

# Repräsentative Bruchkriterien in der Kaltmassivumformung metallischer Werkstoffe

Nguyen Luong Dung und Josef Appeltauer\*

Anlässlich des 60. Geburtstages von Herrn Prof. Dr.-Ing. O. Mahrenholtz

Insgesamt ist die Literatur über die theoretische Erforschung der Werkstoffschädigung in der Kaltmassivumformung sehr umfangreich. Im allgemeinen stützen die Bruchkriterien sich verständlicherweise fast alle auf ein isotropes Versagensmodell, da bisher die veränderliche Anisotropie in der Regel nur sehr unvollkommen wiedergegeben wird. In der vorliegenden Arbeit werden einige repräsentative Bruchkriterien übersichtlich vorgestellt, die in Verbindung mit einer Berechnungsmethode zur Untersuchung der Ribbildung in Kaltmassivumformvorgängen oft verwendet wurden.

In den letzten 20 Jahren wurden mehrere Bruchkriterien zur Berechnung der Bruchdehnung und Bestimmung des Reißortes in der Umformtechnik entwickelt und verwendet [3; 5; 7; 11; 23]. Sie werden gemäß ihrer Modellierung in zwei Gruppen unterteilt:

- die makroskopischen Bruchkriterien und
- die Modelle des Porenwachstums.

In Bild 1 werden einige repräsentative Bruchkriterien der beiden Gruppen dargestellt, die zur Untersuchung der Ribentstehung in der Umformtechnik häufig herangezogen werden. Die dargestellten Bruchkriterien sind bis auf die von Cockcroft und Latham [6] wegabhängige Bruchhypothesen.

## 1. Makroskopische Bruchkriterien:

Unter Berücksichtigung der makroskopischen Einflussfaktoren (Spannung, Dehnung und Temperatur) und aus experimentellen Erfahrungen wurden die makroskopischen Bruchkriterien entwickelt. Beim einachsigen Zugversuch metallischer Werkstoffe wurde festgestellt, daß der Bruch nach dem Auftreten der plastischen Instabilität zu erwarten ist. Die Zugkraft überschreitet dabei einen maximalen Wert. In diesem Zusammenhang wurden die sog. empirischen Kriterien auf dem Prinzip der plastischen Formänderungsarbeit entwickelt, die unter allseitigem Zug einen kritischen Wert beim Auftreten des Bruches erreicht haben. Der kritische Wert der Formänderungsenergie bleibt unabhängig von den Umformverfahren konstant für einen untersuchten Werkstoff. In der Kategorie der empirischen Bruchkriterien ist das Kriterium von Cockcroft und Latham [6] besonders zur Feststellung der Ribbildung im axialsymmetrischen Umformvorgang wie Zugversuch und Stauchen geeignet.

Cockcroft und Latham vermuteten, daß der Oberflächenbruch während des Umformvorganges infolge der Zugspannung auftritt, wenn das Integral

$$\int_0^{\epsilon_f} \frac{\sigma^*}{\bar{\sigma}} d\bar{\epsilon} = C_{CL} \quad (1)$$

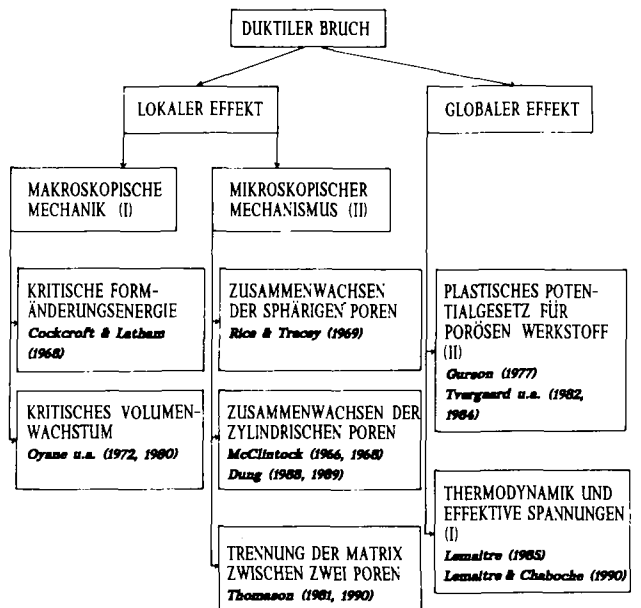
einen kritischen Wert  $C_{CL}$  erreicht. Die Größe  $\sigma^*$  bedeutet die maximale Zugspannung an der Bruchstelle, während  $\bar{\epsilon}_f$

die repräsentative Bruchdehnung ist. Die Werkstoffkonstante  $C_{CL}$  wird experimentell, meistens aus dem einachsigen Zugversuch, ermittelt. Sie ist für einen Werkstoff und eine Sorte von Umformvorgängen konstant. Zum Beispiel beträgt der kritische Wert  $C_{CL}$  für die Aluminium-Legierung 2024-T351 (amerikanische Bezeichnung) 0,3 beim Zugversuch bzw. 0,08 beim Zylinderstauchversuch.

Zu makroskopischen Kriterien wird das Bruchkriterium von Oyane u.a. [18; 19] auch gezählt. Sie formulierten ein Bruchkriterium für einen porösen Werkstoff, dessen akkumulierte Schadensgröße ein Integral ist, das dem der Formänderungsenergie entspricht. Danach ändert sich das Volumen des umgeformten Werkstoffes in Abhängigkeit von dem lokalen Spannungstensor  $\sigma_{ij}$  wie folgt

$$\frac{dV}{V} = f\left(\frac{\sigma_{ij}}{\bar{\sigma}}\right) d\bar{\epsilon}. \quad (2)$$

Bei Vernachlässigung der Terme zweiter Ordnung erhält man die Beziehung



Gruppe (I): Makroskopische Bruchkriterien

Gruppe (II): Modelle des Porenwachstums und -zusammenwachstums

Bild 1. Die repräsentativen Bruchkriterien in der Umformtechnik

\* Dr.-Ing. Nguyen Luong Dung und Dr.-Ing. Josef Appeltauer, Arbeitsbereich Meerestechnik II-Strukturmechanik der Technischen Universität Hamburg-Harburg.

Der erste Autor dankt der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die finanzielle Unterstützung (DFG-Stipendium Du 178/2-1).

$$\frac{dV}{V} = \left(1 + \frac{\sigma_m}{B\bar{\sigma}}\right) d\bar{\epsilon} \quad (3)$$

für eine Grenzformänderung.  $\sigma_m$  bedeutet die hydrostatische Spannung. Durch Integration ergibt sich dann das Bruchkriterium für einen porösen Werkstoff in der Form

$$\ln\left(\frac{V_f}{V_0}\right) = \int_0^{\bar{\epsilon}_f} \left(1 + \frac{\sigma_m}{B\bar{\sigma}}\right) d\bar{\epsilon} = C_0, \quad (4)$$

wobei  $V_f$  das Porenvolumen beim Auftreten des duktilen Bruches ist.  $V_0$  ist das Ausgangsvolumen des Werkstoffes. Der kritische Wert  $C_0$  und der Faktor  $B$  sind die Werkstoffkonstanten. Der kritische Wert  $C_0$  kann durch Einsetzen einer kritischen Volumenänderungsgröße  $\bar{\epsilon}_f^v$  beim Bruch in die Gleichung

$$C_0 = \int_0^{\bar{\epsilon}_f^v} \left(\frac{\rho f^2}{B}\right) d\bar{\epsilon}^v \quad (5)$$

ermittelt werden. Der Parameter  $f$  ist eine Funktion von der Dichte  $\rho$ .

Das Bruchkriterium von Oyane u.a. wird oft auf das Zylinderstauchen angewendet. Die Werkstoffkonstanten  $B$  und  $C_0$  wurden von Oyane u.a. aus Experimenten unter zwei verschiedenen Spannungszuständen bestimmt. Man erhält dann:

– für den Zugversuch:

$$\int_0^{\bar{\epsilon}_f} \left(1 + 2,5 \frac{\sigma_m}{\bar{\sigma}}\right) d\bar{\epsilon} = 0,23, \quad (6a)$$

– für den Stauchversuch:

$$\int_0^{\bar{\epsilon}_f} \left(0,4 + \frac{\sigma_m}{\bar{\sigma}}\right) d\bar{\epsilon} = 0,09. \quad (6b)$$

Lemaitre [14] entwickelte ein integriertes Modell für den duktilen Bruch eines elastisch-plastischen Werkstoffes auf den Grundlagen der Thermodynamik und der effektiven Spannungen. Danach erreicht der Schadensgrad  $D$  für alle Belastungsfälle beim Bruch mit der Bruchdehnung  $\bar{\epsilon}_f$  einen kritischen Wert  $D_C$ :

$$\dot{D} = \frac{D_C}{\bar{\epsilon}_f^* - \bar{\epsilon}_D} \left[ \frac{2}{3} (1 + \nu) + 3(1 - 2\nu) \left(\frac{\sigma_m}{\bar{\sigma}}\right)^2 \right] \bar{\epsilon}^{2n} \bar{\epsilon}, \quad (7)$$

mit  $dD/d\bar{\epsilon} > 0$ .

Der Schadensgrad  $D$  mit

$$D = \frac{V_f}{V}, \quad (8)$$

( $D=0$  Werkstoff ohne Poren,  
 $D=1$  Trennung des Werkstoffes in zwei Teile,  
 $0 \leq D \leq 1$  Zustand der Werkstoffschädigung),

zeigt auch den Porenvolumenanteil während der Umformung. Die Größe  $\bar{\epsilon}_D$  bedeutet die Dehnung zum Zeitpunkt, zu dem die Ableitung  $dD/d\bar{\epsilon}$  positiv wird. Sie ist sehr klein bei Aluminium-Legierungen und Stahl und kann deswegen in Gl. (7) vernachlässigt werden. Der Faktor  $\nu$  ist die Querkontraktionszahl des elastisch-plastischen Werkstoffes. Die Variablen

$D_C$  und  $\bar{\epsilon}_f^*$  sind charakteristische, temperaturabhängige Größen jedes Werkstoffes, wobei  $\bar{\epsilon}_f^*$  die Bruchdehnung bei einachsigem Zugversuch ist. Der Wert  $D_C$  bedeutet auch die kritische Vergrößerung des Porenvolumenanteils.

Zur Korrektur des Werkstoffverhaltens infolge des Porenwachstums werden statt der wahren Spannungen  $\sigma_{ij}$  die effektiven Spannungen  $\sigma_{ij}^*$  von Lemaitre und Chaboche [15] eingeführt:

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij} / (1 - D). \quad (9)$$

Gl. (7) für den Schadensgrad ist proportional zur spezifischen elastischen Formänderungsenergie  $W_{el}$  mit

$$W_{el} = \int \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^{el} = \left[ \frac{3}{2} \frac{1-2\nu}{E} \left(\frac{\sigma_m}{\bar{\sigma}}\right)^2 + \frac{1+\nu}{3E} \right] \bar{\sigma}^2, \quad (10)$$

( $E$ : Elastizitätsmodul).

Daraus kann zusätzlich ein Bruchkriterium wie folgt formuliert werden:

$$\int_0^{\bar{\epsilon}_f} W_{el} d\bar{\epsilon} = C_L, \quad (11)$$

wobei der kritische Wert  $C_L$  beim Bruch eine Werkstoffkonstante ist. Dieses Kriterium beinhaltet auch die Wirkung der Dreiachsigkeit des Spannungssystems auf das Bruchverhalten bzw. die Bruchdehnung des Werkstoffes.

Das Modell (7) von Lemaitre wird bisher auf den einachsigen Zugversuch angewendet, da mit ihm, durch Einführung der effektiven Spannungen, die Einschnürung und der unmittelbar danach auftretende Bruch untersucht werden können.

Den meisten makroskopischen Bruchkriterien liegen die Annahmen der großen plastischen Formänderungen und der maximalen Zugspannungen als Ursachen des duktilen Bruches zugrunde. Sie sind daher problemgebunden und für die Umformprobleme geeignet, wobei sich der Riß genau an der Stelle der kritischen Spannung und Formänderung bildet. Der Einfluß der Dreiachsigkeit des Spannungssystems auf die Rißbildung wird darin kaum oder ungenügend berücksichtigt.

## 2. Modelle des Porenwachstums und Porenzusammenwachsens

Zur zweiten Gruppe gehören die Bruchkriterien aufbauend auf der Annahme des duktilen Bruches infolge des Porenwachstums und -zusammenwachsens. Pionierarbeiten auf dem Gebiet des Porenwachstums sind die von McClintock u.a. [16; 17]. Für die zweidimensionalen Probleme hat McClintock [16] zuerst ein Modell für das Wachstum einer tunnelförmigen Pore mit einem Kreisquerschnitt entwickelt.

In einem ideal-plastischen Werkstoff wächst diese Pore, Bild 2, unter dem ebenen Verzerrungszustand wie folgt:

$$\ln\left(\frac{R}{R_0}\right) = \sqrt{3} \epsilon_{r\infty} \sinh\left\{ \frac{\sqrt{3} \sigma_{r\infty}}{\sigma_{r\infty} - \sigma_{z\infty}} \right\} + \epsilon_{r\infty}, \quad (12)$$

wobei  $R_0$  bzw.  $R$  der Anfangsradius bzw. der momentane Radius des Kreisquerschnitts ist.

Dann erweiterte er das Modell (12) auf das Wachstum der Poren mit elliptischem Querschnitt in einem verfestigungsfähigen plastischen Werkstoff. Eine zylindrische Pore (Längsachse  $c$ ) mit den Halbachsen  $a$  und  $b$ , Bild 2b, verändert die

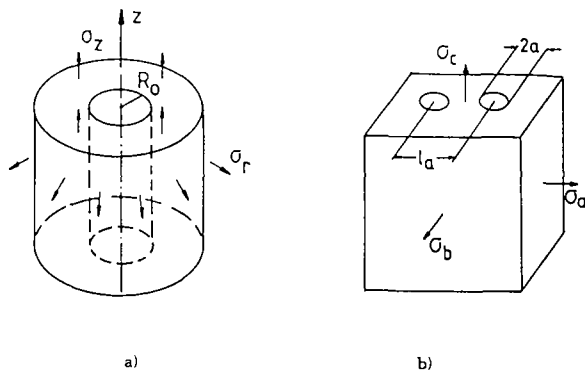


Bild 2. Einzelne zylindrische Pore mit einem runden bzw. elliptischen Querschnitt im Volumenelement

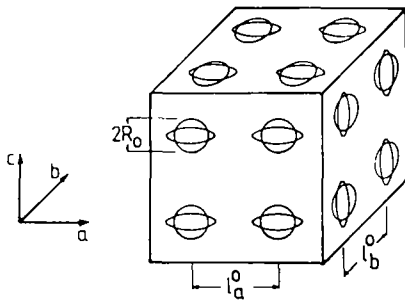


Bild 3. Poröse Materialzelle

Form ihres Querschnitts während der Verformung gemäß (13):

$$\ln \left( \frac{R}{R_0} \right) = \frac{\bar{\epsilon} \sqrt{3}}{2(1-n)} \sinh \left\{ \frac{\sqrt{3}(1-n) \sigma_a + \sigma_b}{2 \bar{\sigma}} \right\} + \frac{\epsilon_a + \epsilon_b}{2}, \quad (13)$$

$$\text{mit } R = \frac{1}{2}(a+b) \quad \text{und} \quad R_0 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0), \quad (14)$$

$$\text{und } \bar{\sigma} = K \bar{\epsilon}^n, \quad (15)$$

wenn sie unter allseitigem Zug steht. Der Faktor  $n$  ist der Exponent des Verfestigungsgesetzes (15) zur Beschreibung des Werkstoffverhaltens.

Bisher wurde das Wachstum einzelner Poren isoliert betrachtet. Für eine Materialzelle, die mit mehreren Serien von zylindrischen Poren, wie im Bild 3 dargestellt, versehen ist, muß man bei dem Modell des Porenwachstums die Wechselwirkung benachbarter Poren berücksichtigen. Dies hat *McClintock* in einer einfachen Weise getan, indem er das Wachstum einzelner Poren weiter untersuchte, das Wachstum aber als beendet annahm, wenn sich zwei benachbarte Poren berühren. Bei gleichmäßiger Verteilung von Poren (Porenabstände am Anfang:  $l_a^0$ ,  $l_b^0$  und  $l_c^0$ ) definierte er die Wachstumsparameter  $F_{ca}$  und  $F_{cb}$  der zylindrischen Poren mit elliptischem Querschnitt in der Ebene  $a-b$  wie folgt:

$$F_{ca} = \frac{a}{l_a} \frac{l_a^0}{a_0}, \quad (16a)$$

$$F_{cb} = \frac{b}{l_b} \frac{l_b^0}{b_0}. \quad (16b)$$

Unter allseitigem Zug verändern sich die Poren bei Verformung. Sie wachsen zunehmend schneller als die aufgebrachte

Dehnung gemäß den folgenden Gleichungen:

$$d(\ln F_{ca}) = \left( \frac{\sqrt{3}}{2(1-n)} \sinh \left\{ \frac{\sqrt{3}(1-n) \sigma_a + \sigma_b}{2 \bar{\sigma}} \right\} + \frac{3 \sigma_b - \sigma_a}{4 \bar{\sigma}} \right) d\bar{\epsilon}, \quad (17a)$$

und

$$d(\ln F_{cb}) = \left( \frac{\sqrt{3}}{2(1-n)} \sinh \left\{ \frac{\sqrt{3}(1-n) \sigma_a - \sigma_b}{2 \bar{\sigma}} \right\} + \frac{3 \sigma_a - \sigma_b}{4 \bar{\sigma}} \right) d\bar{\epsilon}. \quad (17b)$$

Diese Gleichungen, die als die Schadensgrade definiert werden, beschreiben die Vergrößerung der Pore in den Querrichtungen  $a$  und  $b$  infolge der Zugspannungen  $\sigma_a$  und  $\sigma_b$ . *Rice* und *Tracey* [20] untersuchten die Vergrößerung einer einzigen Pore in einem starr-idealplastischen Medium, das unter einachsiger Zug und dreiaxsigem Spannungszustand steht. Die kugelförmige Pore mit dem Ausgangsradius  $R_0$  ändert sich in Abhängigkeit von der auf sie wirkenden Normalspannung. Die Änderungsgeschwindigkeit  $\dot{R}_0$  des Radius entlang der Hauptsache  $i$  ist eine Funktion der Vergleichsformänderungsgeschwindigkeit und der mittleren Normalspannung:

$$\frac{\dot{R}_{0i}}{R_0} = 0,558 \bar{\epsilon} \sinh(\sigma_{\infty}/2\bar{\sigma}), \quad (18)$$

wobei  $\bar{\sigma}$  die Vergleichsspannung ist.

Dieser Anteil der Volumenänderung übersteigt den Anteil der Gestaltänderung, wenn die mittlere Spannung sehr groß ist. Insgesamt ergibt sich dann eine Gleichung für die Änderungsgeschwindigkeit wie folgt:

$$\frac{\dot{R}_{0i}}{R_0} = 0,558 \bar{\epsilon} \sinh(\sigma_{\infty}/2\bar{\sigma}) + \left( \frac{1}{3} \text{ bis } 2 \right). \quad (19)$$

Die exponentielle Abhängigkeit des Porenwachstums von dem dreiaxsigem Spannungssystem hat Ähnlichkeit mit dem Modell von *McClintock* [16], solange das Wachstum einer Pore mit rundem Querschnitt betrachtet wird.

Im Vergleich mit anderen Modellen bringt das Modell von *Rice* und *Tracey* eine Verbesserung, da darin die Volumenänderung der Poren berücksichtigt wird. Jedoch vernachlässigt es, wie andere Modelle, den Vorgang der Scherlokalisierung zwischen den benachbarten Poren vor der Bildung des Risses.

Als Ursache des duktilen Bruches wurde bisher das Zusammenwachsen der Poren bei fortschreitender Verformung angenommen. Zum Beispiel nahm *McClintock* in seinem Modell für das Porenwachstum an, daß der Bruch in dem Einschnürungsbereich des Werkstoffes auftritt, wenn sich dort die mit der Verformung vergrößerten Poren gegenseitig berühren. Beim Bruch (Porensammenwachsen nach *McClintock*) erreicht die Vergleichsformänderung  $\bar{\epsilon}$  einen kritischen Wert  $\bar{\epsilon}_f$ :

$$\bar{\epsilon}_f = \frac{\ln(l_b^0/2b_0)}{\left( \frac{\sqrt{3}}{2(1-n)} \sinh \left\{ \frac{\sqrt{3}(1-n) \sigma_a + \sigma_b}{2 \bar{\sigma}} \right\} + \frac{3 \sigma_a - \sigma_b}{4 \bar{\sigma}} \right)}, \quad (20)$$

( $0 < \sigma_a > \sigma_b$ ).

Wenn man die Exzentrizität des Querschnitts der Pore, den 2. Term des Nenners der Gl. (20), vernachlässigt, ergibt sich die folgende vereinfachte Beziehung, die ursprünglich für eine Pore mit dem Kreisquerschnitt ( $a_0 = b_0 = R_0$ ) gilt:

$$\bar{\epsilon}_f = \frac{\ln(l_b^0/2b_0)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2(1-n)} \sinh \left\{ \frac{\sqrt{3}(1-n)}{2} \frac{\sigma_a + \sigma_b}{\bar{\sigma}} \right\}\right)} \quad (21)$$

Die Porenbildung und die Effekte der Einschnürung sind in diesem Bruchkriterium von *McClintock* nicht erfaßt. Die danach ermittelte Bruchdehnung eines Werkstoffes ist normalerweise höher als die experimentell gefundene Bruchdehnung.

Vergleicht man das Bruchkriterium von *McClintock* [16] mit dem empirischen Kriterium von *Cockcroft* und *Latham* [6], kann folgende Beziehung hergeleitet werden:

$$\ln\left(\frac{l_b^0}{2b_0}\right) = 2C_{CL}, \quad (22)$$

wenn  $(\sigma_a + \sigma_b)/\bar{\sigma} \leq 1$  ist [6]. Für  $(\sigma_a + \sigma_b)/\bar{\sigma} > 1$  weichen die Gleichungen (1) und (20) stark voneinander ab.

Das Originalmodell von *McClintock* (Gln. (17), (20) und (21)) wurde bisher in vielen Arbeiten übernommen. Die damit berechneten Ergebnisse der Ribbildung wurden als nur zufriedenstellend für verschiedene Umformprobleme eingestuft.

Eine Verbesserung des *McClintock*'schen Originalmodells ist daher notwendig. Die geschlossene Formel (17a) gilt nach *Dung* [9; 10] sowie *Sowerby* u.a. [21] für den Schadensgrad  $d(\ln F_{ca})$ , nicht für  $d(\ln F_{cb})$  nach der *McClintock*'schen Interpretation, wie man die reale Vergrößerung der Poren im Zugversuch beobachten kann.

Daher bedeutet der Schadensgrad

$$d(\ln F_{ca}) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2(1-n)} \sinh \left\{ \frac{\sqrt{3}(1-n)}{2} \frac{\sigma_a + \sigma_b}{\bar{\sigma}} \right\} + \frac{3}{4} \frac{\sigma_a - \sigma_b}{\bar{\sigma}}\right) d\bar{\epsilon} = f_{ca}(\sigma_a, \sigma_b) d\bar{\epsilon}, \quad (23)$$

die Vergrößerung der Pore (Längsachse  $c$ ) in der Querrichtung  $a$  unter einem dreiachsigen Spannungszustand. Analog ergibt sich für die Querrichtung  $b$  der Schadensgrad:

$$d(\ln F_{cb}) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2(1-n)} \sinh \left\{ \frac{\sqrt{3}(1-n)}{2} \frac{\sigma_a + \sigma_b}{\bar{\sigma}} \right\} + \frac{3}{4} \frac{\sigma_b - \sigma_a}{\bar{\sigma}}\right) d\bar{\epsilon} = f_{cb}(\sigma_a, \sigma_b) d\bar{\epsilon}. \quad (24)$$

Diese Interpretation deckt sich auch mit der Erklärung von *Brown* und *Embury* [4] für den Vorgang des Porenzusammenwachsens. Unter einer maximalen Zugspannung  $\sigma_a$  wird die Halbachse  $a$  in der Querrichtung  $a$  verlängert, bis sie eine kritische Größe erreicht. In diesem Moment erfährt die Matrix zwischen den benachbarten Poren eine konzentrierte plastische Formänderung. Es führt dann zu dem schlagartigen Zusammensacken der Poren.

Wenn die akkumulierte Schadensgröße  $A_{ca}$ ,

$$A_{ca} = \ln F_{ca} = \int_0^{\bar{\epsilon}} f_{ca}(\sigma_a, \sigma_b) d\bar{\epsilon}, \quad (25)$$

so definiert wird, dann erreicht die Schadensgröße einen kritischen Wert  $A_{ca}^{*f}$  beim Bruch:

$$A_{ca}^f = \ln F_{ca}^f = \int_0^{\bar{\epsilon}_f} f_{ca}(\sigma_a, \sigma_b) d\bar{\epsilon} = A_{ca}^{*f} > 0. \quad (26)$$

Eine positive Schadensgröße  $A_{ca}$  bedeutet die Vergrößerung der Pore. Dagegen verkleinert oder schließt sich der

Hohlraum während der Umformung, wenn die Schadensgröße  $A_{ca}$  abnimmt oder negativ wird.

Nach *McClintock* sind die kritischen Größen bei Porenvereinigungen:

$$A_{ca}^{*f} = \ln\left(\frac{l_a^0}{2a_0}\right) \quad \text{und} \quad A_{cb}^{*f} = \ln\left(\frac{l_b^0}{2b_0}\right) \quad (27)$$

zu ermitteln, wobei  $l_a^0$  und  $l_b^0$  bzw.  $a_0$  und  $b_0$  Ausgangsporenabstände bzw. Ausgangshalbachsen heißen. Da die kritischen Größen (27) die obere Grenze für das Porenzusammenwachsen bedeuten, ergibt sich die Bedingung

$$A_{ca} < A_{ca}^{*f} \leq \ln\left(\frac{l_a^0}{2a_0}\right) \quad (28)$$

für eine Formänderung ohne Werkstoffversagen.

Berücksichtigt man die Stationen des Porenwachstums und -zusammenwachsens, wird nach *Dung* [9; 10] während eines Umformvorganges der duktile Bruch zuerst an einer Stelle des Formteils auftreten, wo die akkumulierte Schadensgröße und die Vergleichsformänderung ihre kritischen Werte bereits erreicht haben.

$$\bar{\epsilon} \geq \bar{\epsilon}_f^*, \quad (29a)$$

und

$$A_{ca} \geq A_{ca}^{*f} > 0. \quad (29b)$$

In diesem Fall ist die Ribebene die  $cb$ -Ebene und  $c$  ist die Richtung der Riblänge.

Dieses strenge Bruchkriterium verlangt das gleichzeitige Erreichen der kritischen Werte  $A_{ca}^{*f}$  und  $\bar{\epsilon}_f^*$  beim Bruch. Der kritische Wert  $A_{ca}^{*f}$  ist konstant für einen Werkstoff. Er hängt von der Anisotropie des Werkstoffes ab. Der kritische Wert  $\bar{\epsilon}_f^*$  ist die Vergleichsformänderung beim Bruch im einachsigen Zugversuch des runden Stabes oder im zweiachsigen Zugversuch des Blechstreifens des betrachteten Werkstoffes. Die Wahl der Bezugsgrößen richtet sich nach dem Spannungs- und Dehnungszustand des gefährdeten Bereichs des Formteils. Zum Beispiel wurde für die Untersuchung der Ribentstehung im Werkstoff Stahl AISI 1045 bzw. Messing 60–40 die kritische Größe  $A_{ca}^{*f} = 0,57$  bzw.  $0,37$  gefunden [10], was *Atkins* und *Mai* [3] auch vermuteten.

Das Bruchkriterium von *McClintock* [16] und dessen Erweiterung von *Dung* u.a. [9; 10; 21] wurden für die Untersuchung der Ribentstehung im axialsymmetrischen und ebenen Stauchversuch, Zugversuch und Fließpressen mit verschiedenen Werkstoffen erfolgreich angewendet. *Appeltauer* u.a. [1; 2] haben dann dieses Modell in ein Finite-Element-Programm für die Untersuchung der Ribentstehung im dreidimensionalen Blockstauchversuch eingebaut.

*Thomason* [22; 23] benutzte das Modell von *Rice* und *Tracey* [20] für die Vergrößerung der sphärischen Poren, die in einer Ebene senkrecht zur ausgeprägten Dehnung liegen. Am Anfang der plastischen Verformung ist die Normalspannung  $\sigma_n$  in der Matrix zwischen den Poren größer als die Fließgrenze des Werkstoffes. Bei Vergrößerung der Poren und Einschnürung der Matrix nimmt das Verhältnis  $(\sigma_n/2k)$  ab, das den plastischen Widerstand der Matrix zwischen den Poren beschreibt. Der Rib wird sich in der Matrix bilden, nach-

dem das Verhältnis einen kritischen Wert  $(\sigma_n/2k)_f$  erreicht. Für den betrachteten Körper während der plastischen Umformung hat *Thomason* ein Kriterium für die Rißenstehung als

$$\left(\frac{\sigma_n}{2k}\right)_f (1 - \sqrt{V_f}) = \frac{1}{2} + \frac{\sigma_m}{2k} \quad (30)$$

definiert, wobei  $V_f$  der Volumenanteil der Poren ist und  $k$  die Schubfließgrenze bedeutet.

Aus diesem Kriterium errechnete *Thomason* die Bruchdehnung  $\bar{\epsilon}_f$ :

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_f &= \bar{\epsilon}_N + \bar{\epsilon}_G \\ &= \bar{\epsilon}_N + \frac{1}{4} \ln \left[ \frac{0,1(1 - \sqrt{V_f})^3}{V_f \{0,5 - 0,9(1 - \sqrt{V_f}) + (\sigma_m/2k)\}} \right], \end{aligned} \quad (31)$$

wobei  $\bar{\epsilon}_N$  die Vergleichsformänderung zum Zeitpunkt der Porenbildung ist. Der Anteil  $\bar{\epsilon}_G$  ist die kritische Vergleichsformänderung, die von dem Porenvolumenanteil  $V_f$  abhängig ist. Für einen Werkstoff mit einem bekannten kritischen Wert des Porenvolumenanteils kann der Anteil  $\bar{\epsilon}_G$  beim Bruch daraus leicht ermittelt werden.

Sehr häufig wird das dreidimensionale Modell des Porenwachstums von *Gurson* [12] für starr-plastische Werkstoffe mit sphärischen Poren verwendet und erweitert. *Gurson* berücksichtigte in seinem Modell auch den Einfluß des Porenwachstums auf das Werkstoffverhalten während der Umformung. Die Fließbedingung des Werkstoffes hängt dementsprechend von dem sich vergrößernden Porenvolumenanteil ab. Daraus ergibt sich eine Fließfunktion für den plastischen porösen Werkstoff:

$$\begin{aligned} F(\sigma_m, \bar{\sigma}) &= \Phi(\sigma_{ij}, \bar{\sigma}_M, f) \\ &= \left(\frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}_M}\right)^2 + 2f \cosh\left(\frac{3}{2} \frac{\sigma_m}{\bar{\sigma}_M}\right) - (1 + f^2) = 0, \end{aligned} \quad (32)$$

wobei  $f$  der Porenvolumenanteil ist,  $\sigma_{ij}$ ,  $\bar{\sigma}$  und  $\sigma_m$  sind die makroskopische Spannung, die Vergleichsspannung und die hydrostatische Spannung des porösen Werkstoffes. Der Werkstoff der Matrix, der eine Vergleichsspannung  $\bar{\sigma}_M$  hat, wird homogen, inkompressibel und starr-plastisch angenommen.

Die Fließfunktion kann als das plastische Potential des Werkstoffes benutzt werden. So erhält man das Potentialgesetz:

$$\dot{E}_{ij} = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (33)$$

wobei der Faktor  $\dot{\lambda}$  vom Verformungsgeschehen abhängt.  $\dot{E}_{ij}$  ist der makroskopische Formänderungsgeschwindigkeitstensor des porösen Werkstoffes.

Unter der Berücksichtigung der Geometrie und der verbrauchten plastischen Arbeit werden folgende Beziehungen hergeleitet:

$$\sigma_{ij} \dot{E}_{ij} = (1-f) \bar{\sigma}_M \dot{\bar{\epsilon}}, \quad (34)$$

und

$$\dot{f} = (1-f) \dot{E}_{kk}, \quad (35)$$

wobei

$$\dot{f} = df/dt$$

ist.

Dieses Modell für poröse Werkstoffe kann auch für einen starr-idealplastischen Werkstoff angewendet werden, der von Anfang an keine Poren hat. In diesem Fall muß der Vorgang der Porenbildung zusätzlich berücksichtigt werden, nämlich:

$$\dot{f} = \dot{f}_w + \dot{f}_N. \quad (36)$$

$\dot{f}_N$  bedeutet den Gradientenzuwachs des Volumenanteils der Poren beim Vorgang mit Porenbildung,  $\dot{f}_w$  ist der Gradientenzuwachs der vorhandenen Poren.

Für den Fall  $f = V_f/V = 0$  (Werkstoff ohne Poren) ist die Fließfunktion (32) ähnlich einem *von-Mises* Fließkriterium für das plastische Fließen:

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_M; \quad (37)$$

sonst ist ( $\sigma_m = 0$ ):

$$\bar{\sigma} = (1-f) \bar{\sigma}_M. \quad (38)$$

Das Modell von *Gurson* kann damit das Werkstoffverhalten unter dem Einfluß des Porenwachstums sehr gut beschreiben. *Tvergaard* u.a. [24; 25] meinten, daß der totale Verlust der Tragfähigkeit des Werkstoffes ausschließlich durch Porenzusammenwachsen nicht realistisch durch das Modell von *Gurson* wiedergegeben wird. Wie schon erwähnt, haben *Brown* und *Embury* [4] ein lokales Versagen durch einfache Einschnürung des Bereichs zwischen den Poren festgestellt, nachdem die Größe der Poren einen kritischen Zustand erreicht hat. Dabei ist der Volumenanteil  $f = f_c = 0,15$ . Nach *Tvergaard* u.a. gilt das *Gurson*sche Modell nur für den Bereich des Materialverhaltens bis zum Beginn des Porenzusammenwachsens, d.h. bis  $f$  den kritischen Wert  $f_c$  erreicht.

Für  $f > f_c$  hat *Tvergaard* [24] folgende Fließfunktion vorgeschlagen:

$$\Phi = \left(\frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}_M}\right)^2 + 2fq_1 \cosh\left\{\frac{3}{2} \frac{\sigma_m}{\bar{\sigma}_M}\right\} - \{1 + (q_1 f)^2\} = 0, \quad (39)$$

wobei  $q_1$  eine Konstante ist. Mit dieser Funktion kann das Auftreten der plastischen Lokalisierung im Umformvorgang erfaßt werden. Dabei wird  $q_1 = 1,5$  angenommen (für  $q_1 = 1$  bekommt man die Fließfunktion (32) nach *Gurson*). Der Volumenanteil der Poren  $f$  ist gleich  $1/q_1$ , wenn der Werkstoff nicht mehr tragfähig ist.

Anhand der theoretisch und experimentell ermittelten Ergebnisse wird der Volumenanteil  $f$ :

$$f = f_c = 0,15 \text{ bei Einschnürung,}$$

und

$$f = f_F = 0,25 \text{ beim Bruch.} \quad (40)$$

Das Modell von *Gurson* [12] und dessen Erweiterungen von *Tvergaard* [24] für die sphärischen Poren erlauben den Bruchvorgang und die Wechselwirkung zwischen dem Porenwachstum und der lokalisierten Plastifizierung, besonders bei Blechumformungen, besser zu behandeln. Nachteile dieser Modelle sind die Bestimmung der kritischen Werte  $f_c$ ,  $f_F$  und des Parameters  $q_1$ , wobei  $q_1$  eine rein numerische Größe ist, die für die Verbesserung der Berechnung sorgt. Die Festlegung von  $f_c$  und  $f_F$  verlangt eine Untersuchung des Werkstoffgefüges.

Hom und McMeeking [13] haben die Modelle von Gurson sowie von Tvergaard zur Untersuchung der Wechselwirkung zwischen dem Porenwachstum und dem Werkstoffverhalten in 3D-Problemen unter verschiedenen Spannungssystemen (Einachsigkeit, ebener Spannungszustand und Dreiachsigkeit) mit Hilfe eines FE-Programms getestet. Die theoretischen und experimentellen Ergebnisse dieser Untersuchung zeigten, daß die Modelle von Gurson und von Tvergaard das Verhalten des porösen Werkstoffes im Falle des einachsigen Zugversuchs und im ebenen Problem sehr gut beschreiben konnten. Im dreiachsigen Spannungssystem gab es aber eine starke Abweichung zwischen theoretischen und experimentellen Ergebnissen. Außerdem konnten diese Modelle keine Aussagen über die Vergrößerung sowie die Dimension der Poren während der Umformung machen. Dies schließt bisher die Anwendung des Modells von Gurson auf Probleme der Massivumformung, in denen ein ausgeprägt dreiachsiges Spannungssystem häufig zu finden ist, aus.

### 3. Globalberechnungsmethode

Die Bruchkriterien analysieren die Ribentstehung während eines Umformvorganges nach dem Konzept, das in Bild 4 dargestellt ist. Anhand der momentanen Spannungs- und Verzerrungsfelder werden das Porenwachstum und die akkumulierte Schadensgröße eines Bruchkriteriums ermittelt. Gleichzeitig wird, wenn es notwendig ist, eine Korrektur des Werkstoffverhaltens infolge des Porenwachstums durchgeführt. Bei einer Vergrößerung des Porenvolumenanteils wird normalerweise das Umformvermögen des porösen Werkstoffes im Verlauf des Umformvorganges vermindert. Das führt zur Erscheinung der Einschnürung und, beim Erreichen des kritischen Zustandes, zur Ribbildung. Je nach der Modellierung eines Bruchkriteriums kann man dabei den Ribort im Formteil sowie die Bruchdehnung während des Umformvorganges theoretisch bestimmen.

Die von allen Bruchkriterien benötigten Spannungs- und Verzerrungsfelder können mit der Finite-Element-Methode genau und schrittweise ermittelt werden, so daß das Werkstoffverhalten bis zum Bruch überall im Formteil untersucht

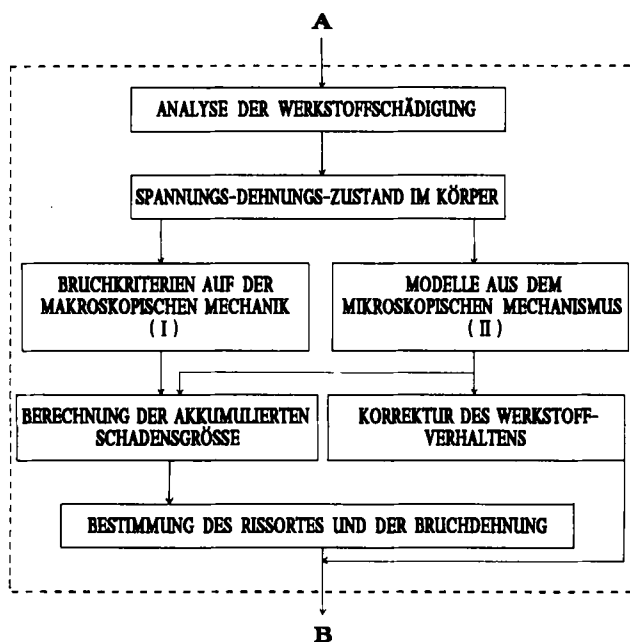


Bild 4. Untersuchung der Ribbildung im Rechenlauf eines FE-Programms



Bild 5. Ablauf einer FE-Simulation von Umformproblemen

werden kann [5]. Die Bruchkriterien werden jeweils in Form eines Moduls, eines Unterprogramms, in das Finite-Element-Programm eingebaut, Bild 5. Bild 5 zeigt den Ablauf eines starr-plastischen FE-Programmsystems zur Berechnung der Kaltmassivumformvorgänge [1; 2; 8; 9; 10], das unter der Leitung von Mahrenholtz in Hannover und Hamburg-Harburg entwickelt wurde. In jedem Deformationsschritt der quasistationären Behandlung des instationären Umformvorganges wird zum Beispiel die Formänderungsenergie oder die Größe der Poren anhand vom zeitlichen und örtlichen Spannungs- und Verzerrungszustand je nach dem Bruchkriterium bestimmt. Diese Größen werden im Lauf des Umformvorganges gemäß des Zeitinkrements akkumuliert und mit den kritischen Bezugsgrößen des Bruchkriteriums verglichen, um das mögliche Auftreten von Brüchen vorauszusagen.

Zur Berechnung der Spannungs- und Verzerrungsfelder kann man auch die Theorie der Plastizität anwenden. Sie wurde insbesondere für die Untersuchung der Ribentstehung an der Oberfläche des Zylinderstauchens eingesetzt. Wenn die Anisotropie des Werkstoffverhaltens vernachlässigt wird und die Achsen an der freien Äquatorialoberfläche des Zylinders auch als Hauptachsen angenommen werden können, können die Spannungs- und Dehnungskomponenten dort mit der Plastizitätstheorie leicht ermittelt werden. Ein Programm für die Untersuchung der Ribentstehung in den Stauchversuchen mit Hilfe des McClintockschen Modells und der Plastizitätstheorie wurde in der Arbeit von Dung [10] ausführlich vorgestellt.

### Literatur

- [1] Appeltauer, J., N.L., Dung, O. Mahrenholtz: Some theoretical and numerical aspects of large deformations in three-dimensional metal forming. Proc. NUMIFORM '89, Fort Collins, USA, 1989, 523/527.

- [2] *Appeltauer, J., N.L. Dung, O. Mahrenholtz*: Numerische Untersuchung der Ribbildung infolge plastischen Fließens. ZAMM 70 (1990), T312/T314.
- [3] *Atkins, A.G., Y.-W. Mai*: Elastic and Plastic Fracture. Chichester: Ellis Horwood, 1988.
- [4] *Brown, L.M., J.D. Embury*: The initiation and growth of voids at second phase particles. Proc. 3rd Int. Conf. on Strength of Metals and Alloys, Cambridge, U.K., 1973, 164/169.
- [5] *Clift, S.E.*: Identification of defect locations in forged products using the finite element method. PhD-Thesis, University of Birmingham, U.K., 1986.
- [6] *Cockcroft, M.G., D.J. Latham*: Ductility and the workability of metals. J. Inst. Met. 96 (1968), 33/39.
- [7] *Dodd, B., Y. Bai*: Ductile Fracture and Ductility. London: Academic Press 1987.
- [8] *Dung, N.L.*: Ein Beitrag zur Berechnung instationärer starr-plastischer Formänderungen mit einer Finite-Element-Methode. Fortschr.-Ber. VDI Reihe 2 Nr. 46, Düsseldorf: VDI-Verlag 1981.
- [9] *Dung, N.L.*: Identification of defect locations in uniaxial compression samples. Mech. Res. Comm. 15 (1988), 123/130.
- [10] *Dung, N.L.*: Ein Beitrag zur Untersuchung der Ribentstehung in der Kaltmassivumformung metallischer Werkstoffe. Fortschr.-Ber. VDI Reihe 2 Nr. 175, Düsseldorf: VDI-Verlag 1989.
- [11] *Gelin, J.C.*: Modèles numériques et expérimentaux en grandes déformations plastiques et endommagement de rupture ductile. Thèse de doctorat d'Etat. Université Paris VI 1985.
- [12] *Gurson, A.L.*: Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth. Part I. J. Eng. Mat. & Tech. 99 (1977), 2/15.
- [13] *Hom, C.L., R.M. McMeeking*: Void growth in elastic-plastic materials. J. Appl. Mech. 56 (1989), 309/317.
- [14] *Lemaitre, J.*: A continuous damage mechanics model for ductile fracture. J. Eng. Mat. & Tech. 107 (1985), 83/89.
- [15] *Lemaitre, J., J.-L. Chaboche*: Mechanics of Solid Materials. Cambridge: University Press 1990.
- [16] *McClintock, F.A.*: A criterion for ductile fracture by the growth of holes. J. Appl. Mech. 90 (1968), 363/371.
- [17] *McClintock, F.A., S.M. Kaplan, C.A. Berg*: Ductile fracture by hole growth in shear bands. Int. J. Frac. Mech. 2 (1966), 614/627.
- [18] *Oyane, M.*: Criteria of ductile fracture strain. Bull. JSME 15 (1972), 1507/1513.
- [19] *Oyane, M., T. Sato, K. Okimoto, S. Shima*: Criteria for ductile fracture and their applications. J. Mech. Working Tech. 4 (1980), 65/81.
- [20] *Rice, J.R., D.M. Tracey*: On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields. J. Mech. Phys. Solids 17 (1969), 201/217.
- [21] *Sowerby, R., N. Chandrasekaran, N.L. Dung, O. Mahrenholtz*: The prediction of damage accumulation during upsetting tests based on McClintock's model. VDI-Forsch. Ing.-Wes. 51 (1985), 147/150.
- [22] *Thomason, P.F.*: Ductile fracture and the stability of incompressible plasticity in the presence of microvoids. Acta Metall. 29 (1981), 763/777.
- [23] *Thomason, P.F.*: Ductile Fracture of Metals. Oxford: Pergamon Press 1990.
- [24] *Tvergaard, V.*: On localization in ductile materials containing spherical voids. Int. J. Frac. 18 (1982), 237/252.
- [25] *Tvergaard, V., A. Needleman*: Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. Acta Metall. 32 (1984), 157/169.

Eingegangen am 22. Juli 1991

F 4079

## Wärmespannungen bei der Erhitzung oder Abkühlung der elastisch-plastischen Kugel

Udo Gamer \*)

*Beim Abkühlen einer Kugel aus elastisch-plastischem Material kommt es zu primärer plastischer Deformation, zu elastischer Entlastung und zu sekundärer plastischer Deformation. Wenn der Werkstoff bei diesen Vorgängen isotrop bleibt, dann existieren einheitliche Ausdrücke für die Verschiebung und die Spannungen, welche in der gesamten Kugel gültig sind. Zu deren Auswertung muß man die Grenzen zwischen den verschiedenen Bereichen sowie den Verlauf der plastischen Dehnungen ermitteln. Dies geschieht mit geringem numerischem Aufwand aus nichtgekoppelten Gleichungen.*

### 1. Einleitung

Elastisch-plastische Wärmespannungen mit Kugelsymmetrie stoßen seit Beginn der sechziger Jahre auf anhaltendes Interesse unter den Plastizitätstheoretikern. Der Grund dafür liegt in der Tatsache, daß mit verhältnismäßig einfachen Mit-

teln die Ausbreitung von primärplastischen, entlasteten und sekundärplastischen Bereichen studiert werden kann, was für das Verständnis solcher Vorgänge auch bei weniger speziellen Problemen hilfreich ist. Von besonderer Bedeutung sind in diesem Zusammenhang natürlich analytische Lösungen, deren erste korrekte *H. Parkus* [1] veröffentlichte. Er untersuchte das Abschrecken einer Kugel, jedoch unter einer Reihe

\*) Prof. Dr. U. Gamer, Institut für Mechanik, Technische Universität Wien