Les formes différentielles harmoniques

Par Pierre Bidal et Georges de Rham, Lausanne

INTRODUCTION

Ce travail a été entrepris dans le but de démontrer, d'une manière à la fois simple et rigoureuse, le beau théorème de W. V. D. Hodge, d'après lequel le $p^{\text{ième}}$ nombre de Betti d'un espace de Riemann clos et orientable est égal au nombre de formes différentielles harmoniques de degré p linéairement indépendantes.

Pour raison de clarté, la théorie des formes différentielles harmoniques a été reprise dès le début et se trouve exposée au chapitre I. C'est dire que la connaissance d'autres travaux déjà publiés sur ce sujet n'est pas exigée du lecteur. Nous espérons y avoir apporté d'appréciables simplifications. Grâce à l'emploi d'un opérateur différentiel Δ (défini au No. 3), applicable aux formes différentielles, qui généralise les opérateurs de Laplace et de Beltrami, les formes différentielles harmoniques sont définies simplement comme les formes φ qui satisfont à l'équation $\Delta\varphi = 0$. Le *théorème de décomposition* [No. 5], qui nous paraît dominer la théorie et dont le théorème de Hodge se déduit facilement, est déduit lui-même d'un théorème d'existence relatif à l'équation $\Delta\mu = \beta$, dont un cas particulier est contenu dans un théorème de Hilbert [4, p. 226—227][1]), d'après lequel la condition de possibilité de cette équation est que la forme différentielle donnée β soit orthogonale (au sens défini au No. 2) à toutes les solutions de l'équation homogène $\Delta\varphi = 0$, c'est-à-dire à toutes les formes différentielles harmoniques du même degré.

La démonstration de ce théorème, que nous appelons le *théorème H*, à laquelle est consacrée la suite du travail, est faite par la méthode de la paramétrix de E. E. Levi [15] et de Hilbert [4, p. 219—232]. Dans le chapitre II, après avoir défini la paramétrix, nous établissons deux formules qui jouent un rôle fondamental dans la démonstration. Bien qu'il ne soit fait appel, le plus souvent, qu'à des méthodes d'un emploi courant dans la théorie du potentiel et dans l'étude des équations aux dérivées partielles du type elliptique, nous avons pensé faire œuvre utile en ne laissant aucun point dans l'ombre. De là l'étendue relative de ce chapitre.

Dans le chapitre III, après avoir énoncé les théorèmes de Fredholm relatifs aux équations intégrales sous la forme où ils devront être utilisés,

---

[1]) Les chiffres entre crochets [ ] renvoient à l'index bibliographique placé après l'introduction.

nous donnons la démonstration du théorème H. Elle ne diffère pas de celle exposée par Hilbert pour le cas examiné par lui et mentionné ci-dessus, sauf quelques simplifications provenant du fait que l'opérateur Δ est auto-adjoint.

Enfin, dans l'Appendice, nous revenons sur la théorie générale des équations intégrales utilisées ici, où l'inconnue est une forme différentielle ou un tenseur. Lorsque l'espace n'est pas parallélisable, ces équations ne se ramènent pas immédiatement aux systèmes d'équations intégrales envisagés par Fredholm. Nous montrons que la théorie s'applique néanmoins, et nous reprenons aussi la démonstration de la validité sans restriction du troisième théorème de Fredholm dans le cas de certains noyaux non bornés. Tout ce qui intervient dans la démonstration du théorème H nous paraît ainsi complètement établi.

L'idée d'appliquer la méthode de la paramétrix à la démonstration du théorème de Hodge, due à M. Hellmuth Kneser, a été utilisée par M. Hodge lui-même [7, 8], dont l'argumentation a été complétée sur un point essentiel par M. Hermann Weyl [16]. La première démonstration de M. Hodge — dont M. Weyl dit: «I find it hard to judge whether a previous proof along different lines is complete, or rather how much effort is needed to make it complete» — était basée sur la méthode directe du Calcul des Variations (Principe de Dirichlet) [5, 6].

Dans ce travail, nous utilisons comme paramétrix la même forme $\omega_p(x, y)$ employée par M. Hodge, qu'il avait considérée d'abord dans le cas d'un espace euclidien [5], et dont il remercie M. Kneser [7] de lui en avoir communiqué l'expression générale. Mais nous l'appliquons à l'équation différentielle $\Delta\mu = \beta$, ce qui conduit à discuter une équation intégrale de noyau $\Delta_y \omega_p(x, y)$, tandis que MM. Hodge et Weyl considèrent l'équation différentielle $\delta d\mu = \beta$ (avec les notations du No. 3 ci-dessous) dont l'étude directe par cette méthode est moins simple. L'avantage de notre opérateur Δ, à cet égard, tient au fait qu'il est *totalement elliptique* et que, contrairement à l'équation $\delta d\varphi = 0$, l'équation $\Delta\varphi = 0$ n'a qu'un nombre fini de solutions linéairement indépendantes partout régulières.

Le mode d'exposition de la théorie des formes différentielles harmoniques adopté dans le chapitre I a été présenté dans ses grandes lignes par l'un de nous dans des conférences à Budapest en 1940, à Clermont-Ferrand, Rome et Fribourg en 1942 et à Munich en 1944.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

1. *E. Cartan*, Leçons sur la geométrie des espaces de Riemann. Paris, Gauthiers-Villars & Cie., 1928.
2. *Ch. Ehresmann*, Sur les espaces fibrés associés à une variété différentiable (Comptes rendus de l'Académie des sciences, t. 216, 1943, p. 628—630).
3. *E. Goursat*, Cours d'analyse mathématique, tome III, Troisième édition, Paris, Gauthiers-Villars & Cie., 1923.
4. *D. Hilbert*, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. B. G. Teubner, Leipzig-Berlin, 1912.
5. *W. V. D. Hodge*, A Dirichlet problem for harmonic functionals, with applications to analytic varieties. (Proceedings of the London Math. Soc., ser. 2, vol. 36, 1932, p. 257—303.)
6. *W. V. D. Hodge*, Harmonic functionals in a riemannian space. (Ibid., ser. 2. vol. 38, 1933, p. 72—95.)
7. *W. V. D. Hodge*, The existence theorem for harmonic integrals. (Ibid., ser. 2, vol. 41, 1936, p. 483—496.)
8. *W. V. D. Hodge*, The theory and applications of harmonic integrals. Cambridge university press, 1941.
9. *T. Levi-Civita*, Der absolute Differentialkalkül. Berlin, Verlag von Julius Springer, 1928.
10. *G. de Rham*, Sur l'Analysis situs des variétés à *n* dimensions (Thèse, Journal de Math. p. et appl. 1931, p.115-200).
11. *G. de Rham*, Sur la théorie des intersections et les intégrales multiples. (Commentarii Mathematici Helvetici, vol. 4, 1932, p. 151—157.)
12. *G. de Rham*, Sur une décomposition des chaînes d'un complexe, C. R. des séances de la Soc. Math. Suisse 1941 (Enseign. math. XXXIX, 1944, p. 78).
13. *H. Withney*, Differentiable Manifolds (Annals of Mathematics, vol. 37 [1936], p. 645—680).
14. *H. Withney*, On products in a complex. (Ibid., vol. 39 [1938], p. 397—432.)
15. *E. E. Levi*, I problemi dei valori al contorno per le equazioni totalmente ellittiche alle derivate parziali (Memorie di Matematica e di Fisica della Società italiana delle Scienze, Serie 3a, Tomo XVI [1909].)
16. *Hermann Weyl*, On Hodge's theory of harmonic integrals (Annals of Mathematics, Vol. 44, No. 1, January 1943, p. 1—6).
17. *Beno Eckmann*, Harmonische Funktionen und Randwertaufgaben in einem Komplex (Commentarii Mathematici Helvetici, vol. 17, 1944, p. 240—255).
18. *G. de Rham*, Relations entre la Topologie et la Théorie des intégrales multiples (L'Enseignement Mathématique, 35e année, 1936, p. 213—228).
19. *G. de Rham*, Über mehrfache Integrale (Abh. aus dem Math. Seminar der Hansischen Universität, Band 12, 1938, p. 313—339).

CHAPITRE I

LES FORMES DIFFÉRENTIELLES HARMONIQUES SUR UN ESPACE DE RIEMANN

1. Fonctions et tenseurs sur une variété différentiable

Pour commencer, nous rappellerons quelques définitions, nécessaires pour bien préciser la notion de forme différentielle sur une variété différentiable (Cf. [2] et [13]).

v désignant un entier positif, une fonction de n variables réelles est dite de *classe* C^v si elle possède des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre v inclus. On désigne encore par C^0 la classe des fonctions continues, par C^∞ la classe des fonctions possédant des dérivées de tout ordre, et par C^ω la classe des fonctions analytiques. (Nous conviendrons que, v étant fini, $v < \infty$, $v < \omega$, $\infty < \omega$, $\infty \pm v = \infty$, $\omega \pm v = \omega$.)

Etant donnée une *variété à n dimensions* V, c'est-à-dire un espace topologique connexe dont chaque point possède un voisinage homéomorphe à l'intérieur d'une sphère de l'espace euclidien à n dimensions, nous appellerons *système de coordonnées* dans V une représentation topologique d'un domaine D de V dans l'espace numérique à n dimensions; D est appelé le *domaine du système*. Une telle représentation associe à chaque point de D n nombres réels, appelés les *coordonnées du point relativement au système.*

Nous appellerons *variété à n dimensions de classe* C^v, v désignant un entier positif, ou ∞, ou ω, une variété à n dimensions V dans laquelle est donnée une famille F de systèmes de coordonnées satisfaisant aux deux conditions suivantes:

1. Les domaines des systèmes de la famille F recouvrent entièrement V, c'est-à-dire que leur réunion est identique à V.

2. Un point variant dans la partie commune aux domaines de deux systèmes de la famille F, ses coordonnées relativement à l'un des systèmes sont des fonctions de classe C^v et à jacobien non nul de ses coordonnées relativement à l'autre système.

Deux familles de systèmes de coordonnées, donnés dans la même variété V et satisfaisant toutes les deux aux conditions 1. et 2., sont considérées comme *équivalentes*, et définissent la même variété de classe C^v, si la famille formée par leur réunion satisfait aussi à la condition 2. Nous dirons encore qu'un système de coordonnées dans V est *admissible*, s'il appartient à la famille F ou si la famille obtenue en l'adjoignant à F satisfait encore à la condition 2.

Il est clair que, si $u < v$, la classe C^u contient C^v.

Les variétés de classe C^ω sont les *variétés analytiques*, les variétés de classe C^1 sont les *variétés différentiables*.

Une *fonction* $f(x)$, définie sur la variété V de classe C^v, est dite de classe C^u (u étant $\leq v$), si, étant donné un système quelconque de la famille F, pour x dans le domaine de ce système, $f(x)$ est fonction de classe C^u des coordonnées de x relativement à ce système. Il est clair que le sens de cette définition ne change pas si l'on remplace F par une autre famille équivalente (pourvu que, comme on l'a supposé, $u \leq v$).

Un *tenseur* est défini, en un point x de V, par ses composantes relativement à un système quelconque de coordonnées dont le domaine contient x; les composantes relativement à un second système se déduisent des premières par les formules connues qui, comme on sait, font intervenir les dérivées partielles du premier ordre des coordonnées d'un système par rapport à celles de l'autre. Ces dérivées partielles sont des fonctions de classe C^{v-1}, si la variété V est de classe C^v. Il en résulte que, si les composantes du tenseur relativement au premier système sont de classe $C^u (u \leq v - 1)$, il en est de même des composantes relativement au second système, dans toute la partie commune aux domaines des deux systèmes. Cette remarque justifie la définition suivante:

Un *tenseur*, défini sur la variété V de classe C^v, *est dit de classe* C^u (pour $u \leq v - 1$), si, x étant un point du domaine d'un système quelconque de la famille F, les composantes du tenseur relativement à ce système sont des fonctions de classe C^u dans ce domaine.

La donnée, sur une variété V de classe C^{v+1}, d'un tenseur covariant symétrique à deux indices, de classe C^v, tel que la forme quadratique (où $x^1, \ldots, x^n$ sont les coordonnées de x relativement à un certain système et g_{ij} les composantes du tenseur au point x relativement au même système)

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

soit définie positive en chaque point x, définit *un espace de Riemann de classe* C^v.

La variété V est *close* si elle est un espace topologique compact. Elle est alors complètement recouverte par les domaines d'un nombre fini de systèmes de coordonnées, de sorte qu'on peut supposer la famille F finie.

La variété V est *orientable* s'il est possible de répartir les systèmes de coordonnées en deux classes, de manière que le jacobien relatif à deux systèmes dont les domaines empiètent soit positif si les deux systèmes sont de la même classe, négatif dans le cas contraire. *Orienter* la variété, c'est choisir l'une de ces classes, dont les systèmes sont alors appelés positifs, ceux de l'autre classe étant appelés négatifs.

2. Formes différentielles. Forme adjointe

Sur une variété différentiable, à tout *p-vecteur covariant*, c'est-à-dire à tout tenseur covariant antisymétrique à p indices, est associée une *forme différentielle extérieure de degré p*, représentée dans le domaine D d'un système de coordonnées par l'expression

$$\alpha = \sum_{(i_1\ldots i_p)} A_{i_1\ldots i_p} dx^{i_1}\ldots dx^{i_p}\ ,$$

où les $A_{i_1}\ldots_{i_p}$ sont les valeurs, au point x de D de coordonnées $x^1,\ldots, x^n$, des composantes du p-vecteur relativement à ce même système, et la sommation étant étendue aux $\binom{n}{p}$ combinaisons $(i_1\ldots i_p)$ des n indices $1, 2, \ldots, n$ pris p à p.

On sait que, dans un changement de coordonnées, en vertu des règles du calcul extérieur, les produits extérieurs $dx^{i_1}\ldots dx^{i_p}$ se transforment comme les composantes d'un p-vecteur contravariant (c'est-à-dire d'un tenseur contravariant antisymétrique à p indices). La forme α apparaît ainsi comme le produit contracté (divisé par $p\,!$) d'un p-vecteur contravariant indéterminé par le p-vecteur covariant auquel elle est associée.

Sur un espace de Riemann *orienté* à n dimensions, on peut faire correspondre à toute forme différentielle extérieure de degré p, ou, comme nous dirons dorénavant pour abréger, à toute forme de degré p, une forme de degré $n - p$ qu'on appelle *la forme adjointe*. Nous allons en rappeler la définition en établissant ses principales propriétés.

Nous utiliserons les symboles de Kronecker $\delta^{j_1\ldots j_p}_{i_1\ldots i_p}$, égaux à 1 (respectivement -1) lorsque $j_1\ldots j_p$ est une permutation paire (respectivement impaire) des indices tous distincts $i_1\ldots i_p$, et à 0 dans tous les autres cas. On sait que ces nombres $\delta^{j_1\ldots j_p}_{i_1\ldots i_p}$ peuvent être considérés comme les composantes d'un tenseur covariant antisymétrique par rapport aux indices i et contravariant antisymétrique par rapport aux indices j.

Nous utiliserons aussi le *n-vecteur covariant e* (tenseur e de Levi-Civita [9, p. 78]), dont les composantes $e_{i_1}\ldots_{i_n}$ sont définies par

$$e_{i_1\ldots i_n} = \pm \sqrt{g}\,\delta^{1\ldots n}_{i_1\ldots i_n}$$

où g est le déterminant $\| g_{ij} \|$ des coefficients de la forme quadratique fondamentale $ds^2 = \sum_{ij} g_{ij}\, dx^i\, dx^j$, et où il faut prendre le signe $+$ ou le signe $-$ selon que le système de coordonnées est positif ou négatif. La forme de degré n associée à ce n-vecteur,

$$e_{1\dots n}\, dx^1 \dots dx^n \ ,$$

représente *l'élément de volume* de l'espace de Riemann.

On sait que, dans un espace de Riemann, à tout tenseur covariant est associé un tenseur contravariant. En particulier, à tout p-vecteur covariant de composantes $A_{i_1 \dots i_p}$ est associé un p-vecteur contravariant dont les composantes $A^{i_1 \dots i_p}$ sont définies par les relations

$$A_{i_1 \dots i_p} = \sum_{k_1 \dots k_p} g_{i_1 k_1} \dots g_{i_p k_p} A^{k_1 \dots k_p}$$

qui peuvent aussi s'écrire

$$A^{i_1 \dots i_p} = \sum_{k_1 \dots k_p} g^{i_1 k_1} \dots g^{i_p k_p} A_{k_1 \dots k_p} ,$$

les g^{ij} étant les composantes du tenseur contravariant associé au tenseur fondamental g_{ij} et définies par les formules

$$\sum_k g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j$$

Nous pouvons maintenant définir la **forme adjointe** *à la forme* α, que nous désignerons par α^*, en posant, $i_1 \dots i_n$ désignant une permutation paire de $1 \dots n$,

$$\begin{gathered} A^*_{i_{p+1} \dots i_n} = e_{i_1 \dots i_n} A^{i_1 \dots i_p} \qquad \text{et} \\ \alpha^* = \sum_{(j_1 \dots j_{n-p})} A^*_{j_1 \dots j_{n-p}}\, dx^{j_1} \dots dx^{j_{n-p}} \end{gathered} \tag{1}$$

Il est évident que les $A^*_{j_1 \dots j_{n-p}}$ sont les composantes d'un $(n-p)$-vecteur covariant, qui est le produit contracté (divisé par $p\,!$) du n-vecteur covariant e avec le p-vecteur contravariant associé à la forme α.

Remarquons que, d'après cette définition, la forme adjointe à la forme de degré 0 qui se réduit à la fonction constante égale à 1 est la forme qui représente *l'élément de volume*, et que nous désignerons dorénavant par 1^* (ou 1^*_x s'il y a lieu de préciser le point variable x):

$$1^* = e_{1\dots n}\, dx^1 \dots dx^n \ ,$$

où $e_{1\dots n} = \sqrt{g}$ si le système de coordonnées est positif.

Propriétés de la forme adjointe

α et β étant deux formes de même degré p, f et h des fonctions, on a

a) $(f\alpha + h\beta)^* = f\alpha^* + h\beta^*$

b) $(\alpha^*)^* = (-1)^{pn+p}\,\alpha$

c) $\alpha\,\beta^* = \beta\,\alpha^*$

d) $\alpha\,\alpha^* = F\cdot 1^*$, *où F est une forme quadratique définie positive des coefficients de α.*

La propriété a) est évidente, l'opération $*$ étant linéaire.

En désignant par $B_{i_1\ldots i_p}$ les coefficients de β, $A_{i_1\ldots i_p}$ étant toujours ceux de α, d'après la définition de l'adjointe et d'après les règles du calcul extérieur, on a

$$\alpha\beta^* = \sum_{(i_1\ldots i_p)} A_{i_1\ldots i_p}\, B^{i_1\ldots i_p}\, 1^* \,.$$

Supposons qu'au point considéré $g_{ij} = \delta_i^j$, ce qu'on peut toujours obtenir en choisissant un système convenable de coordonnées. Alors, comme on sait, $A_{i_1\ldots i_p} = A^{i_1\ldots i_p}$ et $B_{i_1\ldots i_p} = B^{i_1\ldots i_p}$, de sorte que les propriétés c) et d) résultent immédiatement de l'expression de $\alpha\,\beta^*$.

Pour établir b), il suffit de remarquer que, au point considéré où $g_{ij} = \delta_i^j$, on a, $i_1\ldots i_n$ étant une permutation paire de $1\ldots n$ et le système de coordonnées étant positif,

$$(dx_{i_1}\ldots dx_{i_p})^* = dx_{i_{p+1}}\ldots dx_{i_n}$$

et

$$(dx_{i_{p+1}}\ldots dx_{i_n})^* = (-1)^{np+p}\, dx_{i_1}\ldots dx_{i_p} \,.$$

la permutation $i_{p+1}\ldots i_n\, i_1\ldots i_p$ étant paire ou impaire selon que $(-1)^{np+p} = +1$ ou -1.

Produit scalaire de deux formes

α et β étant toujours deux formes de même degré p, nous appellerons *produit scalaire* de α et β et nous désignerons par $(\alpha\,,\beta)$, la valeur de l'intégrale étendue à V de $\alpha\beta^*$:

$$(\alpha\,,\beta) = \int \alpha\beta^* \,.$$

Nous supposons que l'espace V est clos, de manière que l'intégrale ait toujours un sens, et sauf indication contraire, le signe $\int$ désignera dorénavant une intégrale étendue à V.

Si $(\alpha, \beta) = 0$, on dira que α et β sont *orthogonales*.

Il est clair que ce produit est commutatif, en vertu de c), et distributif. En vertu de d), le *carré scalaire* (α, α) *d'une forme* α (à coefficients continus) *ne peut s'annuler que si cette forme est identiquement nulle :*

$$(\alpha, \alpha) = 0 \quad \textit{entraîne} \quad \alpha = 0 \ .$$

3. Les opérateurs d, δ et Δ

On appelle *différentielle extérieure*, ou simplement *différentielle*, de la forme α de degré p, la forme de degré $p+1$

$$d\alpha = \sum_{(i_1 \dots i_p)} dA_{i_1 \dots i_p} \, dx^{i_1} \dots dx^{i_p} \ .$$

Comme on le vérifie immédiatement, d'après les règles du calcul extérieur, le coefficient de $dx^{i_1} \dots dx^{i_{p+1}}$ dans la forme $d\alpha$ est

$$\sum_{i(k_1 \dots k_p)} \delta^{ik_1 \dots k_p}_{i_1 \dots i_{p+1}} \frac{\partial A_{k_1 \dots k_p}}{\partial x^i} \ .$$

Les coefficients $A_{i_1 \dots i_p}$ de la forme α sont naturellement supposés différentiables, c'est-à-dire que la forme α est de classe C^1. Dans le cas d'une forme de degré 0, c'est-à-dire d'une fonction, c'est la différentielle habituelle. On sait que l'on a la *formule de Stokes*

$$\int_{Fc^{p+1}} \alpha = \int_{c^{p+1}} d\alpha$$

où c^{p+1} est un champ d'intégration à $p+1$ dimensions et $F\,c^{p+1}$ sa frontière. On sait aussi que la différentielle seconde d'une forme (supposée de classe C^2) est toujours nulle. La différentielle d'une forme de degré n est toujours nulle.

L'opérateur δ. Nous désignerons par $\delta\alpha$ la forme

$$\delta\alpha = (d\alpha^*)^* \ .$$

Le degré de α étant p, celui de $\delta\alpha$ est $p - 1$. L'opérateur δ abaisse le degré d'une unité, tandis que l'opérateur d l'augmente d'une unité.

Il est clair que $\delta\,\delta\alpha = \delta^2\alpha = 0$, parce que $dd\alpha^* = d^2\alpha^* = 0$. Si α est de degré 0, c'est-à-dire une fonction, l'opération δ n'a pas de sens, mais ce qui sera commode, nous conviendrons alors d'écrire $\delta\alpha = 0$.

On dit que la forme α de degré p, supposée de classe C^1, est *fermée*, si $d\alpha = 0$. S'il existe une forme β de degré $p - 1$ telle que $\alpha = d\beta$, on dit que α est *homologue à zéro* et l'on écrit $\alpha \sim 0$. Il est clair que si $\alpha \sim 0$, α est fermée.

Utilisant des termes de la topologie combinatoire, nous dirons que α est *cofermée* si $\delta\alpha = 0$, et que α est *cohomologue à zéro*, s'il existe une forme γ de degré $p + 1$ telle que $\delta\gamma = \alpha$. Il est clair que la forme adjointe α^* est fermée (ou homologue à zéro), si la forme α est cofermée (ou cohomologue à zéro), et réciproquement.

Dans des cas particuliers, les opérations $*$, d et δ et leurs combinaisons, fournissent les opérations bien connues de l'analyse vectorielle. Une forme α *de degré* 1 peut être interprétée comme le *travail élémentaire* d'un vecteur $\vec{v}$; α est la forme associée à $\vec{v}$ (dans le sens où, selon le No. 2, une forme de degré p est associée à un p-vecteur).

La forme α^*, de degré $n - 1$, représente alors le *flux élémentaire de* $\vec{v}$, tandis que $\delta\alpha$ est la divergence de $\vec{v}$

$$\delta\alpha = \operatorname{div} \vec{v} \, .$$

Si f est une fonction, df est la forme associée au *gradient* de f, et par suite δdf est la divergence du gradient de f:

$$\delta df = \operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}} f \, .$$

Remarquons que l'opérateur δd, appliqué à une forme de degré p (de classe C^2), fournit une forme du même degré p. Si $p = 0$, δd se réduit au laplacien $\operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}}$ (ou paramètre différentiel du second ordre de Beltrami). Ainsi, en un certain sens, δd apparaît comme un opérateur qui, pour les formes de degré $p > 0$, généraliserait le laplacien. Mais d'autres généralisations sont possibles. En effet, $d\delta\alpha$ est aussi une forme de même degré p que α, qui se réduit à zéro si $p = 0$, mais en général pas si $p > 0$. Par suite, si a et b désignent deux nombres, pouvant dépendre de p et n, mais a se réduisant à 1 pour $p = 0$, l'opérateur $a\,\delta d + b\,d\delta$ généralise le laplacien au même titre que l'opérateur δd. Pour des raisons qui apparaîtront au chapitre II, nous avons été conduits à préférer l'opérateur obtenu en posant $a = (-1)^{np}$ et $b = (-1)^{np+n}$, mais ce qui importe avant tout, c'est que ni a ni b ne soient nuls.

L'opérateur Δ. *Nous désignerons par Δ l'opérateur $\Delta = (-1)^{np}\delta d + (-1)^{np+n} d\delta$.* Appliqué à une forme α de degré p (et de classe C^2) cet opérateur fournit une autre forme de même degré p,

$$\Delta\alpha = (-1)^{np}\delta d\alpha + (-1)^{np+n} d\delta\alpha \ .$$

Nous dirons qu'une forme α de degré p est **harmonique** *si elle est de classe C^2 et si $\Delta\alpha = 0$.*

Pour $p = 0$, Δ se réduisant comme δd au laplacien généralisé de Beltrami, cette définition coïncide avec la définition classique des fonctions harmoniques. Pour $p \geq 0$, nous verrons que, si l'espace est clos, elle est équivalente à la définition de M. Hodge, d'après laquelle α est dite harmonique si $d\alpha = 0$ et $\delta\alpha = 0$.

Si α est une forme de degré 1, dans l'espace euclidien à 3 dimensions, associée au vecteur $\vec{v}$, les formes $d\delta\alpha$ et $\delta d\alpha$ sont respectivement associées aux vecteurs grad div $\vec{v}$ et rot rot $\vec{v}$, et la forme $\Delta\alpha$ est par suite associée au vecteur lap $\vec{v}$ = grad div $\vec{v}$ — rot rot $\vec{v}$, qu'on appelle précisément le laplacien de $\vec{v}$. Cela suggère que notre opérateur Δ est bien la généralisation convenable du laplacien, fait qui sera confirmé au chapitre II.

4. Relations d'orthogonalité

Soit μ une forme de degré p, ν une forme de degré $p + 1$, toutes deux de classe C^1. $\mu\nu^*$ est de degré $n - 1$, et, en vertu de la règle de différentiation d'un produit, $d(\mu\nu^*) = d\mu \, . \, \nu^* + (-1)^p \mu d\nu^*$, ce qu'on peut écrire, comme $d\nu^* = (-1)^{pn+p}(\delta\nu)^*$,

$$d(\mu\nu^*) = d\mu\nu^* + (-1)^{pn}\mu(\delta\nu)^* \ . \tag{2}$$

D'après la formule de Stokes, la variété V étant close et constituant un champ à n dimensions fermé, dont la frontière se réduit à zéro, l'intégrale étendue à V d'une forme de degré n homologue à zéro est nulle. On a donc

$$\int d(\mu\nu^*) = 0 ,$$

ce qui, en tenant compte de (2), donne la relation

$$(d\mu, \nu) = (-1)^{pn+1}(\mu, \delta\nu) \tag{3}$$

On en déduit les théorèmes suivants.

Pour qu'une forme μ soit fermée, il faut et il suffit qu'elle soit orthogonale à toutes les formes cohomologues à zéro.

La condition est en effet nécessaire, car si $d\mu = 0$, en vertu de (3), $(\mu, \delta\nu) = 0$ quelle que soit la forme ν de degré $p + 1$ (et de classe C^1).

Elle est aussi suffisante, car si la forme μ (supposée de classe C^2) est orthogonale à toutes les formes cohomologues à zéro, elle est orthogonale à $\delta d\mu$, $(\mu, \delta d\mu) = 0$, ce qui entraîne en vertu de (3) $(d\mu, d\mu) = 0$, et l'on sait que cela n'est possible que si $d\mu = 0$.

Pour qu'une forme soit cofermée, il faut et il suffit qu'elle soit orthogonale à toutes les formes homologues à zéro.

Ce théorème peut se démontrer d'une manière analogue, les rôles des opérateurs d et δ étant simplement permutés. Mais il se déduit aussi du précédent, en l'appliquant à la forme adjointe.

Chacun de ces deux théorèmes entraîne en particulier que *les formes homologues à zéro sont orthogonales aux formes cohomologues à zéro* (de même degré naturellement).

Cela étant, soit α une forme harmonique, de degré p,

$$\Delta \alpha = (-1)^{np} \delta d\alpha + (-1)^{np+n} d\delta\alpha = 0 .$$

$\delta d\alpha$ et $d\delta\alpha$ sont deux formes orthogonales, par suite $\Delta\alpha = 0$ entraîne $\delta d\alpha = 0$ et $d\delta\alpha = 0$. Comme, d'après (3), $(d\alpha, d\alpha) = (-1)^{pn+1}(\alpha, \delta d\alpha)$, $\delta d\alpha = 0$ entraîne $d\alpha = 0$, et de même $d\delta\alpha = 0$ entraîne $\delta\alpha = 0$. Ainsi:

Les formes harmoniques sont les formes de classe C^2 à la fois fermées et cofermées.

Pour qu'une forme de classe C^2 soit harmonique, il faut et il suffit qu'elle soit orthogonale à toutes les formes homologues à zéro et à toutes les formes cohomologues à zéro.

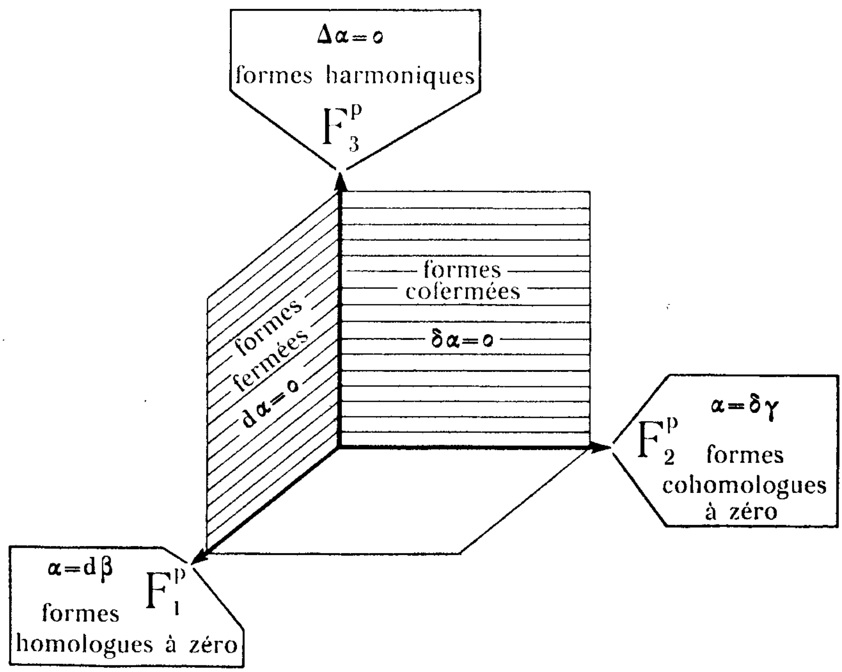
Sur un espace clos, l'équation $\Delta\alpha = 0$ est ainsi équivalente au système des deux équations $d\alpha = 0$ et $\delta\alpha = 0$, qui correspondent à la définition des formes harmoniques de M. Hodge. Pour une forme de degré 0, cette équivalence traduit le fait bien connu qu'une fonction harmonique sur un espace clos se réduit à une constante. Il n'en est naturellement plus de même sur un espace ouvert non clos, ni sur un domaine ayant des points frontières.

Les formes de degré p, pouvant être additionnées et multipliées par un nombre, constituent un *espace vectoriel* (à une infinité de dimensions). Désignons cet espace par F^p et désignons par F_1^p, F_2^p et F_3^p les sous-espaces de F^p constitués respectivement par les formes homologues à zéro, par les formes cohomologues à zéro, et par les formes harmoniques. Cela posé, les deux dernières propositions ci-dessus peuvent s'énoncer de la manière suivante:

Les sous-espaces F_1^p, F_2^p et F_3^p de F^p sont deux à deux totalement perpendiculaires : deux formes appartenant à deux distincts de ces sous-espaces sont orthogonales.

Ils forment dans F^p un système complet, dans le sens qu'une forme orthogonale à chacun de ces sous-espaces se réduit nécessairement à zéro.

Nous pouvons illustrer cet énoncé par le schéma suivant, où les espaces F_1^p, F_2^p et F_3^p sont représentés par les trois axes d'un trièdre trirectangle, l'un des plans coordonnés représentant l'espace vectoriel des formes fermées, un autre celui des formes cofermées:



Ces propositions, comme le théorème de décomposition dont il va être question, correspondent à des théorèmes connus de Topologie combinatoire. (Cf. [14, p. 430], [12] et [17].)

5. Le théorème de décomposition et le théorème de Hodge

Les relations d'orthogonalité qui viennent d'être établies conduisent à se demander si toute forme de degré p se laisse décomposer en la somme de trois formes appartenant respectivement à F_1^p, F_2^p et F_3^p. Pour répondre à cette question (qui serait évidente si F^p n'avait qu'un nombre fini de dimensions), nous utiliserons les deux propositions suivantes.

Théorème H. *β étant une forme de degré p et de classe C^2, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une forme μ telle que*

$$\Delta\,\mu = \beta$$

est que β soit orthogonale à toutes les formes harmoniques de degré p.

Ce théorème sera établi au chapitre III.

La seconde proposition est la suivante: *il n'y a qu'un nombre fini de formes harmoniques linéairement indépendantes de degré p.* Elle sera établie ci-dessous par voie topologique, et d'une autre manière, indépendante, au chapitre III.

Pour l'instant, admettons ces deux propositions. On peut alors trouver un nombre fini h de formes harmoniques de degré p, linéairement indépendantes, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_h$, et toute autre forme harmonique de degré p est égale à une combinaison linéaire de celles-là. On peut supposer aussi que ces formes sont normées et deux à deux orthogonales, c'est-à-dire que $(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_i^j$.

Soit alors α une forme quelconque de degré p et de classe C^2. La forme

$$\alpha_3 = \sum_{i=1}^{h} (\alpha\,, \varphi_i)\,\varphi_i$$

est harmonique et $\alpha - \alpha_3$ est évidemment orthogonale à toutes les formes harmoniques. D'après le théorème H, il existe une forme μ telle que $\Delta\,\mu = \alpha - \alpha_3$. En posant $(-1)^{np}\,\delta d\mu = \alpha_2$ et $(-1)^{np+n}\,d\delta\mu = \alpha_1$, cette équation s'écrit $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha - \alpha_3$, ou

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

α_1 étant homologue à zéro, α_2 cohomologue à zéro et α_3 harmonique. Il résulte immédiatement des relations d'orthogonalité du No. 4 qu'une telle décomposition n'est possible que d'une seule manière. Nous avons ainsi établi le

Théorème de décomposition. *Toute forme α, de degré p, de classe C^2, peut être decomposée, d'une manière unique, en la somme $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ de trois formes respectivement homologue à zéro, cohomologue à zéro et harmonique.*

Le théorème de Hodge va se déduire aisément de là, mais il convient de rappeler d'abord quelques propositions générales indépendantes de toute métrique, relatives aux formes différentielles sur une variété close.

α étant une forme fermée de degré p, on appelle *période* de α relativement au champ d'intégration fermé à p dimensions C^p la valeur de l'intégrale

$$\int_{C^p} \alpha \ .$$

R_p étant le $p^{ième}$ nombre de Betti de la variété, toutes les périodes d'une forme fermée se déduisent de R_p d'entre elles, appelées *périodes fondamentales*, qui sont les périodes relatives à un système fondamental de R_p champs fermés à p dimensions.

On a alors les théorèmes suivants [10].

A. *Il existe toujours une forme fermée ayant comme périodes fondamentales des nombres arbitrairement donnés.*

B. *Une forme fermée dont toutes les périodes sont nulles est homologue à zéro.*

Cela rappelé, nous pouvons établir le

Théorème de Hodge. *Il existe une forme harmonique de degré p, et une seule, ayant des périodes fondamentales données arbitrairement.*

Soit α une forme fermée ayant les périodes fondamentales données. Une telle forme existe d'après A. D'après le théorème de décomposition, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_3$, la composante α_2 étant nulle parce que α est fermée et par suite orthogonale à F_2^p. Comme $\alpha_1 \sim 0$, les périodes de α_1 sont nulles, et la forme harmonique α_3, ayant les mêmes périodes que α, est la forme cherchée.

Pour établir l'unicité, il suffit de prouver qu'une forme harmonique dont toutes les périodes sont nulles se réduit à zéro. Or cela résulte immédiatement de B et des relations d'orthogonalité, car cette forme serait à la fois harmonique et homologue à zéro.

Corollaire. *Le nombre des formes harmoniques linéairement indépendantes de degré p est égal au $p^{ième}$ nombre de Betti.*

En effet, soit α_i la forme harmonique de degré p dont toutes les périodes fondamentales sont nulles, sauf la $i^{ième}$ qui vaut 1 ($i = 1, \ldots, R_p$). Toute forme harmonique de degré p dépend linéairement de ces R_p formes, qui sont linéairement indépendantes.

Remarque 1. Pour établir l'*existence* de la forme harmonique ayant des périodes fondamentales données, nous avons utilisé le théorème A et le théorème H (par l'intermédiaire du théorème de décomposition). Mais pour établir ensuite l'*unicité*, seul le théorème B est intervenu: il n'a pas été fait appel aux théorèmes A et H.

On peut aussi, comme l'a fait M. Hodge [7 et 8], établir l'unicité sans faire usage du théorème B et en déduire ensuite le théorème B. On se base alors sur le *théorème* **C** *: si les périodes de la forme fermée α de degré p sont nulles, $(\alpha, \beta) = 0$ quelle que soit la forme cofermée β de degré p.* Ce dernier théorème résulte d'une proposition générale [10 et 11] d'après laquelle les périodes du produit de deux formes fermées sont des fonctions bilinéaires des périodes fondamentales de ces dernières (en appliquant cette proposition à la forme $\alpha\beta^*$ dont (α, β) est une période, on obtient le théorème C). Admettons-le. Si alors α est une forme harmonique à périodes nulles, $(\alpha, \alpha) = 0$ et par suite l'unicité est établie.

Voici maintenant comment B se déduit de H et C. Soit une forme fermée à périodes nulles. D'après le théorème de décomposition, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_3$; α_3 étant harmonique et à périodes nulles, $\alpha_3 = 0$. Par suite $\alpha = \alpha_1$ qui est homologue à zéro.

Remarque 2. Le complément au théorème H, énoncé ci-dessus, d'après lequel le nombre des formes harmoniques de degré p linéairement indépendantes est fini, et qui sera établi au chapitre IV sans faire usage de A, B ni C, est inclus dans le corollaire au théorème de Hodge, qui nous dit que ce nombre est égal à R_p. Mais les raisonnements faits pour établir l'unicité, basés uniquement sur B ou sur C et ne faisant pas intervenir le théorème H, nous montrent déjà que ce nombre est au plus égal à R_p.

CHAPITRE II

LA PARAMÉTRIX ET LES FORMULES I ET II

6. Définition de la paramétrix. Enoncé des formules I et II

Nous appellerons *fonction distance* (cf. Hodge [8], p. 119—122), sur l'espace de Riemann V, une fonction $r(x, y)$ de deux points de V satisfaisant aux conditions suivantes:

1⁰ $r(x, y) = r(y, x) > 0$ pour $x \neq y$, $r(x, x) = 0$.

2⁰ $r^2(x, y)$ est fonction de classe C^2.

3⁰ Les coordonnées de x et y étant, relativement à un même système, $x^1 \ldots x^n$, $y^1 \ldots y^n$, la fonction

$$A_{i,j} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2(r^2)}{\partial x^i \partial y^j}$$

se réduit, pour $x = y$ dans le domaine du système, au coefficient g_{ij} de la forme quadratique fondamentale ds^2:

$$A_{i,j}(x, x) = g_{ij}(x) .$$

La condition 3⁰, qui est invariante vis-à-vis des changements de coordonnées, signifie simplement, comme cela résulte des propriétés établies plus loin, que lorsque y est infiniment voisin de x, $r(x, y)$ est égal à la longueur ds de l'arc xy.

Dans l'espace euclidien, la distance euclidienne est une fonction distance. Dans un espace de Riemann clos de classe C^v, pour v assez grand, l'existence d'une fonction distance sera établie plus loin.

Définition de la paramétrix.

Soient x^i et y^j les coordonnées de x et y, relativement à deux systèmes en général distincts. Pour j et y fixés, les n fonctions

$$A_{i,j} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2(r^2)}{\partial x^i \partial y^j}$$

sont les composantes d'un vecteur covariant lié à x; pour i et x fixés, on a les composantes d'un vecteur covariant lié à y. Nous dirons que les $A_{i,j}$ sont les composantes d'un *double vecteur covariant*, lié aux deux points x et y.

Nous dirons plus généralement que les $\binom{n}{p}^2$ fonctions

$$A_{i_1\ldots i_p, j_1\ldots j_p} = \begin{vmatrix} A_{i_1,j_1} & \ldots & A_{i_1,j_p} \\ \vdots & & \\ A_{i_p,j_1} & \ldots & A_{i_p,j_p} \end{vmatrix}$$

sont les composantes d'un *double p-vecteur covariant* lié aux deux points x et y, et nous appellerons *paramétrix de degré p* la forme de degré p tant en x qu'en y

$$\omega_p(x,y) = \frac{1}{r^{n-2}(x,y)} \sum_{(i_1\ldots i_p)(j_1\ldots j_p)} A_{i_1\ldots i_p,j_1\ldots j_p}\,(dx^{i_1}\ldots dx^{i_p})(dy^{j_1}\ldots dy^{j_p})$$

pour $n > 2$. Pour $n = 2$, le facteur $\frac{1}{r^{n-2}}$ doit être remplacé par $\log \frac{1}{r}$.

Il est clair que cette forme est complètement déterminée par la fonction distance $r(x,y)$.

Dans l'espace euclidien, r étant la distance euclidienne,

$$r^2 = \sum_i (x^i - y^i)^2 ,$$

$$A_{i,j} = \delta_i^j \quad , \quad A_{i_1\ldots i_p,j_1\ldots j_p} = \delta_{i_1\ldots i_p}^{j_1\ldots j_p} \quad \text{et, pour } n > 2 ,$$

$$\omega_p(x,y) = \frac{1}{r^{n-2}} \sum_{(i_1\ldots i_p)} (dx^{i_1}\ldots dx^{i_p})(dy^{i_1}\ldots dy^{i_p}) .$$

Le but de ce chapitre est d'établir les formules I et II ci-dessous:

$$\int \omega_p(x,y)\,[\Delta\,\alpha(y)]^* = \int \alpha(y)\,[\Delta_y\,\omega_p(x,y)]^* - k\,\alpha(x) \qquad \text{(I)}$$

$$\Delta \int \omega_p(x,y)\,\mu^*(y) = \int \Delta_x\,\omega_p(x,y)\cdot\mu^*(y) - k\,\mu(x) \qquad \text{(II)}$$

α et μ désignent des formes quelconques de degré p, α de classe C^2 et μ de classe C^1; * désigne l'adjointe relativement à y et $k = n(n-2)k_n$, k_n étant le contenu de la sphère de rayon un dans l'espace euclidien à n dimensions.

Nous supposerons $n > 2$; les modifications qu'il y aurait lieu d'apporter aux démonstrations pour $n = 2$ étant presque évidentes, nous n'y insisterons pas.

7. Fonctions distances et métriques osculatrices

Sur tout espace de Riemann clos de classe C^3, on peut construire une fonction distance de la manière suivante. Soit $\varrho(x, y)$ la borne inférieure des longueurs des arcs de courbe joignant les points x et y. On sait qu'il existe alors un nombre positif ε tel que, si $\varrho(x, y) \leqslant \varepsilon$, les points x et y sont les extrémités d'un arc de géodésique de longueur $\varrho(x, y)$ et d'un seul, et la fonction $\varrho^2(x, y)$ est de classe C^2 pour $\varrho(x, y) < \varepsilon$. Soit alors $F(t)$ une fonction de la variable réelle t, de classe C^∞, non décroissante, égale à t pour $0 \leqslant t \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ et à $\frac{3}{4}\varepsilon$ pour $t > \varepsilon$. (On sait construire une telle fonction.) La fonction $F(\varrho(x, y))$ est alors une fonction distance, comme on le vérifie aisément.

Remarquons que, si l'espace de Riemann est de classe C^∞ ou C^ω, la fonction distance ainsi construite est de classe C^∞. Si l'espace de Riemann consiste en une variété régulière plongée dans un espace euclidien à $N > n$ dimensions, la distance euclidienne (relativement à l'espace ambiant) de deux points de la variété fournit une fonction distance.

Pour établir quelques propriétés de la fonction distance, nous supposerons que x et y restent dans le domaine d'un même système de coordonnées. $A = -\frac{1}{2}r^2(x, y)$ est alors fonction des $2\,n$ coordonnées x^i et y^i de x et y relativement à ce système. Nous désignerons, *dans ce No. uniquement*, les dérivées partielles de cette fonction jusqu'à l'ordre 3 en affectant la lettre A des indices des variables par rapport auxquelles s'est faite la dérivation, les indices des variables x étant placés à gauche et ceux des variables y à droite d'une virgule. Ainsi:

$$A_{i,} = \frac{\partial A}{\partial x^i}\ ,\quad A_{,j} = \frac{\partial A}{\partial y^j}\ ,\quad A_{i,j} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^i \partial y^j}\ ,\quad A_{ij,k} = \frac{\partial^3 A}{\partial x^i \partial x^j \partial y^k}\ ,\ \text{etc.}$$

La signification de $A_{i,j}$ concorde avec celle donnée ci-dessus. Les dérivées d'ordre $\geqslant 4$ n'intervenant pas dans la suite, aucune confusion n'est à craindre au sujet des symboles tels que $A_{ij,kl}$ qui désigneront toujours les déterminants introduits plus haut.

La fonction A étant maxima pour $y = x$, on a:

$$A_{i,}(x, x) = 0 \quad \text{et} \quad A_{,i}(x, x) = 0\ .$$

En dérivant ces identités par rapport à x^j, on obtient:

$$A_{ij,}(x, x) + A_{i,j}(x, x) = 0 \quad \text{et} \quad A_{j,i}(x, x) + A_{,ij}(x, x) = 0 \ .$$

La symétrie de $r(x, y)$ entraîne d'ailleurs $A_{i,j}(x, x) = A_{j,i}(x, x)$. Il en résulte les identités:

$$A_{ij,}(x, x) = -A_{i,j}(x, x) = -A_{j,i}(x, x) = A_{,ij}(x, x) \ . \tag{1}$$

Considérons la fonction

$$S(x, y) = r\frac{\partial r}{\partial x^i} + r\frac{\partial r}{\partial y^i} = -A_{i,} - A_{,i} \ ;$$

les identités ci-dessus montrent que cette fonction qui est définie dans le domaine du système de coordonnées envisagé, s'annule ainsi que ses dérivées premières pour $y = x$. Son développement par la formule de Taylor autour du point y suivant les puissances des $x^i - y^i$ ne contient par suite pas de terme de degré inférieur à 2. Il en résulte que l'on a:

$$\frac{\partial r}{\partial x^i} = -\frac{\partial r}{\partial y^i} + \frac{S(x, y)}{r(x, y)} \quad , \quad \frac{S(x, y)}{r^2(x, y)} \text{ étant bornée.} \tag{2}$$

Métrique euclidienne osculatrice. On dit que les métriques définies par les éléments linéaires

$$ds^2 = \sum_{ij} g_{ij}\, dx^i dx^j \quad \text{et} \quad d\bar{s}^2 = \sum_{ij} \bar{g}_{ij}\, dx^i dx^j$$

sont *osculatrices* en un point, si, en ce point,

$$g_{ij} = \bar{g}_{ij} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial x^k} \ (\text{pour tous } i, j, k) \ .$$

Comme on le vérifie aisément, ces relations sont invariantes vis-à-vis de tout changement du système de coordonnées.

On sait qu'il existe des métriques *euclidiennes*, définies au voisinage d'un point z quelconque, occulatrices en ce point à la métrique riemannienne donnée (voir [1], p. 94—96; [9], p. 82—87).

Théorème. Soit $\bar{r}(x, y)$ la distance euclidienne des points x et y relativement à une métrique euclidienne osculatrice à la métrique donnée au point z de coordonnées $z^1, \dots, z^n$; le développement taylorien de la fonction $r^2(x,y) - \bar{r}^2(x, y)$ autour du point z, suivant les puissances des $y^i - z^i$ et des $x^i - z^i$, ne contient pas de termes de degré inférieur à 4.

Démonstration. Nous pouvons supposer le système de coordonnées tel que l'élément linéaire de la métrique euclidienne osculatrice se réduise à $ds^2 = \sum_i (dx^i)^2$. Un tel système de coordonnées est dit *géodésique au point z.*

On a alors $\bar{g}_{ij} = \delta_i^j$ identiquement et $g_{ij} = \delta_i^j$, $\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 0$ au point z. Comme

$$\bar{r}^2(x,y) = \sum_i (x^i - z^i)^2 + \sum_i (y^i - z^i)^2 - 2 \sum_i (x^i - z^i)(y^i - z^i) ,$$

en tenant compte des identités (1) appliquées au point z, on voit que dans le développement taylorien de $r^2(x,y)$, où les termes de degré 0 et 1 manquent évidemment, les termes du second degré se réduisent à $\bar{r}^2(x,y)$. Pour achever la démonstration, il suffira par suite de prouver que toutes les dérivées troisièmes de $r^2(x,y)$, ou $A(x,y)$, s'annulent pour $x = y = z$.

En dérivant par rapport à x^k l'identité (1) et remarquant que

$$\frac{\partial}{\partial x^k} A_{i,j}(x,x) = \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij}(x) = 0 ,$$

il vient

$$A_{ijk,} + A_{ij,k} = - A_{ik,j} - A_{i,jk} = A_{k,ij} + A_{,ijk} = 0$$

pour $x = y = z$.

La symétrie de $A(x,y)$ entraîne d'autre part

$$A_{ijk,} = A_{,ijk} \quad \text{et} \quad A_{i,jk} = A_{jk,i} \quad \text{pour } y = x .$$

Il en résulte en particulier $A_{ik,j} = - A_{i,jk} = - A_{jk,i} = - A_{kj,i}$ et par permutation circulaire $A_{ik,j} = - A_{kj,i} = A_{ji,k} = - A_{ik,j} = 0$ et l'on voit que toutes les dérivées troisièmes s'annulent pour $x = y = z$.

Remarque. Il résulte de ce théorème que si $r_1(x,y)$ et $r_2(x,y)$ sont des fonctions distances associées à deux métriques osculatrices au point z, $r_1^2(x,y) - r_2^2(x,y)$ s'annule ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre trois inclusivement pour $x = y = z$.

8. L'opérateur Δ dans l'espace euclidien

Théorème. Soient $x^1, x^2, \ldots, x^n$ un système de coordonnées rectangulaires dans l'espace euclidien, de manière que $ds^2 = \sum_i (dx^i)^2$, et $\alpha = \sum_{(i_1 \ldots i_p)} A_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \ldots dx^{i_p}$ une forme de degré p, de classe C^2. On a

$$\Delta \alpha = \sum_{(i_1 \ldots i_p)} \sum_i \frac{\partial^2 A_{i_1 \ldots i_p}}{(\partial x^i)^2} dx^{i_1} \ldots dx^{i_p} .$$

Démonstration. Dans l'espace euclidien, comme $g_{ij} = g^{ij} = \delta_i^j$, on a, $i_1 \ldots i_p, i_{p+1} \ldots i_n$ étant une permutation paire de $1\ 2 \ldots n$,

$$[dx^{i_1} \ldots dx^{i_p}]^* = dx^{i_{p+1}} \ldots dx^{i_n} .$$

En désignant par $\frac{\partial \alpha}{\partial x^i}$ la forme qui se déduit de α en remplaçant chaque coefficient par sa dérivée partielle par rapport à x^i, on peut représenter l'opérateur d par l'expression

$$d = \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} dx^i = \sum_i dx^i \frac{\partial}{\partial x^i} .$$

L'opérateur $\frac{\partial}{\partial x^i} dx^i$ indique que la forme doit être d'abord multipliée à gauche par dx^i, et ensuite soumise à l'opération $\frac{\partial}{\partial x^i}$. Les deux opérations sont d'ailleurs permutables:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} dx^i = dx^i \frac{\partial}{\partial x^i} .$$

Dans l'espace euclidien, l'opération $\frac{\partial}{\partial x^i}$ est permutable avec l'opération qui consiste à prendre l'adjointe à une forme:

$$\frac{\partial \alpha^*}{\partial x^i} = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x^i}\right)^* .$$

Ce fait, comme on le vérifie immédiatement, est lié à la constance des coefficients g_{ij} du ds^2 et il n'a pas lieu dans un espace qui n'est pas euclidien.

En désignant par $\theta^j\alpha$ la forme $(dx^j\alpha^*)^*$ qui se déduit de α en prenant l'adjointe de la forme obtenue en multipliant α^* à gauche par dx^j, on peut représenter l'opérateur δ, dans l'espace euclidien, par l'expression

$$\delta = \sum_j \theta^j \frac{\partial}{\partial x^j} \; .$$

Il résulte de là que, dans l'espace euclidien, l'opérateur $(-1)^{np}\Delta = \delta d + (-1)^n d\delta$ est représenté par l'expression

$$(-1)^{np}\Delta = \sum_{ij} [\theta^i dx^j + (-1)^n dx^j \theta^i] \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \; . \tag{3}$$

Considérons une forme monôme de degré p, par exemple

$$\mu = dx^1\, dx^2 \ldots dx^p \; .$$

On a, en remarquant que la permutation $(1, p+1, \ldots n, 2, \ldots, p)$ est paire ou impaire selon que $(-1)^{np+n} = +1$ ou -1 ,

$$\mu^* = dx^{p+1} \ldots dx^n \quad , \qquad dx^1\,\mu^* = dx^1\, dx^{p+1} \ldots dx^n$$

$$\theta^1\,\mu = (-1)^{np+n} dx^2 \ldots dx^p \quad , \qquad (-1)^{np+n} dx^1 \theta^1 \mu = \mu \; .$$

D'une manière analogue, on obtient les relations:

$$(-1)^{np+n} dx^i \theta^i \mu = \mu \quad \text{si} \quad i \leqslant p \; , \; = 0 \quad \text{si} \quad i > p$$

$$(-1)^{np} \theta^i dx^i \mu = 0 \quad \text{si} \quad i \leqslant p \; , \; = \mu \quad \text{si} \quad i > p$$

d'où résulte

$$[(-1)^{np} \theta^i dx^i + (-1)^{np+n} dx^i \theta^i] \mu = \mu$$

quel que soit i.

L'opérateur qui intervient ici étant linéaire et permutable avec la multiplication par une fonction (variable ou constante), cette formule s'applique à une forme quelconque de degré p:

$$[\theta^i dx^i + (-1)^n dx^i \theta^i] \alpha = (-1)^{np} \alpha \; . \tag{4}$$

Ensuite, si $i \neq j$, on a

$$dx^i \theta^j \mu = \theta^j dx^i \mu = 0 \quad \text{si} \quad i \leqslant p \quad \text{ou si} \quad j > p \; .$$

$$\text{Pour } i > p, \ dx^i\theta^1\mu = (-1)^{np+n}dx^i dx^2 \dots dx^p,$$
$$\theta^1 dx^i\mu = -(-1)^{np} dx^i dx^2 \dots dx^p,$$
$$\text{d'où résulte } \theta^1 dx^i\mu + (-1)^n dx^i\theta^1\mu = 0$$

et d'une manière plus générale, pour $i > p$ et $j \leqslant p$:

$$\theta^j dx^i\mu + (-1)^n dx^i\theta^j\mu = 0 \ .$$

Cette formule est encore valable si $i \leqslant p$ ou si $j > p$, les deux termes étant alors nuls. On en déduit, pour une forme quelconque α de degré p,

$$[\theta^i dx^j + (-1)^n dx^j\theta^i]\alpha = 0 \qquad \text{pour } i \neq j \ . \tag{5}$$

La formule à démontrer résulte immédiatement de (3), (4) et (5), en remarquant que les opérateurs qui interviennent dans (4) et (5) sont permutables avec l'opérateur $\dfrac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}$.

9. L'opérateur Δ dans l'espace riemannien

Soit z un point donné de l'espace de Riemann. Nous dirons qu'une fonction $f(x)$, définie et continue au voisinage de z, est d'*ordre* k, si $\dfrac{f(x)}{r^k(x,z)}$ est bornée au voisinage de z. Si $k > 0$, $f(x)$ s'annule évidemment au point z, tandis qu'elle peut y être infinie si $k < 0$.

Nous dirons aussi que $K(x,z)$ *appartient à l'exposant* h, si $K(x,z)$ est d'ordre $-h$.

Soient $x^1, \dots, x^n$ des coordonnées géodésiques en z. La métrique euclidienne définie par $d\bar{s}^2 = \sum\limits_i (dx^i)^2$ étant osculatrice à la métrique donnée, définie par $ds^2 = \sum\limits_{ij} g_{ij} dx^i dx^j$, il résulte du No. 7 que les fonctions $g_{ij}(x) - \delta_i^j$ sont d'ordre 2. Cela entraîne que, g étant le déterminant $\|g_{ij}\|$, $g - 1$, $\sqrt{g} - 1$, $g^{ij} - \delta_i^j$ sont aussi d'ordre 2, comme on le vérifie en considérant les développements du déterminant g et de ses mineurs.

Soit $\alpha = \sum\limits_{(i_1 \dots i_p)} A_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \dots dx^{i_p}$ une forme de degré p, définie au voisinage de z. Nous désignerons par $\alpha^{\overline{*}}$ l'adjointe à α relativement à la métrique euclidienne:

$$\alpha^{\overline{*}} = \sum_{(i_1 \dots i_p)} A_{i_1 \dots i_p} dx^{i_{p+1}} \dots dx^{i_n}$$

(où $i_{p+1} \dots i_n$ sont tels que $i_1 \dots i_n$ est une permutation paire de $12 \dots n$).

Nous désignerons encore par $\bar{\delta}$ et $\bar{\Delta}$ les opérateurs δ et Δ définis à partir de la métrique euclidienne: $\bar{\delta}\alpha = (d\alpha^{\bar{*}})^{\bar{*}}$

$$\bar{\Delta} = (-1)^{np}\bar{\delta}d + (-1)^{np+n}d\bar{\delta} .$$

Nous nous proposons de comparer les formes α et $\alpha^{\bar{*}}$, $\delta\alpha$ et $\bar{\delta}\alpha$, $\Delta\alpha$ et $\bar{\Delta}\alpha$, au voisinage de z.

Les coefficients de α^*, d'après la formule de définition (1) chap. I No. 2, sont des combinaisons linéaires homogènes des coefficients $A = A_{i_1 \ldots i_p}$ de α ; les coefficients des A dans ces combinaisons sont des fonctions des g_{ij}, polynômes en les g_{ij} multipliés par une puissance de g. La forme $\alpha^{\bar{*}}$ se déduit de α^* en remplaçant, dans ces fonctions, g_{ij} par δ_i^j. Par suite:

les coefficients de la forme $\alpha^* - \alpha^{\bar{*}}$ sont des combinaisons linéaires homogènes des coefficients A de α ; dans ces combinaisons, les coefficients des A sont des fonctions G_2 formées avec les g_{ij}, qui sont d'ordre 2.

Ces derniers coefficients sont donc des sommes de termes de la forme $G_2 A$.

Les coefficients de $d(\alpha^* - \alpha^{\bar{*}})$ sont par suite des sommes de termes de la forme $G_2 \dfrac{\partial A}{\partial x^i}$ et $\dfrac{\partial G_2}{\partial x^i} A$, et les coefficients de $[d(\alpha^* - \alpha^{\bar{*}}]^*$ des sommes de termes de la forme $G_2 \dfrac{\partial A}{\partial x^i}$ et $G_1 A$, où G_1 est une fonction d'ordre 1, formée avec les g_{ij} et leurs dérivées premières.

D'autre part, les coefficients de $\alpha^{\bar{*}}$ n'étant autres que les A, ceux de $d\alpha^{\bar{*}}$ sont, comme ceux de $d\alpha$, des sommes de termes de la forme $\dfrac{\partial A}{\partial x^i}$, et ceux de $(d\alpha^{\bar{*}})^* - (d\alpha^{\bar{*}})^{\bar{*}}$ des sommes de termes de la forme $G_2 \dfrac{\partial A}{\partial x^i}$. Par suite, comme $\delta\alpha - \bar{\delta}\alpha = [d(\alpha^* - \alpha^{\bar{*}})]^* + (d\alpha^{\bar{*}})^* - (d\alpha^{\bar{*}})^{\bar{*}}$,

les coefficients de $\delta\alpha - \bar{\delta}\alpha$ sont des sommes de termes de la forme $G_2 \dfrac{\partial A}{\partial x^i}$ et $G_1 A$.

En remplaçant α par $d\alpha$, on voit que les coefficients de $\delta d\alpha - \bar{\delta} d\alpha$ sont des sommes de termes de la forme $G_2 \dfrac{\partial^2 A}{\partial x^i \partial x^j}$ et $G_1 \dfrac{\partial A}{\partial x^i}$, et les coefficients de $d\delta\alpha - d\bar{\delta}\alpha$ sont des sommes de termes de la forme $G_2 \dfrac{\partial^2 A}{\partial x^i \partial x^j}$,

$G_1 \frac{\partial A}{\partial x^i}$ *et* $G_0 A$, G_0 désignant une fonction d'ordre 0, formée avec les g_{ij} et leurs dérivées premières et secondes. Par suite:

Les coefficients de $\Delta\alpha - \overline{\Delta}\alpha$ sont des sommes de termes de la forme $G_0 A$, $G_1 \frac{\partial A}{\partial x^i}$ et $G_2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^i \partial x^j}$.

Les fonctions G_1 et G_2 s'annulant au point $x = z$, seuls subsistent en ce point les termes de la forme $G_0 A$. *Les coefficients de $\Delta\alpha - \overline{\Delta}\alpha$ se réduisent donc, pour $x = z$, à des combinaisons linéaires des coefficients de α.*

Si l'on pose $\Delta\alpha - \overline{\Delta}\alpha = \sum_{(k_1 \dots k_p)} B_{k_1 \dots k_p} dx^{k_1} \dots dx^{k_p}$, on peut écrire

$$[B_{k_1 \dots k_p}]_{x=z} = \left[\sum_{(i_1 \dots i_p)} G^{i_1 \dots i_p}_{k_1 \dots k_p} A_{i_1 \dots i_p} \right]_{x=z} \tag{6}$$

les $G^{i_1 \dots i_p}_{k_1 \dots k_p}$ étant les fonctions désignées ci-dessus par G_0, fonctions construites algébriquement avec les g_{ij} et leurs dérivées premières et secondes, qu'il est inutile d'expliciter ici.

10. Etude de $\omega_p(x, y)$ au voisinage d'un point

Désignons par $\overline{\omega}_p(x, y)$ la paramétrix de degré p, définie, pour x et y voisins d'un point donné z, à partir de la distance euclidienne $\bar{r}(x, y)$ de x et y, relativement à une métrique euclidienne osculatrice au point z.

Lemme 1. Pour $y = z$, les coefficients de $\omega_p(x, y) - \overline{\omega}_p(x, y)$ considérés comme fonctions de x, sont d'ordre $4 - n$, et leurs dérivées premières et secondes sont respectivement d'ordres $3 - n$ et $2 - n$.

L'ordre maximum des coefficients d'une forme, ainsi que celui de leurs dérivées premières ou secondes, ne dépendant pas du système de coordonnées, nous pouvons utiliser un système de coordonnées géodésiques au point z, de manière que

$$\bar{r}^2(x, y) = \sum_i (x^i - y^i)^2 .$$

Du théorème du No. 7, il résulte que, pour $y = z$, $r^2 - \bar{r}^2$ est d'ordre 4, $r - \bar{r}$ d'ordre 3, $A_{i,j} - \delta^j_i$ et par suite $A_{i_1 \dots i_p, j_1 \dots j_p} - \delta^{j_1 \dots j_p}_{i_1 \dots i_p}$ d'ordre 2.

Les coefficients de $\omega_p(x,y) - \overline{\omega}_p(x,y)$ étant

$$\frac{A_{i_1 \ldots i_p, j_1 \ldots j_p}}{r^{n-2}} - \frac{\delta^{j_1 \ldots j_p}_{i_1 \ldots i_p}}{\bar{r}^{n-2}} ,$$

notre lemme résulte immédiatement de là.

Lemme 2. Pour $y = z$, les coefficients de $\delta_x \omega_p(x,y) - \overline{\delta}_x \overline{\omega}_p(x,y)$ et $(d_x \omega_p(x,y))^* - (d_x \overline{\omega}_p(x,y))^*$ sont d'ordre $3 - n$.

Ecrivons ω pour $\omega_p(x,y)$ et $\overline{\omega}$ pour $\overline{\omega}_p(x,y)$ et convenons que les opérations d, δ, $\overline{\delta}$, $*$, $\overline{*}$ doivent être effectués par rapport à x.

On a $\delta\omega - \overline{\delta}\overline{\omega} = \delta(\omega - \overline{\omega}) + (\delta - \overline{\delta})\overline{\omega}$. Il résulte du lemme 1 que les coefficients de $\delta(\omega - \overline{\omega})$ sont d'ordre $3 - n$. D'autre part, d'après le No. 4, les coefficients de $\overline{\omega}$ étant d'ordre $2 - n$ et leurs dérivées premières d'ordre $1 - n$, les coefficients de $(\delta - \overline{\delta})\overline{\omega}$ sont d'ordre $3 - n$, ce qui établit la première affirmation.

On a ensuite $(d\omega)^* - (d\overline{\omega})^{\overline{*}} = [d(\omega - \overline{\omega})]^* + [(d\overline{\omega})^* - (d\overline{\omega})^{\overline{*}}]$. Les coefficients de $[d(\omega - \overline{\omega})]^*$ sont d'ordre $3 - n$ d'après le lemme 1, et d'après le No. 4 ceux de $(d\overline{\omega})^* - (d\overline{\omega})^{\overline{*}}$ sont aussi d'ordre $3 - n$, ce qui achève la démonstration.

En raisonnant de la même manière, on voit que les coefficients de $d\delta\omega - d\overline{\delta}\overline{\omega}$ et de $\delta d\omega - \overline{\delta}d\overline{\omega}$ sont d'ordre $2 - n$. Il en est donc de même pour la forme $\Delta\omega - \overline{\Delta}\overline{\omega}$, c'est-à-dire pour $\Delta\omega$, puisque $\overline{\Delta}\overline{\omega} = 0$ (d'après le No. 8). Le point z pouvant être choisi arbitrairement, nous avons ainsi prouvé le théorème suivant:

Théorème. *La forme $\Delta_x \omega_p(x,y)$ appartient à l'exposant $n - 2$.*

11. La formule I.

Soient α et β deux formes de degré p et de classe C^2. En remplaçant, dans la formule (2) du chap. I (No. 4), d'abord μ par α et ν par $d\beta$, ensuite μ par β et ν par $d\alpha$, et retranchant membre à membre les égalités obtenues, il vient

$$d[\alpha(d\beta)^* - \beta(d\alpha)^*] = (-1)^{np}[\alpha(\delta d\beta)^* - \beta(\delta d\alpha)^*] .$$

En remplaçant, dans la même formule, d'abord μ par $\delta\alpha$ et ν par β (qui sont des formes de degrés $p - 1$ et p respectivement), ensuite μ

par $\delta\beta$ et ν par α, et retranchant membre à membre les égalités obtenues, on obtient une relation qui peut s'écrire

$$d[\beta^*\delta\alpha - \alpha^*\delta\beta] = (-1)^{pn+n}[\beta(d\delta\alpha)^* - \alpha(d\delta\beta)^*] .$$

De ces deux relations résulte enfin, comme $\Delta = (-1)^{np}\delta d + (-1)^{np+n}d\delta$,

$$d[\alpha(d\beta)^* - \beta(d\alpha)^* + \alpha^*\delta\beta - \beta^*\delta\alpha] = \alpha(\Delta\beta)^* - \beta(\Delta\alpha)^* . \qquad (7)$$

Désignons maintenant par Σ la sphère de centre y et de rayon ϱ (au sens de la métrique euclidienne osculatrice au point y), définie par l'équation $\sum_i (x^i - y^i)^2 = \varrho^2$, et soient D_1 l'intérieur et D_2 l'extérieur de Σ.

Dans la formule (7), remplaçons β par $\omega = \omega_p(x,y)$ en considérant x comme le point variable, le point y étant fixe et les $\binom{n}{p}$ produits extérieurs $dy^{i_1}\ldots dy^{i_p}$ ayant des valeurs numériques déterminées, composantes d'un p-vecteur contravariant lié au point y. Les formes $\omega = \omega_p(x,y)$ et $\alpha = \alpha(x)$ étant de classe C^2 dans D_2, la formule de Stokes peut être appliquée à la relation ainsi déduite de (7) et donne, en supposant Σ orientée positivement par rapport à D_1, et par suite négativement par rapport à D_2:

$$\int_{D_2}\alpha(\Delta\omega)^* - \omega(\Delta\alpha)^* = -\int_\Sigma \alpha(d\omega)^* - \omega(d\alpha)^* + \alpha^*\delta\omega - \omega^*\delta\alpha . \qquad (8)$$

La formule cherchée va résulter de (8) en faisant tendre ϱ vers zéro. La limite du premier membre est

$$\int \alpha(\Delta\omega)^* - \omega(\Delta\alpha)^*$$

intégrale qui a un sens puisque $\omega = \omega_p(x,y)$ et $\Delta\omega = \Delta_x\omega_p(x,y)$ appartiennent à l'exposant $n-2$.

La limite du second membre va être calculée en utilisant les résultats du No. 10 et le lemme élémentaire ci-dessous.

Lemme. Si les coefficients de la forme $\mu(x)$ de degré $n-1$, définie au voisinage de y, sont d'ordre $2-n$ (au sens du No. 9, pour $y = z$),

$$\lim_{\varrho=0}\int_\Sigma \mu(x) = 0 .$$

Il suffit, pour la démonstration, de considérer le cas où $\mu(x)$ est une forme monôme, soit par exemple $\mu(x) = m(x)dx^2dx^3\ldots dx^n$. En désignant par $d\Sigma$ l'élément d'aire à $(n - 1)$ dimensions de Σ, par r le cosinus de l'angle formé par la normale à Σ dirigée vers l'extérieur avec l'axe des x^1 (ces grandeurs évaluées relativement à la métrique euclidienne osculatrice en y), on a

$$\int_\Sigma \mu(x) = \int_\Sigma m(x)\gamma d\Sigma$$

d'où résulte, M_ϱ étant la borne supérieure de $|m(x)|$ sur Σ et $k\varrho^{n-1}$ l'aire de Σ,

$$\left|\int_\Sigma \mu(x)\right| \leqslant M_\varrho k\varrho^{n-1} = \frac{M_\varrho}{\varrho^{2-n}} \cdot k\varrho$$

et comme $\dfrac{M_\varrho}{\varrho^{2-n}}$ est borné, le lemme est établi.

Les coefficients des formes $\omega(d\alpha)^*$ et $\omega^*\delta\alpha$ étant d'ordre $2 - n$, comme ceux de ω, en vertu du lemme:

$$\lim_{\varrho=0} \int_\Sigma \omega(d\alpha)^* + \omega^*\delta\alpha = 0 \ .$$

Les coefficients de $\delta\omega - \overline{\delta\overline{\omega}}$ et de $(d\omega)^* - \overline{(d\overline{\omega})^*}$ étant d'ordre $3 - n$ (No. 10), on a

$$\lim_{\varrho=0} \int_\Sigma \alpha(d\omega)^* + \alpha^*\delta\omega = \lim_{\varrho=0} \int_\Sigma \alpha\overline{(d\overline{\omega})^*} + \overline{\alpha^*}\,\overline{\delta\overline{\omega}} \ .$$

Désignons par α_0 la forme à coefficients constants, égaux aux coefficients correspondants de α au point y. α étant de classe C^1, les formes $\alpha - \alpha_0$ et $\alpha^* - \overline{\alpha_0^*}$ sont d'ordre 1 et les formes $\alpha\overline{(d\overline{\omega})^*} - \alpha_0\overline{(d\overline{\omega})^*}$ et $\overline{\alpha^*}\,\overline{\delta\overline{\omega}} - \overline{\alpha_0^*}\,\overline{\delta\overline{\omega}}$ d'ordre $2 - n$. Par suite, en vertu du lemme, la dernière limite ci-dessus est égale à celle de

$$J = \int_\Sigma \alpha_0\overline{(d\overline{\omega})^*} + \overline{\alpha_0^*}\,\overline{\delta\overline{\omega}} \ .$$

Or, comme nous allons le voir, J est indépendant de ϱ et vaut $-n(n-2)k_n\alpha(y)$, k_n désignant le contenu de la sphère à n dimensions de rayon 1 dans l'espace euclidien. Ce résultat étant admis, la formule (8) devient à la limite pour $\varrho = 0$

$$\int \alpha(\Delta\omega)^* - \omega(\Delta\alpha)^* = k\alpha(y)$$

où $k = n(n - 2)k_n$. C'est justement la formule I.

Calcul de l'intégrale J. Pour simplifier l'écriture, nous écrirons

$$J = \int_{\Sigma} \alpha (d\omega)^* + \alpha^* \delta\omega$$

en convenant que $\alpha = \alpha(x)$ est à coefficients constants, que $\omega = \omega_p(x, y)$ est la forme relative à l'espace euclidien et que les opérations $*$ et δ se rapportent aussi à l'espace euclidien. Nous conviendrons aussi que le point fixe y est à l'origine des coordonnées, de sorte que $y^i = 0$ (mais naturellement les produits extérieurs $dy^{i_1} \ldots dy^{i_p}$ ne sont pas nuls).

Comme $r(x, y) = \varrho$ sur Σ (ϱ désignant ici la distance euclidienne), on a

$$J = \frac{1}{\varrho^n} \int_{\Sigma} \alpha r^n (d\omega)^* + \alpha^* r^n \delta\omega \ . \tag{9}$$

Pour calculer cette dernière intégrale, nous la transformerons par la formule de Stokes en une intégrale étendue à D_1.

De l'expression de ω dans l'espace euclidien (No. 6), on déduit:

$$r^n d\omega = (2 - n) \sum_{(i_1 \ldots i_p)} \sum_i x^i (dx^i dx^{i_1} \ldots dx^{i_p}) (dy^{i_1} \ldots dy^{i_p}) \ .$$

$i_1, \ldots, i_p$ étant donnés, convenons de choisir $i_{p+1}, \ldots, i_n$ de manière que $i_1, \ldots, i_n$ soit une permutation paire de $1, \ldots, n$. Dans la sommation $\sum_i$ ci-dessus, il suffit d'attribuer à i les valeurs $i_{p+1}, \ldots, i_n$, les termes s'annulant pour $i = i_1, \ldots, i_p$. En prenant l'adjointe, il vient:

$$r^n (d\omega)^* = (2 - n) \sum_{(i_1 \ldots i_p)} \sum_{k=p+1}^{n} (-1)^{k-1} x^{i_k} (dx^{i_{p+1}} \ldots dx^{i_{k-1}} dx^{i_{k+1}} \ldots dx^{i_n}) (dy^{i_1} \ldots dy^{i_p})$$

d'où résulte

$$d[r^n (d\omega)^*] = (2 - n)(n - p)(-1)^p \sum_{(i_1 \ldots i_p)} (dx^{i_{p+1}} \ldots dx^{i_n}) (dy^{i_1} \ldots dy^{i_p}) \ .$$

On a aussi, d'après l'expression de ω^*,

$$r^n d\omega^* = (2 - n) \sum_{(i_1 \ldots i_p)} \sum_i x^i (dx^i dx^{i_{p+1}} \ldots dx^{i_n}) (dy^{i_1} \ldots dy^{i_p}) \ .$$

Dans la sommation $\sum_i$, il suffit ici d'attribuer à i les valeurs $i_1, \ldots, i_p$.

En prenant l'adjointe, il vient

$$r^n \delta\omega = (2 - n) \sum_{(i_1 \ldots i_p)} \sum_{k=1}^{p} (-1)^{pn+n+k-1} x^{i_k} (dx^{i_1} \ldots dx^{i_{k-1}} dx^{i_{k+1}} \ldots dx^{i_p}) (dy^{i_1} \ldots dy^{i_p})$$

d'où résulte

$$d[r^n \delta\omega] = (2-n)p(-1)^{pn+n} \sum_{(i_1 \dots i_p)} (dx^{i_1} \dots dx^{i_p})(dy^{i_1} \dots dy^{i_p}) .$$

Posons maintenant $\alpha = \sum\limits_{(i_1 \dots i_p)} a_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \dots dx^{i_p}$. On obtient, selon les règles du calcul extérieur,

$$\alpha d[r^n (d\omega)^*] = (2-n)(n-p)(-1)^p \sum_{(i_1 \dots i_p)} a_{i_1 \dots i_p} (dx^{i_1} \dots dx^{i_n})(dy^{i_1} \dots dy^{i_p}) =$$
$$= (2-n)(n-p)(-1)^p \alpha(y)(dx^1 \dots dx^n) . \tag{10}$$

On obtient encore, comme $\alpha^* = \sum\limits_{(i_1 \dots i_p)} a_{i_1 \dots i_p} dx^{i_{p+1}} \dots dx^{i_n}$,

$$\alpha^* d[r^n \delta\omega] =$$
$$= (2-n)p(-1)^{pn+n} \sum a_{i_1 \dots i_p} (dx^{i_{p+1}} \dots dx^{i_n} dx^{i_1} \dots dx^{i_p})(dy^{i_1} \dots dy^{i_p}) =$$
$$= (2-n)p(-1)^{n+p} \alpha(y)(dx^1 \dots dx^n) . \tag{11}$$

De (10) et (11), il résulte que la différentielle de la forme figurant sous le signe $\int$ dans (9) est

$$d[\alpha r^n (d\omega)^* + \alpha^* r^n \delta\omega] = (-1)^p \alpha d[r^n (d\omega)^*] + (-1)^{n-p} \alpha^* d[r^n \delta\omega] =$$
$$= (2-n) n \alpha(y)(dx^1 \dots dx^n) .$$

D'après la formule de Stokes, l'intégrale figurant dans (9) est égale à l'intégrale de cette dernière forme étendue à D_1, soit à $(2-n) n \alpha(y) k_n \varrho^n$, d'où le résultat annoncé

$$J = (2-n)\, n\, k_n\, \alpha(y) .$$

12. La formule II

Lemme 1. Soit $h(x,y)$ une fonction des deux points x et y, continue pour $x \neq y$, telle que $\dfrac{h(x,y)}{r^{n-2}(x,y)}$ soit bornée en valeur absolue, et que, étant donné un système de coordonnées de domaine D relativement auquel les coordonnées de x sont $x^1, \dots, x^n$, quels que soient x dans D et y, $\dfrac{\partial h(x,y)}{\partial x^i}$ soit continue pour $x \neq y$ et $\dfrac{1}{r^{n-1}(x,y)} \dfrac{\partial h(x,y)}{\partial x^i}$ bornée en valeur absolue. Alors, la fonction $A(x) = \int h(x,y)\, 1_y^*$ est continue ainsi que ses dérivées premières, et $\dfrac{\partial A(x)}{\partial x^i} = \displaystyle\int \dfrac{\partial h(x,y)}{\partial x^i}\, 1_y^*$ pour x dans D.

Ce lemme est une proposition classique de la théorie du potentiel, dans le cas où la variété envisagée est un domaine borné de l'espace euclidien et où $r(x,y)$ est la distance euclidienne. Les méthodes connues de démonstration s'adaptent sans difficulté au cas envisagé ici.

Considérons par exemple un arc L, contenu dans D, sur lequel seule la coordonnée x^i varie. On peut enfermer L dans une surface Σ, dont l'intérieur D_1 a un volume ε aussi petit qu'on veut. Soit D_2 l'extérieur de Σ. La fonction de x, $A_\varepsilon(x) = \int_{D_2} h(x,y)\, 1_y^*$ est évidemment continue pour x sur L ainsi que

$$\frac{\partial A_\varepsilon(x)}{\partial x^i} = \int_{D_2} \frac{\partial h(x,y)}{\partial x^i}\, 1_y^*$$

et comme pour $\varepsilon \to 0$ les intégrales ci-dessus tendent uniformément pour x sur L vers les intégrales correspondantes étendues à toute la variété, ainsi qu'on le vérifie aisément, l'affirmation du lemme résulte d'un théorème classique du calcul intégral.

Lemme 2. Soit $F(x,y)$ une fonction des deux points x et y, continue ainsi que ses dérivées premières. La fonction

$$A(x) = \int \frac{F(x,y)}{r^{n-2}(x,y)}\, 1_y^*$$

est continue ainsi que ses dérivées premières et secondes. D_2 étant l'extérieur de la sphère Σ de centre z et de rayon ϱ, définie relativement à une métrique euclidienne osculatrice en z, et le système de coordonnées utilisé au voisinage de z étant géodésique en ce point, on a

$$\left[\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^i \partial x^j}\right]_{x=z} = \delta_i^j (2-n) k_n F(z,z) + \lim_{\varrho=0} \int_{D_2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \frac{F(x,y)}{r^{n-2}(x,y)}\right]_{x=z} 1_y^* \ .$$

Démonstration. z étant un point quelconque de V, choisi une fois pour toutes, Σ la sphère de centre z et de rayon ϱ, définie relativement à une métrique euclidienne osculatrice en z, D_1 l'intérieur et D_2 l'extérieur de Σ, nous supposons ϱ assez petit pour que D_1 et Σ soient contenus dans le domaine d'un système de coordonnées géodésique au point z, choisi une fois pour toutes. Le point x, de coordonnées $x^1, \dots, x^n$ sera supposé dans D_1.

D'après le lemme 1, $A(x)$ est continue ainsi que ses dérivées premières, et l'on peut écrire

$$\frac{\partial A}{\partial x^i} + \int_{D_1} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{F(x,y)}{r^{n-2}(x,y)} 1_y^* + \int_{D_2} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{F(x,y)}{r^{n-2}(x,y)} 1_y^* \; . \tag{12}$$

Le second terme au second membre de (12) possède une dérivée continue par rapport à x^i pour x dans D_1, la dérivation sous le signe $\int$ étant licite.

En tenant compte de la relation (2) (No. 7), relation qu'on peut écrire

$$\frac{\partial r}{\partial x^i} = - \frac{\partial r}{\partial y^i} + r T \tag{13}$$

où

$$T = T(x,y) = \frac{S(x,y)}{r^2(x,y)}$$

est bornée, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{F}{r^{n-2}} = - F \frac{\partial}{\partial y^i} \left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) + \frac{1}{r^{n-2}} \left[\frac{\partial F}{\partial x^i} + (2-n) T F\right] . \tag{14}$$

Cela permet de transformer par intégration partielle le premier terme au second membre de (12). On a en effet

$$d_y \left(\frac{F\sqrt{g}}{r^{n-2}} dy^1 \ldots dy^{i-1} . dy^{i+1} \ldots dy^n\right) =$$

$$= (-1)^{i-1} F \frac{\partial}{\partial y^i} \left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) 1_y^* + (-1)^{i-1} \frac{1}{\sqrt{g}\, r^{n-2}} \frac{\partial}{\partial y^i} (\sqrt{g} F) \, 1_y^*$$

d'où résulte

$$- \int_{D_1} F \frac{\partial}{\partial y^i} \left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) 1_y^* =$$

$$= (-1)^i \int_{\Sigma} \frac{F\sqrt{g}}{r^{n-2}} dy^1 \ldots dy^{i-1} . dy^{i+1} \ldots dy^n + \int_{D_1} \frac{1}{\sqrt{g}\, r^{n-2}} \frac{\partial}{\partial y^i} (\sqrt{g} F) \, 1_y^* \tag{15}$$

et (12), (14) et (15) entraînent

$$\frac{\partial A}{\partial x^i} = (-1)^i \int_{\Sigma} \frac{F\sqrt{g}}{r^{n-2}} dy^1 \dots dy^{i-1} . dy^{i+1} \dots dy^n +$$

$$+ \int \frac{U}{r^{n-2}} 1_y^* + \int \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{F}{r^{n-2}} . 1_y^* \qquad (16)$$

avec

$$U = \frac{\partial F}{\partial x^i} + (2-n)TF + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial y^i} (\sqrt{g} F) .$$

Pour x dans D_1, chacune des trois intégrales au second membre de (16) admet une dérivée continue par rapport à x^j que l'on obtient en dérivant sous le signe $\int$. En effet, seule la seconde est une intégrale généralisée, à laquelle le lemme 1 est applicable. *L'existence et la continuité de* $\frac{\partial^2 A}{\partial x^i \partial x^j}$ *sont ainsi établies.*

Pour obtenir l'expression cherchée de cette dérivée au point $x = z$, considérons d'abord le premier terme au second membre de (16). En tenant compte de (13), on a

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \frac{F\sqrt{g}}{r^{n-2}} = (n-2) F\sqrt{g} \frac{1}{r^{n-2}} \frac{\partial r}{\partial y^j} + \frac{1}{r^{n-2}} \left[\frac{\partial}{\partial x^j} (F\sqrt{g}) + (2-n) F\sqrt{g}\, T \right] .$$

En désignant encore par $\bar{r} = \bar{r}\,(z, y)$ la distance euclidienne de z et y, $\bar{r}^2 = \sum_i (z^i - y^i)^2$, on sait que $r^2(z, y) - \bar{r}^2(z, y)$ est d'ordre 4 et $r \frac{\partial r}{\partial y^j} - \bar{r} \frac{\partial \bar{r}}{\partial y^j}$ d'ordre 3.

Comme $\bar{r} \frac{\partial \bar{r}}{\partial y^j} = y^j - z^j$, en remarquant que $F(z, y) - F(z, z)$ est d'ordre 1 et $\sqrt{g} - 1$ d'ordre 2, on voit que l'on a

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^j} \frac{F\sqrt{g}}{r^{n-2}(x, y)} \right]_{x=z} = (n-2) F(z,z) \frac{y^j - z^j}{\bar{r}^n} + \cdots$$

les termes non écrits étant d'ordre $\geqslant 2 - n$.

En utilisant le lemme du No. 11, on en déduit que la dérivée par rapport à x^j du premier terme au second membre de (16), calculée pour $x = z$, a la même limite pour $\varrho = 0$ que

$$(-1)^i (n-2) F(z,z) \int_{\Sigma} \frac{y^j - z^j}{\bar{r}^{n-2}(y, x)} dy^1 \dots dy^{i-1} . dy^{i+1} \dots dy^n .$$

Cette dernière intégrale se calcule immédiatement et sa valeur ne dépend pas de ϱ. En mettant

$$\frac{1}{r^n(y,z)} = \frac{1}{\varrho^n}$$

en évidence et appliquant la formule de Stokes, en vertu de

$$d(y^j - z^j)\,dy^1 \dots dy^{i-1} dy^{i+1} \dots dy^n = \delta^j_i\,(-1)^{i-1} dy^1 \dots dy^n \;,$$

on obtient pour la limite cherchée la valeur

$$\delta^j_i\, F(z,z)\, k_n (2 - n) \;.$$

En remarquant que la dérivée par rapport à x^j du deuxième terme au second membre de (16), calculée pour $x = z$, tend vers zéro avec ϱ, on obtient finalement l'expression cherchée de $\left[\dfrac{\partial^2 A}{\partial x^i \partial x^j}\right]_{x=z}$.

Théorème. *Soit μ une forme de degré p, de classe C^1. La forme*

$$\alpha(x) = \int \omega(x\,,y)\,\mu^*(y)$$

est de classe C^2 et satisfait à l'équation

$$\Delta\alpha(x) = \int \Delta_x\, \omega(x\,,y)\,\mu^*(y) - k\,\mu(x) \;. \tag{II}$$

où $k = n(n-2)k_n$, k_n étant le contenu de la sphère à n dimensions de rayon 1.

Démonstration.

Posons $\mu(y) = \sum\limits_{(i_1 \dots i_p)} M_{i_1 \dots i_p} dy^{i_1} \dots dy^{i_p}$.

En tenant compte de l'expression de $\omega = \omega_p(x,y)$ (No. 6), on a, en posant

$$F_{k_1 \dots k_p}(x,y) = \sum_{(i_1 \dots i_p)} A_{k_1 \dots k_p,\, i_1 \dots i_p}(x,y)\, M^{i_1 \dots i_p}(y) \;,$$

$$r^{n-2}(x,y)\,\omega(x,y)\,\mu^*(y) = \sum_{(k_1 \dots k_p)} F_{k_1 \dots k_p}(x,y)\,(dx^{k_1} \dots dx^{k_p})\, 1^*_y \;.$$

En posant encore $A_{k_1 \dots k_p}(x) = \displaystyle\int \frac{F_{k_1 \dots k_p}(x\,,y)}{r^{n-2}(x\,,y)}\, 1^*_y$, on peut écrire

$$\alpha(x) = \sum_{(k_1 \dots k_p)} A_{k_1 \dots k_p} dx^{k_1} \dots dx^{k_p}$$

et d'après les lemmes 1 et 2 les coefficients $A_{k_1 \dots k_p}$ ont des dérivées premières et secondes continues.

Nous nous proposons de calculer les coefficients $C_{k_1 \dots k_p}$ de

$$\Delta \alpha = \sum_{(k_1 \dots k_p)} C_{k_1 \dots k_p} dx^{k_1} \dots dx^{k_p}$$

en un point $x = z$, en supposant le système de coordonnées géodésique en ce point.

En tenant compte de l'expression des coefficients de $\Delta\alpha - \overline{\Delta}\alpha$ (formule (6), No. 9) et de celle de $\overline{\Delta}$ (qui est celle de Δ donnée No. 8), on a

$$C_{k_1 \dots k_p}(z) = \left[\sum_i \frac{\partial^2 A_{k_1 \dots k_p}}{(\partial x^i)^2} + \sum_{(i_1 \dots i_p)} G^{i_1 \dots i_p}_{k_1 \dots k_p} A_{i_1 \dots i_p} \right]_{x=z} .$$

Or, le lemme 2 étant applicable à l'intégrale $A_{k_1 \dots k_p}(x)$, on a

$$\left[\frac{\partial^2 A_{k_1 \dots k_p}}{(\partial x^i)^2} \right]_{x=z} = (2-n) k_n F_{k_1 \dots k_p}(z,z) + \lim_{\varrho=0} \int_{D_2} \left\{ \frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2} \left[\frac{F_{k_1 \dots k_p}(x,y)}{r^{n-2}(x,y)} \right] \right\}_{x=z} 1^*_y$$

d'où résulte, comme $F_{k_1 \dots k_p}(z,z) = M_{k_1 \dots k_p}(z,z)$ (d'après la définition de $F_{k_1 \dots k_p}$, parce que, au point z, $A_{k_1 \dots k_p, i_1 \dots i_p} = \delta^{i_1 \dots i_p}_{k_1 \dots k_p}$ et $M^{i_1 \dots i_p} = M_{i_1 \dots i_p}$), $C_{k_1 \dots k_p}(z) = n(2-n) k_n M_{k_1 \dots k_p}(z) +$

$$+ \lim_{\varrho=0} \int_{D_2} \left\{ \sum_i \frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2} \left[\frac{F_{k_1 \dots k_p}(x,y)}{r^{n-2}(x,y)} \right] + \sum_{(i_1 \dots i_p)} G^{i_1 \dots i_p}_{k_1 \dots k_p} \frac{F_{k_1 \dots k_p}}{r^{n-2}} \right\}_{x=z} 1^*_y .$$

L'expression $\{ \cdots \}_{x=z}$, sous le signe $\int$, n'est pas autre chose que le coefficient de $dx^{k_1} \dots dx^{k_p}$ dans la forme $\Delta_x \omega_p(x,y) \mu^*(y)$, calculé pour $x = z$. Comme il est d'ordre $2 - n$ (No. 10), il est intégrable par rapport à y et $\lim\limits_{\varrho=0} \int\limits_{D_2}$ peut être remplacé par $\int$. En multipliant par $dx^{k_1} \dots dx^{k_p}$ et sommant, il vient

$$[\Delta \alpha]_{x=z} = -k\mu(x)_{x=z} + \int [\Delta_x \omega(x,y) \mu^*(y)]_{x=z} .$$

Le point z étant un point quelconque relativement aux opérations qui interviennent dans cette formule, on peut le remplacer par x et l'on a la formule que nous voulions établir, *la formule II*,

$$\Delta\alpha(x) = -k\,\mu(x) + \int \Delta_x\,\omega(x,y)\,\mu^*(y)$$

où $k = n(n-2)k_n$, $k_n =$ contenu de la sphère de rayon 1 dans l'espace euclidien à n dimensions.

CHAPITRE III

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME H

13. Les théorèmes de Fredholm pour une équation intégrale portant sur une forme différentielle

Soit $K(x,y)$ une forme de degré p en x et de même degré p en y, définie sur l'espace de Riemann clos et orientable à n dimensions V. Nous considérons l'équation intégrale

$$\varphi(x) - \lambda \int K(x,y)\,\varphi^*(y) = f(x) \tag{1}$$

où $f(x)$ est une forme donnée de degré p et $\varphi(x)$ une forme inconnue de même degré p.

A côté de (1), nous considérons aussi les deux équations homogènes associées

$$\varphi(x) - \lambda \int K(x,y)\,\varphi^*(y) = 0 \tag{2}$$

$$\psi(x) - \lambda \int K(y,x)\,\psi^*(y) = 0\ . \tag{3}$$

Comme nous le montrons dans l'Appendice, la théorie de Fredholm s'applique à l'équation (1), avec quelques petites modifications.

Disons qu'une forme différentielle, définie sur V, est *bornée*, si, étant donnée une famille finie F de systèmes de coordonnées dont les domaines recouvrent V, ses coefficients relativement à un système quelconque de la famille F sont bornés. (Il est clair que cette définition est indépendante de F.) La double forme $K(x,y)$ sera dite bornée, si ses coefficients relativement à un couple quelconque de systèmes de F sont bornés. Nous dirons encore que $K(x,y)$ *appartient à l'exposant* e, si la forme $r^e(x,y)\,K(x,y)$ est bornée (r désignant la fonction distance).

On a alors la proposition suivante (pour la démonstration, voir l'Appendice).

Théorème F. *La forme $K(x,y)$ appartenant à un exposant $e < n$ et ayant des coefficients continus pour $x \neq y$, et λ ayant une valeur numérique déterminée, les deux équations homogènes* (2) *et* (3) *ont le même nombre, toujours fini et pouvant se réduire à zéro, de solutions linéairement indépendantes.*

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) *soit possible est que la forme $f(x)$ soit orthogonale à toute solution de* (3).

Remarquons que la forme sous le signe $\int$ dans (1) est égale à $\varphi(y)K(x,\overset{*}{y})$, $K(x,\overset{*}{y})$ désignant la forme adjointe relativement à y de $K(x,y)$.

14. Démonstration du théorème H.

L'étude de l'équation

$$\Delta \mu = \beta \tag{4}$$

où μ et β sont des formes différentielles de degré p sur l'espace de Riemann V, qui nous conduira au théorème H énoncé au chap. I, No. 5, va être faite suivant la méthode due à Hilbert et présentée par lui [4, p. 219—232] dans le cas où V est la surface de la sphère ordinaire, β et μ des fonctions sur cette surface ($p = 0$), mais Δ étant, plus généralement qu'ici, un opérateur différentiel linéaire du second ordre de type elliptique.

Cette méthode est basée sur les formules I et II établies au chap. II, énoncées No. 6, et sur l'étude de l'équation

$$\int \mu(y)[\Delta_y \omega(x,y)]^* - k\mu(x) = \int \omega(x,y)\beta^*(y) \tag{5}$$

et des deux équations homogènes associées

$$\int \mu(y)[\Delta_y \omega(x,y)]^* - k\mu(x) = 0 \tag{6}$$

$$\int \mu(y)[\Delta_x \omega(x,y)]^* - k\mu(x) = 0 \tag{7}$$

où $\omega = \omega_p(x,y)$ est la paramétrix de degré p et k a la même signification que dans les formules I et II du chapitre II. Comme dans ces formules, * désigne l'adjointe relativement à y.

Le noyau $\Delta_y \omega(x,y)$ appartenant (d'après le théorème du No. 10) à l'exposant $n - 2$, le théorème F s'applique. Le paramètre λ a la valeur $\lambda = \dfrac{1}{k}$.

Relation entre (4) *et* (5). En partant de (4), où l'on désigne par y le point argument, prenant l'adjointe, multipliant à gauche par $\omega(x,y)$ et intégrant, on obtient l'équation

$$\int \omega(x,y)[\Delta_y\,\mu(y)]^* = \int \omega(x,y)\beta^*(y) \qquad (5')$$

qui, en vertu de la formule I, est équivalente à (5). Donc: *toute solution de* (4) *satisfait à* (5).

La réciproque n'est en général pas exacte. Mais *si μ satisfait à* (5), on a (5′) qui peut s'écrire

$$\int \omega(x,y)\,[\Delta_y\,\mu(y) - \beta(y)]^* = 0$$

et qui exprime que $\Delta\mu - \beta$ *est orthogonale à la paramétrix.*

Discussion des équations (6) *et* (7). En vertu de la formule I, (6) peut se mettre sous la forme équivalente

$$\int \omega(x,y)[\Delta\mu(y)]^* \qquad (6')$$

et en vertu de la formule II, (7) est équivalente à

$$\Delta \int \omega(x,y)\mu^*(y) = 0\ . \qquad (7')$$

En introduisant l'opérateur Ω défini par

$$\Omega\,\mu = \int \omega(x,y)\,\mu^*(y)$$

ces deux équations peuvent s'écrire encore

$$\Omega\Delta\mu = 0 \quad (6'') \qquad \text{et} \qquad \Delta\Omega\mu = 0\ . \qquad (7'')$$

Parmi les solutions de (6), il y a toutes les formes harmoniques de degré p, c'est-à-dire les formes μ telles que $\Delta\mu = 0$. D'après le théorème F, l'équation (6) n'a qu'un nombre fini de solutions linéairement indépendantes, par suite *il n'y a qu'un nombre fini de formes harmoniques de degré p linéairement indépendantes* (nous avions établi ce fait par voie topologique au No. 5, Remarque 2). Soit R ce dernier nombre, $R + S$ le nombre des solutions linéairement indépendantes de (6). On peut alors trouver S solution de (6), $\Phi_1, \dots, \Phi_s$, dont aucune combinaison linéaire à coefficients non tous nuls n'est harmonique.

Les S formes $X_j = \Delta\,\Phi_j$ $(j = 1, \ldots, S)$ sont linéairement indépendantes, car si elles ne l'étaient pas, il y aurait une combinaison linéaire des Φ_j qui serait harmonique. Elles sont orthogonales à la paramétrix, c'est-à-dire qu'elles satisfont à $\Omega\,X_j = 0$. Il peut y avoir encore d'autres formes orthogonales à la paramétrix, mais comme elles satisfont à $(7'')$, il n'y en a qu'un nombre fini de linéairement indépendantes. Soit $S + s$ ce nombre. On peut alors trouver s formes orthogonales à la paramétrix, $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_s$ qui constituent avec les X_j un système complet de formes linéairement indépendantes orthogonales à la paramétrix. Toutes ces formes satisfont à (7), mais (7) peut admettre d'autres solutions. Supposons que (7) admette t solutions dont aucune combinaison linéaire (à coefficients non tous nuls) ne soit orthogonale à la paramétrix, soient $q_1, q_2, \ldots, q_t$.

Les $S + s + t$ formes X_j, χ_i, q_k constituent alors un système complet de solutions linéairement indépendantes de (7).

Les t formes $f_k = \Omega\,q_k\,(k = 1, \ldots, t)$ sont linéairement indépendantes, car si elles ne l'étaient pas, il y aurait une combinaison linéaire des q_k qui serait orthogonale à la paramétrix. Elles sont harmoniques, puisque $\Delta f_k = 0$. (6) et (7) ayant le même nombre de solutions linéairement indépendantes, on a: $S + s + t = S + R$, d'où $R = s + t$. Par suite, on peut trouver s formes harmoniques $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s$ qui constituent avec les f_k un système complet de formes harmoniques linéairement indépendantes. Les $S + s + t$ formes Φ_j, φ_i, f_k constituent alors un système complet de solutions linéairement indépendantes de (6).

Nous pouvons résumer cette discussion dans le tableau suivant:

		formes harmoniques	
Solutions de (6)	$\Phi_1, \ldots, \Phi_S$	$\varphi_1, \ldots, \varphi_s$	$f_1, \ldots, f_t$
	$\Delta\,\Phi_j = X_j$		$\Omega q_k = f_k$
Solutions de (7)	$X_1, \ldots, X_S$	$\chi_1, \ldots, \chi_s$	$q_1, \ldots, q_t$
	formes orthogonales à la paramétrix		

Discussion de l'équation (5). D'après le théorème F, la condition nécessaire et suffisante pour la possibilité de (5) est que le second membre soit orthogonal aux solutions de (7), soit aux formes X_j, χ_i, q_k. Cela se traduit par les équations

$$\iint \omega(x, y)\beta^*(y)X_j^*(x) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, S) \tag{8}$$

$$\iint \omega(x, y)\beta^*(y)\chi_i^*(x) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, s) \tag{9}$$

$$\iint \omega(x, y)\beta^*(y)q_k^*(x) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, t) . \tag{10}$$

Les conditions (8) et (9) sont satisfaites quelle que soit β comme on le voit en échangeant l'ordre des intégrations, parce que les formes $X_j(x)$ et $\chi_i(x)$ sont orthogonales à la paramétrix. En vertu de la définition de f_k, les équations (10) peuvent se mettre sous la forme

$$\int f_k(y)\beta^*(y) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, t) \tag{10'}$$

Elles expriment que β est orthogonale aux formes f_k. *Ce sont les conditions nécessaires et suffisantes pour la possibilité de* (5).

Discussion de l'équation (4). Supposons d'abord que β soit orthogonale, non pas à toutes les formes harmoniques, mais seulement aux formes f_k. Les conditions de possibilité (10') de (5) sont alors satisfaites. Soit μ_1 une solution particulière de cette équation; la solution générale s'en déduit par addition d'une solution quelconque de (6), soit d'une combinaison linéaire quelconque des Φ_j, φ_i, f_k.

D'après la remarque faite plus haut, $\Delta\mu_1 - \beta$ est orthogonale à la paramétrix, et par suite égale à une combinaison linéaire de $\chi_1, \ldots, \chi_s$, $X_1, \ldots, X_S$:

$$\Delta\mu_1 - \beta = c_1\chi_1 + \cdots + c_s\chi_s + C_1X_1 + \cdots + C_S X_S \ .$$

La forme $\mu_2 = \mu_1 - C_1\Phi_1 - \cdots - C_S\,\Phi_S$ est aussi une solution de (5), et comme $X_j = \Delta\,\Phi_j$,

$$\Delta\mu_2 - \beta = c_1\,\chi_1 + \cdots + c_s\,\chi_s \,.$$

Pour déterminer les constantes $c_1, \ldots, c_s$, multiplions les deux membres de cette dernière équation par φ_i^* et intégrons. Il vient, en remarquant que $\Delta\mu_2$ est orthogonale à toutes les formes harmoniques, par suite à φ_i ,

$$-\int \beta\,\varphi_i^* = c_1 \int \chi_1\,\varphi_i^* + \cdots + c_s \int \chi_s\,\varphi_i^* \qquad (i = 1, \ldots, s) \,. \tag{11}$$

D'après la manière dont il a été obtenu, ce système de s équations linéaires en les s inconnues $c_1, \ldots, c_s$ admet toujours une solution, pourvu que les conditions (10') soient remplies.

Or, on peut disposer de β, tout en respectant ces conditions, de manière que les premiers membres de (11) aient des valeurs arbitrairement données $a_1, a_2, \ldots, a_s$. En effet, en supposant, comme il est permis de le faire, que les formes φ_i sont normées, orthogonales deux à deux et orthogonales aux formes f_k, la forme $\beta = -a_1\varphi_1 - \cdots - a_s\varphi_s$ satisfait aux conditions (10') et $-\int \beta\, \varphi_i^* = a_i$.

Cela entraîne que le déterminant du système (11), dont l'élément général est $\int \chi_k\, \varphi_i^*$, est différent de zéro. Les constantes $c_1, \ldots, c_s$ sont par suite univoquement déterminées par (11).

En particulier, si β est orthogonale à toutes les formes harmoniques, c'est-à-dire non seulement aux formes f_k, mais aussi aux formes φ_i, les premiers membres des équations (11) étant tous nuls, les c_i le sont aussi et $\Delta \mu_2 = \beta$: *l'équation* (1) *admet une solution.* Cette forme μ_2 satisfaisant à (5), est de classe C^2, pourvu que la paramétrix $\omega(x,y)$ soit de classe C^3 et β de classe C^2, chacune des deux intégrales figurant dans (5) étant alors de classe C^2 en x. Le théorème H est ainsi établi.

APPENDICE

SUR QUELQUES POINTS DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS INTÉGRALES

1. Equations intégrales tensorielles

Si $X_1, \ldots, X_N$ sont les composantes, relativement à un certain système de coordonnées, d'un tenseur défini sur l'espace de Riemann à n dimensions V, d'un certain type R caractérisé par une représentation linéaire de degré N du groupe linéaire homogène à n variables, et si $Y^1, \ldots, Y^N$ sont les composantes relativement au même système d'un tenseur du type contragrédient R', on sait que $\sum_{i=1}^{N} X_i Y^i$ est un invariant: c'est une fonction définie sur V, indépendante de tout système de coordonnées.

Soit un double tenseur, du type R en x et du type R' en y, dont les composantes $K_i^j(x,y)$ sont, pour y et j fixés, les composantes d'un tenseur du type R en x, et pour x et i fixés, celles d'un tenseur du type R' en y. Nous allons considérer l'équation intégrale

$$\varphi_i(x) - \lambda \int \sum_{j=1}^{N} K_i^j(x,y)\, \varphi_j(y)\, 1_y^* = f_i(x)\,. \tag{1}$$

Les $\varphi_i(x)$ sont les composantes d'un tenseur inconnu du type R, les $f_i(x)$ celles d'un tenseur connu du même type, 1_y^* l'élément de volume relatif au point y, λ le paramètre, et l'équation doit être vérifiée pour tout x et tout i. Remarquons que x et i étant fixés, $\sum_j K_i^j(x, y)\varphi_j(y)$ est un scalaire en y, de sorte que l'intégrale a un sens parfaitement clair.

A côté de (1) se présentent les deux équations homogènes associées

$$\varphi_i(x) - \lambda \int \sum_j K_i^j(x, y)\varphi_j(y)\, 1_y^* = 0 \tag{2}$$

$$\psi^i(x) - \lambda \int \sum_j K_j^i(y, x)\psi^j(y) 1_y^* = 0\ . \tag{3}$$

Dans (3), les $\psi^i(x)$ sont les composantes d'un tenseur du type R'.

Fredholm a montré comment un *système* d'équations intégrales, de la forme (1), se ramène à une seule équation, par l'artifice suivant. Soit W une variété *non connexe*, constituée par N exemplaires de l'espace V. A chaque point ξ de W correspond un point x de V et un indice i, le numéro de l'exemplaire de V qui porte ξ, et la correspondance entre ξ et les couples (x, i) est biunivoque. Soit η le point de W qui correspond à (y, j). En posant

$$K_i^j(x, y) = K(\xi, \eta)\ , \qquad \varphi_i(x) = \Phi(\xi)\ , \qquad f_i(x) = F(\xi)\ ,$$

le système (1) se ramène à l'équation unique

$$\Phi(\xi) - \lambda \int_W K(\xi, \eta)\, \Phi(\eta)\, 1_\eta^* = F(\xi)\ .$$

Mais ce raisonnement suppose que l'on a affaire à des fonctions définies individuellement sur l'espace V, et non à des tenseurs, et il ne semble pas applicable dans ce dernier cas sauf pour les espaces V très particuliers, dits parallélisables, où il existe n champs de vecteurs continus et linéairement indépendants en chaque point.

Cependant, la théorie de Fredholm s'applique directement à l'équation (1). On définit la déterminante $D(\lambda)$ et ses mineurs en posant

$$K\begin{pmatrix} x_1 \dots & x_m \\ i_1 \dots & i_m \\ \\ y_1 \dots & y_m \\ j_1 \dots & j_m \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K_{i_1}{}^{j_1}(x_1, y_1) & \dots & K_{i_1}{}^{j_m}(x_1, y_m) \\ \vdots & & \\ \\ K_{i_m}{}^{j_1}(x_m, y_1) & \dots & K_{i_m}{}^{j_m}(x_m, y_m) \end{vmatrix} \tag{4}$$

où $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m$ sont $2m$ points de V, rapportés à certains systèmes de coordonnées, $i_1, \ldots, i_m, j_1, \ldots, j_m$ $2m$ entiers compris entre 1 et N;

$$\left.\begin{aligned} a_h &= \int \cdots \int \sum_{i_1, \ldots, i_h} K \begin{pmatrix} x_1 \ldots x_m \\ i_1 \ldots i_m \\ \\ x_1 \ldots x_m \\ i_1 \ldots i_m \end{pmatrix} 1^*_{x_1} \ldots 1^*_{x_h}, \; a_0 = 1 \\ D(\lambda) &= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^h}{h!} a_h \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} b_h &= \int \cdots \int \sum_{i_1, \ldots, i_h} K \begin{pmatrix} \xi_1 \ldots \xi_m & x_1 \ldots x_h \\ k_1 \ldots k_m & i_1 \ldots i_h \\ \\ \eta_1 \ldots \eta_m & x_1 \ldots x_h \\ l_1 \ldots l_m & i_1 \ldots i_h \end{pmatrix} 1^*_{x_1} \ldots 1^*_{x_h} \\ D &\left(\begin{matrix} \xi_1 \ldots \xi_m \\ k_1 \ldots k_m \\ \\ \eta_1 \ldots \eta_m \\ l_1 \ldots l_m \end{matrix} \middle| \, \lambda \right) = \sum_{h=0}^{\infty} b_h \frac{(-\lambda)^h}{h!} . \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

La convergence des séries (5) et (6) s'établit comme dans le cas habituel, à l'aide du théorème de M. Hadamard, en supposant le tenseur noyau $K_i^j(x, y)$ borné. (On dit qu'un tenseur est borné si, étant donnée une famille finie F de système de coordonnées dont les domaines recouvrent V, ses composantes relativement à un système quelconque de F sont bornées; cette définition est indépendante de F.)

En apportant aux formules classiques de Fredholm la petite modification qui consiste à adjoindre à chaque point variable sur V un entier variable de 1 à N, l'intégration sur V relativement au point étant accompagnée toujours de la sommation de 1 à N par rapport à l'entier, on obtient la résolution de l'équation (1) lorsqu'elle est possible et les conditions de cette possibilité:

Si $D(\lambda) \neq 0$, (1) a une solution unique. Si $D(\lambda) = 0$, (2) et (3) ont le même nombre, fini et positif, de solutions linéairement indépendantes, et la condition de possibilité de (1) est que

$$\int \sum_i f_i(x)\psi^i(x)\, 1_x^* = 0 \tag{7}$$

pour toute solution $\psi^i(x)$ de (3).

2. Equations de Fredholm portant sur une forme différentielle

Partons d'une double forme $K(x, y)$, de degré p en x et de même degré p en y. Ses coefficients sont les composantes $K_{i_1 \dots i_p, j_1 \dots j_p}(x, y)$ d'un double p-vecteur, covariant en x et en y. Par le procédé d'élévation des indices, en faisant intervenir la métrique riemannienne, on en déduit un double p-vecteur covariant en x et contravariant en y, $K_{i_1 \dots i_p}{}^{j_1 \dots j_p}(x, y)$, qui peut jouer le rôle de tenseur noyau.

L'équation (1) s'écrit alors

$$\varphi_{i_1 \dots i_p}(x) - \lambda \int \sum_{(j_1 \dots j_p)} K_{i_1 \dots i_p}{}^{j_1 \dots j_p}(x, y)\, \varphi_{j_1 \dots j_p}(y)\, 1_y^* = f_{i_1 \dots i_p}(x) \; .$$

En multipliant les deux membres par $dx^{i_1} \dots dx^{i_p}$ et sommant par rapport à $(i_1 \dots i_p)$, on obtient l'équation équivalente

$$\varphi(x) - \lambda \int \varphi(y) K(x, \overset{*}{y}) = f(x) \tag{8}$$

où

$$\varphi(x) = \sum_{(i_1 \dots i_p)} \varphi_{i_1 \dots i_p}(x)\, dx^{i_1} \dots dx^{i_p}$$

$$f(x) = \sum_{(i_1 \dots i_p)} f_{i_1 \dots i_p}(x)\, dx^{i_1} \dots dx^{i_p}$$

et $K(x, \overset{*}{y})$ est la forme adjointe relativement à y de $K(x, y)$.

La forme sous le signe $\int$ peut évidemment s'écrire encore $K(x, y)\varphi^*(y)$.

L'équation (3), où intervient un p-vecteur contravariant en x, est équivalente à une équation où intervient le p-vecteur associé covariant en x, qui s'en déduit par abaissement des indices. En désignant par $\psi(x)$ la forme différentielle correspondante, elle s'écrit

$$\psi(x) - \lambda \int \psi(y) K(\overset{*}{y}, x) = 0 \; . \tag{9}$$

C'est l'équation associée à

$$\varphi(x) - \lambda \int K(x, y)\varphi^*(y) = 0 \; . \tag{10}$$

La condition (7) s'écrit $\int f(x)\psi^*(x) = 0$, elle exprime que $f(x)$ et $\psi(x)$ sont orthogonales.

Les théorèmes de Fredholm peuvent alors s'énoncer de la manière suivante:

Si $D(\lambda) \neq 0$, (8) possède une solution et une seule, (9) et (10) n'ont pas d'autre solution que $\varphi(x) = 0$ et $\psi(x) = 0$.

Si $D(\lambda) = 0$, (9) et (10) possèdent le même nombre m, fini et positif, de solutions linéairement indépendantes; la condition nécessaire et suffisante pour que (8) possède une solution est que $f(x)$ soit orthogonale à toute solution de (9).

On peut énoncer ce résultat de la manière suivante, sans faire intervenir explicitement $D(\lambda)$:

Les deux équations homogènes (9) *et* (10) *ont le méme nombre m, toujours fini et pouvant se réduire à zéro, de solutions linéairement indépendantes. La condition nécessaire et suffisante pour que* (8) *possède une solution est que $f(x)$ soit orthogonale à toute solution de* (9).

Si $m = 0$, aucune restriction n'est imposée à $f(x)$. Si $m > 0$ et si $\psi_1(x), \ldots, \psi_m(x)$ est un système de m solutions linéairement indépendantes de (9), les conditions imposées à $f(x)$ s'expriment par

$$\int f(x)\psi_i^*(x) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m) .$$

Comme on sait, m est l'ordre du premier mineur de $D(\lambda)$ non identiquement nul, et les solutions des équations (9) et (10) s'expriment par des formules qu'il est inutile d'écrire ici, tout-à-fait analogues aux formules classiques, à l'aide de $D(\lambda)$ et de ses mineurs.

Lorsque la forme noyau $K(x,y)$ n'est pas bornée pour $x = y$, les séries (5) et (6) ne sont plus utilisables, leur convergence n'étant pas assurée.

Toutefois, si $K(x, y)$ appartient à un exposant inférieur à n, l'énoncé ci-dessus est encore valable. Ce fait, qui constitue le théorème F (No. 13, chap. III), étant essentiel pour l'application que nous avons faite, nous nous permettons de revenir sur sa démonstration, certains points ne nous paraissant pas traités d'une manière tout-à-fait complète dans la plupart des exposés classiques.

Lemme 1. Si $K(x, y)$ et $L(x, y)$ appartiennent aux exposants e_1 et e_2 $(e_1 < n,\ e_2 < n)$

$$M(x,y) = \int K(x,z)\, L(\overset{*}{z},y)$$

appartient à l'exposant $e_1 + e_2 - n$.

Nous pouvons supposer que x et y restent dans un domaine contenu avec sa frontière dans le domaine D d'un système de coordonnées. En désignant par $V - D$ la portion de V extérieure à D, $\int_{V-D} K(x,z)L(\overset{*}{z},y)$ est évidemment une forme en x et y à coefficients bornés, puisque, lorsque z reste dans $V - D$, les coefficients de $K(x,z)L(\overset{*}{z},y)$ sont bornés. Il suffit par suite de prouver que $\int_D K(x,z)L(\overset{*}{z},y)$ est une forme qui appartient à l'exposant $e_1 + e_2 - n$. Soient $x^1 \ldots x^n$, $y^1 \ldots y^n$, $z^1 \ldots z^n$ les coordonnées de x, y et z dans le système choisi, de domaine D. Les coefficients de la forme en x et y $\int_D K(x,z)L(\overset{*}{z},y)$ sont des sommes d'un nombre fini de fonctions de x et y de la forme

$$\int_D A(x,z)\, B(z,y)\, dz^1 \ldots dz^n$$

où $A(x,z)$ et $B(z,y)$, coefficients des formes $K(x,z)$ et $L(\overset{*}{z},y)$ respectivement, sont des fonctions qui, par hypothèse, appartiennent aux exposants e_1 et e_2 respectivement, c'est-à-dire qu'elles sont comparables à $\frac{1}{r^{e_1}(x,z)}$ et $\frac{1}{r^{e_2}(z,y)}$ rectivement. Il suffit par suite, pour établir notre assertion, de prouver que $\int_D \frac{dz^1 \ldots dz^n}{r^{e_1}(x,z)\, r^{e_2}(z,y)}$ est une fonction de x et y qui appartient à l'exposant $e_1 + e_2 - n$, et comme le choix de la fonction distance n'importe pas, on peut supposer qu'elle se réduit à

$$r(x,y) = \sqrt{\sum_i (x^i - y^i)^2}\,.$$

La fin du raisonnement est classique (Cf. [3] p. 362—363), nous la reproduisons néanmoins.

Soient D' et D'' les portions de D où $r(x,z) \leqslant 2r(x,y)$ et $r(x,z) \geqslant 2r(x,y)$ respectivement (z est le point variable tandis que x et y sont fixes). L'intégrale se décompose en deux, étendues à D', et D''. Dans D'', le rapport $\frac{r(y,z)}{r(x,z)}$ reste compris entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$; l'intégrale étendue à D'' est par suite comparable à

$$\int_D \frac{dz^1 \dots dz^n}{r^{e_1+e_2}(x,z)},$$

ou encore, en désignant par $k\,\varrho^n$ le volume de la sphère de rayon ϱ dans l'espace à n dimensions et par R un nombre tel que $r(x,z) < R$ en tout point z de D, à

$$kn \int_{2r(x,y)}^{R} \varrho^{n-1-e_1-e_2} d\varrho$$

ce qui est une fonction de x et y appartenant à l'exposant $e_1 + e_2 - n$.

Quant à l'intégrale étendue à D', une transformation homothétique qui transforme la «sphère» D' en une «sphère» D_1 de même centre x et de rayon un, la ramène à une intégrale de même forme étendue à D_1, multipliée par $[2r(x,y)]^{n-e_1-e_2}$, la nouvelle intégrale ayant une valeur finie indépendante de $r(x,y)$. Le lemme est ainsi démontré.

Les *noyaux itérés* successifs de la forme noyau sont définis, pour $n = 1, 2, \dots$, par la formule

$$K_n(x,y) = \int K(x,z) K_{n-1}(\overset{*}{z},y) \quad , \quad K_1(x,y) = K(x,y) \ .$$

Lemme 2. $K(x,y)$ étant un noyau appartenant à l'exposant e $(e < n)$, et λ un nombre donné, il existe un entier positif j tel que le $j^{\text{ième}}$ noyau itéré ait des coefficients bornés et que, $\mathfrak{z}_j$ étant une racine primitive $j^{\text{ième}}$ de l'unité, aucune des $j - 1$ équations

$$\varphi(x) - \lambda\, \mathfrak{z}_j^s \int \varphi(y) K(x,\overset{*}{y}) = 0 \qquad (s = 1, 2, \dots, j-1) \tag{11}$$

n'ait d'autre solution que la solution banale $\varphi(x) = 0$.

D'après le lemme 1, $K_j(x,y)$ appartient à l'exposant $j(e-n) + n$. Soit m le plus petit entier supérieur à $\dfrac{n}{n-e}$. Si $j \geqslant m$, $j(e-n) + n < 0$ et les coefficients de $K_j(x,y)$ sont bornés. Nous pouvons ensuite supposer $\lambda \neq 0$.

Remarquons que (11) entraîne

$$\varphi(x) - \lambda^m \mathfrak{z}_j^{sm} \int \varphi(y) K_m(x,\overset{*}{y}) = 0 \tag{12}$$

et désignons par $D_m(\lambda)$ la série correspondant à la forme noyau $K_m(x,y)$, série qui converge puisque $K_m(x,y)$ est à coefficients bornés.

Si l'équation (11) est satisfaite par une forme $\varphi(x)$ non identiquement nulle, pour une certaine valeur de s, (12) ayant lieu, $\lambda^m \mathfrak{z}_j^{sm}$ est un zéro de $D_m(\lambda)$. Si à chaque entier $j \geqslant m$ correspondait un entier s tel que (11) ait une solution non identiquement nulle, la fonction entière $D_m(\lambda)$ admettrait alors une infinité de zéros de même module $|\lambda|^m$, les zéros $\lambda^m \mathfrak{z}_j^{sm}$ correspondant aux nombres j qui sont premiers étant nécessairement distincts. La fonction $D_m(\lambda)$ serait par suite identiquement nulle, ce qui est impossible puisque $D_m(0) = 1$.

Démonstration du théorème F, pour un noyau $K(x,y)$ appartenant à un exposant $e < n$. Supposons l'entier j choisi comme il est indiqué au lemme 2. Les équations (10) et (9) ont alors respectivement les mêmes solutions que les équations (13) et (14) ci-dessous (voir [3], page 399–400, note 1):

$$\varphi(x) - \lambda^j \int \varphi(y) K_j(x, \overset{*}{y}) = 0 \tag{13}$$

$$\psi(x) - \lambda^j \int \psi(y) K_j(\overset{*}{y}, x) = 0 \ . \tag{14}$$

Or, le théorème F étant applicable au noyau $K_j(x,y)$ dont les coefficients sont bornés, ces deux équations ont le même nombre, fini, de solutions linéairement indépendantes. Il en est donc de même pour (10) et (9).

D'autre part, les équations (8) et (9) entraînent

$$\int f(x)\, \psi^*(x) = 0$$

comme on le vérifie immédiatement. La condition énoncée pour que (8) admette une solution est donc bien nécessaire. Pour prouver qu'elle est aussi suffisante, considérons l'équation

$$\Phi(x) - \lambda^j \int \Phi(y) K_j(x, \overset{*}{y}) = f(x) \tag{15}$$

La condition formulée pour la possibilité de (8) est en fait la condition de possibilité de (15), puisque (9) et (14) ont les mêmes solutions et que le théorème F est applicable au noyau $K_j(x,y)$, et si $\Phi(x)$ satisfait à (15), la forme

$$\varphi(x) = \Phi(x) + \int [\lambda K(x,y) + \lambda^2 K_2(x,y) + \cdots + \lambda^{j-1} K_{j-1}(x,y)] \Phi^*(y)$$

satisfait à (8) qui admet ainsi une solution.

(Reçu le 10 janvier 1946.)