Comment. Math. Helvetici **52** (1977) 177–184 Birkhäuser Verlag, Basel

# Ueber die Darstellungen der Automorphismengruppe einer Riemannschen Fläche in den Eigenräumen des Laplace-Operators

HEINZ HUBER (Basel)

## 1

1.1 Es sei $\mathfrak{F}$ eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g > 1$. Sie besitzt genau eine Metrik konstanter Krümmung $-1$, die mit ihrer konformen Struktur verträglich ist. Wir betrachten die Eigenräume

$$\mathscr{E}_\lambda = \{u \in C^2(\mathfrak{F}) \mid \Delta_{\mathfrak{F}} u + \lambda u = 0\}$$

des zugehörigen Laplace–Beltrami-Operators $\Delta_{\mathfrak{F}}$, wobei komplex-wertige Funktionen $u$ zugelassen werden. Die Eigenwertmenge $\{\lambda \in \mathbf{C} \mid \dim \mathscr{E}_\lambda > 0\}$ ist unendlich, diskret und reell; $\dim \mathscr{E}_0 = 1$, $\dim \mathscr{E}_\lambda = 0$ für $\lambda < 0$.

Da jeder konforme Automorphismus $\varphi$ von $\mathfrak{F}$ zugleich eine Isometrie ist, so gilt

$$\Delta_{\mathfrak{F}}(u \circ \varphi) = (\Delta_{\mathfrak{F}} u) \circ \varphi,$$

und daher ist

$$u \to u \circ \varphi, \qquad u \in \mathscr{E}_\lambda,$$

eine bijektive lineare Abbildung von $\mathscr{E}_\lambda$ auf sich. Wenn also $\lambda$ ein Eigenwert und $U$ ein Spaltenvektor ist, dessen Komponenten

$$u_1, \ldots, u_d, \qquad d = \dim \mathscr{E}_\lambda < \infty,$$

eine Basis von $\mathscr{E}_\lambda$ bilden, so gilt

$$U \circ \varphi = R_\varphi U$$

mit einer regulären $d \times d$-Matrix $R_\varphi$.

Die Gruppe $\Phi$ aller konformen Automorphismen von $\mathfrak{F}$ ist endlich ([3] p. 159–165). Ist $\Phi'$ eine beliebige Untergruppe, so ist die Abbildung

$$\varphi \to R_\varphi, \qquad \varphi \in \Phi', \tag{1}$$

eine Darstellung von $\Phi'$—die zur Basis $U$ von $\mathscr{E}_\lambda$ gehörige Darstellung. Wir interessieren uns für ihre irreduziblen Komponenten. Sei

$$\varphi \to M_\varphi, \qquad \varphi \in \Phi', \tag{2}$$

eine vorgegebene irreduzible unitäre Darstellung vom Grade $n$ und $\nu(\lambda)$ die Anzahl derjenigen Komponenten der Darstellung (1), welche aequivalent zu (2) sind. Dann stellt sich die Frage, ob es immer Eigenwerte $\lambda$ mit $\nu(\lambda) \geq 1$ gibt. Für die Lösung dieses Problems ist es entscheidend, dass $\nu(\lambda)$ als Dimension eines gewissen Vektorraumes interpretiert werden kann. Wir betrachten

$$\mathscr{S}_\lambda = \left\{ V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix} \middle| v_i \in \mathscr{E}_\lambda, \qquad V \circ \varphi = M_\varphi V \qquad \forall \varphi \in \Phi' \right\} \tag{3}$$

und zeigen:

$$\nu(\lambda) = \dim \mathscr{S}_\lambda. \tag{A}$$

In der Tat: Wenn $\nu(\lambda) = \nu \geq 1$, so besitzt $\mathscr{E}_\lambda$ eine solche Basis $U$, dass die zugehörige Darstellung (1) die Gestalt

$$R_\varphi = M_\varphi \oplus \cdots \oplus M_\varphi \oplus \cdots \quad (\nu \text{ mal})$$

hat. Setzen wir dann

$$V_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{pmatrix}, \qquad V_2 = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{2n} \end{pmatrix}, \ldots, V_\nu = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{\nu n} \end{pmatrix},$$

so sind $V_1, \ldots, V_\nu \in \mathscr{S}_\lambda$ und linear unabhängig: $\dim \mathscr{S}_\lambda \geq \nu(\lambda)$. Sind andererseits $V_1, \ldots, V_m$ linear unabhängige Spalten in $\mathscr{S}_\lambda$, so ist gewiss $\nu(\lambda) \geq m$, wenn ihre

$mn$ Komponenten linear unabhängige Funktionen sind. Wir benötigen also folgendes

LEMMA. *Sind* $V_1, \ldots, V_m \in \mathcal{S}_\lambda$ *linear unabhängig und gilt*

$$C_1^* V_1 + \cdots + C_m^* V_m = 0, \qquad C_i \in \mathscr{C}, \tag{4}$$

*so folgt*: $C_1 = \cdots = C_m = 0$. (*Dabei ist* $\mathscr{C}$ *der Raum der Spaltenvektoren mit* $n$ *konstanten komplexen Komponenten; der Stern bezeichnet den Uebergang zur konjugiert-transponierten Matrix.*)

*Beweis.* Wir betrachten die Funktion

$$f = \sum_{i=1}^{m} C_i^* V_i$$

mit zunächst beliebigen $C_i \in \mathscr{C}$. Da die Darstellung (2) unitär ist, gilt für alle $\varphi \in \Phi'$:

$$f \circ \varphi^{-1} = \sum_{i=1}^{m} C_i^*(V_i \circ \varphi^{-1}) = \sum_{i=1}^{m} C_i^* M_\varphi^{-1} V_i = \sum_{i=1}^{m} (M_\varphi C_i)^* V_i.$$

Daraus folgt aber:

1.2 Ist $\{C_1, \ldots, C_m\}$ eine Lösung von (4), so ist $\{M_\varphi C_1, \ldots, M_\varphi C_m\}$ für jedes $\varphi \in \Phi'$ ebenfalls eine Lösung.

1.3 Jetzt beweisen wir das Lemma für $m = 1$. *Sei*

$$\mathscr{C}' = \{C_1 \in \mathscr{C} \mid C_1^* V_1 = 0\}.$$

Wegen 1.2 ist $\mathscr{C}'$ ein invarianter Unterraum von $\mathscr{C}$ bezüglich der irreduziblen Darstellung (2). Daher ist entweder $\mathscr{C}' = \{0\}$ oder $\mathscr{C}' = \mathscr{C}$. Im letzteren Falle wäre aber $V_1 = 0$, entgegen unserer Voraussetzung.

1.4 Wir nehmen nun an, es sei $m \geqslant 2$ und das Lemma sei richtig für $m-1$ an Stelle von $m$. Wir betrachten den Raum $\mathscr{C}'$ derjenigen $C \in \mathscr{C}$, zu denen es mindestens eine Lösung $\{C_1, \ldots, C_m\}$ von (4) mit $C_m = C$ gibt. Wir haben zu zeigen, dass $\mathscr{C}' = \{0\}$. Wegen 1.2 ist $\mathscr{C}'$ invarianter Unterraum von $\mathscr{C}$ bezüglich (2); also ist $\mathscr{C}' = \{0\}$ oder $\mathscr{C}' = \mathscr{C}$. Wir zeigen, dass der zweite Fall nicht eintreten kann. In diesem Falle gibt es wegen der Induktionsvoraussetzung zu jedem $C \in \mathscr{C}$ genau eine Lösung $\{C_1, \ldots, C_m\}$ mit $C_m = C$, und die Abbildungen

$$C \to C_i, \qquad i = 1, \ldots, m-1,$$

sind linear. Somit gibt es $n \times n$-Matrizen $L_1, \ldots, L_{m-1}$ derart, dass gilt: Für jedes $C \in \mathscr{C}$ ist $\{L_1 C, \ldots, L_{m-1} C, C\}$ die einzige Lösung von (4) mit $C_m = C$. Daraus und aus 1.2 folgt:

$$M_\varphi L_i = L_i M_\varphi \qquad \forall \varphi \in \Phi', \qquad i = 1, \ldots, m-1.$$

Dann gibt es aber nach dem Schurschen Lemma komplexe Zahlen $\mu_1, \ldots, \mu_{m-1}$ derart, dass $L_i = \mu_i \times$ Einheitsmatrix. Somit ist $\{\mu_1 C, \ldots, \mu_{m-1} C, C\}$ eine Lösung von (4) für jedes $C \in \mathscr{C}$:

$$C^*(\bar{\mu}_1 V_1 + \cdots + \bar{\mu}_{m-1} V_{m-1} + V_m) = 0.$$

Dann wären aber $V_1, \ldots, V_m$ linear abhängig.

1.5 Auf Grund der Gleichung (A) kann das asymptotische Verhalten von $\sum_{\lambda \leq t} \nu(\lambda)$ mit Hilfe der Uniformisierungstheorie und der Selbergschen Spurformel [2] studiert werden. Wir zeigen in Abschnitt 2:

$$\sum_{\lambda \leq t} \nu(\lambda) \sim \frac{(g-1)n}{\operatorname{Ord} \Phi'} t \quad \text{für} \quad t \to +\infty. \tag{B}$$

Daraus folgt nun insbesondere, dass es tatsächlich unendlich viele Eigenwerte $\lambda$ mit $\nu(\lambda) \geq 1$ gibt! Wenn die Gruppe $\Phi'$ in $h$ Klassen konjugierter Elemente zerfällt, so besitzt sie genau $h$ inaequivalente irreduzible Darstellungen. Ihre Grade seien $n_1, \ldots, n_h$, und es sei $\nu_i(\lambda)$, $1 \leq i \leq h$, die Anzahl der Komponenten von (1), die aequivalent zur $i$-ten Darstellung sind. Dann ist nach (B)

$$\sum_{\lambda \leq t} \nu_i(\lambda) \sim \frac{(g-1)n_i}{\operatorname{Ord} \Phi'} t.$$

Daraus folgt wegen

$$\dim \mathscr{C}_\lambda = \sum_{i=1}^{h} n_i \nu_i(\lambda):$$

$$\sum_{\lambda \leq t} \dim \mathscr{C}_\lambda \sim \frac{g-1}{\operatorname{Ord} \Phi'} \left( \sum_{i=1}^{h} n_i^2 \right) t. \tag{5}$$

Andererseits ist nach Gauss-Bonnet der Inhalt von $\mathfrak{F}$ gleich $4\pi(g-1)$ und daher

$$\sum_{\lambda \leq t} \dim \mathscr{C}_\lambda \sim (g-1)t. \tag{6}$$

Aus (5) und (6) folgt $\operatorname{Ord} \Phi' = \sum_{i=1}^{h} n_i^2$, in Uebereinstimmung mit einem klassischen Satz der Darstellungstheorie endlicher Gruppen.

## 2. Beweis von (B)

2.1 Wir versehen die obere Halbebene

$$H = \{z = x + iy \mid y > 0\}$$

mit der Differentialgeometrie

$$ds = y^{-1}|dz|, \tag{7}$$

welche die konstante Krümmung $-1$ besitzt. Der zugehörige Laplace–Beltramioperator ist

$$\Delta = y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).$$

Da das Geschlecht $g$ von $\mathfrak{F}$ grösser als 1 ist, gibt es eine konforme Ueberlagerungsabbildung $P: H \to \mathfrak{F}$. Die zu $P$ gehörige Deckgruppe $\Gamma$ ist eine Untergruppe der Gruppe $\Theta$ aller konformen Selbstabbildungen von $H$. Da $\Theta$ Untergruppe der Isometriegruppe von (7) ist, können wir mit Hilfe von $P$ die Differentialgeometrie (7) von $H$ auf $\mathfrak{F}$ verpflanzen; das ergibt gerade die in 1.1 charakterisierte Metrik von $\mathfrak{F}$. Für Funktionen $v \in C^2(\mathfrak{F})$ gilt dann

$$(\Delta_{\mathfrak{F}} v) \circ P = \Delta(v \circ P). \tag{8}$$

$\Gamma$ wirkt fixpunktfrei und diskontinuierlich auf $H$ und besitzt einen kompakten Fundamentalbereich $\mathcal{D}_\Gamma$. Nach dem Satze von Gauss–Bonnet gilt

$$A(\mathcal{D}_\Gamma) := \iint_{\mathcal{D}_\Gamma} y^{-2}\, dx\, dy = 4\pi(g-1). \tag{9}$$

2.2 Nun sei $\Gamma_0$ der Normalisator von $\Gamma$ in $\Theta$. Dann gibt es zu jedem $\gamma \in \Gamma_0$ genau ein $\hat{\gamma} \in \Phi$ derart, dass

$$P \circ \gamma = \hat{\gamma} \circ P, \tag{10}$$

und die Abbildung

$$\gamma \to \hat{\gamma}, \qquad \gamma \in \Gamma_0, \tag{11}$$

ist ein Homomorphismus von $\Gamma_0$ auf $\Phi$ mit dem Kern $\Gamma$. (Vergl. dazu [3] p. 159–165). Es sei $\Gamma_0'$ das Urbild von $\Phi'$ unter diesem Homomorphismus. Dann ist

$$[\Gamma_0':\Gamma]=\text{Ord}\,\Phi'<\infty. \tag{12}$$

Also besitzt auch $\Gamma_0'$ einen kompakten Fundamentalbereich $\mathscr{D}_{\Gamma_0'}$, und es gilt:

$$[\Gamma_0':\Gamma]A(\mathscr{D}_{\Gamma_0'})=A(\mathscr{D}_\Gamma). \tag{13}$$

Aus (9), (12) und (13) ergibt sich:

$$A(\mathscr{D}_{\Gamma_0'})=4\pi(g-1)/\text{Ord}\,\Phi'. \tag{14}$$

2.3 Die Abbildung

$$\gamma\to M_{\hat\gamma},\qquad \gamma\in\Gamma_0', \tag{15}$$

ist nun eine unitäre Darstellung von $\Gamma_0'$ vom Grade $n$, welche den Normalteiler $\Gamma$ von $\Gamma_0'$ auf die Einheitsmatrix abbildet. Wir betrachten die zu dieser Darstellung gehörigen Selbergschen Räume

$$\mathscr{S}_\lambda'=\left\{V=\begin{pmatrix}v_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ v_n\end{pmatrix}\,\middle|\, v_i\in C^2(H),\ \Delta v_i+\lambda v_i=0,\ V\circ\gamma=M_{\hat\gamma}V\ \forall\gamma\in\Gamma_0'\ .\right\}$$

Wegen (8) und (10) sieht man sofort, dass

$$V\to V\circ P,\qquad V\in\mathscr{S}_\lambda,$$

eine bijektive lineare Abbildung von $\mathscr{S}_\lambda$ auf $\mathscr{S}_\lambda'$ ist:

$$\dim\mathscr{S}_\lambda'=\dim\mathscr{S}_\lambda. \tag{16}$$

2.4 Wir wollen jetzt auf die unitäre Darstellung (15) die Selbergsche Spurformel anwenden. Dazu haben wir die Klassen konjugierter Elemente von $\Gamma_0'$ zu betrachten: Es sei $\gamma_i\in\Gamma_0'$, $(i=1,\ldots)$, ein volles Repräsentantensystem der primitiven hyperbolischen Klassen; $\gamma_i$ ist innerhalb $\Theta$ konjugiert zu einer Abbildung

$$z\to e^{l_i}z,\qquad l_i>0.$$

$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_f$ sei ein Repräsentantensystem der primitiven elliptischen Klassen von $\Gamma_0'$ (sofern es solche gibt); $m_i$ sei die Ordnung von $\varepsilon_i$. Dann liefert die Selbergsche Spurformel (3.2) in [2] mit

$$h(r) = \exp(-sr^2), \qquad g(u) = \frac{1}{2\sqrt{\pi s}} \exp(-u^2/4s), \qquad s > 0:$$

$$2 \exp(s/4) \sum_{\lambda \geq 0} (\dim \mathcal{S}'_\lambda) \exp(-s\lambda) = F(s) + E(s) + \frac{1}{2\sqrt{\pi s}} H(s), \tag{17}$$

$$F(s) = \frac{A(\mathcal{D}_{\Gamma_0'})n}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} r \operatorname{Tg}(\pi r) \exp(-sr^2)\, dr = \frac{A(\mathcal{D}_{\Gamma_0'})n}{2s} \int_0^\infty \frac{\exp(-sr^2)}{\operatorname{Cos}^2 \pi r}\, dr, \tag{18}$$

$$E(s) = \sum_{i=1}^{f} \sum_{k=1}^{m_i - 1} \frac{\operatorname{Sp}(M_{\varepsilon_i}^k)}{m_i \sin(k\pi/m_i)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-2\pi rk/m_i)}{1 + \exp(-2\pi r)} \exp(-sr^2)\, dr, \tag{19}$$

$$H(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Sp}(M_{\gamma_i}^k) \frac{l_i}{\operatorname{Sin}(kl_i/2)} \exp(-k^2 l_i^2/4s). \tag{20}$$

Die Reihe

$$h(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l_i}{\operatorname{Sin}(kl_i/2)} \exp(-k^2 l_i^2/4s) \tag{21}$$

konvergiert für $s > 0$. Daraus folgt:

$$c = \inf l_i > 0.$$

Daher gilt:

$$\exp(-k^2 l_i^2/4s) \leq [\exp(-c^2/8s)] \cdot [\exp(-k^2 l_i^2/8s)], \qquad i, k \geq 1. \tag{22}$$

Da $M_{\gamma_i}^k$ eine unitäre $n \times n$-Matrix ist, so gilt:

$$|\operatorname{Sp}(M_{\gamma_i}^k| \leq n. \tag{23}$$

Nun ergibt sich aus (20)–(23):

$$|H(s)| \leq n \exp(-c^2/8s)\, h(2s), \qquad s > 0.$$

Daraus folgt

$$H(s) = O(\exp(-c^2/8s)) \quad \text{für} \quad s \downarrow 0. \tag{24}$$

weil $h(s)$ für $s > 0$ monoton wächst.

Wegen $1 \leq k < m_i$ gilt:

$$\lim_{s \downarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-2\pi rk/m_i)}{1+\exp(-2\pi r)} \exp(-sr^2)\, dr = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-2\pi rk/m_i)}{1+\exp(-2\pi r)}\, dr < +\infty.$$

Somit folgt aus (19):

$$E(s) = O(1), \qquad s \downarrow 0. \tag{25}$$

Wegen

$$\lim_{s \downarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{\exp(-sr^2)}{\operatorname{Cos}^2 \pi r}\, dr = \int_0^{\infty} \frac{dr}{\operatorname{Cos}^2 \pi r} = \frac{1}{\pi}$$

folgt endlich aus (18) und (14):

$$F(s) \sim \frac{2(g-1)n}{\operatorname{Ord} \Phi'} \cdot \frac{1}{s}, \qquad s \downarrow 0. \tag{26}$$

Aus (17) und (24)–(26) ergibt sich:

$$\sum_{\lambda \geq 0} (\dim \mathcal{S}'_\lambda) \exp(-s\lambda) \sim \frac{(g-1)n}{\operatorname{Ord} \Phi'} \cdot \frac{1}{s}, \qquad s \downarrow 0.$$

Daraus schliesst man mit Hilfe eines Tauberschen Theorems von Karamata [1]:

$$\sum_{\lambda \leq t} \dim \mathcal{S}'_\lambda \sim \frac{(g-1)n}{\operatorname{Ord} \Phi'}\, t, \qquad t \to +\infty.$$

Damit ist wegen (16) und (A) der Beweis von (B) erbracht.

LITERATUR

[1] KARAMATA, J., *Neuer Beweis und Verallgemeinerung der Tauberschen Sätze, welche die Laplacesche und Stieltjessche Transformation betreffen*, J. reine angew. Math. *164* (1931), 27–39.
[2] SELBERG, A., *Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series*, J. Indian Math. Soc. *20* (1956), 47–87.
[3] WEYL, H., Die Idee der Riemannschen Fläche, (Teubner, Leipzig und Berlin 1913).

*Mathematisches Institut,*
*Rheinsprung* 21, 4000 *Basel*

Eingegangen den 26. August 1976