Comment. Math. Helvetici 63 (1988) 184–193 0010-2571/88/020184-10$01.50 + 0.20/0

Sur une hypothèse de transversalité d'Arnold

Y. COLIN DE VERDIÈRE

Dans [AD], V. Arnold introduit certaines hypothèses de transversalité relatives aux valeurs propres d'une famille d'opérateurs autoadjoints.

Après avoir donné une définition précise d'une hypothèse forte (SAH = "strong Arnold's hypothesis") et d'une hypothèse faible (WAH = "weak Arnold's hypothesis"), nous prouvons les résultats suivants:

– L'hypothèse SAH est vérifiée pour toutes les valeurs propres positives du laplacien de S^2 pour la métrique canonique.

– L'hypothèse SAH est vérifiée pour toute valeur propre d'un tore plat de multiplicité ≤ 6 et non pour les autres. Cela fournit un contrexemple à l'hypothèse d'Arnold.

– Nous traitons ensuite le cas des laplaciens discrets sur certains graphes finis.

Tous ces résultats sont utilisables dans la construction de métriques riemanniennes ou de domaines euclidiens de $\mathbf{R}^n$ dont une partie finie du spectre est prescrit ([C–C], [CV3]). L'ensemble de ces résultats est annoncé dans [CV2].

Je tiens à remercier Michel Brion pour m'avoir aidé à traiter le cas de S^2.

1. L'hypothèse d'Arnold

Rappelons d'abord quelques éléments de la théorie des perturbations des valeurs propres multiples:

soit $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\mathbf{R}} \oplus \mathbf{C}$ le complexifié d'un espace de Hilbert réel et $(H_a)_{a \in T}$ une famille d'opérateurs autoadjoints réels sur $\mathbf{H}$ (i.e. définis sur $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}$) de même domaine $\mathbf{D} \subset \mathbf{H}$, dépendant continument de a variant dans l'espace topologique T au sens que $a \mapsto (H_a + i)^{-1}$ de T dans $\mathscr{L}(\mathbf{H}, \mathbf{D})$ est continue pour la norme. Soit alors λ_0 une valeur propre isolée de multiplicité finie n_0 de $H_0 (0 \in T)$, c'est à dire telle que $\lambda_0 \notin \text{sp.ess}\,(H_0)$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que le disque D de centre λ_0 et de rayon ε ne rencontre le spectre de H_0 qu'en λ_0.

Il existe alors un voisinage U de 0 dans T tel que, si $a \in U$, H_a admet dans D un nombre fini de valeurs propres dont la somme des multiplicités est n_0. De plus, le projecteur orthogonal P_0 de $\mathbf{H}$ sur la somme E_a de ces espaces propres dépend continument de a:

$$P_a = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma (\lambda - H_a)^{-1}\, d\lambda \quad \text{avec} \quad \gamma = bD.$$

Lorsque $a \to 0$, $E_a \to E_0$ et on définit la forme quadratique q_a sur E_0 par $q_a(f) = \langle H_a U_a f \mid U_a f \rangle$ où U_a est l'isométrie naturelle de E_0 sur E_a définie par:

$$U_a = \mathscr{B}(\mathscr{B}^* \mathscr{B})^{-1/2}$$

avec $\mathscr{B}x = x + \mathscr{B}x$ et $E_a = \text{graphe}\,(B)$, $B \in \mathscr{L}(E_0, E_0^\perp)$.

Il est clair que le spectre de q_a sur E_0 est (spectre $(H_a)) \cap D$.

Supposons maintenant que T est une variété C^k $(k \geq 0)$ et que q_a est définie sur un voisinage de 0 homéomorphe à une boule K d'un espace modèle. On désigne par

$$\Phi : K \to \mathscr{Q}(E_0) = \{\text{formes quadratiques réelles sur } E_0\}$$

l'application $a \mapsto q_a$ et on pose les:

DÉFINITIONS. On dira que la valeur propre λ_0 de H_0 vérifie l'hypothèse d'Arnold forte (SAH) (resp. l'hypothèse d'Arnold faible (WAH)) relativement à la famille $(H_a)_{a \in T}$ si Φ est une submersion en $a = 0$ (resp. Φ est essentielle sur $(\mathscr{Q}(E_0), \lambda_0 \langle . \mid . \rangle)$.)

Soit K un espace topologique, E un espace de Banach, $y_0 \in E$, $\Phi : K \to E$ continue, on dira que Φ est *essentielle* sur (E, y_0) s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, $\forall \Psi : K \to E$, continue, avec $\|\Psi - \Phi\|_{L^\infty(K)} \leq \varepsilon$, on a $y_0 \in \Psi(K)$.

L'ensemble de ces applications est un ouvert de $C(K, E)$. Lorsque K est une boule d'un espace vectoriel et Φ de classe C^1, si $\Phi(x_0) = y_0$ et $d\Phi(x_0)$ est surjective, Φ est essentielle sur (E, y_0).

On introduit de même les propriétés SAH et WAH pour une famille $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_N$ de valeurs propres isolées de multiplicités $n_i < \infty$ de H_0 dans la famille (H_a) en considérant l'application

$$\Phi : K \to \mathscr{Q}(E_1) \oplus \cdots \oplus \mathscr{Q}(E_N), \text{ somme des applications précédentes.}$$

Une condition *nécessaire* pour SAH et WAH est évidemment que:

$$\text{dimension}\,(T) \geq \sum_{i=1}^{N} \frac{n_i(n_i + 1)}{2}.$$

On peut également traiter le cas *non réel* de manière similaire: c'est le cas qui intervient pour la théorie de l'opérateur de Schrödinger en présence d'un champ magnétique.

La vérification de SAH se ramène à celle de la surjectivité de la différentielle de $\Phi : a \mapsto q_a$ en $a = 0$ et on a le:

CRITÈRE. Pour que λ_0 vérifie SAH, il faut et il suffit que la différentielle de $\Phi : a \mapsto \langle H_a . \mid . \rangle \in \mathcal{Q}(E_0)$ soit surjective en $a = 0$.

Preuve. On a

$$q_{a_t}(x, y) = \langle H_{a_t}(x + B_t x) \mid y + B_t y \rangle + O(t^2),$$

et donc

$$\dot{q}_0(x, y) = \langle \dot{H}_0 x \mid y \rangle + \langle H_0 \dot{B} x \mid y \rangle + \langle H_0 x \mid \dot{B} y \rangle$$

et comme $\dot{B} \in \mathcal{L}(E_0, E_0^{\perp})$, on a $\dot{q}_0(x, y) = \langle \dot{H}_0 x \mid y \rangle$.

Lorsque **H** et (ou) **D** dépendent de a, on peut souvent modifier les H_a par des transformations unitaires explicites pour se ramener à la théorie précédente. Traitons par exemple le cas où (X, g_0) est une variété riemannienne compacte de dimension 2 et la famille H_a celle des laplaciens Δ_a associés aux métriques $e^{2a} g_0 = g (a \in C^\infty(X, \mathbf{R}) = T)$, on a alors la:

PROPOSITION. $\lambda_0 (\neq 0)$ *vérifie SAH si*

$$h \mapsto \left((\varphi, \psi) \mapsto \int_X h \varphi \psi \right)$$

est surjective de $C^\infty(X)$ dans $\mathcal{Q}(E_0)$.

Preuve. $v_g = e^{2a} v_{g_0}$ et $\hat{\Delta} = e^{-a} \Delta_a e^{-a}$, où $\hat{\Delta}$ est le transporté de Δ_a sur $L^2(X, v_{g_0})$ par l'isométrie $Uf = e^{-a} f$ de $L^2(X, v_{g_0})$ sur $L^2(X, v_g)$. Le résultat est alors immédiat.

2. Cas de la sphère

THÉORÈME. *Soit (S^2, g_0) la sphère munie de la métrique usuelle et $\lambda_0 = l(l+1)$ ($l \geq 1$ entier) une valeur propre du laplacien. Alors λ_0 vérifie SAH* *relativement à la famille des laplaciens des métriques conformes à g_0. Il en est de même en ne considérant que les déformations invariantes par antipodie.*

Preuve. On désigne par $\mathcal{P}_{2l}$ l'espace des polynômes homogènes de degré $2l$ sur $\mathbf{R}^3$ et par $\mathcal{H}_l$ l'espace des harmoniques sphériques de degré l. D'après le §1, il suffit de montrer la surjectivité de l'application

$$F_l:\mathcal{P}_{2l}\to\mathcal{Q}(\mathcal{H}_l)\quad\text{définie par}\quad F_l:P\mapsto\left(q(\varphi)=\int_{S^2}P\varphi^2\right).$$

La transposée de F_l est l'application de $\mathcal{H}_l\circ\mathcal{H}_l\to\mathcal{P}_{2l}$ définie par $\varphi\circ\psi\mapsto\varphi\psi$. Comme $\dim(\mathcal{Q}(\mathcal{H}_l))=\dim(\mathcal{P}_{2l})\ (=(l+1)(2l+1))$, il suffit de montrer la surjectivité de ${}^tF_l$, c'est à dire que tout polynôme homogène de degré $2l$ est combinaison linéaire de produits d'harmoniques sphériques de degré l.

Comme tout sous-espace de $\mathcal{P}_{2l}$ contient une fonction zonale (invariante par rotation autour de Oz), il suffit visiblement de le montrer pour les éléments zonaux de $\mathcal{P}_{2l}$. Pour cela, on utilise des arguments classiques de la théorie des représentations linéaires qui m'ont été expliqués par Michel Brion. On note $a=x+iy$, $b=z$, $c=x-iy$ et on a une base de $\mathcal{P}_{2l}$ formée des $a^ub^vc^w$ avec $u+v+w=2l$. L'espace zonal est engendré par les monômes tels que $u=w$, l'algèbre de Lie de $SO(3)$ par les vecteurs

$$L_x=y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y},\quad L_y=\ldots\text{ et }L_z=\ldots.$$

On pose $W_\pm=L_y\pm iL_x$ et on a:

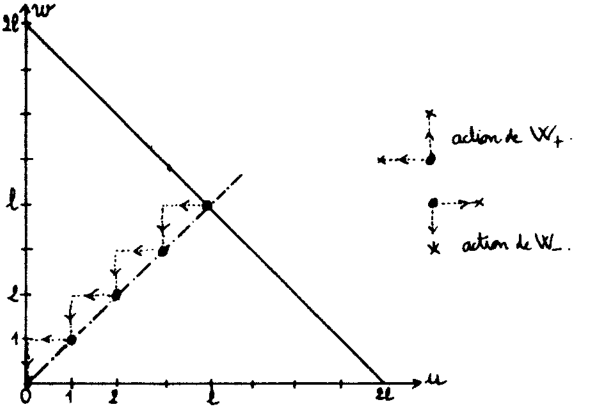
$$W_+(a)=2b,\ W_+(b)=-c,\ W_+(c)=0=W_-(a),\ W_-(b)=-a,\ W_-(c)=2b.$$

De plus cette algèbre de Lie opère sur $\mathcal{P}_{2l}$ par dérivation:

$$W_+(a^ub^vc^w)=2ua^{u-1}b^{v+1}c^w-va^ub^{v-1}c^{w+1}$$
$$W_-(a^ub^vc^w)=-va^{u+1}b^{v-1}c^w+2wa^ub^{v+1}c^{w-1}.$$

Dans le plan des (u,w), on a donc

$$W_+(e_{u,w})=\alpha e_{u,w+1}+\beta e_{u-1,w}$$
$$W_-(e_{u,w})=\alpha' e_{u,w-1}+\beta' e_{u+1,w},$$



où α, β, α' et β' ne sont nuls que s'ils sont coefficients d'un $e_{u',w'}$ avec $(u', v') \notin T$, où

$$T = \{(u, w) \in \mathbf{N}^2 \mid u + w \leq 2l\}.$$

Par applications successives de W_+ et W_- à partir de $e_{l,l} = (x^2 + y^2)^l = a^l b^l$ qui est produit de deux harmoniques sphériques, on obtient visiblement tous les monômes zonaux $e_{k,k}$ $(0 \leq k \leq l)$: le vecteur $a^l c^l$ est donc un vecteur cyclique de $\mathscr{P}_{2l}$, ce qui prouve le résulat.

3. Cas des tores plats

THÉORÈME. *Soit X un tore de dimension 2, muni d'une métrique plate, et λ_0 une valeur propre non nulle du laplacien, de multiplicité N, alors λ_0 vérifie SAH relativement à l'ensemble de toutes les métriques riemanniennes sur X si et seulement si $N \leq 6$.*

Cela fournit des contre-exemples à la conjecture d'Arnold, car on sait que N peut être supérieur à 6. Je ne sais pas ce qu'il en est pour l'hypothèse WAH.

Preuve. Soit $X = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$, toute métrique sur X s'écrit $\varphi^*(g)$, où φ est un difféomorphisme de X et

$$g = e^h(A\, dx^2 + 2B\, dx\, dy + C\, dy^2)$$

avec $\int_X e^h\, dx\, dy = 0$.

On est donc amené à considérer, pour $g_0 = A_0\,dx^2 + 2B_0\,dx\,dy + C_0\,dy^2$, une valeur propre $\lambda_0 \neq 0$ du laplacien. Soit

$$P = \{\mu = (m, n) \in \mathbf{Z}^2 \mid g_0^*(\mu) = \lambda_0\}$$

alors l'espace propre E_0 est engendré par les exponentielles $e_\mu(x, y) = \exp(2\pi i(mx + ny))$ où $\mu \in P$. Soit

$$d\Phi : C_0^\infty(X, \mathbf{C}) \oplus (\mathbf{C}\,dx^2 \oplus \mathbf{C}\,dx\,dy \oplus \mathbf{C}\,dy^2) \mapsto \mathcal{Q}(E_0) \otimes \mathbf{C}$$

la complexifiée de la différentielle de Φ en g_0, où $C_0^\infty(X, \mathbf{C}) = \{f \in C^\infty(X, \mathbf{C}) \mid \int_X f = 0\}$.

On a, d'après le §1:

$$[d\Phi(f \oplus 0)]_{\mu,\mu'} = C\int_X f e_\mu e_{\mu'}$$

avec $\mu, \mu' \in P$, et

$$[d\Phi(0 \oplus (\alpha\,dx^2 + 2\beta\,dx\,dy + \gamma\,dy^2))]_{\mu,\mu'}$$
$$= C\int_X \left[\alpha \frac{\partial e_\mu}{\partial x}\frac{\partial e'_\mu}{\partial x} + \beta\left(\frac{\partial e_\mu}{\partial x}\frac{\partial e'_\mu}{\partial y} + \frac{\partial e_\mu}{\partial y}\frac{\partial e'_\mu}{\partial x}\right) + \gamma \frac{\partial e_\mu}{\partial y}\frac{\partial e'_\mu}{\partial y}\right] dx\,dy.$$

Donc, si $\mu + \mu' \neq 0$, $\quad {}^t d\Phi(e_\mu \circ e_{\mu'}) = C^{te} e_{\mu+\mu'} \oplus \ldots$ si $\mu + \mu' = 0$,

$${}^t d\Phi(e_\mu \circ e_{-\mu}) = 0 \oplus C^{te}(m^2 \oplus 2mn \oplus n^2) \text{ où } \mu = (m, n).$$

Comme les $\mu + \mu'$ sont 2 à 2 distincts lorsque $\{\mu, \mu'\}$ sont distincts, on voit que l'injectivité ${}^t d\Phi$ se réduit au fait que les vecteurs (m^2, mn, n^2) sont linéairement indépendants pour les différentes valeurs de μ à symétrie près ($\mu \mapsto -\mu$). Ce qui est le cas si et seulement s'il y a moins de 3 telles paires, i.e. si $N \leq 6$.

4. Cas des graphes

Donnons d'abord quelques définitions: les graphes que nous allons considérer sont des graphes finis, non orientés et connexes; S sera l'ensemble des sommets et A, l'ensemble des arêtes, est un sous-ensemble de l'ensemble des parties à 2 éléments de S.

On se donne une mesure $\mu = \sum_{i\in S} V_i\,\delta(i)$ $(V_i > 0)$, $\mu_0 = \sum_{i\in S} \delta(i)$ sera appellée la mesure canonique. Un *laplacien combinatoire* Δ sur Γ est défini par la donnée de μ et d'une forme quadratique

$$q(x_i) = \sum_{a\in A} c_a (d_a x)^2 \quad \text{où} \quad d_a x = x_i - x_j \quad \text{si} \quad a = \{i, j\};$$

Δ est alors donné par:

$$(\Delta x)_i = \frac{1}{V_i} \sum_{\{i,j\}\in A} c_{\{i,j\}} (x_i - x_j)$$

Un *opérateur de Schrödinger* combinatoire est un opérateur de la forme $H = \Delta + V$, où V est diagonale.

Par la transformation unitaire $U(x_i) = \sqrt{V_i}\, x_i$ de $L^2(S, \mu)$ sur $L^2(S, \mu_0)$, on ramène un tel opérateur à un opérateur H de matrice symétrique $(H) = (a_{i,j})$ avec $a_{i,j} < 0$ si $\{i, j\} \in A$, $a_{i,j} = 0$ si $\{i, j\} \notin A$ et $i \neq j$. Ainsi nous considérons soit des laplaciens sur $L^2(S, \mu)$, soit des opérateurs de Schrödinger sur $L^2(S, \mu_0)$.

Soit C_N le *graphe complet* à N sommets, i.e. tel que tout couple de sommets distincts est l'ensemble des extrémités d'une arête; C_N a donc $N(N-1)/2$ arêtes.

On désigne aussi par E_N le *graphe en étoile* à N branches ($N+1$ sommets et N arêtes). On a les:

THÉORÈME 1. *Si $\lambda_1 = 0 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_N$ et $\mu = \sum_{i=1}^N V_i\,\delta(i)$ sont donnés, il existe un laplacien combinatoire sur (C_N, μ) ayant ce spectre avec multiplicités.*

De plus la partie $\mathrm{Sp}^*(\Delta) = \mathrm{Sp}(\Delta) - \{0\}$ *vérifie SAH relativement aux déformations de Δ à μ fixé.*

On a le même résultat, avec $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_N$, pour les opérateurs de Schrödinger H sur $L^2(C_N, \mu_0)$ avec SAH pour le spectre entier.

THÉORÈME 2. *Soit $\lambda_1 = 0 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{N+1}$, il existe μ et Δ sur (E_N, μ) ayant ce spectre et* $\mathrm{Sp}^*(\Delta)$ *vérifie SAH relativement aux déformations de Δ (μ variable).*

Remarque. Soit Δ_0 sur (E_N, μ_0) associé à $q_0(x_i) = \sum_{i=1}^N (x_0 - x_i)^2$, alors le spectre de Δ_0 est $0 < 1 = 1 = \cdots = 1 < (N+1)$ et la valeur propre 1 ne vérifie pas WAH relativement aux déformations de μ_0 et de Δ_0 si $N \geq 5$.

Les applications de ces résultats élémentaires sont à la construction de spectres prescrits, mais aussi à de curieux critères de non-plongement de graphes dans une surface (voir [CV2], [CV3] et [CV4]).

Par exemple, si un graphe Γ admet un opérateur de Schrödinger combinatoire de spectre $\lambda_1 < \lambda_2 = \cdots = \lambda_{k+2} < \ldots$ où λ_2 est de multiplicité k et vérifie WAH relativement aux déformations de H, alors Γ n'est planaire que si $k \leq 3$.

Preuve du théorème 1.

Hypothèse SAH. Soit $\Phi : \mathbf{R}_+^A \mapsto \mathcal{Q}(E_0)$, où

$$A = \{\text{arêtes de } C_N\}, \qquad E_0 = \{(x_i) \in L^2(S, \mu) \mid \langle (x_i) \mid 1 \rangle = 0\},$$

définie par

$$\Phi(c_{i,j}) = \sum_{i,j} c_{i,j}(x_i - x_j)^2 |_{E_0}.$$

A cause des dimensions, il suffit de vérifier l'injectivité. Cela est laissé au lecteur.

Le cas de Schrödinger est analogue.

Existence: elle se montre par récurrence sur le nombre N et la notion de *suspension* d'un graphe. Si Γ est un graphe fini à N sommets $\{1, 2, \ldots, N\}$, muni d'une mesure $\mu = \sum_{i=1}^N V_i\,\delta(i)$ et d'une forme quadratique

$$\sum_{a \in \mathcal{A}} c_a(d_a x)^2 \quad (c_a > 0),$$

on construit pour tout $V_0 > 0$ et $a > 0$ un graphe $S\Gamma$ de sommets $\{0, 1, 2, \ldots, N\}$, en joignant chaque sommet de Γ au nouveau sommet 0 par une arête. On l'équipe de la mesure $S\mu = V_0\,\delta(0) + \mu$ et de la forme quadratique

$$Sq(x_0, x_1, \ldots, x_N) = a \sum_{i=1}^{N} V_i(x_0 - x_i)^2 + q(x_1, \ldots, x_N).$$

Les valeurs propres non nulles de $S\Gamma$, muni de ce laplacien combinatoire sont les $\lambda_j + a$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$, λ_j valeurs propres de Γ et la valeur propre $\Lambda = a(1 + (\sum_{i=1}^N V_i)/V_0)$.

Soit à réaliser pour $S\Gamma$ le spectre

$$\Lambda_1 = 0 < \Lambda_2 \leq \cdots \leq \Lambda_{N+1}.$$

On choisit a tel que $a(1+(\sum_{i=1}^N V_i)/V_0)=\Lambda_2$. On doit alors avoir pour

$$2\leq j\leq N, \qquad \lambda_j=\Lambda_{j+1}-a>0, \quad (\text{car } \Lambda_2>a).$$

On raisonne alors par récurrence pour construire Γ ayant $0<\lambda_2\leq\cdots\leq\lambda_N$ comme spectre.

Preuve du théorème 2. Il est facile de vérifier que les valeurs propres non nulles sont les solutions de

$$\sum_{i=1}^N \frac{c_i}{(\lambda-(c_i/V_i))}=1,$$

et donc

$$0<\frac{c_1}{V_1}<\lambda_2<\frac{c_2}{V_2}<\cdots<\frac{c_N}{V_N}<\lambda_{N+1}$$

si les c_i/V_i sont 2 à 2 distincts et ordonnés.

On se donne la suite $0<\lambda_2<\lambda_3<\cdots<\lambda_{N+1}$ et on choisit a_i tels que $0<a_1<\lambda_2<a_2<\cdots<a_N<\lambda_{N+1}$. Les λ_i sont alors les solutions de $\sum_{i=1}^N c_i/(\lambda-a_i)=1$ et donc les $(-c_i)$ sont les résidus en $\lambda=a_i$ de $R(\lambda)=\prod_{i=2}^{N+1}(\lambda-\lambda_i)/(\lambda-a_i)$. Il est facile de vérifier que les c_i ainsi définis sont >0 et on pose $V_i=c_i/a_i$. L'application $(V_i, c_i)\mapsto(\lambda_j)_{j\geq 2}$ est une submersion, car le procédé précédent donne un relèvement analytique local où les c_i/V_i sont fixés, d'où SAH.

Pour la deuxième partie, il suffit de compter les dimensions: à cause de l'invariance par dilatation, on peut supposer $V_0=1$ et on a

$$\#\text{paramètres}=2N; \qquad \dim(\mathcal{Q}(E_0))=N(N-1)/2$$

et donc, si

$$N\geq 6, \qquad \dim\mathcal{Q}(E_0)>\#\text{paramètres}.$$

On ne peut avoir une application essentielle, donc WAH n'est pas vérifiée.

RÉFÉRENCES

[AD] V. ARNOLD, *Modes and quasi-modes*, Functional Anal. Appl., *6* (1972), 94–101.

[C–C] B. COLBOIS ET Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Sur la multiplicité de la première valeur propre d'une surface de Riemann à courbure constante*, Comment. Math. Helv., *63* (1988).

[CV1] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Sur la multiplicité de la première valeur propre non nulle du laplacien,* Comment. Math. Helv., *61* (1986), 254–270.

[CV2] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Spectres de variétés riemanniennes et spectres de graphes,* Proc. ICM. Berkeley, (1986).

[CV3] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Constructions de Laplaciens dont une partie finie du spectre est donnée,* soumis aux Annales de l'E.N.S., (1987).

[CV4] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Sur un nouvel invariant des graphes et un critère de planarité,* soumis à J. of combinatorial theory, (1987).

Université de Grenoble I
Institut Fourier
Laboratoire de Mathématiques
F-38402 Saint Martin d'Hères

Reçu le 27 octobre 1986