

## Plongements des variétés de Stein

OTTO FORSTER

### Introduction

D'après un théorème de Remmert-Narasimhan-Bishop ([16], [13], [2]), pour toute variété de Stein  $X$  de dimension  $n$  il existe un plongement  $X \rightarrow \mathbf{C}^{2n+1}$ , c'est-à-dire une application biholomorphe de  $X$  sur une sous-variété analytique fermée de  $\mathbf{C}^{2n+1}$ . Le but de cet article est de démontrer le résultat plus précis suivant: Si  $n \geq 2$ , il existe un plongement  $X \rightarrow \mathbf{C}^{2n}$ , et si  $n \geq 6$ , il existe même un plongement  $X \rightarrow \mathbf{C}^{2n-k}$ , où  $k = [(n-2)/3]$ . Nous démontrerons également une généralisation d'un théorème de Gunning-Narasimhan [8]: Toute variété de Stein de dimension  $n$  peut être immergée holomorphiquement dans  $\mathbf{C}^{2n-1}$ . (Pour  $n \geq 6$ , ce résultat est déjà contenu dans le théorème sur les plongements.)

Je tiens à remercier M. A. Haefliger de sa contribution essentielle à ce travail. Je lui dois l'idée qui m'a permis d'améliorer et de généraliser aux plongements une méthode que j'avais pour les immersions. Je remercie également MM. R. Narasimhan, J. Mather et F. Ronga des discussions utiles relatives à cet article.

### Notations et conventions générales

Si  $X$  est un espace analytique complexe, on notera  $\mathcal{O}_X$  son faisceau structural. Un sous-ensemble analytique de  $X$  est fermé par définition. Si  $A$  est un sous-ensemble analytique d'un ouvert  $U$  de  $X$ , nous dirons que  $A$  est localement analytique dans  $X$ . Toute variété analytique complexe aura au plus un nombre dénombrable de composantes connexes, qui seront toutes de même dimension. Si  $X$  et  $Y$  sont deux variétés analytiques complexes, une immersion (resp. submersion)  $f: X \rightarrow Y$  sera une application holomorphe telle que, pour tout  $x \in X$ , l'application tangente  $df(x): T_x(X) \rightarrow T_{f(x)}(Y)$  soit injective (resp. surjective). Un plongement est une immersion injective propre. Alors  $f$  induit une application biholomorphe de  $X$  sur une sous-variété analytique (fermée) de  $Y$ .

### 1. Singularités des applications $X \rightarrow \mathbf{C}^N$

**1.1.** Soient  $X$  une variété analytique complexe et  $f = (f_1, \dots, f_N): X \rightarrow \mathbf{C}^N$  une application holomorphe. Pour  $x \in X$ , désignons par  $\mathfrak{a}_x(f)$  l'idéal de  $\mathcal{O}_{X,x}$  engendré par les germes des fonctions  $f_1 - f_1(x), \dots, f_N - f_N(x)$ . On voit facilement que les assertions suivantes sont équivalentes:

- (i)  $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{a}_x(f)$  est un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{C}$ .  
(ii) Il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathfrak{m}_x^k \subset \mathfrak{a}_x(f)$ , où  $\mathfrak{m}_x$  est l'idéal maximal de  $\mathcal{O}_{X,x}$ .  
(iii)  $x$  est un point isolé de la fibre  $f^{-1}(f(x))$ .

Soit  $c_x(f) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{a}_x(f))$ ; trivialement  $c_x(f) \geq 1$ . On a  $c_x(f) = 1$  si et seulement si  $\mathfrak{a}_x(f) = \mathfrak{m}_x$ . Ceci signifie que le rang de  $df$  au point  $x$  est égale à la dimension de  $X$ , c'est-à-dire que  $f$  est une immersion au voisinage de  $x$ . Si  $c_x(f) \leq k$ , alors  $\mathfrak{m}_x^k \subset \mathfrak{a}_x(f)$ . Pour voir cela, on considère la chaîne

$$\mathcal{O}_{X,x} \supset \mathfrak{m}_x = \mathfrak{a}_x(f) + \mathfrak{m}_x \supset \mathfrak{a}_x(f) + \mathfrak{m}_x^2 \supset \cdots \supset \mathfrak{a}_x(f) + \mathfrak{m}_x^{k+1},$$

et l'affirmation se déduit du lemme de Nakayama.

Pour étudier le comportement de  $c_x(f)$  par rapport à  $x$  et à  $f$ , considérons l'espace  $J^k(X, \mathbb{C}^N)$  des jets d'ordre  $k$  d'applications holomorphes de  $X$  dans  $\mathbb{C}^N$ .  $J^k(X, \mathbb{C}^N)$  est un fibré vectoriel analytique sur  $X$  et la fibre en  $x \in X$  s'identifie à  $(\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^{k+1})^N$ . Désignons par  $\pi: J^k(X, \mathbb{C}^N) \rightarrow X$  la projection.

Si  $f: U \rightarrow \mathbb{C}^N$  est une application holomorphe d'un voisinage  $U$  de  $x$  dans  $\mathbb{C}^N$ , nous désignerons par  $j_x^k(f)$  son jet d'ordre  $k$ , c'est-à-dire la classe d'équivalence de  $f$  dans  $(\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^{k+1})^N$ . La décomposition canonique  $\mathcal{O}_{X,x} = \mathbb{C} \oplus \mathfrak{m}_x$  donne naissance à une décomposition

$$J^k(X, \mathbb{C}^N) = \mathbb{C}^N \times J_+^k(X, \mathbb{C}^N),$$

la fibre de  $J_+^k(X, \mathbb{C}^N)$  en  $x$  étant  $(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^{k+1})^N$ .

Soit  $\tau \in J^k(X, \mathbb{C}^N)$  et  $\pi(\tau) = x$ , c'est-à-dire  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in (\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^{k+1})^N$ , et soit  $\mathfrak{a}(\tau)$  l'idéal de l'anneau  $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^{k+1}$  engendré par  $\tau_1 - \tau_1(x), \dots, \tau_N - \tau_N(x)$ . Désignons par  $c(\tau)$  la codimension de  $\mathfrak{a}(\tau)$  considéré comme sous-espace vectoriel complexe de  $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^{k+1}$ . Si  $f: U \rightarrow \mathbb{C}^N$  est une application holomorphe dans un voisinage  $U$  de  $x$ , alors  $\mathfrak{a}(j_x^k(f)) \equiv \mathfrak{a}_x(f) \pmod{\mathfrak{m}_x^{k+1}}$ . Trivialement  $c(j_x^k(f)) \leq c_x(f)$ , et si  $c(j_x^k(f)) \leq k$ , on a même égalité:  $c(j_x^k(f)) = c_x(f)$ . (On applique de nouveau le lemme de Nakayama.)

**1.2.** Pour tout  $p \geq 1$ , soit

$$M_p = \{\tau \in J^k(X, \mathbb{C}^N) : c(\tau) \geq p\}.$$

Evidemment  $M_1 = J^k(X, \mathbb{C}^N)$ . Si  $p \leq k+1$ , les raisonnements précédents montrent que

$$c_x(f) \geq p \Leftrightarrow j_x^k(f) \in M_p.$$

En considérant la décomposition  $J^k(X, \mathbb{C}^N) = \mathbb{C}^N \times J_+^k(X, \mathbb{C}^N)$  on voit aussitôt que les ensembles  $M_p$  sont de la forme  $M_p = \mathbb{C}^N \times M_p^+$ , où  $M_p^+ \subset J_+^k(X, \mathbb{C}^N)$ .

**PROPOSITION 1.**  $M_p$  est un sous-ensemble analytique de  $J^k(X, \mathbb{C}^N)$ .

*Démonstration.* Le problème étant local, on peut supposer que  $X = \mathbb{C}^n$ . La trans-

lation  $x \mapsto x - a$  dans  $\mathbf{C}^n$  induit un isomorphisme canonique  $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^n, a} \cong \mathcal{O}_{\mathbf{C}^n, 0}$ . Ceci nous permet d'identifier  $J^k(X, \mathbf{C}^N)$  à  $\mathbf{C}^n \times A^N$ , où

$$A = \mathcal{O}_{\mathbf{C}^n, 0} / \mathfrak{m}_0^{k+1} \cong \mathbf{C}[z_1, \dots, z_n] / (z_1, \dots, z_n)^{k+1}.$$

Soit  $M_p^0$  l'ensemble des  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in A^N$  tels que  $\dim_{\mathbf{C}}(A/\mathfrak{a}(\tau)) \geq p$ ,  $\mathfrak{a}(\tau)$  étant l'idéal engendré par  $\tau_1 - \tau_1(0), \dots, \tau_N - \tau_N(0)$ . Alors on a  $M_p = \mathbf{C}^n \times M_p^0$ .

Soit  $Z_m \in A$  la classe de  $z_m$  modulo  $(z_1, \dots, z_n)^{k+1}$ ,  $1 \leq m \leq n$ . Les monômes  $Z^i = Z_1^{i_1} \dots Z_n^{i_n}$ ,  $i = (i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{N}^n$ ,  $|i| = i_1 + \dots + i_n \leq k$ , forment une base de l'espace vectoriel complexe  $A$ . Soit

$$\tau_v = \sum_{|i| \leq k} a_{vi} Z^i, \quad (v = 1, \dots, N).$$

Alors  $\mathfrak{a}(\tau)$  est engendré comme sous-espace vectoriel de  $A$  par les éléments

$$\tau_{vj} = \sum_{0 < |i+j| \leq k} a_{vi} Z^{i+j}, \quad v = 1, \dots, N; \quad j \in \mathbf{N}^n, |j| \leq k.$$

La condition  $\dim(A/\mathfrak{a}(\tau)) \geq p$  revient à dire que le rang d'une certaine matrice, dont les coefficients sont des  $a_{vi}$  et des zéros, soit inférieur ou égal à  $\dim_{\mathbf{C}}(A) - p$ . Ceci prouve que  $M_p^0$  est un sous-ensemble analytique de  $A^N$ , ce qui achève la démonstration.

**PROPOSITION 2.** Soient  $X$  une variété analytique complexe de dimension  $n$ ,  $q \geq 0$  et  $N = n + q$ . Alors pour  $1 \leq p \leq 4$  et  $k \geq p - 1$ , la codimension de  $M_p \subset J^k(X, \mathbf{C}^N)$  est supérieur ou égale à  $(p - 1)(q + 1)$ .

*Démonstration.* a) Soit  $\bar{\Sigma}^i$  l'ensemble des jets  $\tau \in J^k(X, \mathbf{C}^N)$  tels que  $\text{corang}(\tau) \geq i$ , c'est-à-dire que  $\text{rang}(df_1(x), \dots, df_N(x)) \leq n - i$  pour  $\tau = j_x^k(f_1, \dots, f_N)$ .  $\bar{\Sigma}^i$  est un sous-ensemble analytique de  $J^k(X, \mathbf{C}^N)$  de codimension  $i(q + 1)$  et  $\Sigma^i = \bar{\Sigma}^i \setminus \bar{\Sigma}^{i+1}$  est une sous-variété (sans singularité) localement analytique (cf. [3]). On a  $M_2 = \bar{\Sigma}^1$ , d'où notre assertion pour  $p = 2$ . (Le cas  $p = 1$  est trivial.)

b) Considérons maintenant l'ensemble  $M_3$ . Il suffit de montrer que la codimension de  $M_3$  en chaque point  $\tau^0 \in \Sigma^1 \cap M_3 = M_3 \setminus \bar{\Sigma}^2$  est  $\geq 2(q + 1)$ . Soit  $\tau^0 = j_x^0(f_1^0, \dots, f_N^0)$ . Sans restreindre la généralité on peut supposer que  $f_1^0 = z_1, \dots, f_{n-1}^0 = z_{n-1}$ , où  $z_1, \dots, z_n$  est un système de coordonnées locales centré en  $x$ . Soit  $E_1 \subset J^k(X, \mathbf{C}^N)$  l'ensemble des jets au dessus de  $x$  de la forme  $\tau = j_x^k(z_1, \dots, z_{n-1}, f_n, \dots, f_{n+q})$ . Pour que  $\tau$  appartienne à  $\Sigma^1 \cap M_3$ , il faut et il suffit que

$$\frac{\partial f_n}{\partial z_n}(x) = \dots = \frac{\partial f_{n+q}}{\partial z_n}(x) = 0, \quad \frac{\partial^2 f_n}{\partial z_n^2}(x) = \dots = \frac{\partial^2 f_{n+q}}{\partial z_n^2}(x) = 0.$$

Donc  $\text{codim}_{\tau^0}(E_1 \cap M_3, E_1) = 2(q + 1)$ , d'où  $\text{codim}_{\tau^0}(M_3) \geq 2(q + 1)$ .

c) Pour évaluer la codimension de  $M_4$ , considérons d'abord un point  $\tau^0 \in \Sigma^1 \cap M_4 = M_4 \setminus \bar{\Sigma}^2$ . En conservant les notations et conventions de b), on voit qu'un jet  $\tau =$

$=j_x^k(z_1, \dots, z_{n-1}, f_n, \dots, f_{n+q})$  appartient à  $\Sigma^1 \cap M_4$  si et seulement si

$$\frac{\partial f_n}{\partial z_n^i}(x) = \dots = \frac{\partial^i f_{n+q}}{\partial z_n^i}(x) = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Donc  $\text{codim}_{r,0}(E_1 \cap M_4, E_1) = 3(q+1)$  et  $\text{codim}_{r,0}(M_4) \geq 3(q+1)$ .

Il reste à montrer que  $\text{codim}(\Sigma^2 \cap M_4) \geq 3(q+1)$ . Puisque  $\text{codim} \Sigma^3 > 3(q+1)$ , il suffit d'évaluer la codimension en un point  $\tau^1 \in \Sigma^2 \cap M_4$ . Soit  $\tau^1 = j_x^k(f_1^1, \dots, f_N^1)$ . Comme avant, on peut supposer que  $f_1^1 = z_1, \dots, f_{n-2}^1 = z_{n-2}$  où  $z_1, \dots, z_n$  est un système de coordonnées locales en  $x$ . Soit  $E_2 \subset J^k(X, \mathbb{C}^N)$  l'ensemble des jets de la forme

$$\tau = j_x^k(z_1, \dots, z_{n-2}, f_{n-1}, f_n, \dots, f_{n+q}).$$

Pour que  $\tau$  appartienne à  $\Sigma^2 \cap M_4$ , il faut et il suffit que

$$\frac{\partial f_v}{\partial z_{n-1}}(x) = \frac{\partial f_v}{\partial z_n}(x) = 0, \quad v = n-1, \dots, n+q,$$

et que le rang de la  $(q+2, 3)$ -matrice

$$\left( \frac{\partial^2 f_v}{\partial z_{n-1}^2}(x), \frac{\partial^2 f_v}{\partial z_{n-1} \partial z_n}(x), \frac{\partial^2 f_v}{\partial z_n^2}(x) \right)_{n-1 \leq v \leq n+q}$$

soit  $\leq 2$ . Comme la codimension de l'ensemble des  $(q+2, 3)$ -matrices de rang  $\leq 2$  dans l'espace des  $(q+2, 3)$ -matrices est égale à  $q$ , il s'ensuit que

$$\text{codim}_{r,1}(E_2 \cap \Sigma^2 \cap M_4, E_2) = 2(q+2) + q = 3q+4.$$

Par conséquent  $\text{codim}_{r,1}(\Sigma^2 \cap M_4) \geq 3q+4 > 3(q+1)$ , ce qui achève la démonstration de la proposition 2.

**1.3.** Pour  $r \geq 1$ , considérons le produit cartésien  $J^k(X, \mathbb{C}^N)^r$  de  $r$  exemplaires de  $J^k(X, \mathbb{C}^N)$ , qui est un fibré vectoriel sur  $X^r$ . Pour toute application holomorphe  $f: X \rightarrow \mathbb{C}^N$  et  $(x_1, \dots, x_r) \in X^r$  posons

$$j_{x_1, \dots, x_r}^k(f) = (j_{x_1}^k(f), \dots, j_{x_r}^k(f)) \in J^k(X, \mathbb{C}^N)^r.$$

Soit  $X_r \subset X^r$  l'ensemble des  $(x_1, \dots, x_r) \in X^r$  tels que  $x_i \neq x_j$  pour  $i \neq j$ . Désignons par  $J^k(X, \mathbb{C}^N)_r$  la partie de  $J^k(X, \mathbb{C}^N)^r$  qui se projette sur  $X_r$ . Si  $V$  est un ensemble d'applications  $f: X \rightarrow \mathbb{C}^N$ , on a une application

$$j_r: V \times X_r \rightarrow J^k(X, \mathbb{C}^N)_r,$$

définie par  $(f; x_1, \dots, x_r) \mapsto j_{x_1, \dots, x_r}^k(f)$ .

**LEMME 1.** Soient  $g_1, \dots, g_m$  des fonctions holomorphes sur une variété analytique complexe  $X$  telles que l'application  $(g_1, \dots, g_m): X \rightarrow \mathbb{C}^m$  soit une immersion injective.

Soit  $V$  un espace vectoriel d'applications holomorphes  $X \rightarrow \mathbb{C}^N$  de dimension finie qui contient toutes les  $f = (f_1, \dots, f_N)$  dont les composantes  $f_i$  sont des polynômes en  $g_1, \dots, g_m$  de degré  $< (k+1)r$ . Alors l'application

$$j_r: V \times X_r \rightarrow J^k(X, \mathbb{C}^N)_r$$

est une submersion surjective.

*Démonstration.* Puisque  $j_r$  est un morphisme de fibrés vectoriels analytiques sur  $X_r$ , il suffit de montrer que  $j_r$  est surjective. Or, ceci est une conséquence immédiate d'un simple problème d'interpolation sur  $X$ .

*Remarque.* Sur une variété de Stein  $X$  il existe toujours des fonctions  $g_1, \dots, g_m$  satisfaisant aux conditions du lemme. C'est la partie facile du théorème de plongement de Remmert-Narasimhan-Bishop.

Par des raisonnements standards de transversalité (cf. [1], [3], [17]) on déduit du lemme 1

LEMME 2. *Sous les hypothèses du lemme 1 soit  $M$  un sous-ensemble analytique (resp. localement analytique sans singularité) de codimension  $s$  dans  $J^k(X, \mathbb{C}^N)_r$ . Alors il existe un ensemble maigre  $T \subset V$  tel que pour tout  $f \in V \setminus T$ ,*

$$Y = \{(x_1, \dots, x_r) \in X_r: j_{x_1, \dots, x_r}^k(f) \in M\}$$

*soit un ensemble analytique (resp. localement analytique sans singularité) de codimension  $s$  dans  $X_r$ . En particulier, si  $s > \dim X_r$ , on aura  $Y = \emptyset$ .*

**1.4.** Soit  $X$  un espace de Stein de dimension  $n$ . Nous dirons qu'un ensemble ouvert relativement compact  $P \subset X$  est un polyèdre analytique spécial, s'il existe des fonctions holomorphes  $F_1, \dots, F_n$  sur  $X$  telles que  $P$  soit réunion de composantes connexes de l'ensemble

$$\{x \in X: |F_i(x)| < 1, i = 1, \dots, n\}.$$

D'après Bishop [2], il existe une suite  $P_1, P_2, \dots$  de polyèdres analytiques spéciaux avec  $\bigcup P_j = X$  et  $\bar{P}_j \subset P_{j+1}$  pour tout  $j \geq 1$ . Une application  $f = (f_1, \dots, f_N): X \rightarrow \mathbb{C}^N$  est propre si et seulement si la suite des nombres  $\alpha_j = \inf |f(P_{j+1} \setminus P_j)|$  tend vers l'infini pour  $j \rightarrow \infty$ . (Ici  $|f(x)| = \max\{|f_1(x)|, \dots, |f_N(x)|\}$ .) On a le théorème d'existence suivant (Bishop [2], voir aussi [10], p. 124):

*Soit  $\gamma_1, \gamma_2, \dots$  une suite de nombres réels arbitraire. Si  $N \geq n + 1$ , il existe une application holomorphe  $f: X \rightarrow \mathbb{C}^N$  avec*

$$\inf |f(P_{j+1} \setminus P_j)| \geq \gamma_j \text{ pour tout } j \geq 1.$$

On peut déduire de ce théorème le lemme suivant:

LEMME 3. Soient  $X$  un espace de Stein de dimension  $n$  et  $V$  un espace vectoriel d'applications holomorphes  $X \rightarrow \mathbb{C}^N$  de dimension finie. Si  $N \geq n + 1$ , il existe un espace vectoriel de dimension finie  $V' \supset V$  d'applications holomorphes  $X \rightarrow \mathbb{C}^N$  et un sous-ensemble ouvert et dense  $U \subset V'$  tel que chaque  $g \in U$  soit une application propre.

Démonstration. Soit  $f_i: X \rightarrow \mathbb{C}^N, i = 1, \dots, k$ , une base de l'espace vectoriel  $V$  et  $P_1, P_2, \dots$  une suite de polyèdres analytiques comme ci-dessus. Soit

$$\beta_j = \max_{1 \leq i \leq k} \sup |f_i(P_{j+1} \setminus P_j)|.$$

Alors pour chaque  $f \in V$  il existe une constante  $c > 0$  telle que

$$\sup |f(P_{j+1} \setminus P_j)| \leq c\beta_j \text{ pour tout } j.$$

Posons  $\gamma_j = (\beta_j + 1)j$ . Il existe une application holomorphe  $f_0: X \rightarrow \mathbb{C}^N$  avec

$$\inf |f_0(P_{j+1} \setminus P_j)| \geq \gamma_j \text{ pour } j = 1, 2, \dots$$

Soit  $V' = V + \mathbb{C}f_0$ . L'ensemble  $U = V + \mathbb{C}^*f_0$  est ouvert et dense dans  $V'$ . Soit  $g \in U, g = f + \lambda f_0, f \in V, \lambda \neq 0$ . Alors

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \inf |g(P_{j+1} \setminus P_j)| \geq \\ &\geq |\lambda| \inf |f_0(P_{j+1} \setminus P_j)| - \sup |f(P_{j+1} \setminus P_j)| \geq \\ &\geq |\lambda| \gamma_j - c\beta_j \geq |\lambda| j + (|\lambda| j - c) \beta_j. \end{aligned}$$

On voit que  $\alpha_j \rightarrow \infty$  pour  $j \rightarrow \infty$ , donc  $g$  est une application propre, c.q.f.d.

1.5. Soient  $X$  une variété de Stein et  $f: X \rightarrow \mathbb{C}^N$  une application holomorphe propre. Comme tout sous-ensemble analytique compact d'un espace holomorphiquement séparable est fini, les fibres de  $f$  sont finies. Pour  $x \in X$  posons

$$d_x(f) = \sum \{c_z(f): z \in f^{-1}(f(x))\},$$

où  $c_z(f)$  a été défini dans 1.1. On peut interpréter les nombres  $d_x(f)$  à l'aide du faisceau image  $\mathcal{F} = f_* \mathcal{O}_X$ .  $\mathcal{F}$  est un faisceau analytique cohérent sur  $\mathbb{C}^N$  (voir par exemple [14]). Si  $x_1, \dots, x_r$  sont les points de la fibre  $f^{-1}(y), y = f(x)$ , on peut identifier  $\mathcal{F}_y$  à  $\mathcal{O}_{x_1, x_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{x_r, x_r}$ . Soit  $\mathfrak{m}_y$  l'idéal maximal de  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^N, y}$ . Alors on a

$$\mathfrak{m}_y \mathcal{F}_y = \mathfrak{a}_{x_1}(f) \oplus \dots \oplus \mathfrak{a}_{x_r}(f).$$

Il en résulte que  $d_x(f) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}_y / \mathfrak{m}_y \mathcal{F}_y)$ .

THÉORÈME 1. Soit  $X$  une variété de Stein de dimension  $n$ . Soient  $q \geq \max\{1, (n-2)/3\}$  et  $N = n + q$ . Alors il existe une application holomorphe propre  $f: X \rightarrow \mathbb{C}^N$  telle que pour tout  $p \geq 1$

$$A_p = \{x \in X: d_x(f) \geq p\}$$

soit un ensemble analytique de dimension  $\leq n - (p-1)q$  et

$$A'_p = A_p \cap \{x \in X : \text{rang } df(x) < n\}$$

soit de dimension  $\leq n - (p-1)q - 1$ .

*Remarque.* Si  $A_2 = \emptyset$ , l'application  $f$  est un plongement; si  $A'_2 = \emptyset$ ,  $f$  est une immersion. Donc, en posant  $q = n + 1$  resp.  $q = n$ , le théorème contient comme cas particuliers l'existence d'un plongement  $X \rightarrow \mathbb{C}^{2n+1}$  et d'une immersion propre  $X \rightarrow \mathbb{C}^{2n}$ .

*Démonstration.* Montrons d'abord que pour toute application holomorphe propre  $f: X \rightarrow \mathbb{C}^N$ , l'ensemble  $A_p$  est analytique. En effet, comme  $\mathcal{F} = f_* \mathcal{O}_X$  est cohérent, l'ensemble

$$B_p = \{y \in \mathbb{C}^N : \dim(\mathcal{F}_y / \mathfrak{m}_y \mathcal{F}_y) \geq p\}$$

est analytique, donc également  $A_p = f^{-1}(B_p)$ .

Fixons  $k \geq 3$ . D'après les lemmes 1 et 3, il existe un espace vectoriel  $V$  d'applications holomorphes  $X \rightarrow \mathbb{C}^N$  de dimension finie tel que pour chaque  $r = 1, \dots, n+2$

$$j_r: V \times X_r \rightarrow J^k(X, \mathbb{C}^N)_r$$

soit une submersion surjective et que chaque élément d'un certain sous-ensemble ouvert et dense  $U \subset V$  soit une application propre.

Pour chaque  $r$ -uple d'entiers  $(p_1, \dots, p_r)$ ,  $1 \leq p_\varrho \leq 4$ ,  $1 \leq r \leq n+2$ , désignons par  $M_{p_1 \dots p_r}$  l'ensemble des multi-jets  $(\tau_1, \dots, \tau_r) \in J^k(X, \mathbb{C}^N)_r$  jouissant des propriétés suivantes:

- (i)  $\tau_1(x_1) = \dots = \tau_r(x_r)$  où  $x_\varrho = \pi(\tau_\varrho)$
- (ii)  $c(\tau_\varrho) \geq p_\varrho$  pour  $\varrho = 1, \dots, r$ .

(Les notations sont celles de 1.1.) Rappelons qu'on a une décomposition  $J^k(X, \mathbb{C}^N) = \mathbb{C}^N \times J_+^k(X, \mathbb{C}^N)$ , qui induit une décomposition

$$J^k(X, \mathbb{C}^N)^r = (\mathbb{C}^N)^r \times J_+^k(X, \mathbb{C}^N)^r.$$

Soient  $\Delta = \{(y_1, \dots, y_r) \in (\mathbb{C}^N)^r : y_1 = \dots = y_r\}$  et

$$M_{p_1 \dots p_r}^* = \Delta \times M_{p_1}^+ \times \dots \times M_{p_r}^+ \subset J^k(X, \mathbb{C}^N)^r.$$

On a  $M_{p_1 \dots p_r} = M_{p_1 \dots p_r}^* \cap J^k(X, \mathbb{C}^N)_r$ , qui est un ensemble analytique. La proposition 2 entraîne que

$$\text{codim } M_{p_1 \dots p_r} = \text{codim } M_{p_1 \dots p_r}^* \geq N(r-1) + \sum_{\varrho=1}^r (p_\varrho - 1)(q+1).$$

D'après le lemme 2 il existe un ensemble maigre  $T \subset V$  tel que pour tout  $f \in V \setminus T$  et tout  $(p_1, \dots, p_r)$  l'ensemble analytique

$$Y_{p_1 \dots p_r} = \{(x_1, \dots, x_r) \in X_r : j_{x_1 \dots x_r}^k(f) \in M_{p_1 \dots p_r}\}$$

soit de même codimension que  $M_{p_1, \dots, p_r}$ . Donc, avec  $p = p_1 + \dots + p_r$ , on a

$$\begin{aligned} (*) \dim Y_{p_1, \dots, p_r} &\leq nr - N(r-1) - \sum (p_\rho - 1)(q+1) = \\ &= n - q(r-1) - (p-r)(q+1) = \\ &= n - (p-1)q - (p-r). \end{aligned}$$

Si on choisit  $f \in U \setminus T$ ,  $f$  est propre et l'ensemble analytique  $A_p$  est la réunion des ensembles  $pr_r(Y_{p_1, \dots, p_r})$  pour  $1 \leq r \leq n+1$ ,  $1 \leq p_\rho \leq 3$  et  $p_1 + \dots + p_r = p$ ; ici  $pr_r: X_r \rightarrow X$  dénote la projection sur le premier facteur. En effet, en vertu de (\*), les ensembles  $Y_{11, \dots, 1} \subset X_{n+2}$  et  $Y_4 \subset X$  sont vides, c'est-à-dire que chaque fibre de  $f$  a au plus  $n+1$  points et  $c_x(f) \leq 3$  pour chaque  $x \in X$ . Donc, si  $x$  appartient à  $A_p$ , il existe des points  $x_1 = x, x_2, \dots, x_r, (1 \leq r \leq n+1)$ , dans  $f^{-1}(f(x))$  et des entiers  $p_1, \dots, p_r$  avec  $1 \leq p_\rho \leq 3$  et  $p_1 + \dots + p_r = p$ , tels que  $c_{x_\rho}(f) \geq p_\rho$ . Par définition on a alors  $(x_1, \dots, x_r) \in Y_{p_1, \dots, p_r}$  et  $x \in pr_r(Y_{p_1, \dots, p_r})$ . Puisque  $\dim Y_{p_1, \dots, p_r} \leq n - (p-1)q$ , il s'ensuit que  $\dim A_p \leq n - (p-1)q$ . Pareillement on démontre que  $A'_p$  est la réunion des ensembles  $pr_r(Y_{p_1, \dots, p_r})$  pour  $1 \leq r \leq n+1, 1 \leq p_\rho \leq 3, p_1 + \dots + p_r = p, p_1 \geq 2$ . Alors  $p-r \geq 1$  et  $\dim Y_{p_1, \dots, p_r} \leq n - (p-1)q - 1$ , donc  $\dim A'_p \leq n - (p-1)q - 1$ .

## 2. Plongements et immersions

**2.1.** Soient  $X$  une variété de Stein et  $f: X \rightarrow \mathbb{C}^N$  une application holomorphe propre. Considérons le faisceau image  $\mathcal{F} = f_* \mathcal{O}_X$  qui est un faisceau cohérent de modules sur  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^N}$ . Nous identifierons les sections de  $\mathcal{F}$  au dessus d'un ouvert  $U \subset \mathbb{C}^N$  à  $\Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$ , l'anneau des fonctions holomorphes sur  $f^{-1}(U)$ .  $\Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$  est une algèbre sur  $\Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^N})$  moyennant l'homomorphisme

$$f_U^*: \Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^N}) \rightarrow \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$$

induit par  $f$ . Donc  $\mathcal{F} = f_* \mathcal{O}_X$  peut être considéré comme faisceau d'algèbres sur  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^N}$ .

**LEMME 4.** Soient  $X$  une variété de Stein,  $f = (f_1, \dots, f_N): X \rightarrow \mathbb{C}^N$  une application holomorphe propre,  $\mathcal{F} = f_* \mathcal{O}_X$  et  $y \in f(X)$ . Soient  $g_1, \dots, g_m$  des fonctions holomorphes sur  $X$  qui engendrent la fibre  $\mathcal{F}_y$  comme algèbre sur  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^N, y}$ . Alors l'application

$$\varphi = (f_1, \dots, f_N, g_1, \dots, g_m): X \rightarrow \mathbb{C}^{N+m}$$

sépare les points de la fibre  $f^{-1}(y)$  et  $\varphi$  est une immersion au voisinage de chaque point de  $f^{-1}(y)$ .

*Démonstration.* Soient  $x_1, \dots, x_r$  les points de la fibre  $f^{-1}(y)$ . On a  $\mathcal{F}_y = \mathcal{O}_{X, x_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{X, x_r}$ . Si on avait  $g_\mu(x_i) = g_\mu(x_j)$  pour  $\mu = 1, \dots, m$ , on aurait de même  $g(x_i) = g(x_j)$  pour chaque élément  $g$  de la sous-algèbre  $G \subset \bigoplus \mathcal{O}_{X, x_\rho}$  engendrée par  $g_1, \dots, g_m$  sur  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^N, y}$ . Mais  $G = \bigoplus \mathcal{O}_{X, x_\rho}$  par hypothèse, donc les fonctions  $g_1, \dots, g_m$  séparent les points de la fibre  $f^{-1}(y)$ .



Pour voir que  $\varphi$  soit une immersion au voisinage de chaque point  $x \in f^{-1}(y)$ , il suffit de montrer que l'homomorphisme induit  $\varphi_x^* : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{N+m}, z} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}$ , où  $z = \varphi(x) = (y, g(x)) \in \mathbb{C}^{N+m}$ , soit surjectif. Or, l'image de  $\varphi_x^*$  contient d'une part les germes des fonctions  $g_1, \dots, g_m$  et d'autre part l'image de l'homomorphisme  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^N, y} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}$  induit par  $f$ . L'hypothèse du lemme entraîne alors que  $\text{Im } \varphi_x^* = \mathcal{O}_{X, x}$ , c.q.f.d.

**COROLLAIRE.** Soient  $X$  une variété de Stein,  $f: X \rightarrow \mathbb{C}^N$  une application holomorphe propre et  $g = (g_1, \dots, g_m)$  un système de fonctions holomorphes sur  $X$  qui engendrent l'algèbre  $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \Gamma(\mathbb{C}^N, f_* \mathcal{O}_X)$  sur  $\Gamma(\mathbb{C}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^N})$ . Alors l'application  $(f, g): X \rightarrow \mathbb{C}^{N+m}$  est un plongement.

**2.2.** Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau analytique cohérent sur un espace de Stein  $Y$ . Pour  $y \in Y$ , posons

$$d_y(\mathcal{F}) = \dim(\mathcal{F}_y / \mathfrak{m}_y \mathcal{F}_y),$$

où  $\mathfrak{m}_y$  est l'idéal maximal de  $\mathcal{O}_{Y, y}$ . D'après le lemme de Nakayama,  $d_y(\mathcal{F})$  est égal au nombre minimal de générateurs du module  $\mathcal{F}_y$  sur  $\mathcal{O}_{Y, y}$ . Les ensembles

$$S_p = S_p(\mathcal{F}) = \{y \in Y : d_y(\mathcal{F}) \geq p\}$$

sont analytiques, donc des espaces de Stein. Posons

$$b_p(\mathcal{F}) = \begin{cases} 0 & \text{si } S_p(\mathcal{F}) = \emptyset \\ p & \text{si } \dim S_p(\mathcal{F}) = 0 \text{ ou } 1 \\ p + [(1 + s_p)/2] & \text{si } \dim S_p(\mathcal{F}) = s_p \geq 2 \end{cases}$$

**LEMME 5.** Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau analytique cohérent sur un espace de Stein  $Y$  et supposons  $b = \sup\{b_p(\mathcal{F}) : p \geq 1\} < \infty$ . Alors il existe  $b$  sections de  $\mathcal{F}$  qui engendrent le module  $\Gamma(Y, \mathcal{F})$  sur  $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ .

*Démonstration.* D'après [4], Satz 4.3, il existe une famille finie  $f = (f_1, \dots, f_k)$  de sections de  $\mathcal{F}$  qui engendrent  $\Gamma(Y, \mathcal{F})$  sur  $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ . Soit  $\lambda_y : \Gamma(Y, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F}_y / \mathfrak{m}_y \mathcal{F}_y$  l'homomorphisme canonique. Désignons par  $\lambda_y(f)$  le  $k$ -uplet de vecteurs  $\lambda_y(f_1), \dots, \lambda_y(f_k) \in \mathcal{F}_y / \mathfrak{m}_y \mathcal{F}_y$ . On a  $\text{rang}(\lambda_y(f)) = d_y(\mathcal{F})$  pour tout  $y \in Y$ . Soit  $M_{bk}$  l'espace des  $(b, k)$ -matrices à coefficients complexes. Pour  $T = (t_{ij}) \in M_{bk}$  soit  $T\lambda_y(f)$  le  $b$ -uplet  $\varphi = (\varphi_i)$  de vecteurs définies par

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^k t_{ij} \lambda_y(f_j), \quad i = 1, \dots, b.$$

Soit

$$E = \{(y, T) \in Y \times M_{bk} : \text{rang}(T\lambda_y(f)) = d_y(\mathcal{F})\}.$$

Muni de la projection canonique sur  $Y$ ,  $E$  est un fibré localement trivial sur chaque

$S_p \setminus S_{p+1}$  (cf. [6], Satz 1). La fibre  $F_p$  de  $E$  au dessus d'un point de  $S_p \setminus S_{p+1}$  a le type d'homotopie de  $W_{bp}$ , la variété de Stiefel des  $p$ -repères orthogonaux dans  $\mathbb{C}^b$ . Une section holomorphe de  $E \rightarrow Y$  est une  $(b, k)$ -matrice  $T$  holomorphe sur  $Y$  telle que  $Tf$  soit un  $b$ -uplet de sections de  $\mathcal{F}$  engendrant  $\Gamma(Y, \mathcal{F})$  sur  $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ . D'après le principe d'Oka,  $E \rightarrow Y$  admet une section holomorphe s'il admet une section continue ([6], Satz 5). Pour qu'une section continue existe, il suffit que

$$(*) \ H^{q+1}(S_p, S_{p+1}; \pi_q(F_p)) = 0 \quad \text{pour tout } q \geq 1, p \geq 1.$$

([7], Lemma 2). Or,

$$\pi_q(F_p) = \pi_q(W_{bp}) = 0 \quad \text{pour } q \leq 2(b - p)$$

et

$$H^{q+1}(S_p, S_{p+1}; G) = 0 \quad \text{pour } q \geq 1 + \dim S_p$$

et tout groupe de coefficients  $G$  (cf. [12] ou [15]). Lorsque  $\dim S_p = 1$ , on a même  $H^2(S_p, S_{p+1}; G) = 0$ . Si  $q > 2(b - p)$ , la définition de  $b$  montre que  $q \geq 1 + \dim S_p$ , resp.  $q \geq 1$  si  $\dim S_p = 1$ . Donc la condition (\*) est toujours remplie, ce qui achève la démonstration du lemme 5.

**2.3.** Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal.

**THÉORÈME 2.** *Soit  $X$  une variété de Stein de dimension  $n \geq 2$ . Alors il existe un plongement (holomorphe propre)  $X \rightarrow \mathbb{C}^{2n}$ . Si  $n \geq 6$ , il existe même un plongement  $X \rightarrow \mathbb{C}^{2n-k}$ , où  $k = [(n-2)/3]$ .*

*Démonstration.* a) Posons

$$q = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 2 \\ 2 & \text{si } n = 3, 4, 5 \\ [n/3] & \text{si } n \geq 6. \end{cases}$$

Soit  $f: X \rightarrow \mathbb{C}^{n+q}$  une application holomorphe propre ayant les propriétés énoncées dans le théorème 1. Soit  $\mathcal{F} = f_* \mathcal{O}_X$  le faisceau image du faisceau structural,  $N = n + q$  et

$$m = \begin{cases} n - q & \text{si } 2 \leq n \leq 5 \\ n - q - [(n-2)/3] & \text{si } n \geq 6. \end{cases}$$

Vu le corollaire du lemme 4, notre théorème sera démontré si nous arrivons à prouver l'existence de fonctions holomorphes  $g_1, \dots, g_m$  sur  $X$  qui engendrent  $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \Gamma(\mathbb{C}^N, \mathcal{F})$  comme algèbre sur  $\Gamma(\mathbb{C}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^N})$ .

b) Supposons d'abord  $n \geq 3$ . Soit  $\mathcal{G} = \mathcal{F}/(1)$  le faisceau de modules sur  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^N}$  qui est le quotient par le sous-module engendré par la fonction constante  $1 \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \Gamma(\mathbb{C}^N, \mathcal{F})$ . Evidemment, si  $\Gamma(\mathbb{C}^N, \mathcal{G})$  possède un système de  $m$  générateurs comme

module sur  $\Gamma(\mathbf{C}^N, \mathcal{O}_{\mathbf{C}^N})$ , il existe  $m$  sections de  $\mathcal{F}$  qui engendrent  $\Gamma(\mathbf{C}^N, \mathcal{F})$  comme algèbre sur  $\Gamma(\mathbf{C}^N, \mathcal{O}_{\mathbf{C}^N})$ . On a

$$\dim(\mathcal{G}_y/\mathfrak{m}_y\mathcal{G}_y) = \dim(\mathcal{F}_y/\mathfrak{m}_y\mathcal{F}_y) - 1 \quad \text{pour chaque } y \in f(X).$$

Comme  $S_p(\mathcal{F}) = f(A_p)$ , (avec les notations du théorème 1 et du lemme 5), on a pour tout  $p \geq 1$

$$\dim S_p(\mathcal{F}) \leq n - (p-1)q,$$

donc

$$\dim S_p(\mathcal{G}) \leq n - pq.$$

Nous allons maintenant appliquer le lemme 5 pour montrer que  $\Gamma(\mathbf{C}^N, \mathcal{G})$  est engendré par  $m$  éléments; distinguons 4 cas:

- (i)  $n=3, m=1$ . On a  $\dim S_1(\mathcal{G}) \leq 1, S_2(\mathcal{G}) = \emptyset$ , donc  $\Gamma(\mathbf{C}^N, \mathcal{G})$  est engendré par un élément.
- (ii)  $n=4, m=2$ . On a  $\dim S_1(\mathcal{G}) \leq 2, \dim S_2(\mathcal{G}) \leq 0$  et  $S_3(\mathcal{G}) = \emptyset$ , donc  $\Gamma(\mathbf{C}^N, \mathcal{G})$  est engendré par deux éléments.
- (iii)  $n=5, m=3$ . On a  $\dim S_1(\mathcal{G}) \leq 3, \dim S_2(\mathcal{G}) \leq 1$  et  $S_3(\mathcal{G}) = \emptyset$ , donc  $\Gamma(\mathbf{C}^N, \mathcal{G})$  est engendré par trois éléments.
- (iv)  $n \geq 6$ . Alors  $q = [n/3] \geq 2$ . Donc pour  $p \geq 1$  on a

$$\dim S_p(\mathcal{G}) \leq n - pq \leq n - q - 2(p-1)$$

et

$$p + [(1 + \dim S_p(\mathcal{G}))/2] \leq p + [(n - q - 2p + 3)/2] = [(n - q + 3)/2].$$

Il en résulte que  $\Gamma(\mathbf{C}^N, \mathcal{G})$  peut être engendré par  $b = [(n - q + 3)/2]$  éléments. Or

$$m = n - [n/3] - [(n-2)/3] = [(n - [n/3] + 3)/2] = b,$$

ce qui achève la démonstration du théorème pour  $n \geq 3$ .

c) Traitons maintenant le cas  $n=2$ . L'ensemble analytique

$$A_3 = \{x \in X : d_x(f) \geq 3\},$$

où  $f: X \rightarrow \mathbf{C}^3$  est l'application définie dans a), est de dimension  $\leq 0$ , c'est-à-dire un ensemble discret, tandis que

$$A'_3 = A_3 \cap \{x \in X : \text{rang } df(x) < 2\}$$

est vide, c'est-à-dire que  $f$  est une immersion au voisinage de tout point de  $A_3$ . Il existe une fonction holomorphe  $h$  sur  $X$  qui sépare les points de  $A_3$ . Alors pour chaque  $y \in B_3 = f(A_3)$ , la fibre  $\mathcal{F}_y$  du faisceau  $\mathcal{F} = f_*\mathcal{O}_X$  est engendré par  $1, h, h^2$  comme module sur  $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^3, y}$ .

Soit  $\mathcal{H}' \subset \mathcal{F}$  le sous-faisceau engendré comme module sur  $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^3}$  par les deux sec-

tions 1,  $h \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \Gamma(\mathbb{C}^3, \mathcal{F})$ . Chaque point  $y \in B_3$  possède un voisinage  $V(y)$  avec les propriétés suivantes :

- (i)  $V(y) \cap B_3 = \{y\}$
- (ii)  $f|_{f^{-1}(V(y))} \rightarrow \mathbb{C}^3$  est une immersion
- (iii)  $h$  sépare  $f^{-1}(z)$  pour tout  $z \in V(y)$ .

Alors  $\mathcal{H}'$  coïncide avec  $\mathcal{F}$  au dessus de  $V(y) \setminus \{y\}$ . En effet, pour chaque  $z \in V(y) \setminus \{y\}$ , la fibre  $f^{-1}(z)$  a au plus deux points. Si  $f^{-1}(z)$  est réduit à un point, l'assertion est évidente à cause de (ii). Lorsque  $f^{-1}(z) = \{x_1, x_2\}$ ,  $x_1 \neq x_2$ , on a  $\mathcal{F}_z = \mathcal{O}_{x_1, x_1} \oplus \mathcal{O}_{x_1, x_2}$ , et en vertu de (ii), les homomorphismes  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^3, z} \rightarrow \mathcal{O}_{x_1, x_1}$  et  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^3, z} \rightarrow \mathcal{O}_{x_1, x_2}$ , induits par  $f$ , sont surjectifs. L'assertion découle maintenant du fait qu'il existe des combinaisons linéaires  $h_i = \alpha_i + \beta_i h$ ;  $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}$ , tels que  $h_1(x_1) = 1, h_1(x_2) = 0$  et  $h_2(x_1) = 0, h_2(x_2) = 1$ .

Ceci nous permet de définir un sous-faisceau  $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$  comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}|_{(\mathbb{C}^3 \setminus B_3)} &= \mathcal{F}|_{(\mathbb{C}^3 \setminus B_3)}, \\ \mathcal{H}|_{V(y)} &= \mathcal{H}'|_{V(y)}, \quad y \in B_3. \end{aligned}$$

Par construction, la fonction  $1 \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$  est une section de  $\mathcal{H}$ . Soit  $\mathcal{G} = \mathcal{H}/(1)$  le faisceau quotient de  $\mathcal{H}$  par le sous-faisceau de modules engendré par cette section sur  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^3}$ . On a alors

$$S_1(\mathcal{G}) = S_2(\mathcal{F}) = B_2 = f(A_2) \quad \text{et} \quad S_2(\mathcal{G}) = \emptyset.$$

Puisque  $\dim B_2 \leq 1$ ,  $\Gamma(\mathbb{C}^3, \mathcal{G})$  peut être engendré par un seul élément comme module sur  $\Gamma(\mathbb{C}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^3})$ . Ceci entraîne l'existence d'un  $g \in \Gamma(\mathbb{C}^3, \mathcal{H})$  tel que 1 et  $g$  engendrent  $\Gamma(\mathbb{C}^3, \mathcal{H})$  comme module sur  $\Gamma(\mathbb{C}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^3})$ . Alors  $g$  engendre  $\Gamma(\mathbb{C}^3, \mathcal{F})$  comme algèbre sur  $\Gamma(\mathbb{C}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^3})$ . Comme nous l'avons indiqué sous a), le théorème est ainsi démontré.

**2.4.** Gunning et Narasimhan [8] ont démontré que toute variété de Stein de dimension 1 (c'est-à-dire toute surface de Riemann ouverte) peut être immergée dans  $\mathbb{C}$ . En utilisant une méthode de Haefliger ([9], lemme 2), on peut généraliser le théorème de Gunning-Narasimhan comme suit :

**THÉORÈME 3.** *Soit  $X$  une variété de Stein de dimension  $n$ . Alors il existe une immersion  $X \rightarrow \mathbb{C}^{2n-1}$ .*

*Remarque.* Pour les dimensions  $n \geq 8$ , le théorème 2 donne un résultat plus fort.

*Démonstration.* Nous utiliserons le lemme suivant de Gunning-Narasimhan :

**LEMME.** *Soit  $Y$  une variété de Stein de dimension 1 et  $\sigma$  une forme différentielle holomorphe de degré 1 sur  $Y$ . Alors il existe des fonctions holomorphes  $F$  et  $g$  sur  $Y$  telles que  $dF = e^g \sigma$ .*

(Ce lemme est démontré dans [8] pour les formes différentielles qui ne s'annulent pas sur  $Y$ . Mais la démonstration s'étend au cas général.)

Considérons dans l'espace des jets  $J^1(X, \mathbb{C}^{2n-2})$  les ensembles  $\Sigma^1$  et  $\bar{\Sigma}^2$  (cf. démonstration de la prop. 2). On a  $\text{codim } \Sigma^1 = n-1$  et  $\text{codim } \bar{\Sigma}^2 = 2n$ . D'après le lemme 2, il existe une application holomorphe  $f: X \rightarrow \mathbb{C}^{2n-2}$  telle que l'ensemble

$$\{x \in X: j_x^1(f) \in \bar{\Sigma}^2\} = \{x \in X: \text{rang } df(x) \leq n-2\}$$

soit vide et que l'ensemble

$$Y = \{x \in X: j_x^1(f) \in \Sigma^1\} = \{x \in X: \text{rang } df(x) = n-1\}$$

soit une sous-variété analytique (sans singularité) de dimension 1. Comme tout fibré vectoriel analytique sur une variété de Stein de dimension 1 est trivial, le fibré normal de  $Y$  est trivial. Il existe donc un voisinage  $W$  de  $Y$  et une application biholomorphe  $\varphi$  de  $W$  sur un voisinage  $W'$  de  $Y \times \{0\}$  dans  $Y \times \mathbb{C}^{n-1}$  qui envoie  $Y$  sur  $Y \times \{0\}$ . Nous identifions  $W$  et  $W'$  à l'aide de  $\varphi$ .

Soit  $T^*(X)$  le fibré cotangent de  $X$  et  $T'$  le sous-fibré de  $T^*(X) | Y$ , engendré par  $df(y)$ ,  $y \in Y$ . Puisque  $(T^*(X) | Y)/T'$  est un fibré de rang 1 trivial, il existe une section holomorphe  $\omega_0$  de  $T^*(X) | Y$  telle que

$$\text{rang}(df(y), \omega_0(y)) = n \quad \text{pour tout } y \in Y.$$

$\omega_0$  est la restriction à  $Y$  d'une forme différentielle  $\omega$  sur  $W \cong W' \subset Y \times \mathbb{C}^{n-1}$  qui s'écrit

$$\omega(y, z) = \sigma(y) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i(y) dz_i.$$

Ici  $\sigma$  est une forme différentielle sur  $Y$ , les  $\alpha_i$  sont des fonctions holomorphes sur  $Y$  et  $z_1, \dots, z_{n-1}$  désignent les coordonnées de  $\mathbb{C}^{n-1}$ . D'après le lemme de Gunning-Narasimhan, il existe des fonctions holomorphes  $F$  et  $g$  sur  $Y$  avec  $dF = e^g \sigma$ . Définissons la fonction  $H$  sur  $W$  par la formule

$$H(y, z) = e^{g(y)} \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i(y) z_i + F(y).$$

On a

$$\begin{aligned} dH(y, z) &= \sum z_i d_y (e^{g(y)} \alpha_i(y)) + e^{g(y)} \sum \alpha_i(y) dz_i + e^{g(y)} \sigma(y) \\ &= \sum z_i d_y (e^{g(y)} \alpha_i(y)) + e^{g(y)} \omega(y, z), \end{aligned}$$

donc  $dH | Y = e^g(\omega | Y) = e^g \omega_0$ . D'après le Théorème B il existe une fonction holomorphe  $h$  sur  $X$  avec  $h \equiv H \pmod{\mathcal{I}^2}$  sur  $W$ , où  $\mathcal{I}$  est le faisceau d'idéaux défini par  $Y$ . Il s'ensuit que  $dh | Y = dH | Y$ , donc

$$\text{rang}(df(y), dh(y)) = n \quad \text{pour tout } y \in Y.$$

Il en résulte que  $(f, h): X \rightarrow \mathbb{C}^{2n-1}$  est une immersion.

*Remarque.* Si  $n \geq 3$ , on peut toujours s'arranger que l'application  $f: X \rightarrow \mathbb{C}^{2n-2}$ ,

qui figure dans la démonstration, soit propre. On obtient ainsi une immersion propre de  $X$  dans  $\mathbf{C}^{2n-1}$ .

2.5. Pour finir, donnons quelques contre-exemples.

PROPOSITION 3. Soit  $n$  un nombre naturel et  $N = n + [n/2]$ . Alors il existe une variété de Stein  $X$  de dimension  $n$ , qui ne peut pas être plongée dans  $\mathbf{C}^N$  ni immergée dans  $\mathbf{C}^{N-1}$ .

Démonstration. Soit

$$Y = \{(x : y : z) \in P_2(\mathbf{C}) : x^2 + y^2 + z^2 \neq 0\}.$$

Posons

$$X = \begin{cases} Y^m & \text{si } n = 2m, \\ Y^m \times \mathbf{C} & \text{si } n = 2m + 1. \end{cases}$$

$X$  est une variété de Stein de dimension  $n$ . Si on considère  $X$  comme variété différentiable de dimension réelle  $2n$ , on constate que la classe de Stiefel-Whitney duale  $\tilde{w}_{2m}(X)$  est non nulle (cf. [5], p. 715). Ceci implique qu'il n'existe aucun plongement  $X \rightarrow \mathbf{C}^N$  et aucune immersion  $X \rightarrow \mathbf{C}^{N-1}$  (voir par exemple [11], p. 261).

La proposition 3 montre que nos résultats sur les plongements et les immersions des variétés de Stein de dimension 2 sont les meilleurs possibles. Pour les autres dimensions on peut conjecturer que toute variété de Stein de dimension  $n$  se plonge dans  $\mathbf{C}^{N+1}$  et s'immerge dans  $\mathbf{C}^N$ , où  $N = n + [n/2]$ . Quoiqu'une étude plus détaillée des singularités apporterait des petites améliorations à nos résultats pour  $n$  grand, la démonstration de cette conjecture semble être très difficile. En effet, on ignore même, si le disque  $D = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$  peut être plongé proprement dans  $\mathbf{C}^2$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] ABRAHAM, R., *Transversality in manifolds of mappings*, Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963), 470-474.
- [2] BISHOP, E., *Mappings of partially analytic spaces*, Amer. J. of Math. 83 (1961), 209-242.
- [3] BOARDMAN, J. M., *Singularities of differentiable maps*, I.H.E.S. Publ. Math. no. 33 (1967).
- [4] FORSTER, O., *Zur Theorie der Steinschen Algebren und Moduln*, Math. Zeitschr. 97 (1967), 376-405.
- [5] FORSTER, O., *Some remarks on parallelizable Stein manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 712-716.
- [6] FORSTER, O., und K. J. RAMSPOTT, *Analytische Modulgarben und Endromisbündel*, Invent. Math. 2 (1966), 143-170.
- [7] FORSTER, O., und K. J. RAMSPOTT, *Homotopieklassen von Idealbasen in Steinschen Algebren*, Invent. Math. 5 (1968) 255-276.
- [8] GUNNING, R. C. and R. NARASIMHAN, *Immersion of open Riemann surfaces*. Math. Ann., 174 (1967), 103-108.
- [9] HAEFLIGER, A., *Quelques remarques sur les applications différentiables d'une surface dans le plan*, Ann. de Fourier 10 (1960), 47-60.

- [10] HÖRMANDER, L., *Complex analysis in several variables* (Van Nostrand, 1966).
- [11] HUSEMOLLER, D., *Fibre bundles* (McGraw-Hill, 1966).
- [12] KAUP, L., *Eine topologische Eigenschaft Steinscher Räume*. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl., Jg. 1966, 213–224.
- [13] NARASIMHAN, R., *Imbedding of holomorphically complete complex spaces*. Amer. J. of Math. 82 (1960), 917–934.
- [14] NARASIMHAN, R., *Introduction to the theory of analytic spaces*, Springer Lecture Notes in Math., Vol. 25 (1966).
- [15] NARASIMHAN, R., *On the homology groups of Stein spaces*. Invent. Math. 2 (1967), 377–385.
- [16] REMMERT, R., *Habilitationsschrift* (Münster 1956).
- [17] THOM, R., *Un lemme sur les applications différentiables*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (2) 1 (1956), 59–71.

*Institut de Mathématiques,  
Université de Genève*

Reçu le 29 Juillet 1969