Math. Z. 212, 107–122 (1993)

Mathematische Zeitschrift

Un théorème de prolongement L^2 de sections holomorphes d'un fibré hermitien

Laurent Manivel

Institut Fourier, Laboratoire de mathématiques, associé au CNRS, B.P. 74, F-38402 Saint-Martin-d'Hères, France

Received January 6, 1992; in final form April 3, 1992

1 Introduction et résultats

1.1 Le théorème principal

Le problème du prolongement de fonctions holomorphes avec contrôle de croissance, d'une sous-variété d'une variété complexe, à cette variété tout entière, a donné lieu depuis une dizaine d'années à un certain nombre de travaux dont la plupart des résultats semblent pouvoir être étendus très naturellement aux cas où ce sont des sections holomorphes de fibrés hermitiens, possédant éventuellement certaines propriétés de positivité, que l'on cherche à prolonger. Nous donnons ici, en particulier, une généralisation en codimension quelconque d'un théorème dû, dans un cas très particulier, à Ohsawa et Takegoshi [O-T], généralisation qui peut être énoncée de la façon suivante:

Théorème 1 *Soient X une variété de Stein de dimension n, E un fibré de rang d sur X, s une section holomorphe de E génériquement transverse à la section nulle, et*

$$Y=\{x\in X, s(x)=0, \Lambda^d ds(x)\neq 0\}.$$

Soit π: $\mathbb{P}(E)\to X$ le fibré en espaces projectifs des droites du fibré E: s définit à la fois une section de $\mathbb{P}(E)$ au-dessus de $X\setminus s^{-1}(0)$, et une section, que l'on notera σ, de l'image réciproque sur $X\setminus s^{-1}(0)$ du fibré en droites tautologique $\mathcal{O}_{E^*}(-1)$ sur $\mathbb{P}(E)$.

On suppose $\mathcal{O}_{E^*}(-1)$ muni d'une métrique hermitienne, et X d'une (1, 1)*-forme positive fermée Ω telle que*

$$\pi^*\Omega \geqq ic(\mathcal{O}_{E^*}(-1)) \quad \textit{sur} \quad \mathbb{P}(E).$$

Soit alors L un fibré en droites hermitien sur X tel qu'il existe un réel strictement positif α pour lequel

$$\frac{1}{d}\pi^* ic(L) \geqq \alpha\pi^*\Omega + ic(\mathcal{O}_{E^*}(-1)).$$

Supposons de plus E muni d'une métrique hermitienne telle que $|s| \leqq \kappa |\sigma|$, *où* κ *est un réel strictement positif, et munissons* $L \otimes (\det E)^{-1}$ *de la métrique hermitienne associée.*

Alors pour toute fonction ξ *plurisousharmonique sur* X, *tout réel strictement positif* β *et toute section holomorphe g sur* Y *de* $K_Y \otimes L \otimes (\det E)^{-1}$ *telle que*

$$i^{(n-d)^2} \int_Y e^{-\xi}\{g, g\} < +\infty,$$

il existe une section holomorphe G sur X de $K_X \otimes L$, *telle que* $G|_Y = g \wedge (\wedge^d ds)$, *et*

$$i^{n^2} \int_X \frac{e^{-\xi}\{G, G\}}{|\sigma|^{2d-2}(1+|\sigma|^2)^{1+\beta}} \leqq M i^{(n-d)^2} \int_Y e^{-\xi}\{g, g\},$$

où M est une constante numérique ne dépendant que de d, α, β *et* κ.

Remarque 1 Etant donné un fibré holomorphe hermitien E sur une variété de Stein X, il existe toujours une $(1, 1)$-forme positive fermée Ω sur X telle que sur $\mathbb{P}(E)$,

$$\pi^* \Omega \geqq i c(\mathcal{O}_{E^*}(-1)),$$

à condition bien sûr de supposer que la métrique hermitienne considérée sur $\mathcal{O}_{E^*}(-1)$ admette une courbure négative sur les fibres de π, ce que l'on peut toujours faire. En effet, sous cette condition, soit ϕ une fonction strictement plurisousharmonique exhaustive sur X, et χ une fonction convexe croissante sur $\mathbb{R}^+$. Alors $\Omega = i d' d''(\chi \circ \phi)$ convient si χ est suffisamment croissante. Plus précisément, si $X_n = \phi^{-1}([0, n[)$, $\overline{X_{n+1}} \setminus X_n$ est compact par hypothèse, donc il existe des réels m_n, $n \in \mathbb{N}$, tels que

$$i c(\mathcal{O}_{E^*}(-1)) \leqq m_n \pi^* i d' d'' \phi \qquad \text{sur } \overline{X_{n+1}} \setminus X_n,$$

et comme $i d' d''(\chi \circ \phi) = i(\chi'' \circ \phi) d' \phi \wedge d'' \phi + i(\chi' \circ \phi) d' d'' \phi \geqq i(\chi' \circ \phi) d' d'' \phi$, il suffit de supposer que pour tout entier n, $\chi'(n) \geqq m_n$, ce qui est toujours possible.

De la même façon, étant donnée une section g sur Y de $K_Y \otimes L \otimes (\det E)^{-1}$, on peut munir L d'une métrique dont la courbure vérifie l'hypothèse de l'énoncé précédent, et pour laquelle g soit intégrable sur Y relativement au poids $e^{-\xi}$.

Remarque 2 Le résultat précédent s'étend directement au cas des formes différentielles D''-fermées de bidegré $(0, q)$: si X est munie d'une métrique kählérienne ω, on obtient les estimations L^2 suivantes, qui ne sont cependant plus intrinsèques:

$$\int_X \frac{e^{-\xi}|G|^2 dV_X}{|\sigma|^{2d-2}(1+|\sigma|^2)^{1+\beta}} \leqq M \int_Y e^{-\xi}|g|^2 dV_Y,$$

où dV_X et dV_Y désignent les éléments de volume kählériens de X et Y. On obtiendrait ainsi des résultats d'extension pour les q-formes D''-fermées en degré $q \geqq 0$ quelconque.

On a noté $\{\ ,\ \}$ l'accouplement sesquilinéaire naturellement défini sur les formes à valeurs dans un fibré en droites hermitien $\mathcal{L}$, et à valeurs dans les formes scalaires, de la façon suivante: soit U un ouvert de trivialisation de $\mathscr{L}$, et λ une section de $\mathscr{L}$ ne s'annulant pas sur U; si $\tilde{\sigma}$ et $\tilde{\tau}$ sont des formes à valeurs dans $\mathscr{L}$, qui sur U s'écrivent

$$\tilde{\sigma}=\sigma\otimes\lambda \quad \text{et} \quad \tilde{\tau}=\tau\otimes\lambda,$$

alors $\{\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}\}|_U=|\lambda|^2\sigma\wedge\bar{\tau}$.

Rappelons également que la connexion de Chern D de $\mathscr{L}$ est l'unique connexion dont la partie de type (0, 1) s'identifie sur toute trivialisation holomorphe de $\mathscr{L}$ à l'opérateur d'', et hermitienne, c'est-à-dire telle que pour toutes formes $\tilde{\sigma}$ et $\tilde{\tau}$ à valeurs dans $\mathscr{L}$,

$$d\{\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}\}=\{D\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}\}+(-1)^{\deg\tilde{\sigma}}\{\tilde{\sigma}, D\tilde{\tau}\}.$$

1.2 Cas d'une variété projective

Soit NY le fibré normal à Y, que définit la suite exacte

$$0\to TY\to TX|_Y\to NY\to 0,$$

et considérons la suite exacte duale tensorisée par E

$$0\to NY^*\otimes E|_Y\to T^*X\otimes E|_Y\to T^*Y\otimes E|_Y\to 0.$$

La différentielle ds est une section de $T^*X\otimes E|_Y$ qui, s étant nulle sur Y, s'identifie en fait à une section de $NY^*\otimes E|_Y$: la supposer de rang d implique qu'elle définisse un isomorphisme des fibrés NY et $E|_Y$. De plus, $\wedge^d ds$ apparaît comme une section holomorphe sur Y du fibré en droites $(\det E)\otimes(\det NY)^{-1}$ $=K_X\otimes K_Y^{-1}\otimes\det E$. Si g est une section holomorphe sur Y d'un fibré en droites hermitien L, et si s est partout transverse à la section nulle, il existe donc une unique section holomorphe $\tilde{g}$ sur Y du fibré $K_Y\otimes L\otimes K_X^{-1}\otimes(\det E)^{-1}$ telle que $g=\tilde{g}\otimes\wedge^d ds$.

En utilisant la propriété classique du complémentaire d'un diviseur ample d'une variété projective, d'être une variété de Stein, on peut ainsi obtenir, pour une variété projective, la surjectivité des morphismes de restriction des sections d'un fibré en droites à une sous-variété définie par une section d'un fibré holomorphe partout transverse à la section nulle, sous des hypothèses de courbure que nous affaiblirons en une hypothèse purement algébrique:

Corollaire 1 *Soient X une variété projective, E un fibré holomorphe de rang d sur X, s une section holomorphe de E partout transverse à la section nulle, et $Y=s^{-1}(0)$. Soit π: $\mathbb{P}(E)\to X$ le fibré des droites de E, $\mathcal{O}_{E^*}(-1)$ le fibré en droites tautologique sur $\mathbb{P}(E)$, et $\mathcal{O}_{E^*}(d)$ la d-ième puissance tensorielle de son dual.*

Alors si L est un fibre en droites holomorphe sur X tel que $\pi^*(L\otimes K_X^*)\otimes\mathcal{O}_{E^*}(d)$ soit ample sur $\mathbb{P}(E)$, le morphisme de restriction $H^q(X, L)\to H^q(Y, L)$ est surjectif pour tout entier $q\geqq 0$.

Preuve. Suposons X et L munis de métriques hermitiennes, et munissons $\mathcal{O}_{E^*}(d)$ d'une métrique telle que pour la métrique associée, $\pi^*(L\otimes K_X^*)\otimes\mathcal{O}_{E^*}(d)$ admette une courbure strictement positive.

Soit X' le complémentaire dans X d'un diviseur ample: si t est une section holomorphe sur X du fibré en droites ample associé à ce diviseur, $-\log|t|$ est une fonction strictement plurisousharmonique exhaustive sur X', qui est donc une variété de Stein.

Soit H est un fibré en droites ample sur X, muni d'une métrique hermitienne de courbure strictement positive: l'hypothèse faite sur $\mathcal{O}_{E*}(d)$ implique que la courbure de $\mathcal{O}_{E*}(-1)$ est négative sur les fibres de π, donc qu'il existe un entier positif k tel que

$$\pi^*(kic(H)) \geqq ic(\mathcal{O}_{E*}(-1)).$$

Comme $\pi^* ic(L \otimes K_X^*) + ic(\mathcal{O}_{E*}(d))$ est strictement positive sur $\mathbb{P}(E)$, qui est compact, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\frac{1}{d}\pi^* ic(L \otimes K_X^*) \geqq \alpha \pi^*(kic(H)) + ic(\mathcal{O}_{E*}(-1)).$$

On peut donc appliquer sur X' le théorème 1, et toute $(0, q)$-forme D''-fermée sur $Y \cap X'$ *à* valeurs dans L se prolonge à X', avec estimations L^2. Enfin, le prolongement obtenu étant D''-fermé et localement L^2 en dehors d'un sous ensemble analytique de X, en l'occurence $X - X'$, se prolonge lui même en une forme D''-fermée sur X tout entière [De1, lemme 6.9].

Remarque 3 Lorsque E est nef (au sens où le fibré en droites $\mathcal{O}_E(1)$ sur $\mathbb{P}(E^*)$ est numériquement effectif), on peut également, pour $q > 0$, démontrer la surjectivité du morphisme $H^q(X, L) \to H^q(Y, L)$ au moyen du complexe de Koszul associé à s:

$$0 \to \Lambda^d E^* \to \ldots \to E^* \to \mathcal{O}_X \to i_* \mathcal{O}_Y \to 0,$$

où i est l'injection de Y dans X. Si l'on note $S_1, \ldots, S_{d-1}$ les faisceaux noyaux des morphismes de ce complexe tensorisé par L, celui-ci se réduit aux suites exactes courtes

$$0 \to S_1 \to \mathcal{O}_X \otimes L \to i_* \mathcal{O}_Y \otimes L \to 0,$$
$$0 \to S_{i+1} \to \Lambda^i E^* \otimes L \to S_i \to 0, \qquad 1 \leqq i \leqq d-2,$$
$$0 \to \Lambda^d E^* \otimes L \to \Lambda^{d-1} E^* \otimes L \to S_{r-1} \to 0.$$

Il suffit, pour établir la surjectivité du morphisme de restriction $H^q(X, L) \to H^q(Y, L)$, de vérifier que $H^{q+1}(X, S_1) = 0$. Mais l'hypothèse selon laquelle $\pi^*(L \otimes K_X^*) \otimes \mathcal{O}_{E*}(d)$ est ample sur $\mathbb{P}(E)$ implique que $\mathcal{L} = L \otimes K_X^* \otimes (\det E)^{-1}$ est lui-même ample sur X. Si E est nef, une légère variante d'un théorème de Le Potier [LP] donne

$$H^k(X, \Lambda^i E^* \otimes L) = H^{n,k}(X, \Lambda^{d-1} E \otimes \mathcal{L}) = 0$$

si $k > i$. Il s'ensuit que $H^k(X, S_i) = H^{k+1}(X, S_{i+1})$ si $k > i$, donc, par une récurrence immédiate, que $H^{q+1}(X, S_1) = 0$ si $q > 0$.

Cependant, la surjectivité du morphisme de restriction en degré zéro ne semble pas pouvoir être démontrée de cette manière; notons que le résultat de Le Potier est optimal: si X est l'espace projectif d'un espace vectoriel complexe V de dimension $n+1$, E le fibré quotient sur X, de rang $d = n$, alors E est nef puisque quotient d'un fibré trivial, son fibré déterminant est ample, et l'on peut vérifier que

$$H^{n,n-k}(X, \wedge^k E \otimes (\det E)^k) = (\det V)^k \neq 0.$$

Le groupe $H^1(X, S_1)$ peut donc a priori ne pas s'annuler, le corollaire précédent impliquant cependantque l'image par l'homomorphisme cobord de $H^0(Y, L)$ dans ce groupe est nulle.

Le théorème qui précède sera démontré en trois temps: on établit d'abord pour les sections d'un fibré hermitien sur une variéte kählérienne des estimations proches de celles qui permettent d'obtenir des théorèmes d'existence de prolongements L^2; on munit ensuit les ensembles de sous-niveaux de X relatifs à une fonction exhaustive strictement plurisousharmonique donnée, de métriques kählériennes complètes; on montre enfin que les hypothèses faites sur les fibrés impliqués permettent, sur ces ensembles de sous-niveau, de ramener les estimations précédentes à celles qui impliquent effectivement l'existence de prolongements.

2 Preuve du théorème principal

2.1 *Une estimation générale*

L'object de ce paragraphe est de donner une version adéquate, pour un fibré hermitien, des estimées de Donnelly, Fefferman et Xavier [D-F, D-X], telles qu'elles ont été utilisées par Ohsawa et Takegoshi [O-T]: les méthodes de ces derniers auteurs se transposent ici directement.

Lemme 1 *Soit F un fibré en droites hermitien sur une variété X munie d'une métrique kählérienne, soit $\phi \in C^\infty(X, \mathbb{R})$; on munit l'espace des formes à support compact $C_c^{n,q}(X, F)$ du produit hermitien*

$$(u, v)_\phi = \int_X e^{-\phi} \{u, *v\},$$

où $*$ est l'opérateur de Hodge relatif à la métrique considérée sur X. On suppose données sur X des fonctions $\eta \in C^\infty(X, \mathbb{R}^{+*})$ et $\gamma \in C^0(X, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in X, \qquad \gamma(x) \geqq \max(|d''\eta(x)|, \eta^{\frac{1}{2}}(x)).$$

Alors $\forall u \in C_c^{n,q}(X, F)$,

$$\begin{aligned} 2(\|\gamma \delta''_\phi u\|_\phi^2 + \|\gamma D'' u\|_\phi^2) \geqq & (\eta [ic(F) + id'd''\phi, \Lambda]\, u, u)_\phi \\ & - ([id'd''\eta, \Lambda]\, u, u)_\phi - \|u\|_\phi^2, \end{aligned}$$

où δ''_ϕ est l'adjoint formel de D'' pour le produit hermitien défini ci-dessus.

Preuve. Si l'on multiplie la métrique de F par $e^{-\phi}$, le fibré hermitien F_ϕ obtenu admet pour courbure

$$= ic(F_\phi) + id'd''\phi,$$

ce qui permet de se ramener au cas où $\phi=0$. Soient alors δ' et δ'' les adjoints formels des opérateurs d' et d'' pour le produit hermitien $(\ ,\ )_0$ défini sur les formes à valeurs dans F. Les opérateurs de Laplace-Beltrami

$$\Delta''=D''\delta''+\delta''D'',$$
$$\Delta'=D'\delta'+\delta'D',$$

sont liés par la relation de Bochner-Kodaira-Nakano

$$\Delta''-\Delta'=[ic(F),\Lambda]. \tag{1}$$

On effectue alors les transformations suivantes:

$$\begin{aligned} D''\eta\delta''+\delta''\eta D'' &= [D'',\eta]\,\delta''+\eta[D'',\delta'']+[\delta'',\eta]\,D'' \\ &= (d''\eta)\,\delta''+\eta\Delta''-(d''\eta)^*D'', \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} D'\eta\delta'+\delta'\eta D' &= [D',\eta]\,\delta'+\eta[D',\delta']+[\delta',\eta]\,D', \\ &= (d'\eta)\,\delta'+\eta\Delta'-(d'\eta)^*D'. \end{aligned} \tag{3}$$

En soustrayant ces égalités, et en tenant compte de l'identité (1), on obtient

$$\begin{aligned} &D''\eta\delta''+\delta''\eta D''-D'\eta\delta'-\delta'\eta D' \\ &\quad=\eta[ic(F),\Lambda]+(d''\eta)\,\delta''+(d'\eta)^*D'-(d''\eta)^*D''-(d'\eta)\,\delta'. \end{aligned} \tag{4}$$

De plus, l'identité de Jacobi permet d'écrire

$$[D'',[d'\eta,\Lambda]]-[d'\eta,[\Lambda,D'']]+[\Lambda,[D'',d'\eta]]=0, \tag{5}$$

c'est-à-dire

$$-[D'',(d''\eta)^*]=-[id'd''\eta,\Lambda]+[\delta',d'\eta]. \tag{6}$$

Si $u\in C_c^{n,q}X, F)$, $(d'\eta)\,u=0$, et (6) implique que

$$((d'\eta)\,\delta'u,u)=([id'd''\eta,\Lambda]\,u,u)-(D''u,(d''\eta)\,u)-(u,(d''\eta)\,\delta''u). \tag{7}$$

Appliquons à présent l'identité (4) à la forme u, en remarquant par exemple que

$$(D''\eta\delta''u,u)=\|\eta^{\frac12}\delta''u\|^2,$$

et que $D'u=0$ pour des raisons de dimension: il vient

$$\begin{aligned} \|\eta^{\frac12}\delta''u\|^2+\|\eta^{\frac12}D''u\|^2-\|\eta^{\frac12}\delta'u\|^2 &= (\eta[ic(F),\Lambda]\,u,u)+((d''\eta)\,\delta''u,u) \\ &\quad-(D''u,(d''\eta)\,u)-((d'\eta)\,\delta'u,u), \end{aligned} \tag{8}$$

donc d'après (7),

$$\begin{aligned} \|\eta^{\frac12}\delta''u\|^2+\|\eta^{\frac12}D''u\|^2 &\geqq (\eta[ic(F),\Lambda]\,u,u)-([id'd''\eta,\Lambda]\,u,u) \\ &\quad+((d''\eta)\,\delta''u,u)+(u,(d''\eta)\,\delta''u). \end{aligned} \tag{9}$$

De plus il est clair que la somme des deux derniers termes de l'inégalité qui précède, à savoir $2\,\mathrm{Re}((d''\eta)\,\delta''u,u)$, est en valeur absolue majorée par

$2\|(d''\eta)\,\delta''u\|\times\|u\|\leqq\|(d''\eta)\,\delta''u\|^2+\|u\|^2$. Si γ majore à la fois $\eta^{\frac{1}{2}}$ et $|d''\eta|$, on déduit donc finalement de (9) l'estimation

$$\begin{aligned}(10)\qquad &(\eta[ic(F),\Lambda]\,u,u)-([id'd''\eta,\Lambda]\,u,u)\\ &\leqq\|\eta^{\frac{1}{2}}\,\delta''u\|^2+\|\eta^{\frac{1}{2}}\,D''u\|^2+\|(d''\eta)\,\delta''u\|^2+\|u\|^2\\ &\leqq 2(\|\gamma\delta''u\|^2+\|\gamma D''u\|^2)+\|u\|^2,\end{aligned}$$

ce qui n'est autre que l'inégalité annoncée.

2.2 *Un prolongement C^∞*

La variéte X étant de Stein, il existe une fonction ϕ régulière, exhaustive, strictement plurisousharmonique sur X telle que les ensembles de sous-niveaux

$$X_c=\{x\in X,\,\phi(x)<c\},$$

soient relativement compacts dans X. Remarquons de plus, comme Ohsawa et Takegoshi, que l'on peut supposer que $Y=s^{-1}(0)$, autrement dit que $\wedge^d ds$ ne s'annule pas sur Y, quitte à se placer dans le complémentaire d'une hypersurface H contenant le lieu des zéros de $\wedge^d ds$, et à effectuer ensuite un prolongement à travers H comme au corollaire 1, ce que les estimations L^2 permettent de faire.

Soit $\pi\colon \mathbb{P}(E)\to X$ le fibré en espaces projectifs des droites du fibré E. La section s définit au dessus de $X\setminus Y$ une section de ce fibré, dont l'image Σ a pour adhérence $\Sigma\cup\pi^{-1}(Y)$, ainsi qu'une section de la restriction à Σ du fibré en droites tautologique $\mathcal{O}_{E^*}(-1)$. On notera $\hat\sigma$ cette restriction, de sorte que si $y\in\Sigma$,

$$\hat\sigma(y)=(y,s\circ\pi(y))\in\mathcal{O}_{E^*}(-1)_y,$$

et l'on notera $\sigma=s^*\hat\sigma$ son image réciproque sur $X\setminus Y$.

Soit alors χ une fonction décroissante de classe C^∞ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\chi=1$ sur $[0,\frac{1}{2}]$, $\chi=0$ sur $[1,+\infty[$, et $|\chi'|\leqq 3$. La variété X étant de Stein, la section $g\wedge(\wedge^d ds)$ de $K_X\otimes L$ sur Y admet un prolongement holomorphe G à X tout entière, et l'on posera

$$\begin{aligned}&G_\varepsilon=\chi(\varepsilon^{-2}|\sigma|^2)\,G\in C^\infty_{n,0}(X\setminus Y,L),\\ &v_\varepsilon D''G_\varepsilon=\varepsilon^{-2}\chi'(\varepsilon^{-2}|\sigma|^2)\,\{\sigma,D\sigma\}\wedge G\in C^\infty_{n,1}(X\setminus Y,L),\end{aligned}$$

où l'on a noté D la connexion de Chern associée sur $X\setminus Y$ à la métrique hermitienne donnée sur $\mathcal{O}_{E^*}(-1)$.

2.3 *Une métrique kählérienne complète sur $X_c\setminus Y$*

Pour être en mesure d'utiliser la théorie de Hodge L^2, nous aurons besoin de disposer sur $X_c\setminus Y$ d'une métrique kählérienne complète, qui sera donnée par une expression de la forme

$$\omega_{\delta,\gamma}=id'd''[-\delta\log(c-\phi)+\gamma\rho(\log|\sigma|^2)+\beta\log(1+|\sigma|^2)]+\beta\Omega,$$

où δ et γ sont des réels strictement positifs, et ρ une fonction de classe C^∞ convexe et croissante sur $\mathbb{R}$.

Lemme 2 *Si* $\pi^*\Omega \leqq ic(\mathcal{O}_{E^*}(-1))$ *sur* $\mathbb{P}(E)$, *on peut choisir la fonction* ρ *de telle sorte que lorsque* $0<\gamma\leqq\delta$, $\omega_{\delta,\gamma}$ *définisse une métrique kählerienne complète sur* $X_c \setminus Y$, *avec*

(11) $$|\{D\sigma,\sigma\}|_{\delta,\gamma} \leqq \beta^{-\frac{1}{2}}|\sigma|(1+|\sigma|^2).$$

Preuve.

● $\omega_{\delta,\gamma}$ *définit une métrique kählérienne*

En effet, la connexion de Chern D de $s^*\mathcal{O}_{E^*}(-1)$ étant hermitienne, l'identité de Schwarz

$$i\{\sigma,\sigma\}\{D\sigma,D\sigma\} \geqq i\{D\sigma,\sigma\}\wedge\{\sigma,D\sigma\}$$

implique la minoration

(12) $$\begin{aligned} id'd''\log(1+|\sigma|^2) &= (1+|\sigma|^2)^{-1} i(\{D\sigma,D\sigma\} - \{is^*c(\mathcal{O}_{E^*}(-1))\,\sigma,\sigma\}) \\ &\quad -(1+|\sigma|^2)^{-2} i\{D\sigma,\sigma\}\wedge\{\sigma,D\sigma\} \\ &\geqq |\sigma|^{-2}(1+|\sigma|^2)^{-2} i\{D\sigma,\sigma\}\wedge\{\sigma,D\sigma\} \\ &\quad -(1+|\sigma|^2)^{-1}\{is^*c(\mathcal{O}_{E^*}(-1))\,\sigma,\sigma\}, \end{aligned}$$

de sorte que l'inégalité $\pi^*\Omega \leqq ic(\mathcal{O}_{E^*}(-1))$ implique que sur $X\setminus Y$

(13) $$\Omega + id'd''\log(1+|\sigma|^2) \geqq 0.$$

Si $\mu = \log|\sigma|^2$, on aura de plus, ρ étant supposée convexe,

(14) $$id'd''(\rho\circ\mu) = (\rho'\circ\mu)\,id'd''\mu + (\rho''\circ\mu)\,id'\mu\wedge d''\mu \geqq (\rho'\circ\mu)\,id'd''\mu.$$

D'après l'équation de Lelong-Poincaré,

$$id'd''\mu + is^*c(\mathcal{O}_{E^*}(-1)) = 0 \qquad \text{sur } X\setminus Y;$$

ϕ étant strictement plurisousharmonique, et X_c relativement compact dans X, il existe donc un réel $m_c>0$ tel que $id'd''\mu \geqq -m_c id'd''\phi$ sur $X_c\setminus Y$. Mais alors, si c_0 est la valeur minimale de ϕ sur X,

(15) $$id'd''\log(c-\phi) \geqq i(c-c_0)^{-1} id'd''\phi,$$

et d'après (13), (14) et (15),

(16) $$\omega_{\delta,\gamma} \geqq [\delta(c-c_0)^{-1} - \gamma m_c\|\rho'\|_\infty]\, id'd''\phi.$$

Si $0<\gamma\leqq\delta$, il suffit donc, ϕ étant strictement plurisousharmonique, que soit vérifiée l'inégalité $\|\rho'\|_\infty < m_c^{-1}(c-c_0)^{-1} = M_c^{-1}$ pour que $\omega_{\delta,\gamma}$ définisse une métrique kählérienne sur $X_c\setminus Y$. (12) implique alors que

(17) $$\omega_{\delta,\gamma} \geqq \beta|\sigma|^{-2}(1+|\sigma|^2)^2 i\{D\sigma,\sigma\}\wedge\{\sigma,D\sigma\},$$

d'où l'estimation (11).

• $\omega_{\delta,\gamma}$ définit une métrique complète

Dans les conditions précédentes, (13) et (14) impliquent que

$$\begin{aligned}\omega_{\delta,\gamma} &\geqq \delta(c-\phi)^{-2} i d'\phi \wedge d''\phi + \gamma(\rho''\circ\mu)\, i d'\mu \wedge d''\mu \\ &\geqq \delta\, i d'(c-\phi)^{-1} \wedge d''(c-\phi)^{-1} + \gamma\, i d'(\tau\circ\mu) \wedge d''(\tau\circ\mu),\end{aligned}$$

où $\tau(t)=\int\limits_0^t \sqrt{\rho''(u)}\,du$. Comme $(c-\phi)^{-1}$ tend vers l'infini à la frontière de X_c, $\omega_{\delta,\gamma}$ est complète au voisinage de cette frontière. Pour qu'elle le soit également le long de Y, il suffit que $\tau\circ\mu$ tende vers l'infini le long de Y, c'est-à-dire que

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \sqrt{\rho''(u)}\,du = +\infty.$$

On pourra, par exemple, poser

$$\rho(u) = \frac{1}{3M_c}(u - \log|u|) \qquad \text{si } u \leqq -1.$$

2.4 *Fonctions auxiliaires*

Introduisons à présent une fonction convexe croissante $\lambda \in C^\infty(\mathbb{R})$, telle que

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqq 0 \\ t-1 & \text{si } t \geqq 2, \end{cases}$$

et $\lambda'' \leqq \frac{2}{3}$. Si μ_ε est un réel strictement positif, on définit une fonction $\eta_\varepsilon \in C^\infty(X \setminus Y, \mathbb{R}^{+*})$ en posant

$$\eta_\varepsilon(x) = \mu_\varepsilon + \lambda(-\log(|\sigma(x)|^2 + \varepsilon^2)).$$

D'après les hypothèses faites sur λ, on a $\eta_\varepsilon(x) = \mu_\varepsilon$ si $|\sigma(x)| \geqq 1$, et comme

(18) $$d''\eta_\varepsilon = -\lambda'(-\log(|\sigma|^2+\varepsilon^2))(|\sigma|^2+\varepsilon^2)^{-1}\{\sigma, D\sigma\},$$

l'inégalité (11) implique que

(19) $$\begin{aligned}(|\sigma|^2+\varepsilon^2)|\, d''\eta_\varepsilon|_{\delta,\gamma} &\leqq \beta^{-\frac{1}{2}} \lambda'(-\log(|\sigma|^2+\varepsilon^2)) \\ &\quad \cdot \frac{|\sigma|}{(|\sigma|^2+\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}}(1+|\sigma|^2) \leqq 2\beta^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

De plus, $\eta_\varepsilon \leqq \mu_\varepsilon + 1$ si $|\sigma|^2 + \varepsilon^2 \geqq e^{-2}$, alors que si $|\sigma|^2 + \varepsilon^2 \leqq e^{-2}$,

(20) $$(|\sigma|^2+\varepsilon^2)\,\eta_\varepsilon \leqq \max_{0 \leqq \tau \leqq e^{-2}} \tau(\mu_\varepsilon - \log\tau - 1) = e^{-2}(\mu_\varepsilon + 1).$$

Si l'on définit la fonction $\gamma_\varepsilon \in C^0(X \setminus Y, \mathbb{R})$ par

(21) $$\gamma_\varepsilon = \max[(\mu_\varepsilon + 1)^{\frac{1}{2}}, \theta_\varepsilon(|\sigma|^2 + \varepsilon^2)^{-\frac{1}{2}}],$$

avec $\theta_\varepsilon = \max(2\beta^{-\frac{1}{2}}, e^{-1}(\mu_\varepsilon + 1)^{\frac{1}{2}})$, les inégalités (19) et (20) impliquent que

(22) $$\gamma_\varepsilon \geqq \max(|d''\eta_\varepsilon|_{\delta,\gamma}, \eta_\varepsilon^{\frac{1}{2}}),$$

ce qui permettra d'utiliser le lemme 1. Il sera de plus utile de remarquer que

$$\frac{|\sigma\gamma_\varepsilon|^2}{1+|\sigma|^2} = \max\left[\frac{|\sigma|^2}{1+|\sigma|^2}(\mu_\varepsilon + 1), \frac{|\sigma|^2}{|\sigma|^2+\varepsilon^2}\frac{\theta_\varepsilon^2}{1+|\sigma|^2}\right]$$

est majoré par $\theta'_\varepsilon = \max(\theta_\varepsilon^2, \mu_\varepsilon + 1) = \max(4\beta^{-1}, \mu_\varepsilon + 1)$.

2.5 Conclusion

Soit $\xi \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ une fonction plurisousharmonique, et posons

$$\phi_{\delta,\gamma} = \xi + \log|\sigma|^{2d} - \delta\log(c - \phi) + \gamma\rho(\log|\sigma|^2) + \beta\log(1 + |\sigma|^2).$$

Cette fonction $\phi_{\delta,\gamma}$ est de classe C^∞ sur $X_c \setminus Y$, et

(23) $$id'd''\phi_{\delta,\gamma} = \omega_{\delta,\gamma} + id'd''\xi + id'd''\log|\sigma|^{2d} - \beta\Omega.$$

Le lemme 2 et l'inégalité (22) permettent d'appliquer le lemme 1 au fibré hermitien $F = L$ sur la variété $X_c \setminus Y$ munie de la métrique kählérienne $\omega_{\delta,\gamma}$, pour les fonctions $\phi = \phi_{\delta,\gamma}$, $\gamma = \gamma_\varepsilon$ et $\eta = \eta_\varepsilon$: pour toute forme à support compact $u \in C^\infty_{n,1}(X_c \setminus Y, L)$,

$$\begin{aligned}2(\|\gamma_\varepsilon D''u\|^2_{\phi_{\delta,\gamma}} + \|\gamma_\varepsilon \delta''_{\phi_{\delta,\gamma}} u\|^2_{\phi_{\delta,\gamma}}) \geqq &([\eta_\varepsilon(ic(L) + id'd''\phi_{\delta,\gamma}, \Lambda_{\delta,\gamma}]u, u)_{\phi_{\delta,\gamma}} \\ &-([id'd''\eta_\varepsilon, \Lambda_{\delta,\gamma}]u, u)_{\phi_{\delta,\gamma}} - \|u\|^2_{\phi_{\delta,\gamma}},\end{aligned}$$

donc en vertu de (23), et du fait que sur les formes de bidegré $(n, 1)$, $[\omega_{\delta,\gamma}, \Lambda_{\delta,\gamma}] = \mathrm{Id}$,

(24) $$\begin{aligned}2(\|\gamma_\varepsilon D''u\|^2_{\phi_{\delta,\gamma}} + \|\gamma_\varepsilon \delta''_{\phi_{\delta,\gamma}} u\|^2_{\phi_{\delta,\gamma}}) \geqq &((\eta_\varepsilon - 1)u, u)_{\phi_{\delta,\gamma}} - ([id'd''\eta_\varepsilon, \Lambda_{\delta,\gamma}]u, u)_{\phi_{\delta,\gamma}} \\ &+([\eta_\varepsilon(ic(L) + id'd''\xi - \beta\Omega + id'd''\log|\sigma|^{2d}), \Lambda_{\delta,\gamma}]u, u)_{\phi_{\delta,\gamma}}.\end{aligned}$$

Commençons par estimer le second terme du membre de droite de cette inégalité. En appliquant l'opérateur id' à l'identité (18), et en posant $\tau = |\sigma|^2 + \varepsilon^2$, on obtient l'expression

$$\begin{aligned}id'd''\eta_\varepsilon = &[\lambda'(-\log\tau) + \lambda''(-\log\tau)]\,\tau^{\frac{1}{2}}\, i\{D\sigma, \sigma\} \wedge \{\sigma, D\sigma\} \\ &-\lambda'(-\log\tau)\,\tau^{-1} i(\{D\sigma, D\sigma\} + \{\sigma, s^*c(\mathcal{O}_{E^*}(-1))\sigma\}),\end{aligned}$$

ce dont l'identité de Schwarz $i\{D\sigma, \sigma\} \wedge \{\sigma, D\sigma\} \leqq (\tau - \varepsilon^2)\, i\{D\sigma, D\sigma\}$ permet de déduire, λ étant croissante, que

$$\begin{aligned}id'd''\eta_\varepsilon \leqq &\tau^{-2}[-\varepsilon^{-2}(\tau - \varepsilon^2)^{-1}\lambda'(-\log\tau) + \lambda''(-\log\tau)]\, i\{D\sigma, \sigma\} \wedge \{\sigma, D\sigma\} \\ &+\tau^{-1}\lambda'(-\log\tau)\{is^*c(\mathcal{O}_{E^*}(-1))\sigma, \sigma\}.\end{aligned}$$

Les propriétés de la fonction λ vont nous permettre d'estimer chacun des termes du membre de droite de cette inégalité. Tout d'abord, comme $0 \leqq \lambda' \leqq 1$, et $\pi^* \Omega \geqq ic(\mathcal{O}_{E^*}(-1))$, on a

$$\tau^{-1} \lambda'(-\log \tau) \{is^* c(\mathcal{O}_{E^*}(-1)) \sigma, \sigma\} \leqq \Omega. \tag{25}$$

D'autre part, $\lambda''(-\log \tau)$ étant majorée par $\frac{2}{3}$, et nulle si $\tau \geqq 1$ ou $\tau \leqq e^{-2}$, l'inégalité (17) implique

$$\begin{aligned} \tau^{-2} \lambda''(-\log \tau)\, i\{D\sigma, \sigma\} \wedge \{\sigma, D\sigma\} &\leqq \lambda''(-\log \tau)\, \tau^{-2}(\tau - \varepsilon^2) \\ &\quad \cdot (1 + \tau - \varepsilon^2)^2 \beta^{-1} \omega_{\delta,\gamma} \\ &\leqq \frac{8e^4}{3} \beta^{-1} \omega_{\delta,\gamma}. \end{aligned} \tag{26}$$

De la même façon, comme $\lambda'(-\log \tau) = 1$ si $\tau \leqq e^{-2}$, et $0 \leqq \lambda' \leqq 1$,

$$\begin{aligned} &[1 - \lambda'(-\log \tau)]\, \varepsilon^2 \tau^{-2} (\tau - \varepsilon^2)^{-1} i\{D\sigma, \sigma\} \wedge \{\sigma, D\sigma\} \\ &\leqq [1 - \lambda'(-\log \tau)]\, \varepsilon^2 \left(1 + \frac{1 - \varepsilon^2}{\tau}\right)^2 \beta^{-1} \omega_{\delta,\gamma} \\ &\leqq \varepsilon^2 (1 + e^2)^2 \beta^{-1} \omega_{\delta,\gamma}. \end{aligned} \tag{27}$$

Si l'on suppose

$$\mu_\varepsilon \geqq 1 + \left[\frac{8e^4}{3} + \varepsilon^2 (1 + e^2)^2\right] \beta^{-1},$$

les inégalités (25), (26) et (27) permettent de déduire de (24) que

$$\begin{aligned} &2(\|\gamma_\varepsilon D'' u\|^2_{\phi_{\delta,\gamma}} + \|\gamma_\varepsilon \delta''_{\phi_{\delta,\gamma}} u\|^2_{\phi_{\delta,\gamma}}) \\ &\geqq ([\varepsilon^2 |\sigma|^{-2} (|\sigma|^2 + \varepsilon^2)^{-2} i\{D\sigma, \sigma\} \wedge \{\sigma, D\sigma\}, \Lambda_{\delta,\gamma}]\, u, u)_{\phi_{\delta,\gamma}} \\ &\quad + ([\eta_\varepsilon (ic(L) - \beta\Omega - i\, ds^* c(\mathcal{O}_{E^*}(-1))) - \Omega, \Lambda_{\delta,\gamma}]\, u, u)_{\phi_{\delta,\gamma}}. \end{aligned}$$

Mais par hypothèse, $ic(L) - \beta\Omega - i\,ds^* c(\mathcal{O}_{E^*}(-1)) \geqq (d\alpha - \beta)\, \Omega$ et Ω est positive, de sorte que si l'on suppose $d\alpha > \beta$, ce que l'on a loisir de faire, et $\mu_\varepsilon (d\alpha - \beta) \geqq 1$, le dernier terme du membre de droite de l'inégalité précédente est positif. Dans ces conditions, on obtient pour toute forme $u \in C^\infty_{n,1}(X_c \setminus Y, L)$ la minoration

$$\begin{aligned} &2(\|\gamma_\varepsilon D'' u\|^2_{\phi_{\delta,\gamma}} + \|\gamma_\varepsilon \delta''_{\phi_{\delta,\gamma}} u\|^2_{\phi_{\delta,\gamma}}) \\ &\geqq ([\varepsilon^2 |\sigma|^{-2} (|\sigma|^2 + \varepsilon^2)^{-2} i\{D\sigma, \sigma\} \wedge \{\sigma, D\sigma\}, \Lambda_{\delta,\gamma}]\, u, u)_{\phi_{\delta,\gamma}}. \end{aligned} \tag{28}$$

Rappelons que si $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ est une base locale de $T^*(X_c \setminus Y)$, orthonormée relativement à $\omega_{\delta,\gamma}$, si $u = \sum_k u_k (\zeta_1 \wedge \ldots \wedge \zeta_n) \wedge \overline{\zeta_k}$ est une forme de type $(n, 1)$, et $\theta = i \sum_j \theta_j \zeta_j \wedge \overline{\zeta_j}$, où $\theta_j \in \mathbb{R}$, une $(1, 1)$-forme réelle et diagonale relativement à $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, on a

$$([\theta, \Lambda_{\delta,\gamma}]\, u, u) = \sum_k \theta_k |u_k|^2.$$

Il est facile d'en déduire, en utilisant l'inégalité de Schwarz et l'expression de v_ε, que pour toute forme $u \in C^\infty_{n,1}(X_c \setminus Y, L)$,

$$\Big|\int_{X_c\setminus Y} e^{-\phi_{\delta,\gamma}}\{v_\varepsilon, *u\}\Big|^2$$
$$\leqq \int_{X_c \cap \operatorname{supp}\chi'(\varepsilon^{-2}|\sigma|^2)} e^{-\phi_{\delta,\gamma}}|\sigma|^2 |G|^2_{\delta,\gamma}\, dV_{\delta,\gamma}$$
$$\cdot (\varepsilon^{-4}|\sigma|^{-2}\chi'(\varepsilon^{-2}|\sigma|^2)\, i\{D\sigma,\sigma\}\wedge\{\sigma, D\sigma\}, \Lambda_{\delta,\gamma}]\, u, u)_{\phi_{\delta,\gamma}},$$

où $dV_{\delta,\gamma}$ est l'élément de volume riemannien sur $X_c \setminus Y$ associé à la métrique $\omega_{\delta,\gamma}$. Comme sur le support de $\chi'(\varepsilon^{-2}|\sigma|^2)$, on a $(|\sigma|^2+\varepsilon^2) \leqq 2\varepsilon^2$, l'inégalité (29) implique alors que

$$\Big|\int_{X_c\setminus Y} e^{-\phi_{\delta,\gamma}}\{v_\varepsilon, *u\}\Big|^2 \leqq C(c,\varepsilon,\delta,\gamma)(\|\gamma_\varepsilon D''u\|^2_{\phi_{\delta,\gamma}} + \|\gamma_\varepsilon \delta''_{\phi_{\delta,\gamma}} u\|^2_{\phi_{\delta,\gamma}}),$$

avec, puisqu'on a supposé $\chi' \leqq 3$,

$$C(c,\varepsilon,\delta,\gamma) = 72\varepsilon^{-2} \int_{X_c\cap \operatorname{supp}\chi'(\varepsilon^{-2}|\sigma|^2)} e^{-\phi_{\delta,\gamma}}|\sigma|^2|G|^2_{\delta,\gamma}\, dV_{\delta,\gamma}.$$

Remarquons que l'expression $|G|^2_{\delta,\gamma}\, dV_{\delta,\gamma}$ est indépendante de la métrique utilisée sur $X_c \setminus Y$: on pourra donc la remplacer par l'expression $|G|^2 dV$ associée à une métrique hermitienne fixée sur X, restreinte en l'occurence à $X_c \setminus Y$.

● *Estimation de $C(c, \varepsilon, \delta, \gamma)$*

Pour estimer la constante $C(c, \varepsilon, \delta, \gamma)$, il sera commode d'utiliser l'existence d'une rétraction holomorphe r d'un voisinage tubulaire U de Y, sur Y (cf. par exemple [De1]). On peut alors supposer que ε est suffisamment petit pour que, si l'on note Δ_ε le disque fermé des nombres complexes de module inférieur à ε, l'on ait

$$|\sigma|^{-1}(\Delta_\varepsilon)\cap X_c \subset r^{-1}(Y\cap X_{c+1}). \tag{29}$$

Munissons E d'une métrique hermitienne telle que $|s| \leqq \kappa|\sigma|$, avec $\kappa > 0$: $L \otimes (\det E)^{-1}$ est alors muni d'une métrique hermitienne, et l'on peut supposer ε suffisamment petit pour que, si $y \in X_c \cap \operatorname{supp}\chi'(\varepsilon^{-2}|\sigma|^2)$, l'on ait

$$e^{-\xi(y)}|G(y)|^2 \leqq e^{-\xi(r(y))}|\wedge^d ds(r(y))|^2(|g(r(y))|^2+\alpha_c), \tag{30}$$

où α_c est un réel strictement positif donné. Le théorème de Fubini implique alors, en vertu de (30) et (31), que

$$C(c,\varepsilon,\delta,\gamma) \leqq 72(1+o(\varepsilon))\,\varepsilon^{-2}\int_{Y\cap X_{c+1}} e^{-\xi(x)}(|g(x)|^2+\alpha_c)\, dV_Y$$
$$\cdot \int_{r^{-1}(x)\cap\operatorname{supp}\chi'(\varepsilon^{-2}|\sigma|^2)} e^{\delta\log(c-\phi)+\gamma\rho(\log|\sigma|^2)}|\sigma|^{2-2d}|\wedge^d ds\circ r|^2\, dV_{r^{-1}(x)},$$

où dV_Y et $dV_{r^{-1}}(x)$ sont les éléments de volume induits sur Y et sur les fibres de r, puisque sur X_c, au voisinage de Y, leur produit s'identifie à ε près à l'élément dV_X.

Si c et ε sont fixés, on peut supposer δ et γ suffisamment petits pour que sur $X_c \cap \operatorname{supp} \chi'(\varepsilon^{-2}|\sigma|^2)$,

$$e^{\delta \log(c-\phi)+\gamma\rho(\log|\sigma|^2)} \leqq 2.$$

De plus, l'hypothèse $|s| \leqq \kappa|\sigma|$ implique que

$$\begin{aligned} I_c(x) &= \int_{r^{-1}(x)\cap \operatorname{supp}\chi'(\varepsilon^{-2}|\sigma|^2)} |\sigma|^{2-2d} |\wedge^d ds \circ r|^2 \, dV_{r^{-1}(x)} \\ &\leqq \kappa^{2d-2} \int_{r^{-1}(x)\cap |s|^{-1}(\Delta_{\kappa\varepsilon})} |s|^{2-2d} |\wedge^d ds\circ r|^2 \, dV_{r^{-1}(x)}. \end{aligned}$$

Or $|\wedge^d ds \circ r|^2$ s'identifie à ε près ou jacobien de la transformation des coordonnées transverses sur les fibres de r, en celles données par les composantes de s sur ces fibres (qui constituent bien un système de coordonnées au voisinage de y, dans la mesure où s est supposée transverse sur Y). Par conséquent, si ε est assez petit,

$$I_c(x) \leqq 2\kappa^{2d-2} \int_{z\in\mathbb{C}^d, |z|\leqq\kappa\varepsilon} |z|^{2-2d} dV(z) = 2\kappa^{2d}\mu(d)\,\varepsilon^2,$$

où $\mu(d) = \int_{z\in\mathbb{C}^d, |z|\leqq 1} |z|^{2-2d} dV(z)$. Si α_c est supposé assez petit pour que

$$\alpha_c \int_{Y\cap X_{c+1}} dV_Y \leqq 2^{-c},$$

on obtient donc finalement, pour $\varepsilon \leqq \varepsilon(c)$ et $0 < \gamma \leqq \delta \leqq \delta(c, \varepsilon)$ suffisamment petits,

$$C(c, \varepsilon, \delta, \gamma) \leqq C(c) = 144\kappa^d \mu(d) \left[i^{(n-d)^2} \int_{Y\cap X_{c+1}} e^{-\xi}\{g, g\} + 2^{-c} \right],$$

et l'on a démontré que pour toute forme $u \in C^\infty_{n,1}(X_c \setminus Y, L)$,

$$\left| \int_{X_c\setminus Y} e^{-\phi_{\delta,\gamma}} \{v_\varepsilon, *u\} \right|^2 \leqq C(c)\,(\|\gamma_\varepsilon D'' u\|^2_{\phi_{\delta,\gamma}} + \|\gamma_\varepsilon \delta''_{\phi_{\delta,\gamma}} u\|^2_{\phi_{\delta,\gamma}}).$$

● *Existence d'un prolongement*

Il existe donc une forme $w \in L^2_{n,0}(X_c \setminus Y, L, \phi_{\delta,\gamma})$, d'après les théorèmes usuels de prolongement L^2, telle que $D''(\gamma_\varepsilon w) = v_\varepsilon$, $\gamma_\varepsilon \in C^\infty_{n,0}(X_c \setminus Y, L)$, et

$$i^{n^2} \int_{X_c\setminus Y} e^{-\phi_{\delta,\gamma}} \{w, w\} \leqq C(c).$$

Rappelons brièvement l'argument: D'' et $\delta''_{\phi_{\delta,\gamma}}$ sont des opérateurs non bornés fermés sur $L^2_{n,1}(X_c \setminus Y, L, \phi_{\delta,\gamma})$, à domaine dense, et toute forme $u \in \operatorname{Dom} \delta''_{\phi_{\delta,\gamma}}$ peut s'écrire $u = u_1 + u_2$, avec $u_1 \in \operatorname{Ker} D''$, $u_2 \in (\operatorname{Ker} D'')^\perp = \overline{\operatorname{Im} \delta''_{\phi_{\delta,\gamma}}} \subset \operatorname{Ker} \delta''_{\phi_{\delta,\gamma}}$. On a donc, comme $v_\varepsilon \in \operatorname{Ker} D''$,

$$|(v_\varepsilon, u)_{\phi_{\delta,\gamma}}|^2 = |(v_\varepsilon, u_1)_{\phi_{\delta,\gamma}}|^2 \leqq C(c)\, \|\gamma_\varepsilon \delta''_{\phi_{\delta,\gamma}} u_1\|^2_{\phi_{\delta,\gamma}} = C(c)\, \|\gamma_\varepsilon \delta''_{\phi_{\delta,\gamma}} u\|^2_{\phi_{\delta,\gamma}}.$$

La forme linéaire $\gamma_\varepsilon \delta''_{\phi_{\delta,\gamma}} u \in \gamma_\varepsilon \delta''_{\phi_{\delta,\gamma}} \operatorname{Dom} \delta''_{\phi_{\delta,\gamma}} \mapsto (u, v_\varepsilon)_{\phi_{\delta,\gamma}}$ est donc continue, et peut d'après le théorème de Hahn-Banach se prolonger en une forme linéaire continue de même norme sur $L^2_{n,0}(X_c\setminus Y, L, \phi_{\delta,\gamma})$: le théorème de représentation de Riesz implique en conséquence l'existence d'une forme $w\in L^2_{n,0}(X_c\setminus Y, L, \phi_{\delta,\gamma})$ telle que $\|w\|^2_{\phi_{\delta,\gamma}}\leqq C(c)$, et

$$\forall u\in \mathrm{Dom}\, \delta''_{\phi_{\delta,\gamma}}, \qquad (\gamma_\varepsilon \delta''_{\phi_{\delta,\gamma}} u, w)_{\phi_{\delta,\gamma}} = (u, v_\varepsilon)_{\phi_{\delta,\gamma}},$$

c'est-à-dire, γ_ε étant réelle, $D''(\gamma_\varepsilon w) = v_\varepsilon$.

On peut de plus supposer que $\gamma_\varepsilon \omega\in (\mathrm{Ker}\, D'')^\perp$, ce qui implique, Δ'' étant elliptique, que $\gamma_\varepsilon \omega\in C^\infty_{n,0}(X_c\setminus Y, L)$: c'est alors la solution de norme minimale de l'équation précédente.

Si l'on fait tendre δ et γ vers zéro, on peut extraire des formes w obtenues comme précédemment une sous-suite faiblement convergente, d'où l'existence d'une forme $\gamma_\varepsilon w_{c,\varepsilon}\in C^\infty_{n,0}(X_c\setminus Y, L)$ telle que $D''(\gamma_\varepsilon w_{c,\varepsilon}) = v_\varepsilon$, et

$$i^{n^2}\int_{X_c\setminus Y} e^{-\xi}\frac{\{w_{c,\varepsilon}, w_{c,\varepsilon}\}}{|\sigma|^{2d}(1+|\sigma|^2)^\beta}\leqq 144(1+o(\varepsilon))\,\kappa^d\mu(d)\Big[i^{(n-d)^2}\int_{Y\cap X_c} e^{-\xi}\{g,g\}+2^{-c}\Big].$$

La différence $G_\varepsilon-\gamma_\varepsilon w_{c,\varepsilon}$ est donc une (0, 1)-forme D''-fermée sur $X_c\setminus Y$ et localement L^2 au voisinage de Y, donc se prolonge en une forme D''-fermée $G_{c,\varepsilon}$ sur X_c [De 1, lemme 6.9] à valeurs dans $K_X\otimes L$. De plus, comme $|\sigma|^{-2d}$ n'est pas localement intégrable sur Y, la convergence de l'intégrale de gauche de l'inégalité précédente implique que $w_{c,\varepsilon}$ se prolonge par zéro sur $Y\cap X_c$, donc que

$$G_{c,\varepsilon|Y\cap X_c} = g\wedge(\wedge^d ds).$$

Enfin,

$$i^{n^2}\int_{X_c} e^{-\xi}\frac{\{G_{c,\varepsilon}, G_{c,\varepsilon}\}}{|\sigma|^{2d-2}(1+|\sigma|^2)^{1+\beta}}\leqq 2i^{n^2}\Bigg[\int_{X_c} e^{-\xi}\frac{\{G_\varepsilon, G_\varepsilon\}}{|\sigma|^{2d-2}(1+|\sigma|^2)^{1+\beta}} + \int_{X_c} e^{-\xi}\frac{|\sigma\gamma_\varepsilon|^2}{1+|\sigma|^2}\,\frac{\{w_{c,\varepsilon}, w_{c,\varepsilon}\}}{|\sigma|^{2d}(1+|\sigma|^2)^\beta}\Bigg],$$

où, comme on l'a montré plus haut,

$$\frac{|\sigma\gamma_\varepsilon|^2}{1+|\sigma|^2}\leqq \theta'_\varepsilon,$$

avec $\theta'_\varepsilon = \max(4\beta^{-1}, \mu_\varepsilon+1)$.

Reste à faire tendre c vers $+\infty$, et à extraire des $G_{c,\varepsilon}$ une sous-suite faiblement convergente pour obtenir l'existence d'une forme $G\in H^0(X, K_X\otimes L)$, telle que $G|_Y = g\wedge(\wedge^d ds)$, et

$$i^{n^2}\int_X e^{-\xi}\frac{\{G,G\}}{|\sigma|^{2d-2}(1+|\sigma|^2)^{1+\beta}}\leqq M\, i^{(n-d)^2}\int_Y e^{-\xi}\{g,g\},$$

où $M = 288\,\kappa^d\mu(d)\,\theta'_0$ ne dépend que de d, α, β et κ.

Remarque 4 Si l'on considère une forme g sur Y de bidegré (n, q) avec $q>0$, la seule modification à apporter à ce qui précède provient du fait que sur les formes de type $(n, q+1)$, $[\omega_{\delta,\gamma}, \Lambda_{\delta,\gamma}]=(q+1)\,\mathrm{Id}$: il faut donc simplement supposer que

$$\mu_\varepsilon \geqq \frac{1}{q+1}+\left[\frac{8e^4}{3}+\varepsilon^2(1+e^2)^2\right]\beta^{-1}.$$

Notons également que la régularité des formes $\gamma_\varepsilon w$ obtenues comme précédemment ne peut se déduire, comme on aurait pu le faire pour $q=0$, de l'ellipticité de D'', mais que c'est bien l'ellipticité de l'opérateur Δ'' qui permet de conclure.

3 Prolongement des sections d'un fibré hermitien

Plutôt que de se donner une métrique sur le fibré en droites tautologique $\mathcal{O}_{E^*}(-1)$ sur $\mathbb{P}(E)$, dont la courbure vérifie relativement à celle du fibré en droites L des hypothèses qui sont, comme le fait apparaître le corollaire 1, essentiellement algébriques, on peut se contenter d'une métrique sur le fibré E lui-même, avec des conditions de positivité au sens de Griffiths, a priori moins commodes. On peut par exemple démontrer, preseque exactement comme le théorème 1, mais en utilisant s à la place de σ, le résultat suivant:

Théorème 2 *Soient X une variété de Stein de dimension n, E un fibré hermitien de rang d sur X, s une section holomorphe de E génériquement transverse à la section nulle, et*

$$Y=\{x\in X, s(x)=0, \wedge^d ds(x)\neq 0\}.$$

Soit Ω une $(1,1)$-forme positive fermée sur X telle que

$$\Omega\otimes \mathrm{Id}_E \geqq_G ic(E),$$

et L un fibré en droites hermitien sur X tel qu'il existe un réel strictement positif α pour lequel

$$ic(L)\geqq \alpha\Omega - i d'd'' \log|s|^{2d}.$$

Alors pour toute fonction ξ plurisousharmonique sur X, tout réel strictement positif β et toute section holomorphe g sur Y de $K_Y\otimes L\otimes(\det E)^{-1}$ telle que

$$i^{(n-d)2}\int_Y e^{-\xi}\{g,g\}<+\infty,$$

il existe une section holomorphe G sur X de $K_X\otimes L$, telle que $G|_Y=g\wedge(\wedge^d ds)$, et

$$i^{n^2}\int_X \frac{e^{-\xi}\{G,G\}}{|s|^{2d-2}(1+|s|^2)^{1+\beta}} \leqq M\, i^{(n-d)^2}\int_Y e^{-\xi}\{g,g\},$$

où M est une constante numérique ne dépendant que de d, α et β.

Rappelons qu'un fibré hermitien E est dit semi-positif au sens de Griffiths, $E\geqq_G 0$, si la courbure de sa connexion de Chern définit sur les tenseurs décomposables de chaque fibre de $TX\otimes E$ une forme hermitienne positive: si

$(e_1, \ldots, e_d)$ est un repère orthonormé local de E sur un ouvert Ω de X muni de coordonnées $(z_1, \ldots, z_n)$, ce tenseur de courbure peut s'écrire

$$c(E) = \sum c_{jk\lambda\mu}\, dz_j \wedge d\bar{z}_k \otimes e_\lambda^* \otimes e_\mu,$$

avec $\bar{c}_{jk\lambda\mu} = c_{kj\mu\lambda}$; la forme hermitienne associée n'est autre que

$$\Theta_E = \sum c_{jk\lambda\mu} (dz_j \otimes e_\lambda^*) \otimes \overline{(dz_k \otimes e_\mu^*)}.$$

Remarque 5 On pourra prendre $\Omega = 0$ si E est semi-négatif au sens de Griffiths, et $\Omega = ic(\det E)$, en vertu de l'inégalité de Schwarz, si E est semi-positif. Dans les deux cas, on peut ainsi se ramener à des conditions portant uniquement sur les courbures des fibrés hermitien E et L: en effet, il est facile de vérifier que sur $X \setminus s^{-1}(0)$,

$$id'd'' \log |s|^{2d} \geqq -d \frac{\{ic(E)\, s, s\}}{|s|^2},$$

de sorte que, d'une part, $id'd'' \log |s|^{2d}$ est localement minorée sur X et, d'autre part, la condition du théorème résulte de l'inégalité

$$ic(L) \otimes \mathrm{Id}_E \geqq_G \alpha \Omega \otimes \mathrm{Id}_E + d\, ic(E).$$

Remerciements. Je tiens, enfin, à remercier Jean Pierre Demaily de m'avoir proposé ce travail, et pour ses remarques toujours très pertinentes.

Références

[A-V] Andreotti, A., Vesentini, E.: Carleman estimates for the Laplace-Beltrami equation on complex manifolds. Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. **25**, 313–362 (1965)

[De 1] Demailly, J.P.: Scindage holomorphe d'un morphisme de fibrés vectoriels semi-positifs avec estimations L^2. In: Lelong, P., Skoda, H. (eds.) Seminaire Amiens 1980/81 et Colloque de Wimereux 1981. (Lects. Notes Math., vol. 919, pp. 77–107) Berlin Heidelberg New York: Springer 1982

[De 2] Demailly, J.P.: Estimations L^2 pour l'opérateur d'' d'un fibré vectoriel semi-positif au-dessus d'une variété kählérienne complète. Ann. Sci. Ec. Norm. Supér. **15**, 457–511 (1982)

[D-F] Donnelly, H., Fefferman, C.: L^2-cohomology and index theorem for the Bergman metric. Ann. Math. **118**, 593–618 (1983)

[D-X] Donnelly, H., Xavier, F.: On the differential form spectrum of negatively curved Riemann manifolds. Am. Math. J. **106**, 169–185 (1984)

[G-H] Griffiths, P., Harris, J.: Principles of algebraic geometry. New York: Wiley 1978

[Hö] Hörmander, L.: An introduction to complex analysis in several variables. Princeton: Van Nostrand 1966

[LP] Le Potier, J.: Annulation de la cohomologie à valeurs dans un fibré vectoriel holomorphe positif de rang quelconque. Math. Ann. **218**, 35–53 (1975)

[O 1] Ohsawa, T.: Vanishing theorems on complete Kähler manifolds. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **20**, 21–38 (1984)

[O 2] Ohsawa, T.: On the extension of holomorphic functions 2. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **24**, 265–275 (1988)

[O-T] Ohsawa, T., Takegoshi, K.: On the extension of L^2 holomorphic functions. Math. Z. **195**, 197–204 (1987)