

Reseaux électriques planaires II

YVES COLIN DE VERDIÈRE, ISIDORO GITLER, DIRK VERTIGAN

Introduction

Cet article est la suite de [REP1]. Nous y résolvons complètement les problèmes directs et inverses pour la réponse d'un réseau électrique planaire purement résistif.

Des éléments de solution, dus à Ron Foster sont déjà annoncés par L. Weinberg dans [WE], mais ne semblent pas avoir donné lieu à publication. D'autre part, Curtis, Ingerman et Morrow [C-I-M] ont obtenu récemment des résultats voisins par des méthodes différentes faisant un grand usage d'algèbre linéaire et ne couvrant que les réseaux minimaux. Nos preuves sont plus géométriques et exploitent à fond les possibilités du graphe médial.

Les notations et résultats de [REP1] seront utilisés sans commentaire particulier.

L'idée nouvelle de cet article est celle de transformation électrique élémentaire: ces transformations engendrent une invariance du problème et tiennent donc lieu de générateurs d'un "groupe de symétrie" du problème.

Ces transformations, au nombre de 6, peuvent se lire au niveau combinatoire: elles modifient le réseau sans changer son caractère planaire, ni affecter les couples Γ -connectés.

Au niveau électrique, elles donnent lieu à des transformations $(\Gamma, \rho) \rightarrow (\Gamma', \rho')$ ne modifiant pas la réponse du réseau: elles sont donc associées à une relation d'équivalence que doit prendre en compte toute solution du problème inverse, c'est-à-dire la reconstruction de couples (Γ, ρ) planaires de réponse donnée.

Ces transformations seront notées (B), (BM), (S), (P), $(Y - \Delta)$ et $(\Delta - Y)$.

(B) (*boucle*) consiste à effacer une boucle de sommet a .

(BM) (*bras mort*) consiste à effacer un sommet a de degré 1 ($a \notin V_0$) et l'arête qui en est issue.

(S) (*série*) consiste à effacer un sommet a ($a \notin V_0$) de degré 2 et les 2 arêtes qui lui sont adjacentes, et à joindre les 2 voisins b et c de a par une arête unique.

(P) (*parallèle*) consiste à remplacer une arête double joignant 2 sommets a et b par une seule arête.

$(Y - \Delta)$ (*étoile-triangle*) consiste à remplacer une étoile à 3 branches par un triangle à condition toutefois que le centre de l'étoile ne soit pas un élément de V_0 .

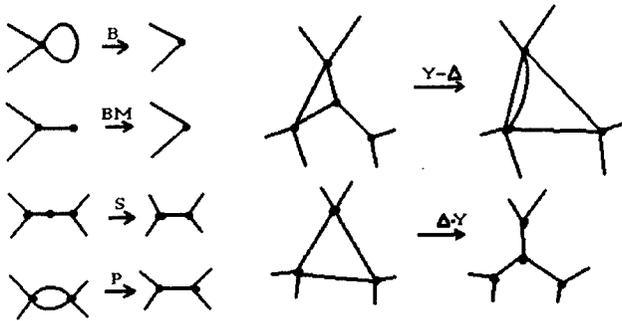


Figure 1. Les transformations électriques élémentaires.

$(\Delta - Y)$ (*triangle-étoile*) consiste à remplacer un triangle par une étoile à 3 branches.

Remarque. Ces transformations sont définies pour un réseau quelconque. Nous les utiliserons uniquement pour des réseaux planaires. Comme la dernière transformation ne préserve pas la toujours la planarité, nous l'utiliserons uniquement pour des réseaux planaires plongés en ajoutant l'hypothèse que l'intérieur du triangle limité par le Δ ne rencontre pas Γ .

On commence par décrire les classes d'équivalences combinatoires de réseaux planaires. On introduit à cette fin un graphe orienté \mathcal{E} dont les sommets sont les réseaux électriques planaires (à isotopie près fixant les terminaux) et ayant une arête orientée $\Gamma \rightarrow \Gamma'$ si on peut passer de Γ à Γ' par une transformation électrique élémentaire. On note $[\Gamma]$ la composante connexe de Γ dans \mathcal{E} . Deux réseaux Γ et Γ' seront dits combinatoirement équivalents, $\Gamma \sim \Gamma'$, s'ils sont dans la même composante connexe de \mathcal{E} . Bien sûr, dans ce cas ils ont même nombre de terminaux.

Soit maintenant $e(\Gamma) = |E|$ le nombre d'arêtes de Γ et $\varepsilon(\Gamma) = \inf_{\Gamma' \sim \Gamma} e(\Gamma')$. Un réseau Γ sera dit *minimal* si $e(\Gamma) = \varepsilon(\Gamma)$.

On a alors le

THÉORÈME 1. *Tout réseau Γ peut être joint par un chemin orienté (ie la fonction e y est décroissante) de \mathcal{E} à un réseau minimal. Deux réseaux minimaux $\Gamma_i, i = 1, 2$ de $[\Gamma]$ sont joints par un chemin de \mathcal{E} le long duquel e est constant égal à $\varepsilon(\Gamma_1)$.*

Une conséquence de ce théorème est que l'équivalence combinatoire de 2 réseaux est décidable algorithmiquement contrairement à ce qui se passe pour des problèmes voisins comme l'équivalence de noeuds donnés par une projection plane.

L'outil utilisé ici est celui de graphe médial, déjà utilisé par exemple dans [GR]. On a en fait une caractérisation simple des réseaux minimaux en terme de leur graphe médial: celui-ci est *tendu*.

Un cas particulièrement simple concerne les réseaux bien connectés introduits dans [REP1].

THÉORÈME 2. *Pour chaque valeur de $N = |V_0|$, les réseaux bien connectés forment une composante connexe de \mathcal{E} . La notion de minimalité précédente coïncide pour eux avec la notion de N -criticité (cf [REP1] §6.2). Ces réseaux bien connectés vérifient $\varepsilon(\Gamma) = N(N - 1)/2$.*

Pour tout réseau Γ non bien connecté, $\varepsilon(\Gamma) < N(N - 1)/2$.

Discutons maintenant le problème inverse:

THÉORÈME 3. *Si Γ est minimal, Φ_Γ est un plongement de \mathcal{R}_Γ dans Σ_N d'image une sous-variété $Z_{[\Gamma]}$ de Σ_N qui ne dépend que de la classe d'équivalence de Γ . Si Γ est planaire quelconque, Φ_Γ est une fibration différentiable de \mathcal{R}_Γ sur $Z_{[\Gamma]}$, de fibre difféomorphe à $\mathbf{R}^{\varepsilon(\Gamma) - \alpha(\Gamma)}$.*

Plus généralement, on a le

THÉORÈME 4. *Si (Γ, ρ) et (Γ', ρ') sont 2 réseaux planaires ayant la même réponse, ils sont électriquement équivalents: $\Gamma \sim \Gamma'$ et ρ' se déduit de ρ en suivant les transformations électriques élémentaires le long d'un chemin quelconque de Γ à Γ' dans \mathcal{E} (voir au §5 la définition précise).*

Enfin, on a une réponse complète au problème direct de trouver l'ensemble des réponses possibles pour un réseau planaire:

THÉORÈME 5. *Si Γ est bien connecté, $Z_{[\Gamma]} = \Omega_N$. L'ensemble des réponses possibles des réseaux planaires à N terminaux est l'adhérence $\bar{\Omega}_N$ de Ω_N dans Σ_N . Les $Z_{[\Gamma]}$ forment une partition de $\bar{\Omega}_N$.*

Remarque. Dans [C-I-M], une caractérisation purement algébrique de $\bar{\Omega}_N$ est donnée. $L \in \bar{\Omega}_N$ si et seulement si tous les déterminants $\det(L_{A,B})$ sont ≥ 0 .

Enfin, mentionnons pour finir qu'il serait intéressant de retrouver les résultats de Nachman [NA] concernant l'analogie continu à partir du cas discret qui est finalement assez simple!!

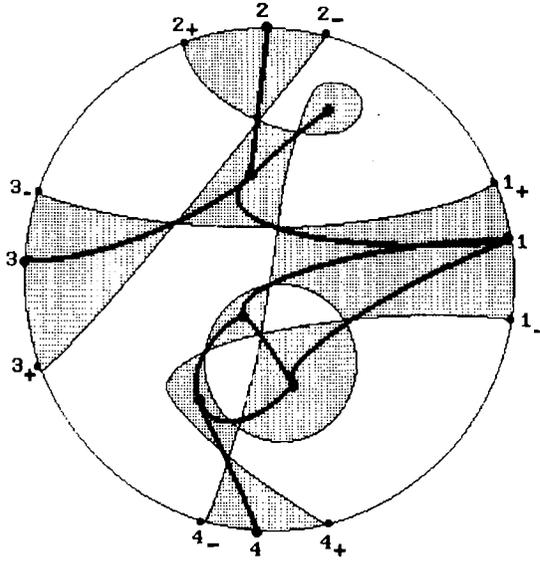


Figure 2. Le graphe médial.

Remerciements: merci infiniment à François Jaeger sans qui la bonne connection entre les auteurs n'aurait pu se faire en juin 93 alors que iG et dV visitaient l'IMAG; iG et dV remercient l'IMAG (Grenoble) et le Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik (Bonn).

I. Combinatoire

1. Le graphe médial d'un réseau électrique

Où l'on introduit ledit graphe.

A tout réseau électrique planaire on peut associer son *graphe médial* (cf [GR]). Le graphe médial $M(\Gamma)$ d'un réseau électrique planaire est construit ainsi:

il a $2N$ sommets sur S^1 (soient $(i_+, (i + 1)_-)$ entre les sommets consécutifs i et $(i + 1)$ de V_0) et les autres sommets en nombre $e(\Gamma)$ sont situés au milieu de chaque arête de Γ . Les arêtes de $M(\Gamma)$ sont telles qu'elles forment un cycle intérieur à chaque face de Γ ne touchant pas le bord et que, complétées avec les arcs $(i_+, (i + 1)_-)$ de S^1 , elles forment un cycle intérieur aux faces touchant ∂D . Les sommets intérieurs sont tous de degré 4.

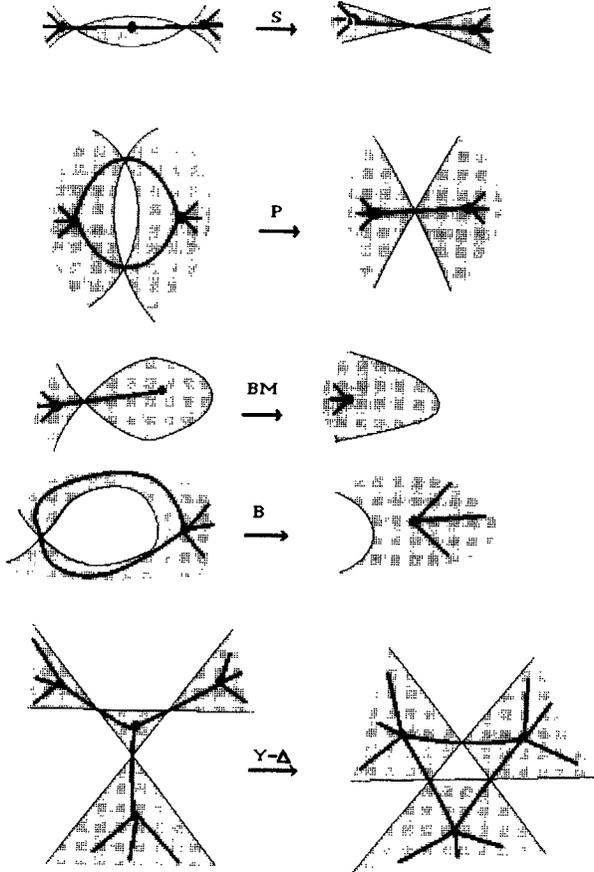


Figure 3. Action des transformations électriques sur le graphe médial.

Notons que cette construction peut être renversée. Il faut simplement partir d'un graphe M dont tous les sommets intérieurs sont de degré 4, les $2N$ sommets du bord de degré 1.

On colorie en noir une région sur 2 limitée par M en coloriant celles qui contiennent un élément de V_0 . On doit alors supposer qu'aucune région noire ne connecte 2 sommets de V_0 . Γ est alors construit en prenant un sommet par région noire et une arête joignant ceux-ci lorsque ces régions se touchent en 1 coin. Le nombre d'arêtes de Γ est égal au nombre de sommets intérieurs de $M(\Gamma)$.

Un graphe médial peut donc être vu comme un ensemble de courbes (cordes ou cycles), ie sous-variétés de dimension 1 fermées, de D se coupant transversalement

et sans intersection triples de façon que tout sommet du bord soit extrémité d'une unique corde.

2. Equivalence combinatoire de réseaux; réseaux minimaux

Où l'on prouve le théorème 1.

Lorsque le réseau est planaire, les transformations électriques se lisent simplement sur le graphe médial, en particulier la transformation $(Y - \Delta)$ est proche du 3ème mouvement de Reidemeister pour les projections de noeuds.

DÉFINITION. Le graphe médial M est dit tendu s'il ne possède pas de composantes intérieures (cycles), si 2 cordes quelconques ont au plus 1 intersection et si aucune corde n'a d'autointersection.

Un ingrédient essentiel est la

PROPOSITION [GI]. *A l'aide de transformations électriques (orientées), tout réseau électrique planaire peut être transformé en un réseau électrique dont le graphe médial est tendu.*

Preuve (inspirée de [GR]). On travaille directement sur le graphe médial M . On note, pour un graphe médial M , par $\nu(M) (=e(\Gamma))$ le nombre de croisements intérieurs. On va montrer que les transformations électriques (opérant sur le graphe médial comme expliqué plus haut) permettent de diminuer $\nu(M)$ tant que M n'est pas tendu.

Donnons quelques

DÉFINITIONS: une *lentille* est une région de D limitée par 2 arcs de 2 courbes du graphe médial compris entre 2 intersections consécutives de celles-ci. Une *boucle* est une région de D limité par un arc d'une courbe dont les extrémités sont un point double de la courbe.

Une lentille est dite *minimale* si son intérieur ne contient aucune autre lentille ou boucle de M .

Une lentille (resp. une boucle) est dite *vide* si son intérieur ne rencontre pas M .

On voit qu'une boucle non vide contient une lentille ou une boucle vide: seules les lentilles sont donc à considérer dans la suite, car on peut éliminer les boucles vides.

On a alors besoin du

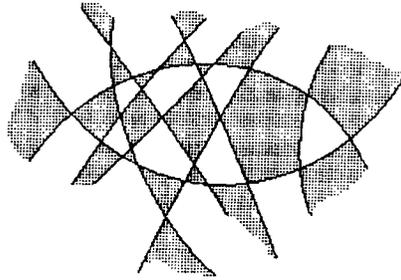


Figure 4. Elimination des lentilles et des boucles.

LEMME ([GR] §13.1). *Si on se donne une boucle ou une lentille minimale de M , par des transformations $(Y - \Delta)$ ou $(\Delta - Y)$, on peut transformer M de façon que celle-ci devienne vide sans changer $v(M)$.*

L'idée de la preuve est qu'une lentille minimale qui contient un sommet intérieur contient un triangle dont un côté est sur la frontière de celle-ci (et même sur chacun des 2 arcs de la frontière). S'il n'y a pas de sommets intérieurs, la preuve est encore plus simple.

On a en fait le

LEMME. *Si γ est un des 2 arcs du bord d'une lentille qui contient un croisement, il y a un triangle d'intérieur vide dont les côtés sont des arcs du graphe médial et dont l'un des côtés est contenu dans γ .*

On considère les croisements p_i intérieur à la lentille L qui sont adjacents à un croisement situé sur γ . Il suffit de prendre un p_i tel que le nombre de faces limité par les 2 cordes qui se croisent en p_i et γ soit minimal.

Si maintenant, on a une lentille ou une boucle vide, on peut la supprimer par une transformation électrique qui diminue $v(M)$ de 1. Cela prouve la proposition. \square

Il reste à montrer la

PROPOSITION. *2 graphes tendus sont équivalents si et seulement si leurs cordes ont mêmes paires d'extrémités; dans ce cas, ils le sont par des transformations $Y - \Delta$ et $\Delta - Y$.*

Montrons la 1ère implication: si les cordes ont mêmes paires d'extrémités, on peut faire une homotopie de graphes tendus. On raisonne par récurrence sur le nombre de cordes. Pour une corde c'est Schönflies (une courbe fermée simple borde un disque standard). Ensuite on prend une corde quelconque qui limite avec le bord

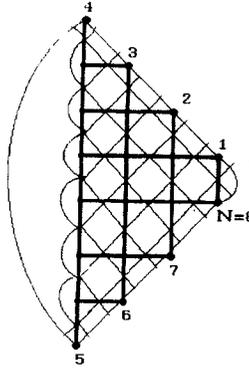


Figure 5. Le graphe C_N .

du disque une lentille minimale et on la vide comme plus haut. On peut alors ôter un croissant et appliquer l'hypothèse de récurrence.

L'autre sens résultera du §7 où l'on montrera comment lire ces paires sur la réponse: si $\Gamma \sim \Gamma'$, on peut choisir ρ, ρ' telles qu'ils aient la même réponse et donc le même graphe médial, s'ils sont minimaux.

De ces 2 propositions résulte le théorème 1 que l'on peut reformuler ainsi:

THÉORÈME 1'. *Tout réseau Γ peut être joint par un chemin orienté (ie la fonction e y est décroissante) de \mathcal{E} à un réseau minimal. Deux réseaux minimaux $\Gamma_i, i = 1, 2$ de $[\Gamma]$ sont joints par un chemin de \mathcal{E} le long duquel e est constant égal à $\varepsilon(\Gamma_i)$. De plus les réseaux minimaux sont exactement ceux dont le graphe médial est tendu. Les classes d'équivalence sont donc caractérisées par la liste des paires d'extrémités de cordes du médial d'un réseau minimal quelconque de la classe.*

En particulier, l'équivalence de Γ et Γ' , tous deux minimaux, équivaut à l'égalité des paires de terminaux de $M(\Gamma)$ et $M(\Gamma')$ liées par une corde.

3. Le cas bien connecté: minimalité et criticité

Où l'on démontre le théorème 2.

En fait on va caractériser les graphes médiaux minimaux bien connectés: en effet le fait d'être bien connecté est invariant par équivalence.

Le graph C_N dessiné ci-dessus joue un certain rôle dans la suite.

On repère les sommets $v_{i,j}$ de C_N par les coordonnées entières (i, j) qui satisfont:

$$i \geq 1, \quad i \leq j \leq N + 1 - i,$$

et les arêtes sont les segments horizontaux et verticaux joignant 2 des points précédents. Il n'est pas difficile de vérifier que le nombre d'arêtes de C_N est $N(N - 1)/2$.

Ou voit aussi que le graphe médial de C_N est tendu et que toutes les cordes sont des diamètres: on dira qu'il est *diamétral*.

En fait, on a le

LEMME. *Tout réseau dont le graphe médial est diamétral tendu est équivalent à C_N par une suite de transformations étoile-triangle.*

Preuve. Résulte du §2, en effet alors les paires d'extrémités des cordes du médial sont les mêmes. □

On a maintenant la:

PROPOSITION. *Si Γ est un réseau électrique planaire, il y a équivalence entre les 2 propriétés suivantes:*

- i) Γ est bien connecté.
- ii) le graphe médial d'un réseau minimal de $[\Gamma]$ est diamétral.

COROLLAIRE. *Le réseau électrique planaire Γ bien connecté est N -critique si et seulement si son graphe médial est diamétral minimal. En particulier, tout graphe N -critique peut être joint à C_N par une suite de transformations étoile-triangle et a $N(N - 1)/2$ arêtes.*

Preuve (de la proposition).

i) \rightarrow ii): si le graphe médial tendu n'est pas diamétral, Γ n'est pas bien connecté.

En effet, dans ce cas, il y a 2 cordes du graphe médial qui ne se coupent pas. Désignons par C et C' les arcs sous-tendus par ces 2 cordes de façon que C soit celui qui contient le moins de sommets de $M(\Gamma)$ situés sur S^1 .

On peut supposer au moyen de transformations étoile-triangle que le crossant ouvert limité par C et la corde associée ne contient pas de sommets de $M(\Gamma)$. Il y a alors 3 cas à distinguer suivant que les sommets extrémités de C sont (i_+, j_+) , (i_+, j_-) ou (i_-, j_-) . Dans chaque cas si on considère comme partie A de V_o les sommets situés sur C , il est facile de construire une partie B de V_o disjointe de A , contenue dans C' , et de même cardinal que A tlele que (A, B) ne soit pas Γ -connectée.

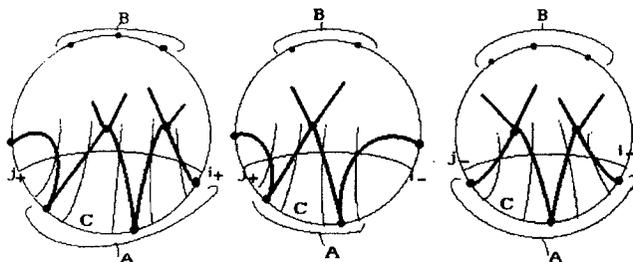


Figure 6. A et B ne sont pas Γ -connectés.

Par exemple dans le premier cas si $k = \#A$, on prend pour B les k sommets consécutifs de V_0 commençant à partir de i ou j suivant l'orientation.

ii) \rightarrow i):

Il suffit de vérifier que C_N est bien connecté, ce qui est facile. □

Preuve (du corollaire).

Si le graphe médial est diamétral tendu, Γ est bien connecté. Il faut montrer qu'il est N -critique. Il suffit de comprendre que les opérations de contraction d'une arête ou de suppression d'une arête se traduisent par une suppression de croisement entre 2 cordes: donc pour un tel graphe $e < N(N - 1)/2$. Le graphe minimal correspondant n'a donc pas assez d'arêtes pour être diamétral minimal. Donc aucun mineur strict n'est bien connecté.

Réciproquement, si le graphe médial de Γ n'est pas tendu, on peut après des transformations étoile-triangle arriver à une configuration où l'on peut faire opérer une transformation (S), (P) ou (BM) que conserve la propriété de bonne connection et qui sont associées à des mineurs du graphe transformé de Γ par des transformations $(Y - \Delta)$.

Il suffit de vérifier que le fait que Γ soit N -critique est invariant par $(Y - \Delta)$, ce qui est facile. □

4. Equivalence combinatoire et connections équivalentes

Dans ce §, nous montrons que si Γ_1 et Γ_2 ont les mêmes paires (A, B) Γ -connectées, ils sont combinatoirement équivalents (et réciproquement bien sûr).

Pour un réseau Γ , soit $W(\Gamma)$ l'ensemble des paires non entrelacées (A, B) telles que (A, B) est Γ -connecté.

DEFINITION. Les réseaux Γ_1 et Γ_2 avec N terminaux sont identiquement connectés si $W(\Gamma_1) = W(\Gamma_2)$.

Dans cette section, nous donnons plusieurs caractérisations équivalentes de *identiquement connectés*.

Les éléments de U_0 (*extrémités du graphe médial*) séparent ∂D en $2N$ segments, dont N contiennent un élément de V_0 . On place un élément de $F_0 = \{\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, \dots, N - \frac{1}{2}\}$ dans chacun des autres N segments de façon que les $4N$ éléments de $V_0 \cup F_0 \in U_0 \subseteq \partial D$ soient dans l'ordre inverse des aiguilles d'une montre $\frac{1}{2}, 1_-, 1, 1_+, 1\frac{1}{2}, \dots, N - \frac{1}{2}, N_-, N, N_+$. Chaque élément de F_0 (respectivement V_0) est sur la frontière d'une face blanche (respectivement noire) de M . On suppose dans cette section que N, V_0, F_0 and U_0 sont fixés.

Pour $A, B \subset V_0$ et $a, b, \in V_0 \cup F_0$, (A, B, a, b) est *non-entrelacé* si A, B, a, b sont 2 à 2 disjoints et A est contenu dans une composante de $\partial D \setminus \{a, b\}$ et B dans l'autre.

Soit X l'ensemble des (A, B, a, b) non entrelacés.

Pour (A, B) non-entrelacée, soit $X_{A, B} = \{(a, b) : (A, B, a, b) \in X\}$.

Pour $a, b \in V_0 \cup F_0$ soit $X_{a, b} = \{(A, B) : (A, B, a, b) \in X\}$.

Pour (A, B) non-entrelacé, un (A, B) -chemin est un chemin avec une extrémité dans A , l'autre dans B , et tous les sommets intérieurs dans $V \setminus V_0$.

Soit $f(A, B)$ le nombre maximum de (A, B) -chemins 2 à 2 disjoints; clairement $f(A, B)$ ne dépend que de $[\Gamma]$.

Pour $a, b \in V_0 \cup F_0$, un (a, b) -cut est un arc α dans D d'extrémités a, b , tel que α ne coupe pas d'arête de Γ . Soit $g(a, b)$ le nombre minimum possible de sommets de Γ dans l'intérieur d'un (a, b) -cut (en ne comptant pas a et b s'ils sont des sommets). On voit aussi que $g(a, b)$ ne dépend que de $[\Gamma]$.

Pour (A, B, a, b) - non-entrelacés, soit $g'(A, B, a, b)$ le nombre minimum de sommets dans un (a, b) -cut, en ne comptant pas ces sommets dans $V_0 \setminus (A \cup B)$. Soit $h(a, b)$ le nombre minimum possible d'arêtes ou de sommets terminaux de $M(\Gamma)$ coupant un (a, b) -cut. On remarque, là encore, que $h(A, B)$ ne dépend que de $[\Gamma]$.

Pour un graphe médial tendu M , soit Π_M l'involution de U_0 définie par $\Pi_M(c) = d$ si et seulement si c et d sont les extrémités d'une même corde de M .

Pour un graphe médial quelconque M , soit Π_M l'involution Π_M , où M est équivalent au graphe tendu M' . En général, $\Pi_M(c) = d$ n'implique pas que c et d sont extrémités de la même corde. Notons aussi que Π_M est bien définie car 2 graphes médiaux minimaux sont équivalents si et seulement si on peut passer de l'un à l'autre par des transformations $\Delta - Y \ Y - \Delta$ et ceux-ci ne changent pas Π_M .

Pour (A, B) non-entrelacé avec $\#A = \#B = k$ et $a, b \in (V_0 \cup F_0) - (A \cup B)$ soit ∂D_1 une composante de $\partial D - \{a, b\}$ et définissons

$$\text{sep}(A, B, a, b) = |\#(\partial D_1 \cap A) - \#(\partial D_1 \cap B)|.$$

En particulier $\text{sep}(A, B, a, b) = k$ si et seulement si (A, B, a, b) est non-entrelacé. Le lemme suivant relie les différentes quantités définies pour Γ .

LEMME.

(a) $\text{rang}(L_{A,B}) = f(A, B)$

(b) $f(A, B) = \max\{\# A' \mid (A', B') \text{ est } \Gamma\text{-connecté pour un } A' \subset A, B' \subset B\}$

(c) $f(A, B) = \# A = \# B$ si et seulement si (A, B) est Γ -connectée.

(d) (A, B) est Γ -connecté si et seulement si $g(a, b) \geq \text{sep}(A, B, a, b)$ pour tous $a, b \in (V_0 \cup F_0) - (A \cup B)$

(e) $g(a, b) = \max_{(A,B) \in X_{a,b}} f(A, B)$

(f) $h(a, b) = 2g(a, b) + \#\{a, b\} \cap V_0$

(g) Si ∂D_1 est une composante de $\partial D - \{a, b\}$, $h(a, b) = \#\{c \mid c \in U_0, c \in \partial D_1, \Pi_{M(\Gamma)}(c) \notin \partial D_1\}$

(h) Pour $c, d \in V_0$ et $a, b, a', b' \in V_0 \cup F_0$ avec a, c, a', b, d, b' qui apparaissent dans l'ordre contraire des aiguilles d'une montre et a, a' adjacent à c et b, b' adjacent à d : $\Pi_{M(\Gamma)}(c) = d$ ssi

$$h(a, b) = h(a, b') + 1 = h(a', b) + 1 = h(a', b')$$

Preuve. (a) est prouvée dans [REP1]. (b), (c), (f), (g), (h) sont faciles à vérifier. (e) provient facilement de [R-S].

Appliquant ce résultat au graphe obtenu de Γ en effaçant les sommets de $V_0 - (A \cup B)$, il vient que (A, B) est Γ -connectée si et seulement si $g'(A, B, a, b) \geq \text{sep}(A, B, a, b)$ pour tous $a, b \in (V_0 \cup F_0) - (A \cup B)$. Clairement, si (A, B) est Γ -connectée, alors $g(a, b) \geq \text{sep}(A, B, a, b)$ pour tous $a, b, \in (V_0 \cup F_0) - (A \cup B)$. Supposons que la réciproque soit fautive. Alors il existe $a, b, \in (V_0 \cup F_0) - (A \cup B)$ tels que $g'(A, B, a, b) < \text{sep}(A, B, a, b)$ et sans perdre de généralités, on peut choisir un tel (a, b) avec $g'(A, B, a, b)$ aussi petit que possible. Ainsi il existe un (a, b) -cut C qui contient $g'(A, B, a, b)$ sommets en ne comptant pas ceux de $V_0 - (A \cup B)$. Supposons aussi que C contient un $c \in V_0 - (A \cup B)$. Alors $g'(A, B, a, b) = g'(A, B, a, c) + g'(A, B, c, b)$ et $\text{sep}(A, B, a, b) \leq \text{sep}(A, B, a, c) + \text{sep}(A, B, c, b)$ en sorte que $g'(A, B, a, c) < \text{sep}(A, B, a, c)$ ou $g'(A, B, c, b) < \text{sep}(A, B, c, b)$ contredisant le choix de (a, b) minimisant $g'(A, B, a, b)$ avec la contrainte $g'(A, B, a, b) < \text{sep}(A, B, a, b)$. Mais, si le (a, b) -cut C ne contient aucun sommet de $V_0 - (A \cup B)$ alors $g(a, b) = g'(A, B, a, b) < \text{sep}(A, B, a, b)$ contredisant l'hypothèse que la réciproque est fautive. Donc (d) est vraie et le lemme est prouvé. \square

Nous donnons maintenant plusieurs caractérisation des paires de graphes identiquement connectés.

THÉORÈME. *Pour des réseaux Γ_1 et Γ_2 , les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) Γ_1 et Γ_2 sont identiquement connectés.

(ii) $f_1(A, B) = f_2(A, B)$ pour tous les (A, B) non entrelacés.

(iii) $\text{rang}(L_{1,A,B}) = \text{rang}(L_{2,A,B})$ pour tous les (A, B) non entrelacés.

(iv) $g_1(a, b) = g_2(a, b)$ pour tous $a, b \in V_0 \cup F_0$

(v) $h_1(a, b) = h_2(a, b)$ pour tous $a, b \in V_0 \cup F_0$

(vi) $(\det(L_{1,A,B}) = 0) \Rightarrow (\det(L_{2,A,B}) = 0)$ pour tous les (A, B) non entrelacés.

(vii) (A, B) est Γ_1 -connecté $\Leftrightarrow (A, B)$ est Γ_2 -connecté pour tous les (A, B) non entrelacés.

(viii) Γ_1 et Γ_2 sont combinatoirement équivalents.

(ix) $\Pi_{\Gamma_1} = \Pi_{\Gamma_2}$

Preuve. (viii) et (ix) sont équivalents par définition de Π_{Γ} et le fait que cette application est bien définie. Les autres équivalences proviennent immédiatement du lemme. \square

II. Electricité: Le problème inverse

5. Équivalence électrique de réseaux

Où l'on décrit l'équivalence $(\Gamma, \rho) \sim (\Gamma', \rho')$ et où l'on introduit aussi un diagramme commutatif associé à tout chemin orienté de \mathcal{E} .

A toute transformation électrique élémentaire $\Gamma \rightarrow \Gamma'$ (arête de \mathcal{E}) est associée une application $\Psi_{\Gamma, \Gamma'}: \mathcal{R}_{\Gamma} \rightarrow \mathcal{R}_{\Gamma'}$ qui à ρ associe ρ' (réseaux équivalents au sens électrique); par exemple, pour la transformation (S) portant sur une arête (α, β) suivie d'une arête (β, γ) de Γ ,

$$\Psi_{\Gamma, \Gamma'}(\rho_{\alpha, \beta}, \rho_{\beta, \gamma}, \rho_1) = \left(\frac{\rho_{\alpha, \beta} \rho_{\beta, \gamma}}{\rho_{\alpha, \beta} + \rho_{\beta, \gamma}}, \rho_1 \right).$$

On voit que $\Psi_{\Gamma, \Gamma'}$ est une fibration de fibre difféomorphe à \mathbf{R} pour les 4 premières transformations et un difféomorphisme pour les 2 autres ($Y - \Delta$ et $\Delta - Y$).

De plus, on a bien sûr:

$$\Phi_{\Gamma'} \circ \Psi_{\Gamma, \Gamma'} = \Phi_{\Gamma}$$

qui exprime que la réponse est conservée par cette transformation.

Plus généralement, si γ est un chemin orienté de \mathcal{E} joignant un réseau Γ à un réseau Γ' , on obtient une application $\Psi_{\Gamma, \Gamma'}^\gamma : \mathcal{R}_\Gamma \rightarrow \mathcal{R}_{\Gamma'}$ en composant les flèches précédentes. Ces applications sont des fibrations différentiables de fibres diff eomorphes à $\mathbf{R}^{e(\Gamma) - e(\Gamma')}$.

On a bien entendu préservation de la réponse par l'application $\Psi_{\Gamma, \Gamma'}^\gamma$.

Il se peut que cette application dépende du chemin (  extrémités fixées), mais ce n'est pas le cas si Γ' est minimal: cela résultera de l'injectivité de Φ_{Γ_0} lorsque Γ_0 est minimal (8), puisque les images de ρ par les $\Psi_{\Gamma, \Gamma_0}^\gamma$ ont la même réponse.

DÉFINITION. On appelle équivalence électrique la relation d'équivalence notée

$$(\Gamma, \rho) \sim (\Gamma', \rho')$$

engendrée par les transformations électriques élémentaires: Γ' s'obtient de Γ par une transformation élémentaire et $\rho' = \Psi_{\Gamma, \Gamma'}(\rho)$.

Il résultera de ce qui suit que, si $(\Gamma, \rho) \sim (\Gamma', \rho')$, on peut prendre comme chemin un chemin réunion de 2 chemins monotones joignant respectivement Γ et Γ' à un réseau minimal Γ_0 .

En particulier $(\Gamma, \rho) \sim (\Gamma, \rho')$ si les images par Ψ_{Γ, Γ_0} de ρ et ρ' sont égales, avec Γ_0 minimal.

2 réseaux électriques équivalents ont la même réponse. Le fait que la réciproque soit vraie est l'objet du théorème 4 qui est un des principaux résultats de cet article.

6. Potentiels d'équilibre et graphe médial

Où l'on montre comment lire géométriquement un potentiel d'équilibre sur le graphe médial.

Le graphe médial $M(\Gamma)$ définit une cellulation du disque unité D . On colore les cellules en noir ou blanc de façon à former un échiquier: les cellules noires sont celles contenant un sommet de Γ ; les blanches sont en bijection avec les faces ou cycles élémentaires de Γ .

On veut représenter les potentiels d'équilibre sur cette cellulation de la façon suivante: si $y \in \mathbf{R}^V$ est le potentiel d'équilibre, on attribue à la cellule noire attachée au sommet α la valeur y_α du potentiel en ce sommet.

Pour ce qui est des cellules blanches, elles représentent les courants électriques: on sait que tout courant J satisfaisant la loi de Kirchoff aux sommets de Γ est somme de courants portés par les cycles faciaux, une telle décomposition étant

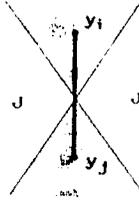


Figure 7. La loi d'Ohm lue sur le médial.

unique à une constante additive globale près. Le couple potentiel-courant est donc représenté par un nombre attaché à chaque cellule de $M(\Gamma)$.

Pour avoir une configuration d'équilibre, il reste à satisfaire la loi d'Ohm qui se lit à chaque croisement de cordes de $M(\Gamma)$: elle est de la forme $J_\alpha - J_\beta = \rho(y_i - y_j)$: relation reliant les valeurs attribuées aux 4 cellules adjacentes au croisement associé à l'arête (i, j) et de conductance ρ .

Ces couples (y, J) induisent des couples (x, I) sur les cellules en nombre $2N$, alternativement blanches et noires, qui touchent ∂D .

Il est clair que la donnée de l'ensemble de ces couples (x, I) équivaut à la donnée du graphe de l'application $L_{\Gamma, \rho}$ et donc de la réponse $L_{\Gamma, \rho}$ du réseau (Γ, ρ) .

Les couples (y, J) et (x, I) associées à des potentiels d'équilibre seront appelées *admissibles*.

7. Supports de potentiels d'équilibre.

Où l'on construit des potentiels d'équilibre à support limité par une corde du médial et l'on déduit une caractérisation du médial à partir d'une réponse.

Le support d'un couple (y, J) est l'ensemble des cellules (fermées) qui ne sont pas marquées de la valeur 0. On peut de la même façon parler du support d'une donnée (x, I) qui s'identifie à une réunion d'intervalles fermés de ∂D .

Remarque: les supports possibles pour des couples (x, I) admissibles forment un ensemble d'informations que l'on peut déduire de la réponse $L_{\Gamma, \rho}$.

On va prouver sur ces supports les 2 lemmes suivants:

LEMME 1. *Supposons $M(\Gamma)$ tendu et a, b 2 extrémités d'une corde γ de $M(\Gamma)$. Soit γ_+ l'un des arcs de ∂D limités par a et b , D_+ le domaine limité par γ et γ_+ et D_-*

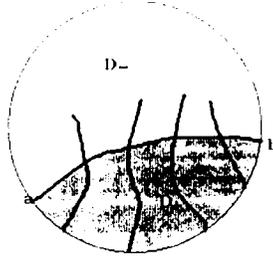


Figure 8. Le cas trivial.

le complémentaire de D_+ dans D . Alors, il existe un couple admissible (x, I) de support γ_+ restriction au bord d'un couple admissible (y, J) à support D_+ .

LEMME 2. Soit a, b sommets terminaux de $M(\Gamma)$ limitant γ_+ et γ_- sur ∂D . S'il existe (x_+, I_+) et (x_-, I_-) admissibles à supports respectifs γ_+ et γ_- , alors a et b sont les 2 extrémités d'une même corde de $M(\Gamma)$.

Les 2 lemmes précédents impliquent le

COROLLAIRE. La réponse d'un réseau électrique planaire (Γ, ρ) détermine la classe $[\Gamma]$.

En effet, on peut évidemment supposer Γ minimal et les lemmes impliquent que la réponse détermine les extrémités des cordes de $M(\Gamma)$.

Preuve (du lemme 1). La preuve est par récurrence sur le nombre de cordes de $M(\Gamma)$ entièrement contenues dans D_+ . On montre l'assertion suivante plus générale que le lemme 1:

(*) tout couple (y_-, J_-) , défini dans $D_- = D \setminus D_+$ et admissible dans D_- se prolonge en un couple admissible global. Si le couple de départ est nul, il y a un prolongement de support D_+ .

1) Le cas où il n'y a aucune corde de $M(\Gamma)$ contenue dans l'intérieur de D_+ :

On règle d'abord le cas où $M(\Gamma)$ n'a aucun croisement intérieur à D_+ , qui est trivial.

Ensuite, on se ramène à ce cas par transformations $(Y - \Delta)$ successives (vider les croisements dans la lentille D_+), en contrôlant les solutions pour une transformation $(Y - \Delta)$: on passe à un nouveau couple admissible simplement par modification concernant les petits triangles. Il faut vérifier que les supports ont un bon comportement par rapport à la transformation $Y - \Delta$, comme on peut le voir sur la figure suivante:

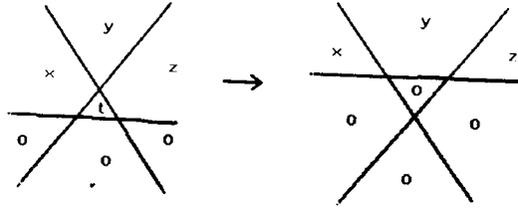


Figure 9. Transformations des couples admissibles par $(Y - \Delta)$.

2) La récurrence:

on fabrique un nouveau graphe $M(\Gamma')$ en supprimant une lentille contenue dans D_+ limitée par ∂D et une corde de $M(\Gamma)$ contenue dans D_+ ; on suppose en plus que la lentille ainsi ôtée est minimale, ce qui permet de lui appliquer la 1ère étape.

On applique d'abord l'hypothèse de récurrence à Γ' ; puis on prolonge à la lentille ôtée. On peut choisir un prolongement qui ne soit nul sur aucune cellule de la lentille car on peut toujours ajouter un multiple grand d'un couple admissible dont le support est ladite lentille.

Preuve. (du lemme 2) On peut démontrer le lemme 2 avec n'importe quel graphe minimal de $[\Gamma]$: on choisit une représentation *géodésique*, c'est-à-dire qu'on demande aux cordes du graphe médial d'être des segments de droites euclidiennes.

Pour voir que cela est possible commencer par joindre par des segments euclidiens les paires d'extrémités de cordes du médial. Puis bouger un peu les extrémités de façon à se placer dans une situation générique où les segments ne se coupent que 2 par 2.

Maintenant, on peut parler de convexité. Soit (y, J) une paire admissible. On définit un sous-ensemble ouvert $N(y, J)$ de D de la façon suivante: $N(y, J)$ est le complémentaire du support fermé (réunion des cellules fermées où y ou J est non nul).

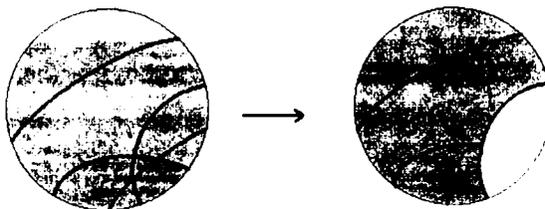


Figure 10. La récurrence.

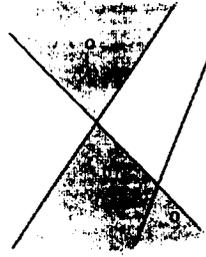


Figure 11. L'ensemble $N(y, J)$.

Il est alors clair que les composantes connexes de $N(y, J)$ sont convexes: en effet il est impossible que $N(y, J)$ contienne l'intérieur de 3 des 4 cellules attachées par un seul sommet à cause de la loi d'Ohm. Les composantes sont donc des polygones connexes et localement convexes, donc convexes.

Supposons maintenant que la corde δ de $M(\Gamma)$ issue de a ait son autre extrémité c sur l'intérieur de γ_+ . Alors la composante connexe de $N(y_-, J_-)$ contenant γ_+ contient les 2 intervalles contigus à a .

En effet, elle contient le disque limité par γ_+ et δ (enveloppe convexe de γ_+) et, par application successive de la loi d'Ohm en partant de c aux sommets de $M(\Gamma)$ situés sur δ , un voisinage de δ donc de a contrairement à l'hypothèse.

Le cas où cette corde issue de a a son autre extrémité dans γ_- est aussi absurde et cela conclut la preuve du lemme 2.

8. *Injectivité de Φ_Γ pour Γ minimal*

Où l'on montre que tout graphe minimal est équivalent à un graphe $\Sigma(\Gamma')$ ou à un graphe $\Pi(\Gamma')$ et on en déduit le résultat par récurrence.

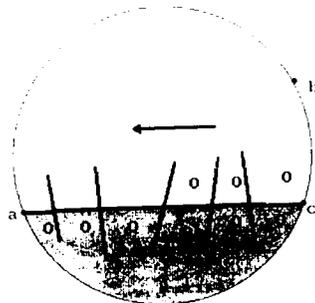


Figure 12. Preuve du lemme 2.

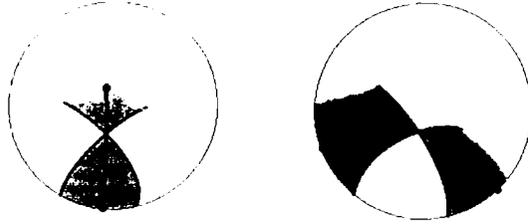


Figure 13. $M(\Gamma)$ a une cellule du bord triangulaire.

On aura besoin du

LEMME. Si Γ_0 est minimal connexe, Γ_0 est équivalent à un réseau minimal Γ dont le graphe médial a une cellule triangulaire (3 côtés) dont un côté est un arc de ∂D .

Suivant que cette cellule est noire ou blanche, Γ s'obtient donc d'un réseau minimal Γ' ayant une arête de moins par adjonction d'une arête après un des sommets terminaux de Γ' ($\Gamma = \Sigma(\Gamma')$) ou en connectant par une arête 2 sommets terminaux voisins de Γ' ($\Gamma = \pi(\Gamma')$).

Preuve. (du lemme) On considère un arc (a, b) du graphe médial de Γ_0 limitant avec le bord de D une lentille ne contenant aucune autre corde de $M(\Gamma_0)$ complètement. Comme Γ_0 est connexe, l'arc (a, b) de cette lentille contient d'autres sommets terminaux de $M(\Gamma_0)$. Soit c celui qui suit immédiatement a : les cordes issues de a et de c se coupent: par isotopie générique (vider la demi-lentille qu'elles déterminent), on peut faire qu'elles déterminent la cellule triangulaire cherchée. \square

La preuve de l'injectivité de Φ_Γ set fait donc de la façon suivante: à partir de la réponse, on détermine la conductance ρ_0 de l'arête mise en évidence dans le lemme, puis on conclut par récurrence sur le nombre d'arêtes de Γ .

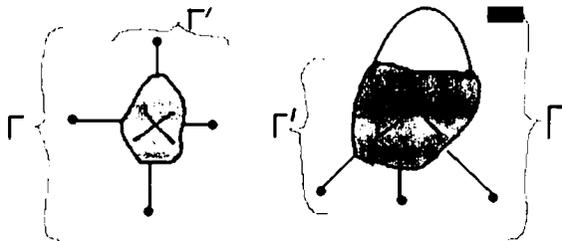


Figure 14. Γ et Γ' .

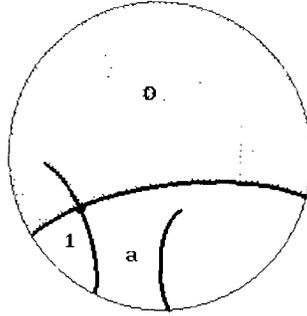


Figure 15. Détermination de ρ_0 .

1) Détermination de ρ_0 .

On applique les résultats du §7 à une corde γ bordant le triangle.

On a ainsi un couple admissible (y, J) à support dans la lentille limitée par γ et cette propriété de support se lit sur la valeur au bord (x, I) de ce couple. Les valeurs marquées dans le triangle et la région contigüe de la lentille détermine la résistance ρ_0 de l'arête isolée.

2) Récurrence.

La réponse de (Γ, ρ) détermine ρ_0 et donc de façon évidente la réponse de Γ' . En effet les graphes de ces 2 réponses se déduisent l'un de l'autre par une transformation simple ne faisant intervenir que ρ_0 . Il suffit de constater que Γ' est minimal, ce qui résulte de la construction de son graphe médial à partir de celui de Γ : il suffit de faire franchir le bord de D par le croisement utilisé de $M(\Gamma)$.

9. Injectivité de Φ'_Γ pour Γ minimal

Même type d'argument qu'au §8.

On donne d'abord une expression de la différentielle de Φ'_Γ .

PROPOSITION. On a, si $Q_{\Gamma, \rho}$ est la forme bilinéaire symétrique sur \mathbf{R}^V associée à la réponse $L_{\Gamma, \rho}$;

$$\delta Q_{\Gamma, \rho}(X, X') = \frac{1}{2} \sum_{\{i, j\} \in E} \frac{\delta \rho_{i, j}}{\rho_{i, j}^2} I_{i, j} I'_{i, j},$$

où $I_{i, j}, I'_{i, j}$ sont les courants parcourant l'arête (i, j) lorsque le potentiel au bord est X, X' .

Cet énoncé est classique. Nous en esquissons la preuve.

Preuve. Il suffit de le prouver pour la forme quadratique.

On a

$$\delta Q_\Gamma(X, X) = \frac{1}{2} \sum_E \delta \rho_{i,j} (y_i - y_j)^2 + \sum_E \rho_{i,j} (y_i - y_j) \delta (y_i - y_j),$$

où y est le potentiel d'équilibre. La deuxième somme est nulle: en effet, c'est le fait que $q_{\Gamma, \rho}(X, y)$ est extrémale par rapport à y pour le potentiel d'équilibre.

On montre ensuite que, si $\Phi'_\Gamma(\delta\rho) = 0$, on a $\delta\rho_0 = 0$ et on finit par récurrence comme précédemment.

On se replace dans la configuration du §8: si γ et γ' sont les 2 cordes du médial bordant le triangle, on construit des couples admissibles (y, J) et (y', J') dont l'intersection des supports est le triangle. De la connaissance de $\delta Q(X, X')$ pour les valeurs au bord de ces couples, on déduit la valeur de $\delta\rho_0$.

Maintenant comme plus haut, la réponse L'_Γ est fonction de ρ_0 et de L_Γ . Donc si $\delta\rho_0$ et δL_Γ sont nulles, on voit que $\delta L'_\Gamma$ est nulle. On conclut par récurrence sur $e(\Gamma)$.

10. Problème inverse à Γ fixé

Où l'on finit la preuve de théorème 3.

On vient de voir que, si Γ est minimal, Φ_Γ est un plongement de \mathcal{R}_Γ dans Σ_N . Sinon, on utilise la fibration

$$\Psi_{\Gamma, \Gamma_0}: \mathcal{R}_\Gamma \rightarrow \mathcal{R}_{\Gamma_0},$$

avec Γ_0 minimal pour conclure la preuve du théorème 3 et le fait que l'équivalence $(\Gamma, \rho) \sim (\Gamma, \rho')$ provient de l'égalité des images de ρ et ρ' par Ψ_{Γ, Γ_0} .

11. Problème inverse planaire

Où l'on prouve le théorème 4.

Si on se donne L , le corollaire du §7, montre que cela détermine $[\Gamma]$. Ensuite, il suffit d'appliquer le théorème 3 et la définition de l'équivalence $(\Gamma, \rho) \sim (\Gamma', \rho')$.

12. *Le problème direct*

Où l'on prouve le théorème 5 en utilisant [REP1]

Traitons d'abord le cas bien connecté: l'image de Φ_I est alors Ω_N .

Il suffit de le voir dans le cas minimal. Dans ce cas, Φ_I est un plongement de \mathcal{R}_I dans Ω_N . De plus, d'après [REP1] (théorème 9) et le fait que minimal coïncide avec N-critique dans ce cas, ce plongement est propre et les dimensions sont les mêmes.

Puis le cas général:

Il résulte de [REP1] et du fait que tout graphe planaire est mineur d'un graphe bien connecté que les réponses des réseaux planaires sont toutes dans $\bar{\Omega}_N$.

Réciproquement, la compactification de [REP1] (proposition 10) montre que l'ensemble des réponses possibles est fermé dans Σ_N .

13. *Application aux pavages*

Il y a un dictionnaire entre les réseaux électriques planaires et les pavages rectangulaires d'un polygone du plan à côtés parallèles aux axes (cf [B-S-S-T], [KE]).

Décrivons brièvement ce dictionnaire: au pavage par des rectangles dont tous les côtés sont horizontaux et verticaux on associe le réseau obtenu en considérant les côtés verticaux comme isolants, les côtés horizontaux comme court-circuit et la résistance de chaque rectangle calculée comme s'il s'agissait d'une plaque métallique homogène.

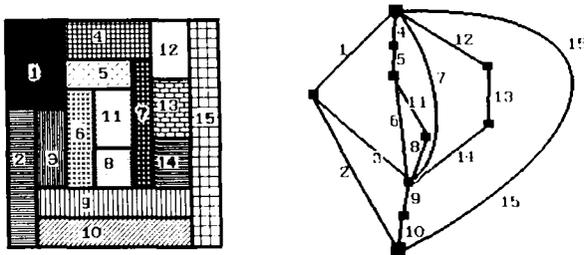


Figure 16. Pavages et reseaux.

La réalisation géométrique du pavage met en évidence un couple de potentiel courant d'équilibre: les équipotentielles sont les horizontales et les lignes de courant verticales.

En particulier, les transformations électriques élémentaires donnent lieu à des mouvements élémentaires des pavages.

Les boucles et bras morts correspondent à des rectangles plats que l'on peut supprimer.

Les parallèles et séries correspondent à des rectangles juxtaposés le long d'un côté de même longueur.

Les transformations étoile-triangle correspondent à des opérations sur 3 rectangles à la fois:

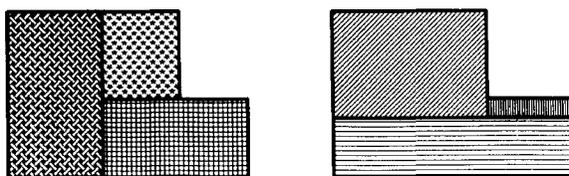


Figure 17. Transformation des pavages par rectangles.

De cet article, on déduit que 2 pavages arbitraires d'un rectangle par des rectangles à côtés rationnels sont équivalents par ces mouvement élémentaires: en effet, dans le dictionnaire avec les réseaux électriques planaires, on a 2 réseaux électriques avec $N = 2$ sommets au bord qui ont même réponse. Ils sont donc géométriquement équivalents et dans cette équivalence, on peut choisir de préserver la rationalité des conductances.

REFERENCES

- [BE] C. BERGE. *Théorie des graphes et applications*, Dunod (Paris), 1967.
- [B-S-S-T] R. BROOKS, C. SMITH, A. STONE, W. TUTTE. *The dissection of rectangles into squares*, Duke Math. J., 7 (1940), 312–340.
- [C-M] E. CURTIS, J. MORROW. *Determining the resistors in a network*, SIAM J. of applied math., 50 (1990), 918–930.
- [C-I-M] E. CURTIS, D. INGERMAN, J. MORROW. *Circular planar graphs and resistor networks*, Preprint (University of Washington), (1994), 1–31.
- [C-M-M] E. CURTIS, E. MOOERS, J. MORROW. *Finding the conductors in circular networks from boundary measurements*, Preprint (University of Washington), (1991), 1–31.
- [CV] Y. COLIN DE VERDIÈRE. *Sur un nouvel invariant des graphes et un critère de planarité*, Journal of Comb. Theory B, 50 (1990), 11–21.
- [GI] I. GITLER. *Delta-Wye transformations. Algorithms and applications*, PhD thesis (Univ. of Waterloo), 1991.
- [GR] B. GRÜNBAUM. *Convex polytopes*, Wiley (London), 1967.
- [KE] R. KENYON. *Tiling with squares and square-tileable surfaces*, Prépublication ENS Lyon, 119 (1993), 1–26.
- [LA] LAMOTKE. *Semisimpliziale algebraic topologie*, Ergebnisse 147, Springer.
- [NA] A. NACHMAN. *Global uniqueness for a two-dimensional inverse boundary value problem*, Preprint de l'université de Rochester, (1993), 1–49.

- [REPI] Y. COLIN DE VERDIÈRE. *Réseaux électriques planaires I*, Commentarii Math. Helv., 69 (1994), 351–374.
- [R-S] N. ROBERTSON, P. SEYMOUR. *Graph Minors VI. Disjoint paths across a disc*, J. of Comb. Theory B, 41 (1992), 115–138.
- [SC] A. SCHRIVER. *On the uniqueness of kernels*, Journal of Comb. Theory B, 55 (1992), 146–160.
- [WE] L. WEINBERG. *A survey of linear graphs: fundamentals and applications to network theory*, Matrix and tensor quarterly, (1964), 103–115.

Institut Fourier, Laboratoire associé au CNRS

BP 74

38402-Saint Martin d'Hères Cedex

France

(ycolver@fourier.ujf-grenoble.fr).

Departamento de Matemáticas

CINVESTAV

Apartado Postal 14-740

Mexico

Mexique (igitler@math.cinvestav.mx).

Math. department

266 Lockett Hall, Fieldhousedrive

Louisiana state University

Louisiana-70803-4918

USA

(vertigan@marais.math.lsu.edu).

Received December, 20, 1994; September 25, 1995