Über die subnormalen Lösungen der Differentialgleichung $w'' + e^{-z} \cdot w' + \text{konst.} \cdot w = 0$

von MARGRIT FREI, Zürich

Herrn Rektor Dr. W. Rotach zum 60. Geburtstag gewidmet

In meiner Dissertation[1]) wird der Begriff «subnormale Lösung» einer linearen Differentialgleichung eingeführt. Wir verstehen darunter ein partikuläres Integral, das wesentlich schwächer wächst als die allgemeine Lösung.

Nach dem dort bewiesenen *verschärften* Hauptsatz ist die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung

$$w'' + e^{-z} \cdot w' + \alpha \cdot w = 0 \,, \qquad \alpha \quad \text{konst.} \neq 0 \,, \tag{1}$$

eine ganze Funktion unendlicher Ordnung. Und es gibt 2 positive Konstante c_1 und c_2, so daß $c_1 r < \log T(r) < c_2 r$ gilt. ($T(r)$ ist die charakteristische Funktion der allgemeinen Lösung.) Die Differentialgleichung (1) besitzt höchstens 1 unabhängiges part. Integral w_0 mit $T(r, w_0) = \exp. o(r)$, das ist eine subnormale Lösung. Solche schwach wachsende Integrale kommen tatsächlich vor. Zum Beispiel ist $w_0 = e^z + 1$ (mit $T(r, w_0) = r/\pi + O(1)$) ein part. Integral der Differentialgleichung

$$w'' + e^{-z} \cdot w' - w = 0 \qquad (\alpha = -1) \,. \tag{2}$$

Aber wir können zeigen, daß (2) einen Ausnahmefall darstellt.

Wir werden feststellen, daß die Differentialgleichung (1) nur für bestimmte, seltene Werte von α eine subnormale Lösung zuläßt. Dabei zeigt sich eine merkwürdige Analogie zu den linearen Differentialgleichungen mit Polynomen als Koeffizienten. Für diese nämlich kann die Frage nach der Existenz eines subnormalen Integrals allgemein beantwortet werden. Denn aus einer Arbeit von PÖSCHEL [1][2]) folgt, daß eine subnormale Lösung einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit Polynomen als Koeffizienten entweder ein Polynom oder eine ganze transzendente Funktion endlicher Wachstumsordnung ohne Nullstellen ist. Eine transzendente subnormale Lösung ist also nur möglich, wenn die Differentialgleichung *reduzibel* ist (vgl. PÓLYA [1]), ist doch eine *nullstellenfreie* ganze Funktion endlicher Wachstumsordnung schon

---

[1]) Siehe Comm. Math. Helv. Bd. *35*, Jg. 1961, S. 201.

[2]) Für alle Zitate vgl. Literaturverzeichnis meiner oben erwähnten Dissertation.

Lösung einer linearen Differentialgleichung *erster* Ordnung mit Polynomen als Koeffizienten.

Aus der Existenz der subnormalen Lösung $w_0 = e^z + 1$ der Differentialgleichung (2) folgt zwar nicht, daß die Differentialgleichung (2) reduzibel ist, denn w_0 ist nicht Lösung einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung mit ganzen Funktionen als Koeffizienten. Aber w_0 ist ein «Polynom in e^z». Und wir werden zeigen, daß jede subnormale Lösung der Differentialgleichungen (1) ein Polynom in e^z ist. Wir beweisen nämlich den

Satz. Die Differentialgleichungen

$$w'' + e^{-z} \cdot w' + \alpha \cdot w = 0 \qquad \alpha \text{ konst.}, \neq 0$$

besitzen dann und nur dann eine subnormale Lösung, wenn die Konstante $\alpha = -n^2$, n natürliche Zahl, ist. Diese subnormale Lösung w_0 ist dann ein Polynom n-ten Grades in $e^z : w_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k e^{kz}$.

Beweis. Man sieht leicht ein, daß die Differentialgleichungen (1) nur transzendente Lösungen besitzen. Sie sind sämtliche mindestens vom Mitteltypus erster Ordnung, wobei sogar

$$\liminf_{r=\infty} T(r, w)/r > 0 \tag{3}$$

gilt, weil der einzige transzendente Koeffizient von (1), e^{-z}, von vollkommen regelmäßigem Wachstum ist.

Das Wachstum einer eventuellen subnormalen Lösung w_0 schätzen wir mit Hilfe der «charakteristischen Gleichung» von WIMAN ab. Nach den Ausführungen in § 1 meiner Dissertation gilt für eine Lösung der Differentialgleichung (1) für alle r, $r > 0$, außerhalb einer r-Menge von endlichem logarithmischem Maß

$$[\nu(r)/\zeta]^2 \cdot (1 + \eta_2(\zeta)) + e^{-\zeta} \cdot \nu(r)/\zeta \cdot (1 + \eta_1(\zeta)) + \alpha = 0 \,. \tag{4}$$

Dabei ist $\zeta = r \cdot e^{i\varphi}$ eine Stelle auf dem Kreis $|z| = r$, wo der Betrag von w_0 das Maximum $M_0(r)$ erreicht, das heißt $|w_0(\zeta)| = \operatorname{Max}_{|z|=r} |w_0(z)|$; $\nu(r)$ der Zentralindex. Wegen (3) werden die Größen $|\eta_i| = O(r^{-1/4+\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, also beliebig klein.

Für eine subnormale Lösung w_0 ist

$$\limsup_{r=\infty} \log_2 M_0(r)/r = 0, \text{ das heißt } \log_2 M(r) = o(r) \,. \tag{5}$$

Außerhalb einer r-Menge von endlichem logarithmischem Maß unterliegt der Zentralindex $\nu(r)$ der bekannten Bedingung:

$\nu(r) < [\log M(r)]^{1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. Also gilt für w_0:

$$\log \nu(r)/r < \log_2 M_0(r) = o(r)\,. \tag{6}$$

Maximalrichtungen einer subnormalen Lösung von (1) können also nach (4) außerhalb einer r-Menge von endlichem logarithmischem Maß nur im Gebiet

$$-\tfrac{1}{2}\pi - \varepsilon(r) < \varphi_{\max} < +\tfrac{1}{2}\pi + \varepsilon(r) \qquad \lim_{r=\infty} \varepsilon(r) = 0 \tag{7}$$

liegen.

Weil in den Richtungen $-\frac{1}{2}\pi \leq \varphi \leq +\frac{1}{2}\pi$ sämtliche Koeffizienten der Gleichung (4) beschränkt sind, sind dort auch die Quotienten $\nu(r)/r$ beschränkt.

Nur in den Intervallen $\frac{1}{2}\pi < \varphi \leq \frac{1}{2}\pi + \varepsilon(r)$ [bzw. $-\frac{1}{2}\pi > \varphi \geq -\frac{1}{2}\pi - \varepsilon$] kann $\nu(r)/r$ unbeschränkt sein.

Für diese Richtungen vergleichen wir unter der Annahme, daß $\nu(r)/r$ unbeschränkt sei, die *Beträge* in (4) und bekommen ohne prinzipielle Schwierigkeiten durch Rechnung für ν/r außerhalb einer r-Menge von endlichem logarithmischem Maß die Abschätzung

$$1 - \vartheta_1(r) \leq \frac{e^{r \cdot \sin \varepsilon}}{\nu/r} \leq 1 + \vartheta_2(r) \qquad \lim_{\substack{r=\infty \\ i=1,2}} \vartheta_i(r) = 0 \tag{8}$$

Und ebenso durch Vergleich der *Realteile* der Glieder von (4) unter denselben Voraussetzungen und außerhalb derselben Ausnahmemenge

$$\frac{e^{r \cdot \sin \varepsilon}}{\nu/r} \cdot \cos r = \delta(r) \qquad \lim_{r=\infty} \delta(r) = 0 \tag{9}$$

(8) und (9) sind aber für ein $\varepsilon > 0$ nur vereinbar, wenn $\cos r = o(1)$, das heißt für diejenigen r, die einem ungeraden Vielfachen von $\frac{1}{2}\pi$ benachbart liegen. Diese r bilden eine Menge, die aus Teilintervallen Δr_n zusammengesetzt ist. Der Mittelpunkt von Δr_n liegt ungefähr bei $r_n = (2n+1)\frac{1}{2}\pi$. Das heißt in Δr_n gilt

$$r_n - o(1) < r < r_n + o(1), \;\text{ wo }\; \cos r = O[\sin(o(1))] = o(1)\,. \tag{10}$$

Außerhalb der WIMANschen Ausnahmeintervalle und der Intervalle Δr_n sind (8) und (9) unvereinbar, solange $\varepsilon > 0$ und ν/r unbeschränkt verlangt werden. Für $\varepsilon \leq 0$ ist aber ν/r nach oben gleichmäßig beschränkt. Also ist außerhalb den WIMANschen und den Δr_n-Intervallen

$$\nu/r \quad \textit{beschränkt}. \tag{11}$$

Im Innern eines Intervalles, das zwischen zwei Punkten liegt, wo ν/r

gleichmäßig beschränkt ist, läßt sich ν/r abschätzen, weil $\nu(r)$ eine nicht abnehmende Funktion von r ist, nämlich

r' liege im Intervall (r_{i-1}, r_i), also $r_{i-1} < r' < r_i$, mit $\nu(r_{i-1})/r_{i-1} \leq c_0$ und $\nu(r_i)/r_i \leq c_0$, dann ist $\nu(r')/r' \leq \nu(r_i)/r_i \cdot r_i/r' \leq \nu(r_i)/r_i \cdot r_i/r_{i-1}$.

Ist nun das betrachtete Intervall ein WIMANsches, so gilt $\lim\limits_{i=\infty} r_i/r_{i-1} = 1$.

Ist das betrachtete Intervall ein Δr_n, so gilt $\lim\limits_{i=\infty} r_i/r_{i-1} = 1$ ebenso, weil $r_i = r_{i-1} + o(1)$.

Also sind die Quotienten r_i/r' in beiden Fällen gleichmäßig beschränkt, also ist ν/r auch innerhalb der Ausnahmeintervalle gleichmäßig beschränkt, wenn ihre Endpunkte nicht zur andern Ausnahmemenge gehören.

Wie steht es aber für ein r innerhalb einer *Vereinigungs*menge der Δr_n und der WIMANschen Intervalle? – Wenn das logarithmische Maß aller Δr_n zusammen auch endlich wäre, so dürften wir schließen, daß auch die Vereinigungsmenge der beiden Ausnahmemengen von endlichem logarithmischem Maß ist, und nach unsern Überlegungen oben wäre dann ν/r überall gleichmäßig beschränkt. Aber die Voraussetzung für ε bzw. $\delta(r)$ ist zu schwach, daß daraus folgen würde, auch das logarithmische Maß der Δr_n ist endlich.

Es bleibt uns aber eine andere Möglichkeit, ν/r abzuschätzen: Zu untersuchen, wie groß die Intervalle sind, die durch die Vereinigung von Komponenten der *beiden* Ausnahmemengen entstehen. Nach oben ist ν/r dann beschränkt, wenn der Quotient r_i/r_{i-1}, der in dieser Abschätzung wesentliche Faktor, beschränkt ist. Unsere Frage lautet also: Können durch die beiden Sorten von Ausnahmeintervallen soviele aufeinanderfolgende Intervalle aneinandergehängt werden, daß das entstehende zusammengesetzte Intervall so groß ist, daß der Quotient r_i^*/r_{i-1}^* beliebig groß wird? (Wenn r_{i-1}^* und r_i^* die Endpunkte dieses Intervalles sind.) – Der Logarithmus dieses Quotienten ist aber das logarithmische Maß der Vereinigungsmenge der aneinandergehängten Intervalle (beider Sorten); er ist also höchstens so groß wie die Summe der logarithmischen Maße der einzelnen Intervalle, die das neue Intervall bilden, also *endlich*, wenn dieses von *endlich* vielen Intervallen beider Sorten zusammengesetzt worden ist.

Könnte aber der Fall eintreten, daß von einem gewissen $r > r_0$ an, die WIMANschen Ausnahmeintervalle durch die Δr_n zu *einem* Intervall verbunden würden? – Das wäre der Fall, wenn von diesem $r > r_0$ an die WIMANschen Intervalle alle, zwei aufeinanderfolgende Δr_n trennende Zwischenräume, das ist die *Komplementärmenge* der Δr_n überdeckten. Das wäre aber nur möglich, wenn das logarithmische Maß dieser Komplementärmenge *endlich* wäre. – Schätzen wir also das logarithmische Maß der Komplementärmenge der Δr_n ab!

Es ist $\langle r_k + o(1),\ r_{k+1} - o(1) \rangle$ das k-te Intervall dieser Menge, wenn $r_k = (2k+1) \cdot \frac{1}{2}\pi$, $k = 1, 2, \ldots$. Sein logarithmisches Maß also:

$$\log \frac{r_{k+1} - o(1)}{r_k + o(1)} = \log \frac{(2k+3)\frac{1}{2}\pi - o(1)}{(2k+1)\frac{1}{2}\pi + o(1)} \geq \log\left[1 + \frac{\pi - o(1)}{(2k+1)\frac{1}{2}\pi + 1}\right]$$

$$\geq \log\left[1 + \frac{1 - o(1)}{k + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}\right] > \log\left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k+1}\right].$$

Damit ist das logarithmische Maß der Komplementärmenge der Δr_n größer als

$$\log \prod_k^\infty \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{k+1}\right), \qquad \text{das ist aber mit } \sum_k^\infty \frac{1}{k+1} \quad \textit{divergent!}$$

Also wird die Komplementärmenge der Δr_n von den WIMANschen Intervallen nicht bedeckt.

Der Quotient r_i^*/r_{i-1}^* ist somit für jedes ursprüngliche oder zusammengesetzte Ausnahmeintervall endlich und folglich gilt:

v/r ist für *alle* r gleichmäßig beschränkt. (12)

Das heißt w_0 ist höchstens vom Mitteltypus erster Ordnung. (13)

(3) und (13) zusammen aber ergeben:

Wenn die Differentialgleichung (1) eine subnormale Lösung besitzt, so ist sie sogar *endlicher* Ordnung, nämlich vom

Mitteltypus erster Ordnung. (14)

Warum muß nun aber eine Lösung erster Ordnung der Differentialgleichungen (1) ein *Polynom* in e^z sein?

Das können wir zeigen, indem wir eine besondere Eigenschaft nachweisen, die allen Lösungen von endlicher Wachstumsordnung einer Differentialgleichung $w'' + a_1(z) \cdot w' + a_0(z) \cdot w = 0$ zukommt, wenn der transzendente Koeffizient $a_1(z)$ wesentlich stärker wächst als $a_0(z)$.

Zur Vereinfachung der Untersuchung setzen wir noch voraus, daß der schwächer wachsende Koeffizient a_0 ein Polynom sei.

Nehmen wir also an, die Differentialgleichung

$$w'' + a_1(z) \cdot w' + P(z) \cdot w = 0\,, \tag{15}$$

wo a_1 ganz-transzendent und $P(z)$ ein Polynom ist, besitze ein partikuläres Integral endlicher Ordnung w_0.

Dann gelten folgende Beziehungen:

I. $m(r, w_0'/w_0) = O(\log r)$ für jedes r. Aus (15) folgt durch leichte Umformung

$$w_0/w_0' = a_1(-1/P) + w_0''/w_0' \cdot (-1/P) ,$$

und daraus nach Übergang zur Schmiegungsfunktion

II. $m(r, w_0/w_0') \leq m(r, a_1) + O(\log r)$ für jedes r, weil die Schmiegungsfunktion einer rationalen Funktion $= O(\log r)$. Andererseits können wir (15) auch umformen in

$$P \cdot w_0/w_0' + w_0''/w_0' = -a_1 , \quad \text{also}$$

$$m(r, w_0/w_0') + m(r, P) + m(r, w_0''/w_0') \geq m(r, a_1) \quad \text{das heißt}$$

III. $m(r, w_0/w_0') \geq m(r, a_1) - O(\log r)$ für jedes r.

Für $m(r, a_1)$ setzen wir noch $T(r, a_1)$, denn a_1 ist ganz, und weil a_1 transzendent ist, gilt $\lim\limits_{r=\infty} \log r/T(r, a_1) = 0$. Also dürfen wir für große r II. und III. zusammenfassen in

$$m(r, w_0/w_0') \approx T(r, a_1) \quad \text{für} \quad r > r_0 . \tag{16}$$

Nach den bekannten Eigenschaften der charakteristischen Funktion gilt aber

$$\begin{aligned} m(w_0'/w_0) + N(w_0'/w_0) &= T(w_0'/w_0) = T(w_0/w_0') + O(1) \\ &= m(w_0/w_0') + N(w_0/w_0') + O(1) \end{aligned}$$

(wenn wir für $m(r, w, \infty)$ bzw. $N(r, w, \infty)$, $m(w)$ bzw. $N(w)$ schreiben). Daraus bekommen wir

$$O(\log r) + N(w_0'/w_0) \approx T(r, a_1) + N(w_0/w_0') \quad \text{für} \quad r > r_0 ,$$

also

$$N(r, w_0'/w_0, \infty) \approx N(r, w_0/w_0', \infty) + T(r, a_1) \quad \text{für} \quad r > r_0 . \tag{17}$$

Da w_0 Lösung einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung ist, deren Koeffizienten ganze Funktionen sind, so haben w_0 und w_0' keine *gemeinsame* Nullstelle, weil die Wronskische Determinante dieser Differentialgleichung nirgends verschwindet. Und da w_0 und alle ihre Ableitungen *ganze* Funktionen sind, haben w_0 und w_0' keine Pole. Folglich ist

$N(r, w_0'/w_0, \infty) = N(r, 1/w_0, \infty)$, das ist Nullstellenzahl von w_0 in $|z| < r$

und

$N(r, w_0/w_0', \infty) = N(r, 1/w_0', \infty)$, das ist Nullstellenzahl von w_0' in $|z| < r$.

(17) bedeutet also

$$\text{Nullstellenzahl von } w_0 \approx \text{Nullstellenzahl von } w_0' + T(r, a_1) . \tag{18}$$

Das heißt w_0' hat weniger Nullstellen als w_0. Es besteht ein Unterschied, der etwa so groß ist wie $T(r, a_1)$.

In den Differentialgleichungen (1) ist aber $T(r, a_1) = T(r, e^{-z}) = r/\pi$. Also verliert die erste Ableitung eines Integrales endlicher Ordnung gegenüber w_0 r/π Nullstellen in $|z| < r$. Insbesondere wird also die Anzahl der Nullstellen eines subnormalen Integrals w_0, das ja nach (14) vom Mitteltypus erster Ordnung ist, beim Differenzieren *wesentlich* vermindert[3]). Und wir haben

$$N(r, w_0', 0) = N(r, w_0, 0) + O(\log r) - r/\pi . \tag{19}$$

Die Ableitung w_0' ihrerseits genügt aber der Differentialgleichung dritter Ordnung

$$w''' + e^{-z} w'' - e^{-z} \cdot w' + \alpha w' = 0 , \tag{20}$$

die aus der Differentialgleichung (1) durch Differentiation hervorgeht.

Wenn wir $w_0' = (w_0'/e^z) \cdot e^z = w_1 \cdot e^z$ setzen, so ist w_1 eine ganze Funktion höchstens vom Mitteltypus erster Ordnung. In (20) setzen wir die entsprechenden Ableitungen von w_0', ausgedrückt durch w_1 und e^z, ein und bekommen nach Division durch e^z

$$w'' + (2 + e^{-z}) \cdot w' + (\alpha + 1) \cdot w = 0 \tag{21}$$

als Differentialgleichung für w_1. Diese Differentialgleichung ist linear, zweiter Ordnung, und ihre Koeffizienten erfüllen die Voraussetzungen der Differentialgleichung (15). Sie besitzt in w_1 ein partikuläres Integral *endlicher* Ordnung, daher verliert w_1 bei der Differentiation Nullstellen. Es ist

$$N(r, w_1', 0) = N(r, w_1, 0) - T(r, 2 + e^{-z}) + O(\log r) .$$

Aber nach Definition ist $N(r, w_1, 0) = N(r, w_0', 0)$ und wegen den bekannten Regeln für die charakteristische Funktion einer ganzen Funktion gilt $T(r, 2 + e^{-z}) = T(r, e^z) + O(1)$, also nach (19)

$$N(r, w_1', 0) = N(r, w_0, 0) - 2 \cdot r/\pi + O(\log r) . \tag{22}$$

Nun substituieren wir w_1' mit $e^z \cdot w_2$ und wiederholen dieses Verfahren. Mit Hilfe vollständiger Induktion zeigt man, daß nach n-maliger Wiederholung für w_{n+1} folgende Differentialgleichung gilt:

$$w'' + w'[2(n + 1) + e^{-z}] + w \cdot [(n + 1)^2 + \alpha] = 0 . \tag{23}$$

Nach Seite 2 Mitte und wegen der Konstruktion der Funktion w_{n+1} muß (23) ein partikuläres Integral vom Mitteltypus erster Ordnung besitzen, dessen Nullstellenzahl gegenüber der Nullstellenzahl von w_0 um $(n + 1) \cdot r/\pi$ vermindert ist:

$$N(r, w_{n+1}, 0) = N(r, w_0, 0) - (n + 1) \cdot r/\pi + O(\log r) . \tag{24}$$

---

[3]) Man kann sogar zeigen, daß 0 defekter Wert von w_0' wird.

Da w_0 selbst vom Mitteltypus erster Ordnung ist, so gilt

$$N(r, w_0, 0) = O(r) . \tag{25}$$

Somit existiert eine Konstante $c \geq 0$, so daß $N(r, w_0, 0) \leq c \cdot r$. Und also gibt es eine natürliche Zahl n, so daß

$$(n + 1) \cdot r/\pi \geq N(r, w_0, 0) + O(\log r) \quad \text{gilt.}$$

Das heißt, nach *endlich* vielen Wiederholungen des oben beschriebenen Verfahrens bekommen wir eine Differentialgleichung vom Typ (23), die ein part. Integral vom Mitteltypus erster Ordnung *ohne* Nullstellen besitzt.

Das sei nach genau k-maliger Ausführung des Prozesses der Fall. Dann heißt das part. Integral $w_k = e^{\beta z}$, β konst. Nach (23) ist w_k Lösung der Differentialgleichung

$$w'' + (2k + e^{-z}) w' + (k^2 + \alpha) \cdot w = 0 . \tag{26}$$

Darin setzen wir $w_k = e^{\beta z}$ ein und bekommen die Beziehung

$$\beta^2 + (2k + e^{-z}) \cdot \beta + (k^2 + \alpha) \equiv 0 .$$

Daraus folgt: $\beta = 0$, und deshalb $k^2 + \alpha = 0$.

Damit ein part. Integral von subnormalem Wachstum existiert, muß also *notwendig*

$$\alpha = - n^2, \; n \text{ natürliche Zahl, sein.} \tag{27}$$

Diese Bedingung ist aber auch *hinreichend:* Wenn nämlich auf eine Differentialgleichung

$$w'' + e^{-z} w' - n^2 \cdot w = 0 \tag{28}$$

das oben beschriebene Verfahren n-mal ausgeübt wird, so erfüllt w_n die Differentialgleichung

$$w'' + (2n + e^{-z}) w' + (n^2 - n^2) w = 0 , \quad \text{also}$$

$$w'' + (2n + e^{-z}) w' = 0 .$$

Diese hat das part. Integral $w_n = \text{konst.} \neq 0$.

Sei $w_n = c_1$, d. i. die erste Integrationskonstante. Dann gilt $w'_{n-1} = c_1 \cdot e^z$, also $w_{n-1} = c_1 \cdot e^z + c_2$ (c_2 hängt von der entsprechenden Differentialgleichung ab), $w'_{n-2} = e^z \cdot (c_1 \cdot e^z + c_2)$ usw. Es resultiert eine Funktion w_0, die wir durch Ausmultiplizieren auf die Form $w_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k e^{kz}$ bringen können. Q.e.d.

(Eingegangen den 1. Juni 1960)