Comment. Math. Helvetici 67 (1992) 167–181 0010-2571/92/020167-15\$1.50 + 0.20/0

Une inégalité du type "Reilly" pour les sous-variétés de l'espace hyperbolique

A. El Soufi and S. Ilias

Soit (M, g) une variété riemanienne compacte connexe de dimension $m \geqq 2$. Dans [13], Reilly montre que, pour toute immersion isométrique ϕ de (M, g) dans l'espace euclidien $(\mathbb{R}^n, \text{can})$ on a:

$$\int_M H^2(\phi)\, dv \geqq \frac{\lambda_1(M)}{m} V(M) \tag{1}$$

où $H(\phi)$ est la norme de la courbure moyenne de ϕ, $\lambda_1(M)$ est la première valeur propre non nulle du laplacien de (M, g) et où dv et $V(M)$ sont respectivement l'élément de volume et le volume riemanniens de (M, g). De plus, l'égalité a lieu dans (1) si et seulement si $\phi(M)$ est contenu dans une sphère de rayon $\sqrt{m/\lambda_1(M)}$ et si ϕ est une immersion isométrique minimale de (M, g) dans cette sphère.

L'extension aux sous-variétés de la sphère canonique $(\mathbb{S}^n, \text{can})$ de l'inégalité de Reilly se fait de manière immédiate. En effet, pour toute immersion isométrique ϕ de (M, g) dans $(\mathbb{S}^n, \text{can})$ on a:

$$\int_M H^2(\phi)\, dv \geqq \left(\frac{\lambda_1(M)}{m} - 1\right) V(M). \tag{2}$$

(Cette inégalité s'obtient en appliquant (1) à l'immersion $i \circ \phi$ où i est l'injection canonique de $\mathbb{S}^n$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$).

En ce qui concerne les sous-variétés de l'espace hyperbolique $(\mathbb{H}^n, \text{can})$, le dernier résultat obtenu dans cette direction est celui de Heintze [8]: pour toute immersion isométique ϕ de (M, g) dans $(\mathbb{H}^n, \text{can})$ on a:

$$\text{Max}\, H^2(\phi) \geqq \frac{\lambda_1(M)}{m} + 1.$$

Dans le présent article, nous obtenons l'inégalité intégrale optimale qui étend celle de Reilly à ces sous-variétés.

THEOREME 1. *Pour toute variété riemanienne compacte (M, g) de dimension $m \geqq 2$ et pour toute immersion isométrique ϕ de (M, g) dans $(\mathbb{H}^n, \mathrm{can})$ on a*:

$$\int_M H^2(\phi)\, dv \geqq \left(\frac{\lambda_1(M)}{m} + 1\right) V(M). \tag{3}$$

De plus, l'égalité a lieu si et seulement si $\phi(M)$ est contenue dans une sphère géodésique de rayon $\operatorname{Arg\,sh} \sqrt{m/\lambda_1(M)}$ *et si ϕ est une immersion isométrique minimale de (M, g) dans cette sphère.*

En fait, il est facile de voir à partir du théorème de Takahashi (cf [10]) que les immersions ϕ pour lesquelles l'inégalité (3) est une égalité sont exactement les immersions de la forme $\phi = j \circ \phi'$ où ϕ' est une immersion isométrique de (M, g) dans une sphère euclidienne dont les composantes canoniques $\phi'_1, \ldots, \phi'_n$ sont des premières fonctions propres du laplacien et où j est un plongement totalement ombilique de cette sphère dans $\mathbb{H}^n$. De telles immersions existent en particulier lorsque (M, g) est un espace homogène irréductible (par exemple une sphère, un projectif réel, complexe, quaternionien ou de Cayley), un tore de Clifford, un tore équilatéral, etc... (cf [10]).

Dans le §4 de [8] consacré aux problèmes ouverts, Heintze pose le problème de déterminer la constante $C_m(\mathbb{H}^n)$ définie comme le supremum pour toutes les sous-variétés immergées M de dimension m de $\mathbb{H}^n$ de la différence $\lambda_1(M) - (m/V(M)) \int_M H^2(\phi)\, dv$. La réponse à cette question est contenue dans le Théorème 1 qui donne $C_m(\mathbb{H}^n) = -m$.

Notons aussi que les inégalités (1) et (2) restent valables pour les courbes de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{S}^n$. Quant à l'inégalité (3), Heintze fait remarquer dans sont article, en s'appuyant sur un travail de Langer et Singer [9], qu'elle est valable pour les courbes de $\mathbb{H}^n$ de longueur inférieure ou égale à 2π mais qu'elle n'est pas valable en général. C'est pour cela qu'il s'était alors posé la question de savoir sous quelles conditions de "petitesse" l'inégalité (3) pouvait avoir lieu pour les sous-variétés de $\mathbb{H}^n$. Notre Théorème 1 montre bien que le cas des courbes de $\mathbb{H}^n$ est en fait un cas spécial car l'inégalité (3) est valable pour toutes les sous-variétés de dimension $m \geqq 2$ *de* $\mathbb{H}^n$ sans aucune hypothèse supplémentaire.

Notre démonstration du Théorème 1 s'appuie sur le fait que $(\mathbb{H}^n, \mathrm{can})$ est conformément équivalent à un ouvert de $(\mathbb{S}^n, \mathrm{can})$. En fait, les résultats précédents peuvent se généraliser à toutes les variétés riemanniennes (N, h) de dimension n (non nécessairement complètes) telles qu'il existe une immersion conforme de (N, h) dans la sphère $(\mathbb{S}^n, \mathrm{can})$ de même dimension (cette dernière condition est vérifiée en particulier par $(\mathbb{R}^n, \mathrm{can})$, $(\mathbb{S}^n, \mathrm{can})$, $(\mathbb{H}^n, \mathrm{can})$ ainsi que par toute variété (N, h) simplement connexe et conformément plate). En effet, les inégalités (1), (2) et (3) sont des cas particuliers du résultat plus général suivant:

THEOREME 2. *Soit* (N, h) *une variété riemanienne de dimension* n *(éventuellement non complète) qui admet une immersion conforme dans la sphère* $(\mathbb{S}^n, \text{can})$. *Alors, pour toute variété riemannienne compacte* (M, g) *de dimension* $m \geqq 2$ *et pour toute immersion isométrique* ϕ *de* (M, g) *dans* (N, h), *on a*:

$$\int_M (H^2(\phi) + \bar{R}(\phi))\, dv \geqq \frac{\lambda_1(M)}{m} V(M) \tag{4}$$

où

$$\bar{R}(\phi)(x) = \frac{1}{m(m-1)} \sum_{i \neq j} K_N(d\phi(e_i), d\phi(e_j));$$

K_N *étant la courbure sectionnelle de* (N, h) *et* $\{e_i\}$ *une base orthonormée de* T_xM.

De plus, l'égalité a lieu si et seulement si $H^2(\phi) + \bar{R}(\phi)$ *est constant égal à* $\lambda_1(M)/m$.

Une mainère équivalente d'écrire l'inégalité (4) est:

$$\int_M |\tau(\phi)|^2\, dv \geqq (m-1)\lambda_1(M)V(M) - \int_M \text{Scal}_M\, dv \tag{5}$$

où Scal_M est la courbure scalaire de (M, g) et où $|\tau(\phi)|^2 = |\sigma(\phi)|^2 - mH^2(\phi)$; $|\sigma(\phi)|$ étant la norme de la seconde forme fondamentale de ϕ.

Dans le cas particulier où la courbure sectionnelle de (N, h) est majorée par un réel c, l'inégalité (4) nous donne:

$$\int_M H^2(\phi)\, dv \geqq \left(\frac{\lambda_1(M)}{m} - c\right) V(M). \tag{6}$$

Dans le cas des sous-variétés de dimension 2 l'inégalité (4) peut être améliorée. En effet, le résultat qu'obtiennent Li et Yau dans [11] pour les surfaces de $\mathbb{R}^n$ s'étend aisément aux surfaces de toutes les variétés (N, h) de dimension n qui admettent des immersions conformes dans la sphère $(\mathbb{S}^n, \text{can})$:

PROPOSITION 1. *Soit* (N, h) *une variété riemannienne de dimension* n *(éventuellement non complète) qui admet une immersion conforme dans* $(\mathbb{S}^n, \text{can})$. *Alors, pour toute immersion isométrique* ϕ *d'une surface* (M, g) *dans* (N, h), *on a*:

$$\int_M (H^2(\phi) + \bar{R}(\phi))\, dv \geqq \text{Sup}\,(V_c(M), 4\pi i(\phi))$$

où $V_c(M)$ *est le volume conforme de* (M, g) *et où* $i(\phi) = \text{Sup}\,\{\#\phi^{-1}(z); z \in N\}$.

Nous rappellerons à la fin du §2 la définition de $V_c(M)$. Notons seulement que cet invariant qui a été introduit par Li et Yau dans [11], ne dépend que de la classe conforme de (M, g) et vérifie $V_c(M) \geq \lambda_1(M)V(M)/2$ (cf [11]).

Enfin, dans le §3, nous donnons quelques applications concernant la stabilité des hypersurfaces minimales et des hypersurfaces à courboure moyenne constante.

1. Equation principale

Dans toute la suite on désignera par M une variété différentiable de dimension $m \geqq 2$ *et par* (N, h) une variété riemannienne de dimension $n \geqq m$. Pour toute immersion ϕ de M dans N on notera respectivement $\sigma(\phi)$ et $\eta(\phi)$ la *seconde forme fondamentale* et la *courbure moyenne* de ϕ considérée comme immersion isométrique de (M, ϕ^*h) dans (N, h) et on posera pour tous $X, Y \in TM$

$$\tau(\phi)(X, Y) = \sigma(\phi)(X, Y) - \phi^*h(X, Y)\eta(\phi).$$

L'immersion ϕ est dite *minimale* si $\eta(\phi) = 0$, *totalement ombilique* si $\tau(\phi) = 0$ et *totalement géodésique* si $\sigma(\phi) = 0$ (cette dernière hypothèse signifie que les images par ϕ des géodésiques de (M, ϕ^*h) sont des géodésiques de (N, h). Elle est automatiquement vérifiée si M et N ont même dimension).

Notons que l'invariant $\tau(\phi)$ ne dépend que de la classe conforme de la métrique h. En fait, nous aurons besoin de la propriété plus générale suivante:

LEMME 1. *Soit Π une immersion conforme totalement géodésique de (N, h) dans une autre variété riemannienne $(\tilde{N}, \tilde{h})$. On a*

$$\tau(\Pi \circ \phi) = d\Pi \circ \tau(\phi).$$

En particulier, si ϕ est totalement ombilique il en est de même de $\Pi \circ \phi$.

Preuve. Posons $h' = \Pi^*\tilde{h} = e^f h$. Du fait que Π est totalement gédésique on a, par un calcul immédiat:

$$\tau(\Pi \circ \phi) = d\Pi \circ \tau'(\phi)$$

où $\tau'(\phi) = \sigma'(\phi) - \eta'(\phi)\phi^*h'$ est l'invariant associé à l'immersion $\phi : M \to (N, h')$. D'autre part, l'expression de la connexion sous l'effet d'un changement conforme de métrique nous donne (voir par exemple [4]):

$$\sigma'(\phi) = \sigma(\phi) - \tfrac{1}{2}\phi^*h(\operatorname{grad} f)^{\perp} \circ \phi,$$

$$\eta'(\gamma) = e^{f \circ \phi}(\eta(\phi) - \tfrac{1}{2}(\operatorname{grad} f)^{\perp} \circ \phi)$$

où $(\operatorname{grad} f)^{\perp}$ est la partie normale à $\phi(M)$ du gradient de f pour la métrique h. On en déduit:

$$\tau'(\phi) = \tau(\phi).$$

D'où le résultat. □

Soit x un point de M et soit $\{e_i\}$ une base orthonormée de T_xM pour la métrique ϕ^*h. Les normes de $\eta(\phi)$, $\sigma(\phi)$ et $\tau(\phi)$ au point x sont données par:

$$H^2(\phi) = h(\eta(\phi), \eta(\phi)),$$
$$|\sigma(\phi)|^2 = \sum_{i,j} h(\sigma(\phi)(e_i, e_j), \sigma(\phi)(e_i, e_j)),$$
$$|\tau(\phi)|^2 = \sum_{i,j} h(\tau(\phi)(e_i, e_j), \tau(\phi)(e_i, e_j)).$$

Ces trois invariants sont liés par la relation immédiate suivante:

$$|\tau(\phi)|^2 = |\sigma(\phi)|^2 - mH^2(\phi).$$

On pose $\bar{R}(\phi) = (1/m(m-1)) \Sigma_{i \neq j} K_N(d\phi(e_i), d\phi(e_j))$ où K_N est la courbure sectionnelle de (N, h). L'objet de la proposition suivante est de donner l'expression de $H^2(\phi) + \bar{R}(\phi)$ sous l'effet d'un changement conforme de la métrique h.

PROPOSITION 2. *Soit Π une immersion conforme et totalement géodésique de (N, h) dans une variété riemannienne $(\tilde{N}, \tilde{h})$. On note f la fonction telle que $\Pi^*\tilde{h} = e^f h$. Pour toute immersion ϕ de M dans (N, h) on a*:

$$H^2(\phi) + \bar{R}(\phi) = e^{f \circ \phi}(H^2(\Pi \circ \phi) + \bar{R}(\Pi \circ \phi)) + \frac{m-2}{4m} |\nabla(f \circ \phi)|^2 - \frac{1}{m} \Delta(f \circ \phi)$$

où $|\nabla(f \circ \phi)|$ et $\Delta(f \circ \phi)$ sont respectivement la norme du gradient et le Laplacien de $f \circ \phi$ pour la métrique ϕ^*h.

Preuve. Du Lemme 1 on déduit

$$|\tau(\Pi \circ \phi)|^2 = e^{-f \circ \phi} |\tau(\phi)|^2.$$

Or, l'équation de Gauss donne:

$$|\tau(\phi)|^2 = |\sigma(\phi)|^2 - mH^2(\phi) = m(m-1)(H^2(\phi) + \bar{R}(\phi) - R(\phi^*h))$$

où $R(\phi^*h)$ est égal à $1/m(m-1)$ fois la courbure scalaire de (M, ϕ^*h). D'où

$$H^2(\phi) + \bar{R}(\phi) - R(\phi^*h) = e^{f \circ \phi}(H^2(\Pi \circ \phi) + \bar{R}(\Pi \circ \phi) - R((\Pi \circ \phi)^*\tilde{h})).$$

Les formules standards de changement conforme donnent (cf. [1]):

$$R((\Pi \circ \phi)^*\tilde{h}) = R(e^{f \circ \phi}\, \phi^* h) = e^{-f \circ \phi}\Big(R(\phi^* h) - \frac{m-2}{4m}\, |\nabla(f \circ \phi)|^2 + \frac{1}{m}\, \Delta(f \circ \phi)\Big).$$

Le résultat en découle immédiatement. □

Notons que si l'on désigne par $e(\Pi \circ \phi)$ la densité d'énergie de $\Pi \circ \phi$ considérée comme application de $(M, \phi^* h)$ dans $(\tilde{N}, \tilde{h})$, on a alors

$$e(\Pi \circ \phi) = \frac{m}{2}\, e^{f \circ \phi}.$$

Une application directe de la Proposition 2 est la suivante: pour toute variété riemannienne $(\tilde{N}, \tilde{h})$ on désigne par $I(N, \tilde{N})$ *l'ensemble de toutes les immersions conformes totalement géodésiques* de (N, h) dans $(\tilde{N}, \tilde{h})$ et on note $I(N)$ la réunion des $I(N, \tilde{N})$ lorsque $(\tilde{N}, \tilde{h})$ parcourt l'ensemble de toutes les variétés riemanniennes. On a alors le

COROLLAIRE 1. *On suppose M compacte. Pour toute immersion ϕ de M dans (N, h) on a*:

$$\int_M (H^2(\phi) + \bar{R}(\phi))\, dv \geqq \frac{2}{m} \sup \left\{ \int_M e(\Pi \circ \phi) \bar{R}(\Pi \circ \gamma)\, dv;\ \Pi \in I(N) \right\}.$$

2. Preuves des théorèmes

Ces théorèmes concernent le cas où M est compacte et où $I(N, \mathbb{S}^n)$ est non vide. Soit ϕ une immersion de M dans (N, h). Pour tout $\Pi \in I(N, \mathbb{S}^n)$ on a $\bar{R}(\Pi \circ \phi) = 1$. Le Corollaire 1 nous donne donc dans ce cas:

$$\int_M (H^2(\phi) + \bar{R}(\phi))\, dv \geqq \frac{2}{m} \operatorname{Sup} \left\{ \int_M e(\Pi \circ \phi)\, dv;\ \Pi \in I(N, \mathbb{S}^n) \right\}. \tag{7}$$

Fixons nous une immersion $\Pi \in I(N, \mathbb{S}^n)$ et considérons l'application $\Pi \circ \phi$. Par un argument devenu standard (cf. [11]) on sait qu'il existe un difféomorphisme conforme γ de $(\mathbb{S}^n$, can) tel que l'application $\psi = \gamma \circ \Pi \circ \phi$ ait son centre de masse à l'origine, i.e. $\int_M \psi_1\, dv = \cdots = \int_M \psi_{n+1}\, dv = 0$ où $\psi_1, \ldots, \psi_{n+1}$ sont les composantes canoniques de ψ. On pose $\Pi' = \gamma \circ \Pi \in I(N, \mathbb{S}^n)$. On a alors

$$\int_M e(\Pi' \circ \phi)\, dv = \frac{1}{2} \sum_i \int_M |\nabla \psi_i|^2\, dv \geqq \frac{\lambda_1(M)}{2} \sum_i \int_M \psi_i^2\, dv = \frac{\lambda_1(M)}{2} V(M) \tag{8}$$

où l'inégalité provient du principe du minimax.

L'inégalité (4) (et donc en particulier l'inégalité (3)) est démontrée.

Cas d'égalité dans le Théorème 2. Supposons que l'égalité ait lieu dans (4). L'argument utilisé ci-dessus nous dit que, pour tout $\Pi \in I(N, \mathbb{S}^n)$, il existe un difféomorphisme conforme γ de $(\mathbb{S}^n, \text{can})$ tel qu'on ait, en posant $\psi = \gamma \circ \Pi \circ \phi$:

$$\int_M (H^2(\phi) + \bar{R}(\phi))\, dv \geqq \frac{1}{m} \sum_i \int_M |\nabla \psi_i|^2\, dv \geqq \frac{\lambda_1(M)}{m} \sum_i \int_M \psi_i^2\, dv = \frac{\lambda_1(M)}{m} V(M).$$

Cette dernière inégalité est donc une égalité et par suite, les fonctions $\psi_1, \ldots, \psi_{n+1}$ sont des premières fonctions propres du Laplacien de (M, g). On en déduit:

$$e(\psi) = \frac{1}{2} \sum_i |\nabla \psi_i|^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_i \psi_i \Delta \psi_i - \Delta\left(\sum_i \psi_i^2\right)\right) = \lambda_1(M)/2.$$

L'équation de la Proposition 1 nous donne alors (avec $\Pi' = \gamma \circ \Pi$ et $e^{f \circ \phi} = \lambda_1(M)/m$)

$$H^2(\phi) + \bar{R}(\phi) = \frac{\lambda_1(M)}{m} (H^2(\psi) + 1).$$

En intégrant on voit bien que $H(\psi)$ est nul et que $H^2(\phi) + \bar{R}(\phi)$ est constant égal à $\lambda_1(M)/m$.

Cas d'égalité dans le Théorème 1. Supposons que $\phi(M)$ soit contenue dans une sphère géodésique S de courbure $\lambda_1(M)/m$ et que $\phi : M \to S$ soit minimale. Si l'on désigne par i l'injection canonique de S dans $\mathbb{H}^n$, on a alors $H^2(\phi) = H^2(i)$ (car les sphères géodésiques de $(\mathbb{H}^n, \text{can})$ sont des sous-variétés totalement ombiliques). De plus, on a par l'équation de Gauss: $H^2(i) = (\lambda_1(M)/m) + 1$. L'inégalité (3) est donc bien une égalité dans ce cas.

Pour montrer la réciproque, nous utilisons pour $\mathbb{H}^n$ le modèle de la pseudo-sphère de l'espace de Minkowski. En effet, soit $L_{n+1} = (\mathbb{R}^{n+1}, q)$ l'espace de Minkowski où q est la forme quadratique $q = (dy_1)^2 + \cdots + (dy_n)^2 - (dy_{n+1})^2$. L'espace hyperbolique est alors défini comme étant la sous-variété $\mathbb{H}^n = \{y \in \mathbb{R}^{n+1}; y_{n+1} > 0 \text{ et } q(y, y) = -1\}$ munie de la métrique riemannienne obtenue par restriction de q à son fibré tangent. L'application Π définie par $\Pi(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}) = (1/y_{n+1})(y_1, y_2, \ldots, y_n, 1)$ donne un plongement conforme de $(\mathbb{H}^n, \mathrm{can})$ dans $(\mathbb{S}^n, \mathrm{can})$. En fait, on a

$$\Pi^* \mathrm{can}_{\mathbb{S}^n} = \frac{1}{y_{n+1}^2} \mathrm{can}_{\mathbb{H}^n}.$$

(Autrement dit, l'application Π identifie l'espace hyperbolique à l'hémisphère nord munie de la métrique $(1/y_{n+1}^2)\,\mathrm{can}_{\mathbb{S}^n}$).

La suite de cette preuve est basée sur les deux lemmes suivants:

LEMME 3. *Soit γ un difféomorphisme conforme de* $(\mathbb{S}^n, \mathrm{can})$. *Il existe un vecteur unitaire $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ et un réel $t \geqq 0$ tels qu'on ait pour tout $z \in \mathbb{S}^n$:*

$$\gamma^* \mathrm{can}|_z = (\langle z, a\rangle \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t)^{-2} \mathrm{can}|_z,$$

où $\langle\ ,\ \rangle$ est le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Preuve. Rappelons que (voir le lemme du §1 de [6]) pour tout difféomorphisme conforme γ de $(\mathbb{S}^n, \mathrm{can})$, il existe un réel $t \geqq 0$, un vecteur unitaire $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ et une isométrie $r \in 0(n+1)$ tels qu'on ait $\gamma = r\gamma_t^a$, où $(\gamma_t^a)_t$ est le flot du champ de vecteurs A obtenu en projetant le champ constant a sur $T\mathbb{S}^n$ (i.e. $A(z) = a - \langle z, a\rangle z$). Par suite, on a $\gamma^* \mathrm{can} = (\gamma_t^a)^* \mathrm{can}$. Si α est la fonction telle que $\gamma^*\mathrm{can} = \alpha\, \mathrm{can}$ on a alors, pour tout $z \in \mathbb{S}^n \backslash \{\pm a\}$

$$\alpha(z) = |d\gamma(A(z))|^2/|A(z)|^2 = |d\gamma_t^a(A(z))|^2/|A(z)|^2.$$

Or, on a $|A(z)|^2 = 1 - \langle z, a\rangle^2$ et $|d\gamma_t^a(A(z))|^2 = |A(\gamma_t^a(z))|^2 = 1 - \langle \gamma_t^a(z), a\rangle^2$. D'où

$$\alpha(z) = (1 - \langle \gamma_t^a(z), a\rangle^2)/1 - \langle z, a\rangle^2. \tag{9}$$

D'autre part on a:

$$\frac{d}{ds}\langle \gamma_s^a(z), a\rangle = \langle A(\gamma_s^a(z)), a\rangle = 1 - \langle \gamma_s^a(z), a\rangle^2.$$

On en déduit, après intégration:

$$\langle \gamma_t^a(z), a\rangle = (\operatorname{th} t + \langle z, a\rangle)/(\langle z, a\rangle \operatorname{th} t + 1).$$

On reporte cette dernière expression dans (9) pour obtenir le résultat. □

LEMME 5. *Soit* γ *un difféomorphisme conforme de* $(\mathbb{S}^n, \mathrm{can})$. *Pour tout réel* $k > 0$ *on pose* $S_k = \{y \in \mathbb{H}^n \text{ t.q. } (\gamma \circ \Pi)^* \mathrm{can}_{\mathbb{S}^n}|_y = k \,\mathrm{can}_{\mathbb{H}^n}|_y\}$. *Alors il existe un réel* $k_0 > 0$ *tel que*: (i) S_k *soit une hypersphère géodésique pour* $k \in]0, k_0[$, (ii) S_k *soit réduit à un point pour* $k = k_0$, (iii) S_k *soit vide pour* $k > k_0$.

Preuve. D'après le lemme précédent, il existe un vecteur $a \in \mathbb{S}^n$ et un réel $t \geqq 0$ tels qu'on ait pour tout $y \in \mathbb{H}^n$:

$$(\gamma \circ \Pi)^* \mathrm{can}_{\mathbb{S}^n}|_y = \Pi^* \gamma^* \mathrm{can}_{\mathbb{S}^n}|_y = (y_{n+1}(\langle a, \Pi(y)\rangle \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t))^{-2} \mathrm{can}_{\mathbb{H}^n}|_y.$$

Par suite, on a

$$S_k = \left\{ y \in \mathbb{H}^n \text{ t.q. } \operatorname{sh} t \sum_1^n a_i y_i + \operatorname{ch} t y_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{k}} - a_{n+1} \operatorname{sh} t \right\}.$$

On pose

$$b = \frac{\operatorname{sh} t}{\sqrt{1 + a_{n+1}^2 \operatorname{sh}^2 t}} \left(-a_1, \ldots, -a_n, \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t} \right).$$

Le point b ainsi défini appartient à $\mathbb{H}^n$ (i.e. $q(b, b) = -1$) et on a:

$$S_k = \{ y \in \mathbb{H}^n \text{ t.q. } q(b, y) = C(k) \}$$

où $C(k) = (a_{n+1} \operatorname{sh} t - k^{-1/2}) / \sqrt{1 + a_{n+1}^2 \operatorname{sh}^2 t}$.

Or, on a $q(b, y) \leqq -1$ pour tous b et $y \in \mathbb{H}^n$. Par suite, S_k est vide dès que l'on a $C(k) > -1$, i.e. dès que l'on a $k > k_0 = (a_{n+1} \operatorname{sh} t + \sqrt{a_{n+1}^2 \operatorname{sh}^2 t + 1})^{-2}$. Par contre, si $C(k)$ est inférieur ou égal à -1 (i.e. $k \leqq k_0$) on a

$$S_k = \{ y \in \mathbb{H}^n \text{ t.q. } d(b, y) = \operatorname{Arg ch} (-C(k)) \}$$

où $d(b, y) = \operatorname{Arg ch}(-q(b, y))$ est la distance géodésique de b à y dans $(\mathbb{H}^n, \mathrm{can})$. D'où $S_{k_0} = \{b\}$ et, pour tout $k \in]0, k_0[$, S_k est l'hypersphère géodésique de centre b et de rayon $\operatorname{Arg ch}(-C(k))$. □

Supposons maintenant qu'on ait l'égalité dans (3). Par les mêmes arguments utilisés pour le cas d'égalité du Théorème 2, on montre l'existence d'un difféomorphisme conforme γ de $(\mathbb{S}^n, \mathrm{can})$ tel qu'on ait $H(\gamma \circ \Pi \circ \phi) = 0$ et $e(\gamma \circ \Pi \circ \phi) = \lambda_1(M)/2$. La dernière condition signifie qu'en tout point x de M on a:

$$(\gamma \circ \Pi)^* \mathrm{can}_{\mathbb{S}^n}|_{\phi(x)} = \frac{\lambda_1(M)}{m} \mathrm{can}_{\mathbb{H}^n}|_{\phi(x)}. \tag{10}$$

On en déduit, par le Lemme 3, que $\phi(M)$ est contenue dans une sphère géodésique S de $(\mathbb{H}^n, \mathrm{can})$. Posons $S' = \gamma \circ \Pi(S)$. Comme les sphères géodésiques de $\mathbb{H}^n$ sont totalement ombiliques et comme la totale ombilicité est conservée par changement conforme de la métrique de l'espace ambiant, S' est donc une sphère géodésique de $(\mathbb{S}^n, \mathrm{can})$ qui contient $\gamma \circ \Pi \circ \phi(M)$. Or, puisque $H(\gamma \circ \Pi \circ \phi) = 0$, cette sous-variété est minimale dans $(\mathbb{S}^n, \mathrm{can})$ et ne peut donc être contenue dans aucune hémisphère. Par suite, S' est nécessairement une grande sphère de courbure 1 (i.e. un équateur). D'après (10), S est donc une sphère géodésique de courbure sectionnelle $\lambda_1(M)/m$ (donc de rayon $\operatorname{Arg\,sh} \sqrt{m/\lambda_1(M)}$) pour la métrique induite par $\mathrm{can}_{\mathbb{H}^n}$.

Reste à montrer que $\phi(M)$ est minimale dans S. En effet, si l'on note $\bar{H}(\phi)$ la norme de la courbure moyenne de $\phi(M)$ dans S et i l'injection canonique (totalement ombilique) de S dans $\mathbb{H}^n$ on aura

$$H^2(\phi) = \bar{H}^2(\phi) + H^2(i) = \bar{H}^2(\phi) + 1 + \frac{\lambda_1(M)}{m}.$$

Or, on a (cas d'égalité du Théorème 2): $H^2(\phi) = 1 + (\lambda_1(M)/m)$. D'où $\bar{H}(\phi) = 0$, ce qui achève la démonstration. □

Cas des sous-variétés de dimension 2. Dans [11], Li et Yau définissent le volume conforme, noté $V_c(\psi)$, d'une immersion $\psi : M \to (\mathbb{S}^n, \mathrm{can})$ par:

$$V_c(\psi) = \operatorname{Sup} \{\operatorname{Vol}(\gamma \circ \psi); \gamma \in G(n)\}$$

où $\operatorname{Vol}(\gamma \circ \psi)$ désigne le volume riemannien de M pour la métrique $(\gamma \circ \psi)^*\mathrm{can}$ et où $G(n)$ est le groupe des difféomorphismes conformes de $(\mathbb{S}^n, \mathrm{can})$. Si $[g]$ est une classe conforme de métriques sur M, ils appellent *volume conforme* de M pour cette classe conforme la quantité:

$$V_c(M) = \operatorname*{Inf}_{n \geq 2} \operatorname{Inf} \{V_c(\psi); \psi \in \mathscr{C}(M, \mathbb{S}^n)\}$$

où $\mathscr{C}(M, \mathbb{S}^n)$ est l'ensemble de toutes les immersions conformes de (M, g) dans $(\mathbb{S}^n, \mathrm{can})$. De plus, ils montrent que pour toute immersion $\psi : M \to \mathbb{S}^n$ on a:

$$V_c(\psi) \geq 4\pi i(\psi)$$

où $i(\psi) = \operatorname{Sup} \{\# \psi^{-1}(z); z \in \mathbb{S}^n\}$.

Maintenant, dans le cas où M est de dimension 2, on a, pour toute immersion $\phi : M \to (N, h)$ et tout $\Pi \in I(N, \mathbb{S}^n)$:

$$\int_M e(\Pi \circ \phi)\, dv = \mathrm{Vol}\,(\Pi \circ \phi).$$

L'inégalité (7) devient donc dans ce cas:

$$\begin{aligned}\int_M (H^2(\phi) + \bar{R}(\phi))\, dv &\geqq \mathrm{Sup}\,\{\mathrm{Vol}\,(\Pi \circ \phi); \Pi \in I(N, \mathbb{S}^n)\}\\ &\geqq \mathrm{Sup}\,\{V_c(\Pi \circ \phi); \Pi \in I(N, \mathbb{S}^n)\}.\end{aligned}$$

Ceci démontre la Proposition 1 car, pour tout $\Pi \in I(N, \mathbb{S}^n)$ on a $V_c(\Pi \circ \phi) \geqq \mathrm{Sup}\,\{4\pi i(\phi); V_c(M)\}$.

Remarque. Pour illustrer la Proposition 1 prenons le cas où M est le plan projectif réel $\mathbb{R}P^2$. Dans ce cas, on sait qu'il existe une unique classe conforme de métriques et que l'on a $V_c(\mathbb{R}P^2) = 6\pi$ (cf [11]). D'où, pour toute immersion ϕ de $\mathbb{R}P^2$ dans (N, h) on a:

$$\int_M (H^2(\phi) + \bar{R}(\phi))\, dv \geqq \mathrm{Sup}\,(6\pi, 4\pi i(\phi)).$$

(Rappelons que si N est de dimension 3, alors $i(\phi)$ est au moins égal à 2 et donc le second membre de l'inégalité ci-dessus est supérieur ou égal à 8π). Les calculs concernant les volumes conformes des différentes classes conformes du tore T^2 fournissent d'autres exemples permettant d'expliciter la Proposition 1 (cf [11] et [12])

COROLLAIRE 2. *Soit M une surface compacte orientable de genre β et soit (N, h) une variété riemannienne de dimension n vérifiant $I(N, \mathbb{S}^n) \neq \phi$. Alors, pour toute immersion ϕ de M dans (N, h) on a*:

$$\int_M |\tau(\phi)|^2\, dv \geqq 8\pi(\beta + i(\phi) - 1).$$

Preuve. Ce résultat est une conséquence directe du Théorème 2, de l'équation de Gauss $|\tau(\phi)|^2 = 2(H^2(\phi) + \bar{R}(\phi)) - \mathrm{Scal}_M$ et de l'équation de Gauss–Bonnet

$$\int_M \mathrm{Scal}_M\, dv = 8\pi(1 - \beta). \qquad \square$$

3. Applications

Nous commençons par montrer que la majoration de la première valeur propre non nulle $\lambda_1(M)$ du Laplacien Δ d'une sous-variété M par des invariants extrinsèques donnée dans le Théorème 2 peut être généralisée à des opérateurs du type $\Delta + W$ où W est une fonction différentiable quelconque sur M. En effet, on a le:

THEOREME 3. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $m \geqq 2$ et soit (N, h) une variété riemannienne de dimension n telle que $I(N, \mathbb{S}^n)$ soit non vide. Alors pour toute fonction différentiable W sur M et toute immersion isométrique ϕ de (M, g) dans (N, h) on a*:

$$\lambda_1(\Delta + W) \leqq \frac{m}{V(M)} \int_M (H^2(\phi) + \bar{R}(\phi))\, dv + \bar{W}$$

où $\lambda_1(\Delta + W)$ est la seconde *valeur propre de l'opérateur $\Delta + W$ et où $\bar{W} = (1/V(M)) \int_M W\, dv$ est la valeur moyenne de W sur (M, g).*

De plus, lorsque m est supérieur ou égal à 3, l'égalité a lieu si et seulement si W est constante et si $H^2(\phi) + \bar{R}(\phi)$ est constant égal à $\lambda_1(M)/m$.

Preuve. Il suffit de remarquer (cf. [7], Lemme 1) que pour tout $\Pi \in I(N, \mathbb{S}^n)$, il existe un difiéomorphisme conforme γ de $(\mathbb{S}^n, \mathrm{can})$ tel que les composantes canoniques de $\psi = \gamma \circ \Pi \circ \phi$ soient orthogonales (au sens L^2) au premier espace propre de $\Delta + W$ (rappelons que cet espace est de dimension 1 et qu'il est engendré par une fonction strictement positive). Le reste de la preuve se fait par des arguments semblables à ceux utilisés dans la preuve du Théorème 2. □

Dans toute la suite, la variété M sera supposée compacte orientable de dimension $m = n - 1$.

Soit ϕ une immersion minimale de M dans une variété (N, h) orientable. Une telle immersion est en fait un point critique de la fonctionnelle volume. Comme, dans ce cas, le fibré normal de ϕ est trivial, la variation seconde de cette fonctionnelle s'exprime à l'aide de la forme quadratique associée à l'opérateur suivant, dit opérateur de Jacobi, (cf. [10]):

$$L_\phi = \Delta - \bar{\rho}(\phi) - |\sigma(\phi)|^2$$

où $\bar{\rho}(\phi) = \mathrm{ric}_N(\nu, \nu)$ est la courbure de ricci de (N, h) dans la direction du champ normal unitaire ν. On appelle alors *indice* de ϕ le nombre de valeurs propres strictement négatives de L_ϕ. Une immersion d'indice zéro est dite *stable*.

On note $Z_N = \mathrm{ric}_N - (\mathrm{Scal}_N/n)h$ le tenseur d'Einstein de (N, h) où Scal_N est la courbure scalaire de (N, h). On a alors:

THEOREME 4. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte orientable de dimension $m \geqq 2$ et soit (N, h) une variété riemannienne de dimension $m + 1$ telle que $I(N, \mathbb{S}^{m+1})$ soit non vide. Si $\phi : (M, g) \to (N, h)$ est une immersion isométrique minimale d'indice inférieur ou égal à 1 alors on a:*

$$\int_M |\sigma(\phi)|^2 \, dv \leqq -\frac{m+1}{m-1} \int_M Z_N(v, v) \, dv.$$

En particulier, si (N, h) est de courbure sectionnelle constante, alors toute immersion isométrique minimale d'indice $\leqq 1$ de (M, g) dans (N, h) est totalement géodésique.

Preuve. Notons tout d'abord que N est nécessairement orientable car $I(N, \mathbb{S}^{m+1}) \neq \phi$. L'hypothèse sur l'indice de ϕ entraîne que la seconde valeur propre $\lambda_1(L_\phi)$ de L_ϕ est positive ou nulle. On a donc, d'après le Théorème 3:

$$0 \leqq \lambda_1(L_\phi) \leqq \frac{1}{V(M)} \left[m \int_M (H^2(\phi) + \bar{R}(\phi)) \, dv - \int_M (\bar{\rho}(\phi) + |\sigma(\phi)|^2) \, dv \right].$$

Comme $H(\phi)$ est nul, ceci donne:

$$\int_M |\sigma(\phi)|^2 \leqq \int_M (m\bar{R}(\phi) - \bar{\rho}(\phi)) \, dv.$$

Or on a:

$$m\bar{R}(\phi) - \bar{\rho}(\phi) = \frac{1}{(m-1)} (\mathrm{Scal}_N - (m+1)\bar{\rho}(\phi)) = -\frac{m+1}{m-1} Z_N(v, v)$$

D'où le résultat. □

Soit maintenant une immersion ϕ de M dans (N, h) à courbure moyenne constante (i.e. $H(\phi) = \mathrm{cte}$). Une telle immersion est en fait un extrêma lié de la fonctionnelle volume. D'après Barbosa et do Carmo (cf. [2] et [3]), on dira que l'immersion ϕ est stable si on a $\int_M uL_\phi(u) \, dv \geqq 0$ pour toute fonction u telle que $\int_M u \, dv = 0$.

THEOREME 5. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte orientable de dimension $m \geqq 2$ et soit (N, h) une variété riemannienne de dimension $m + 1$ telle que*

$I(N, S^{m+1})$ soit non vide. Si ϕ est une immersion isométrique à courbure moyenne constante stable de (M, g) dans (N, h) alors on a:

$$\int_M |\tau(\phi)|^2 \, dv \leqq -\frac{m+1}{m-1} \int_M Z_N(v, v) \, dv.$$

En particulier, si (N, h) est de courbure sectionnelle constante, alors toute immersion isométrique à courbure moyenne constante stable de (M, g) dans (N, h) est totalement ombilique.

Preuve. Il est clair, d'après la caractérisation variationnelle des valeurs propres, que la stabilté de ϕ entraîne la positivité de $\lambda_1(L_\phi)$. Le reste de la preuve est identique à celle de Théorème 4. □

Remarque. Une conséquence du Théorème 5 est que, dans le cas où (N, h) est isométrique à $(\mathbb{S}^{m+1}, \text{can})$, $(\mathbb{R}^{m+1}, \text{can})$ ou $(\mathbb{H}^{m+1}, \text{can})$, les hypersphères géodésiques sont en fait les seules hypersurfaces compactes orientables à courbure moyenne constante stables de (N, h). Ce résultat avait été obtenu par Barbosa et do Carmo [2] dans le cas $(N, h) = (\mathbb{R}^{m+1}, \text{can})$ et par Barbosa, do Carmo et Eschenburg [3] dans les cas $(N, h) = (\mathbb{S}^{m+1}, \text{can})$ et $(\mathbb{N}, h) = (\mathbb{H}^{m+1}, \text{can})$. Dans un précédent article [5], nous avions obtenu de manière indépendante ce résultat dans les cas $(N, h) = (\mathbb{S}^{m+1}, \text{can})$ et $(N, h) = (\mathbb{H}^3, \text{can})$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Aubin T., *Nonlinear Analysis on manifolds, Monge-Ampère equation*, Grundlehren Math. Wiss., Vol. 252 (1982).

[2] Barbosa L., Do Carmo M., *Stability of hypersurfaces with constant mean curvature*, Math. Z., *185*, 339–353 (1984).

[3] Barbosa L., Do Carmo M., Eschenburg J., *Stability of hypersurfaces of constant mean curvature in riemannian manifolds*, Math. Z. *197*, 123–138 (1988).

[4] Chen B. Y., *Total Mean Curvature and Submanifolds of Finite Type*. Series in Pure Math. Vol. 1, World Scientific (1984).

[5] El Soufi A., Ilias S., *Sur l'existence des hypersurfaces minimales stables ou d'indice 1*, et des hypersurfaces à courbure moyenne constante stables. Prépublication de l'Institut Fourier (Grenoble), n⁰ 94, (1987).

[6] El Soufi A., Ilias S., *Immersions minimales, première valeur propre du Laplacien et volume conforme*, Math. Ann. 275, 257–267 (1986).

[7] El Soufi A., Ilias S., *Opérateurs de Schrödinger sur une variété riemannienne et volume conforme*, Prépublication de l'Institut Fourier (Grenoble), n⁰ 83, (1987).

[8] Heintze E., *Extrinsic upper bound for λ_1*, Math. Ann. *280*, 389–402 (1988).

[9] Langer J., Singer T. A., *The total squared curvature of closed curves*, J. Diff. Geo. *20*, 1–22 (1984).

[10] Lawson H. B., *Lectures on minimal submanifolds*, Lecture series 9. Berkeley: Publish or perish (1980).

[11] Li P., Yau S. T., *A new conformal invariant and its application etc*, Invent. Math. *69*, 269–291 (1982).

[12] Montiel S., Ros A., *Minimal immersions of surfaces by the first eigen functions and conformal area*, Invent. Math. *83*, 153–166 (1986);

[13] Reilly R. C., *On the first eigenvalue of the Laplacian for compact submanifolds of Euclidean space*, Comment. Math. Helv. *52*, 525–533 (1977).

Université de TOURS
Faculté des Sciences
Départment de Mathématiques
Parc Grandmont
37200 TOURS

Received February 2, 1990