die Temperaturverteilung im Folienlager sowie die Reibungszahl. Bei diesen Untersuchungen diente ebenfalls Öl als Schmiermittel. J. T. S. Ma [15] maß die Filmdicke im zentralen Bereich des Folienlagers mittels in die Welle eingebauter kapazitiver Meßgeber in Abhängigkeit von $T/\eta U$. Als Folie wurde ein mit Silber beschichtetes Mylar-Magnetband eingesetzt. Aus den Meßwerten leitete J. T. S. Ma für die konstante Spaltweite h_0 den empirischen Ausdruck

$$\frac{h_0}{r_0} = 7,925 \left(\frac{\eta U}{T} \right)^{4/5} \dots \dots \dots (37)$$

ab, der Gl. (36) nicht ganz entspricht. Das Verhältnis zwischen engster Spaltweite h_{\min} im Ausgangsbereich und konstanter Spaltweite h_0 ermittelte er zu 0,8.

Sehr umfangreiche Messungen mit einem Folienlager hat L. Licht unternommen [16; 17]. Er arbeitete mit einer ruhenden, metallisierten Mylar-Folie und einer rotierenden Welle bei Luftschmierung. Die Spaltweite wurde kapazitiv gemessen. Die Gültigkeit des Werts $K = 0,643$ für den Spaltfaktor konnte L. Licht recht gut bestätigen; die durchschnittlichen Abweichungen der Meßwerte von diesem theoretischen Wert betragen rd. 7 %.

Auch die von A. Eshel und H. G. Elrod hergeleitete Abhängigkeit der Spaltweite von der Biegefestigkeit hat sich im großen und ganzen bestätigt. Entgegen den ersten

Erwartungen ergab sich, daß mit zunehmender Steifigkeit der wellenförmige Verlauf der Folie in der Ausgangszone nicht kleiner, sondern ausgeprägter wird. L. Licht zeigte ferner, daß eine schmalere Folie (kleineres Seitenverhältnis) eine Abnahme der Spaltweite innerhalb des Zentralbereichs in Richtung zum Ausgangsbereich hin bewirkt. Der Grund ist der Seitenfluß, also der Druckabbau in axialer Richtung, der sich besonders bei schmalen Folien bemerkbar macht, welcher Effekt auch für herkömmliche Lager mit starren Oberflächen gilt.

8. Theoretischer Vergleich eines Folienlagers mit einem herkömmlichen Gleitlager

Eines der entscheidenden Merkmale des Folienlagers gegenüber einem herkömmlichen starren Lager besteht darin, daß man kein konstruktives Lagerspiel definieren kann. Vielmehr stellt sich gemäß den Betriebsbedingungen ein bestimmter Lagerspalt ein. Bedingt durch dieses Verhalten lassen sich selbstverständlich auch bestimmte Unterschiede zwischen den beiden Lagerarten angeben.

Für einen Vergleich von Folienlager und herkömmlichem Gleitlager eignen sich die engste Spaltweite und die Reibung. Während die engste Spaltweite ein Maß für die Tragfähigkeit und bei gegebenen Betriebsbedingungen für die Betriebssicherheit bildet, kennzeichnet die Lagerreibung die zu erwartenden Betriebstemperaturen.

8.1 Engste Spaltweite

Zunächst seien die Mindestspaltweite zwischen dem Folienlager und dem Lager mit starren Oberflächen miteinander verglichen. Für die konstante Spaltweite h_0 im zentralen Bereich des Folienlagers war Gl. (36) mit $K = 0,643$ ermittelt worden. Dies entspricht mit \bar{p} als der mittleren Flächenbelastung dem Ausdruck

$$\frac{h_0}{r_0} = 2,123 \left(\frac{\eta \omega}{\bar{p}} \right)^{2/3} \dots \dots \dots (38).$$

Für das Verhältnis zwischen der Mindestspaltweite h_{\min} und der konstanten Spaltweite h_0 kann man einen Wert von 0,716 annehmen. Damit ergibt sich die engste Spaltweite zu

$$\frac{h_{\min}}{r_0} = 1,52 \left(\frac{\eta \omega}{\bar{p}} \right)^{2/3} \dots \dots \dots (39).$$

In Bild 10 wurden über der Sommerfeldzahl So die bezogene konstante Spaltweite h_0/r_0 und die bezogene Mindestspaltweite h_{\min}/r_0 aufgetragen. Für den Zusammenhang zwischen der Sommerfeldzahl

$$So = \frac{\bar{p} \psi^2}{\eta \omega} \dots \dots \dots (40)$$

(mit ψ als dem relativen Lagerspiel) und der Folienlagerzahl $\eta \omega / \bar{p}$, einem anderen Ausdruck für $\varepsilon = 6 \eta U / T$, ist ein relatives Lagerspiel von $\psi = 10^{-3}$ angenommen worden. Die Annahme eines konstanten „Lagerspiels“ verfälscht selbstverständlich etwas die Ergebnisse für das Folienlager. Im Vergleich hierzu wurde die Mindestspaltweite eines starren Gleitlagers nach der Näherungsformel von G. Vogel-pohl [18] gemäß

$$h_{\min} = \frac{\psi r_0}{1 + (So/m)} \dots \dots \dots (41)$$

in Abhängigkeit von der Sommerfeldzahl berechnet und ebenfalls in Bild 10 eingetragen (mit m als einem Faktor nach [18]).

Man erkennt, daß bei gleichen Lagerspielen innerhalb des Bereichs von etwa $So = 10^{-1}$ bis $So = 10^{-2}$ die engste Spaltweite im herkömmlichen starren Lager größer als

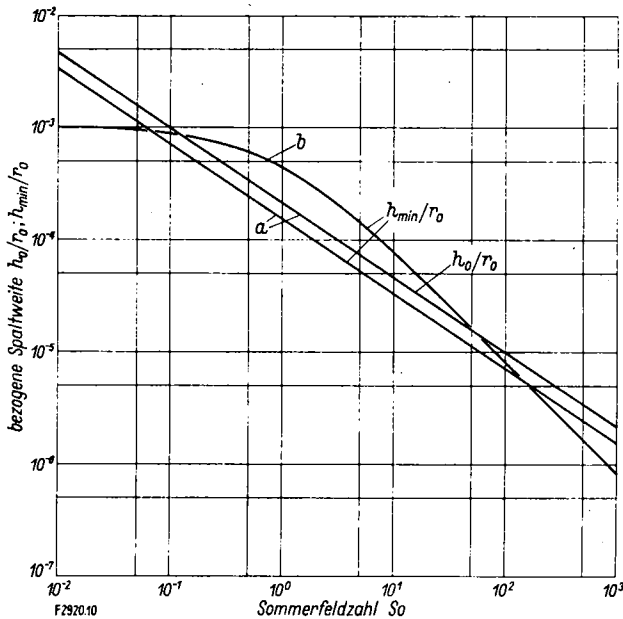


Bild 10. Bezogene konstante Spaltweite h_0/r_0 und bezogene Mindestspaltweite h_{\min}/r_0 als Funktion der Sommerfeldzahl So .

r_0 Wellenhalbmesser, h_0 Spaltweite im zentralen Bereich des Folienlagers, h_{\min} Mindestspaltweite, a Verlauf von h_0/r_0 nach Gl. (38) und von h_{\min}/r_0 nach Gl. (39) für das Folienlager, b Verlauf von h_{\min}/r_0 nach Gl. (41) für das herkömmliche starre Lager mit $r_0 = 100$ mm, einem relativen Lagerspiel $\psi = 10^{-3}$ und einem Faktor $m = 0,85$

im Folienlager ist. In den Bereichen $So < 10^{-1}$ und $So > 10^2$ müssen jedoch u. U. bereits Abstriche an die Stabilität bei sehr kleinen Sommerfeldzahlen und an die Betriebssicherheit bei sehr großen Sommerfeldzahlen des Lagers gemacht werden, so daß hinsichtlich der engsten Spaltweite keine größeren Vorteile für das Folienlager als beim herkömmlichen Lager zu erwarten sind.

Anders wird es bei hohen Temperaturen aussehen, die zu einer Verminderung des Betriebsspiels beim starren Lager führen. Es wirkt sich dann günstig aus, daß sich das Folienlager sein eigenes, angemessenes „Betriebsspiel“ selbst „suchen“ kann.

8.2 Lagerreibung

Zum Abschätzen der Lagerreibung im Folienlager werden der Bereich konstanter Spaltweite sowie der Eingangsbereich gesondert betrachtet. Es sei ein Folienlager mit einem Umschlingungswinkel von 180° angenommen. Für die im Bereich der konstanten Spaltweite je Breitereinheit erzeugte Reibungskraft F_{R1} läßt sich mit d als dem Wellendurchmesser die Beziehung

$$F_{R1} = \frac{1}{2} (d \pi) \left(\frac{\eta U}{h} \right) = 2 \pi^2 \eta n r_0 \frac{r_0}{h} \dots (42)$$

herleiten. Zur Berechnung des im Eingangsbereich und im Ausgangsbereich entstehenden Anteils der Reibungskraft gaben *H. Blok* und *J. J. van Rossum* [13] folgenden Ansatz an. Ganz allgemein gilt für die je Breitereinheit erzeugte Reibungskraft F_{R2} in den entsprechenden Bereichen

$$F_{R2} = 2 \int_0^\infty \tau ds \dots (43)$$

Bei linearer Geschwindigkeitsverteilung gilt für die Schubspannung

$$\tau = \eta \frac{U}{h} = \frac{2 \pi n \eta r_0}{h} \dots (44)$$

Damit wird Gl. (43) zu

$$F_{R2} = \frac{\pi}{15} \eta n r_0 \int_0^\infty \frac{ds}{h} \dots (45)$$

Nach den von *H. Blok* und *J. J. van Rossum* getroffenen Vereinfachungen gilt

$$h = h_0 + \frac{s^2}{2} \dots (46)$$

Damit wird die Komponente F_{R2} der gesamten Reibungskraft F_R je Breitereinheit zu

$$F_{R2} = 2 \pi^2 \sqrt{2} \eta n r_0 \left(\frac{r_0}{h} \right)^{1/2} \dots (47)$$

Die gesamte, je Breitereinheit entstehende Reibungskraft beträgt

$$F_R = F_{R1} + F_{R2} \dots (48)$$

Für die Reibungszahl μ gilt dann

$$\mu = \frac{F_R}{2 \bar{p} r_0} \dots (49)$$

Durch Einsetzen kommt man dann unter Verwendung von Gl. (38) zu der endgültigen Beziehung für die Reibungszahl des Folienlagers. Sie lautet:

$$\mu = 0,0279 \left(\frac{\eta \omega}{\bar{p}} \right)^{1/3} + 0,0466 \left(\frac{\eta \omega}{\bar{p}} \right)^{2/3} \dots (50)$$

Die Reibungszahl μ für das herkömmliche Lager kann in erster Näherung [18] wie folgt angesetzt werden:

$$\mu = \pi \psi / 2 So \dots (51a)$$

für $So > 1$ bzw.

$$\mu = \pi \psi / 2 \sqrt{So} \dots (51b)$$

für $So < 1$. In Bild 11 wurden über der Sommerfeldzahl die nach Gl. (50), (51a) und (51b) berechneten Reibungs-

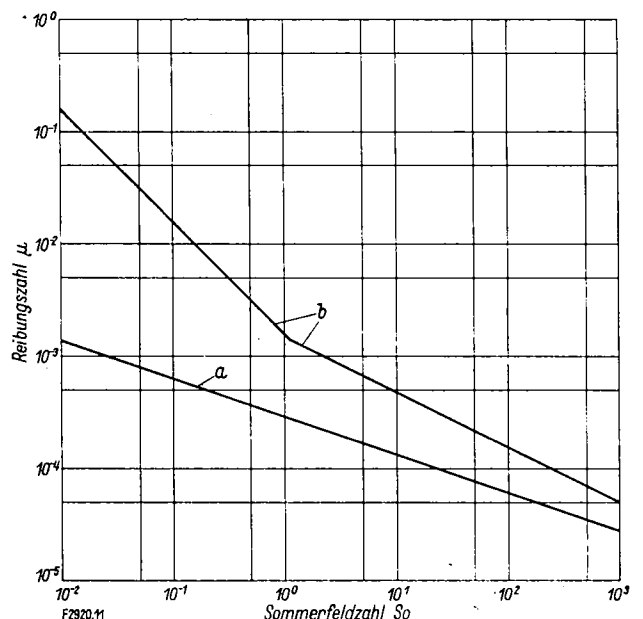


Bild 11. Reibungszahl μ für das starre Lager und das Folienlager als Funktion der Sommerfeldzahl So .

a Verlauf für das Folienlager nach Gl. (50), b Verlauf für das herkömmliche starre Lager nach Gl. (51a) für $So > 1$ bzw. Gl. (51b) für $So < 1$ bei einem relativen Lagerspiel $\psi = 10^{-3}$

zahlen für das Folienlager und das starre Lager aufgetragen. Man erkennt deutlich, daß im untersuchten Bereich die vom Folienlager verursachte Reibung erheblich niedriger als die des herkömmlichen Gleitlagers mit starren Oberflächen ist. Um diesen Vergleich zu ermöglichen, rechnete man für das Folienlager beim Übergang von der Sommerfeldzahl auf den Parameter $\eta \omega / \bar{p}$ wieder mit einem konstanten Wert für das relative Lagerspiel. Auch dieser Vergleich gilt für gleiche Werte von r_0 und ψ bei beiden Lagerarten.

Bild 11 vermittelt jedoch keine wahren Vorstellungen von den Vorgängen im Folienlager, bei dem ψ konstruktiv nicht definiert werden kann. Auf keinen Fall darf man aber bei wechselnden Betriebsbedingungen ein konstantes „Lagerspiel“ erwarten. Vielmehr wird die Lagerspaltweite einen den Betriebsbedingungen entsprechenden optimalen Wert annehmen. Dies wirkt sich selbstverständlich auch auf die Lagerreibung günstig aus. Über die tatsächlichen Zusammenhänge kann nur der experimentelle Vergleich zwischen einem Folienlager und einem herkömmlichen Gleitlager mit starren Oberflächen Aufschluß geben.

9. Experimentelle Untersuchungen an einem Folienlager

Zur Überprüfung der vergleichenden Aussagen nach Abschnitt 8 wurden experimentelle Untersuchungen an einem Folienlager begonnen. Über erste Ergebnisse, die D. Giesler im Rahmen einer Studienarbeit erzielte [19], sei berichtet.

9.1 Folienprüfstand

Bild 12 sowie 13a und b zeigen einen Längs- und zwei Querschnitte des Folienlagerprüfstands. Die mit stufenlos regelbarer Drehzahl angetriebene Prüfzelle (Antriebswelle) e ist über zwei Stützlager s in dem Lagerbock (Gestell) a gelagert. Ein Federstahlband mit einer Dicke von 0,1 mm wurde in Form einer Schleife als Folienlager

d_1 an dem Gehänge (Träger) v befestigt und wird über den Belastungshebel (Schneide) t gegen die Welle gezogen. Als Antrieb dient ein Pendelmotor, der es ermöglicht, die am Folienlager entstehenden Reibungsmomente zu messen. Darüber hinaus wird die Temperatur der Folie bestimmt und aufgezeichnet. Die Temperatur des drucklos zulaufenden Öls kann man einstellen.

Die Spaltmessung geschieht mittels zweier berührungsloser induktiver Weggeber, die die Differenz zwischen der Wellen- und der Folienverlagerung liefern.

Derzeit findet der Umbau für eine pneumatische Messung der Spaltweite statt. Durch Temperaturmessungen im Bereich der Geber wurde deren Temperaturabhängigkeit korrigiert. Für eine genaue Reibkraftmessung befindet sich am Gehänge ein Hebelarm, der sich auf einer Feder abstützt. Zur Messung des hydrodynamischen Öldrucks im Spalt befindet sich derzeit ein piezoelektrisches Meßverfahren in der Entwicklung.

9.2 Meßergebnisse

Es galt zu überprüfen, wie sich einerseits die bezogene Spaltweite h_0/r_0 und andererseits die Reibungszahl μ bei verschiedenen Betriebsbedingungen verhalten. Dazu wurden jeweils \bar{p} , η oder ω variiert und die beiden anderen Größen konstant gehalten. Außerdem fand ein unmittelbarer Vergleich des Folienlagers mit einem herkömmlichen Gleitlager statt. Die Versuchsbedingungen wurden folgendermaßen variiert: kinematische Viskosität $\eta/\rho = 10$ bis 110 cSt, spezifische Belastung $\bar{p} = 0,294$ bis 3,71 kp/cm², Drehzahl $n = 200$ bis 2000 U/min.

Im einzelnen gliederte sich das Versuchsprogramm in folgende Teilabschnitte:

- a) Untersuchung der Abhängigkeit zwischen der bezogenen Spaltweite h_0/r_0 und der Lagerkennzahl $\bar{p}/\eta \omega$,

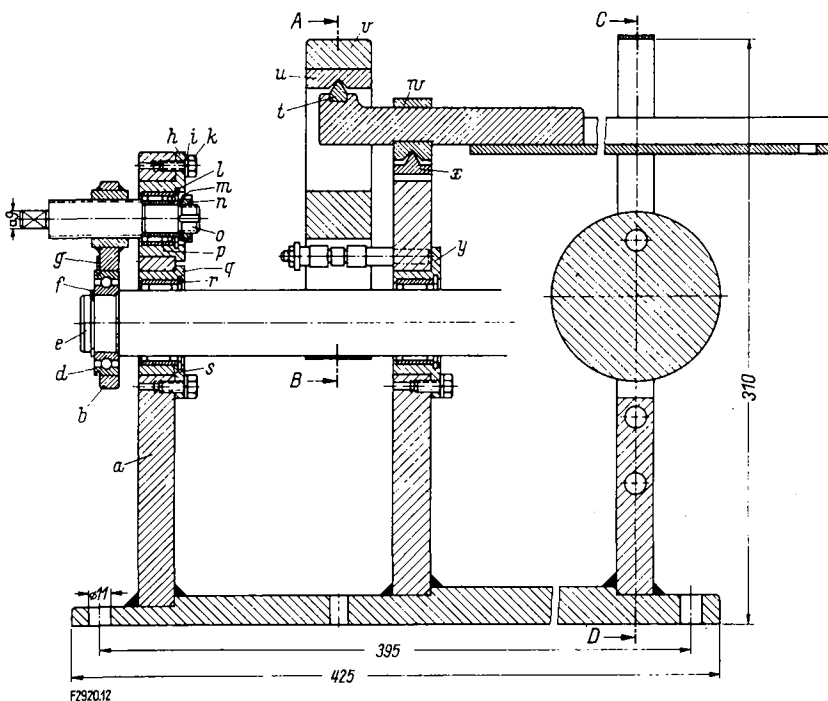


Bild 12. Längsschnitt

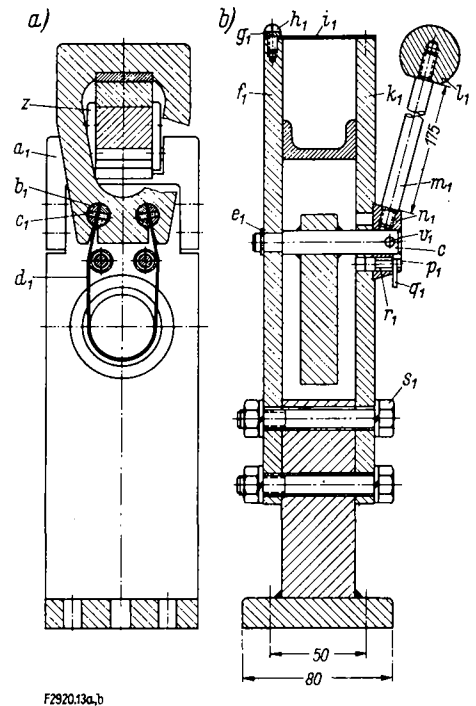


Bild 13a und b. Querschnitte.
a) Schnitt A-B, b) Schnitt C-D

Bild 12 und 13a und b. Längsschnitt und zwei Querschnitte durch einen Folienlagerprüfstand.

Maßangaben in mm; a Gestell, b Lagerträger, c Bolzen, d Wälzlager, e Antriebswelle, f Seegerring, g Seegerring, h Deckel, i Unterlegscheibe, k Schraube, l Seegerring, m Scheibe, n Mutter, o Welle, p Nadellager, q Buchse, r Nadellager, s Seegerring, t Schneide, u Schneidnagel, v Träger, w Schneidnagel, x Schneide, y Deckel, z Führung, a₁ Träger, b₁ Schlitzbolzen, c₁ Stift, d₁ Folie, e₁ Seegerring, f₁ Träger, g₁ Scheibe, h₁ Schraube, i₁ Blech, k₁ Träger, l₁ Knauf, m₁ Hebel, n₁ Nabe, o₁ Stift, p₁ Stift, q₁ Arretierstift, r₁ Buchse, s₁ Schraube, A-B und C-D Schnitt Ebenen

- b) Untersuchung der Abhängigkeit zwischen der Reibungszahl μ und der Lagerkennzahl $\bar{p}/\eta\omega$,
- c) vergleichende Untersuchung der Reibungszahl μ bei Folienlagern mit unterschiedlich elastischen Folien und starren 180°-Gleitlagern mit unterschiedlichen Lagerspielen.

Die bisher vorliegenden Ergebnisse lassen sich in sieben Punkten zusammenfassen:

1. Der sinusförmige Verlauf der Folie im Ausgangsspiel wurde bestätigt.
2. Wie auf Grund der theoretischen Betrachtungen zu erwarten war, änderte sich die mit einem äquivalenten relativen Lagerspiel ψ' gebildete äquivalente Sommerfeldzahl $So' = \bar{p} \psi'^2/\eta\omega$ für das Folienlager verhältnismäßig wenig bei Veränderung der Größen \bar{p} , η und ω .
3. Die gemessenen Werte für h_0/r_0 lagen zwar unter den entsprechenden berechneten Werten, doch war die Steigung der gemessenen Gerade für die Abhängigkeit zwischen h_0/r_0 und $\bar{p}/\eta\omega$ etwa gleich der berechneten. Diese Diskrepanz der Werte selbst dürfte auf einer systematischen Unsicherheit bei der Spaltweitenmessung beruhen.
4. Die gemessenen Reibungszahlen μ lagen um etwa 1 bis 1,5 Größenordnungen über den berechneten Werten. Da einerseits eindeutig hydrodynamische Schmierung vorlag (keine Laufspuren oder Verschleißerscheinungen an Welle und Folie) und andererseits die Überprüfung der Reibungsmeßeinrichtung keine Hinweise für Fehler in dieser Höhe ergab, bedarf die Formel zum Berechnen der Reibung einer Überarbeitung.
5. Beim Vergleich zwischen Folienlager und starrem Gleitlager ergab sich erwartetermaßen für das herkömmliche Gleitlager eine größere Abhängigkeit der Reibungszahl μ vom Ausdruck $\bar{p}/\eta\omega$ als für das Folienlager. Beim Folienlager mit einer Kunststoff-Folie änderte sich μ nur sehr wenig mit $\bar{p}/\eta\omega$.
6. Die erwartete niedrigere Reibung beim Folienlager im Vergleich zum herkömmlichen Lager konnte nur für kleine Belastungen bestätigt werden ($\bar{p} < 1 \text{ kp/cm}^2$).
7. Es hängt vom Lagerspiel für das starre Gleitlager ab, ob die Reibungszahl höher oder niedriger als beim Folienlager ist. So ergab ein relatives Lagerspiel von 2,2% eine höhere Reibungszahl als beim Stahlfolienlager.

10. Zusammenfassung

Es wird an einem Beispiel abgeschätzt, inwieweit es möglich ist, durch die temperaturbedingte Viskositätsänderung, die Verminderung der Viskosität des Öls mit steigendem Geschwindigkeitsgefälle sowie die Veränderung des scheinbaren Lagerspiels mit der Drehzahl und der Belastung auch bei wechselnden Betriebsbedingungen den einmal gewählten und für optimal erachteten Betriebspunkt des Gleitlagers beizubehalten. Wie die Untersuchung zeigt, reicht die natürliche Minderung der Viskosität eines Mineralöls nicht aus, bei steigenden Drehzahlen einen konstanten Wert für die Sommerfeldzahl bzw. das Produkt $\eta\omega$ beizubehalten. Das gleiche gilt für die Eigenschaft strukturviskoser Öle, ihre scheinbare Viskosität mit wachsendem Geschwindigkeitsgefälle zu vermindern.

Den größten Effekt in dieser Hinsicht bringt ein Folienlager. Für eine solche Lagerausführung kann kein konstruktives Lagerspiel definiert werden, doch stellt sich selbsttätig die den Betriebsbedingungen entsprechende optimale Tragfilmdicke ein. Die theoretische Abschätzung ergibt in einem Folienlager bei steigenden Drehzahlen tatsächlich kleinere Reibungszahlen, kleinere Reibungsleistungen und damit niedrigere Betriebstemperaturen als für ein herkömmliches Gleitlager mit starren Oberflächen. Dieses Verhalten ist gleichbedeutend mit einer

verhältnismäßig kleineren Änderung des optimalen Betriebspunktes bei wechselnden Betriebsbedingungen.

Nach einer Herleitung der theoretischen Grundgleichungen für das Folienlager werden Näherungslösungen für einige Grenzfälle angegeben. Die weiteren Betrachtungen beziehen sich dann auf den Fall des Folienlagers unendlicher Breite mit vernachlässigbar kleiner Steifigkeit der Folie und mit Schmierung durch ein inkompressibles Medium. Hierfür werden die nominelle Spaltweite und die Reibungskräfte ermittelt, deren Abhängigkeiten zu den erwähnten Aussagen führen.

In experimentellen Untersuchungen wurden erste Ergebnisse erzielt, die in einigen Punkten völlige Übereinstimmung mit den theoretischen Erwartungen bringen, in anderen Punkten aber widersprüchlich und abweichend sind. Zur Klärung laufen daher weitere Untersuchungen.

11. Schrifttum

- [1] *Bartz, W. J.*: Beibehaltung des optimalen Betriebspunktes von Gleitlagern bei veränderten Betriebsbedingungen. *Antriebstechnik* **8** (1969) Nr. 12 S. 444/49.
- [2] *Bartz, W. J.*: Vergleichende Untersuchung des Seitenflusses von Gleitlagern bei Schmierung mit strukturviskosen und reinviskosen Ölen. VDI-Forsch.-Heft 530. Düsseldorf: VDI-Verlag 1968.
- [3] *Bartz, J. J.*, u. *Gg. R. Schulze*: Schmierstoffe mit nicht-newtonischem Fließverhalten; ihre Bedeutung und ihre Eigenschaften in der Schmierungstechnik. VDI-Z **111** (1969) Nr. 17 S. 1229/32 u. Nr. 23 S. 1677/82.
- [4] *Barlow, E. J.*: Derivation of governing equations for selfacting foil bearings. *Ampex Report RR 65-1*, Febr. 1965 S. 1/26; *Trans. Soc. Mech. Engrs. (ASME), J. Lubr. Techn. Ser. F*, **89** (1967) Nr. 3 S. 334/40.
- [5] *Flügge, W.*: *Stresses in shells*. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag 1960; insbes. S. 208/213.
- [6] *Wildmann, M.*: Foil bearings, their general behaviour with particular emphasis on the externally pressurized bearing. *Proc. Inst. Mech. Engrs.* **180** (1965/66) Part 3 B S. 39/46.
- [7] *Eshel, A.*, u. *H. G. Elrod*: Stiffness effects on the infinitely wide foil bearing. *Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs. (ASME), J. Lubr. Techn. Ser. F*, **89** (1967) Nr. 1 S. 92/97.
- [8] *Eshel, A.*: Compressibility effects on the infinitely wide, perfectly flexible foil bearing. *Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs. (ASME), J. Lubr. Techn. Ser. F*, **90** (1968) Nr. 1 S. 221/25.
- [9] *Barlow, E. J.*: Self-acting foil bearings of infinitely width. *Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs. (ASME), J. Lubr. Techn. Ser. F*, **89** (1967) Nr. 3 S. 341/45.
- [10] *Eshel, A.*, u. *H. G. Elrod*: The theory of the infinitely wide, perfectly flexible, self-acting foil bearing. *Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs. (ASME), J. Basic Engng. Ser. D*, **87** (1965) Nr. 12 S. 831/36.
- [11] *Baumeister, H. K.*: A note on the nominal clearance of the foil bearing. *Lubr. Engng.* **20** (1964) Nr. 10 S. 377.
- [12] *Baumeister, H. K.*: Nominal clearance of the foil bearing. *IBM Journal of Research and Development* **7** (1963) Nr. 2 S. 153/54.
- [13] *Blok, H.*, u. *J. J. van Rossum*: The foil bearing, a new departure in hydrodynamic lubrication. *Lubr. Engng.* **9** (1953) Nr. 12 S. 316/20.
- [14] *Patel, B. J.*, u. *A. Cameron*: The foil bearing. *Proc. of the Conference on Lubrication and Wear*, London, Okt. 1957, Paper 73, S. 219/23.
- [15] *Ma, J. T. S.*: An investigation of self-acting foil bearings. *Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs. (ASME), J. Basic Engineering Ser. D*, **87** (1965) Nr. 12 S. 837/46.

[16] *Licht, L.*: Preliminary experiments with foil bearings. Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs. (ASME), J. Basic Engineering Ser. D, **88** (1966) Nr. 1 S. 1/3.
 [17] *Licht, L.*: An experimental study of elastohydrodynamic lubrication of foil bearings. Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs. (ASME), J. Lubr. Techn. Ser. F, **90** (1968) Nr. 1 S. 199/20.

[18] *Vogelpohl, G.*: Betriebssichere Gleitlager. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag 1967.
 [19] *Giesler, D.*: Experimentelle Untersuchungen an einem Folienlager. Studienarbeit Techn. Universität Hannover und Institut für Erdölforschung 1971.

Eingegangen am 11. 11. 1974

F 2920

DK 534.213.4 : 621.643.29.031

Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Abbau einer harmonischen Druckschwingung in visko-elastischen Leitungen

Von **Erhard Meißner**, München*)

Die Laufgeschwindigkeit und der Exponent des exponentiellen Dämpfungsglieds für eine Schwingung in einem wassergefüllten Kunststoffrohr werden hergeleitet. Aus dem Beispiel einer Polyvinylchlorid-Leitung geht die Abhängigkeit von der Kreisfrequenz hervor. Da man jede Pulsation durch eine Fourier-Analyse in eine Summe von sinusförmigen Schwingungen zerlegen kann, ist das Verfolgen von beliebigen Wellen durch Einzelberechnung und anschließende Superposition aller Harmonischen möglich. Voraussetzung für die Berechnung ist die Kenntnis der radialen Druck-Dehnungs-Zeit-Beziehung eines Rohrs, der sog. Kriechfunktion in radialer Richtung. Sie muß durch Dehnungsversuche an der visko-elastischen Leitung ermittelt werden. Als Anwendungsbeispiel wird eine gemessene Druckwelle in der vorstehend genannten Leitung mit der theoretischen Berechnung verglichen.

1. Voraussetzungen

Die Wellenfortpflanzungsgeschwindigkeit in Druckrohrleitungen wird im allgemeinen unter der Annahme berechnet, daß die Elastizität der Rohrwand eine unabhängige Werkstoffkenngröße ist, die man durch den Elastizitätsmodul

$$E = \sigma / \epsilon$$

mit σ als der Spannung in der Rohrwand und ϵ als der Dehnung ausdrückt. Ein visko-elastischer Werkstoff hat die Eigenschaft, daß der Quotient σ/ϵ zeitabhängig ist. Bei konstanter Werkstoffspannung σ nimmt die Dehnung ϵ ständig zu und erreicht erst nach mehr oder weniger langer Zeit t einen Grenzwert. Die zeitabhängige Dehnung für eine Einheitsspannung σ_E wird durch die Kriechfunktion (Retardationsfunktion) $J(t)$ eines bestimmten Werkstoffs wiedergegeben:

$$J(t) = \epsilon(t) / \sigma_E$$

Bei wechselnder Werkstoffbeanspruchung kann man im linearen Dehnungsbereich mit dem Ansatz von *L. Boltzmann* [1] zu jedem Zeitpunkt die Materialdehnung errechnen. In diesem Ansatz

$$\epsilon(t) = \int_{-\infty}^t \sigma(\tau) J(t - \tau) d\tau \dots \dots \dots (1)$$

bedeuten $J = dJ/dt$ und τ die Zeit als Integrationsvariable. Diese Beziehung, Gl. (1), bildet die Grundlage für eine Herleitung der Wellenfortpflanzungsgeschwindigkeit und der Dämpfung einer harmonischen Druckschwingung in einer visko-elastischen Rohrleitung. Außerdem sind die folgenden weiteren Annahmen und Vereinfachungen vorausgesetzt:

1. Der Leitungsquerschnitt kann als dünnwandig bezeichnet werden, so daß als Ringspannung

$$\sigma = p r / s \dots \dots \dots (2)$$

mit p als dem Leitungsinwendendruck, r als dem mittleren Rohrradius und s als der Wanddicke des Druckrohrs gilt.

2. Bei Beschleunigungsvorgängen bleiben die Trägheitskräfte der Rohrwand gegenüber den Trägheitskräften der Flüssigkeit vernachlässigbar klein.
3. Der Elastizitätsmodul der Flüssigkeit ist konstant.
4. Die radialen Dehnungen der Leitung sind so klein, daß der Einfluß einer Querströmung nur untergeordnete Bedeutung hat.
5. In einer Näherung werden Reibungsverluste in der pulsierenden Strömung vernachlässigt.
6. Bei allen Herleitungen entfallen Größen zweiter und höherer Ordnung.

Unter diesen Voraussetzungen werden die Geschwindigkeit und die Dämpfung einer Sinusschwingung in ähnlicher Weise hergeleitet, wie *R. Sips* [2] diese Größen in unbegrenzter visko-elastischer Materie ermittelt hat.

2. Theoretische Grundlagen

Betrachtet werde ein kurzes Leitungsstück mit der Länge Δz . Eine Druckänderung auf die Querschnittsflächen der Flüssigkeitssäule bewirkt in dieser eine Längenänderung Δu , die aus zwei Komponenten besteht,

*) Die Untersuchungen fanden am Institut für Hydraulik und Gewässerkunde der Technischen Universität München statt und wurden von der Deutschen Forschungsgemeinschaft gefördert.