Über die Ideale arithmetischer Ringe

Von LADISLAUS FUCHS, Budapest

1. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit solchen Ringen $\mathfrak{R}$, deren Ideale[1]) den beiden äquivalenten distributiven Gesetzen[2])

$$\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} \frown \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \frown (\mathfrak{a} + \mathfrak{c}) \tag{1}$$

und

$$\mathfrak{a} \frown (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \frown \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a} \frown \mathfrak{c}) \tag{2}$$

genügen. Einen solchen Ring werden wir als „*arithmetischen Ring*", kurz *A-Ring*, bezeichnen[3]). Es ist leicht einzusehen, daß die algebraischen Zahl- und Funktionenringe, sowie alle *Noether*schen Fünfaxioms-Ringe immer A-Ringe sind.

Die Relationen $\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} \frown \mathfrak{c}) \subset (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \frown (\mathfrak{a} + \mathfrak{c})$, bzw. $\mathfrak{a} \frown (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) \supset (\mathfrak{a} \frown \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a} \frown \mathfrak{c})$ gelten offensichtlich in allen Ringen; es handelt sich also um Ringe, in denen auch die umgekehrten Zeichen gültig sind.

2. Ein Ideal, das sich nicht mehr als Durchschnitt echter Teiler darstellen läßt, heißt bekanntlich irreduzibel. Wenn auch der Durchschnitt zweier nicht durch $\mathfrak{v}$ teilbarer Ideale nicht durch $\mathfrak{v}$ teilbar ist, d. h., wenn aus $\mathfrak{a} \frown \mathfrak{b} \subset \mathfrak{v}$ entweder $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{v}$ oder $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{v}$ folgt, so wird $\mathfrak{v}$ im folgenden ein *primitives* Ideal genannt[4]). Man sieht ohne weiteres, daß jedes Primideal primitiv und jedes primitive Ideal stets irreduzibel ist. Wir können aber leicht ein Beispiel anführen, das zeigt, daß ein irreduzibles Ideal

---

[1]) Wir bezeichnen, wie üblich, mit $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a} \frown \mathfrak{b}$ den größten gemeinsamen Teiler bzw. den Durchschnitt (k. g. V.) der Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$. Für das Einheitsideal schreiben wir $\mathfrak{o}$; $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ bedeutet: $\mathfrak{a}$ ist ein (echter oder unechter) Teiler von $\mathfrak{b}$.

[2]) Daß (1) und (2) äquivalent sind, sieht man durch triviale Umformungen ein. Aus (1) folgt (2): $(\mathfrak{a} \frown \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a} \frown \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{a}) \frown (\mathfrak{b} + \mathfrak{a}) \frown (\mathfrak{a} + \mathfrak{c}) \frown (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \frown (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})$; umgekehrt: $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \frown (\mathfrak{a} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \frown \mathfrak{a}) + (\mathfrak{b} \frown \mathfrak{a}) + (\mathfrak{a} \frown \mathfrak{c}) + (\mathfrak{b} \frown \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} \frown \mathfrak{c})$.

[3]) Der Termin ist der Theorie der Verbände entnommen: die Ideale eines A-Ringes bilden einen Verband, den *O. Ore* „arithmetic structure" nennt.

[4]) In der Verbandtheorie würde man $\mathfrak{v}$ nach einer völlig verschiedenen Terminologie Primideal nennen.

nicht notwendigerweise primitiv ist [5]); ist aber der Ring arithmetisch, so kann man die Behauptung auch umkehren, ja sogar den Satz beweisen:

In einem Ring $\mathfrak{R}$ ist jedes irreduzible Ideal dann und nur dann primitiv, wenn $\mathfrak{R}$ ein A-Ring ist.

Ist nämlich $\mathfrak{i}$ ein irreduzibles Ideal und besteht eine Relation $\mathfrak{a} \frown \mathfrak{b} \subset \mathfrak{i}$, so folgt nach (1) im Falle eines A-Ringes, daß auch eine Relation von der Gestalt $\mathfrak{i} = \mathfrak{i}_1 \frown \mathfrak{i}_2$ gültig ist, wo $\mathfrak{i}_1 = \mathfrak{i} + \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{i}_2 = \mathfrak{i} + \mathfrak{b}$ ist. Aus der Irreduzibilität des Ideals $\mathfrak{i}$ kann man nun folgern, daß entweder $\mathfrak{i} + \mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{i} + \mathfrak{b}$ gleich $\mathfrak{i}$ ist, d. h., daß $\mathfrak{i}$ in der Tat primitiv ist.

Es sei nun umgekehrt jedes irreduzible Ideal primitiv. Ist $\mathfrak{i}$ ein irreduzibler Teiler des auf der linken Seite von (1) stehenden Ideals $\mathfrak{d} = \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} \frown \mathfrak{c})$, so ist $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{i}$ und $\mathfrak{b} \frown \mathfrak{c} \subset \mathfrak{i}$. Nach Voraussetzung folgt aus der zweiten Inklusion, daß entweder $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{i}$ oder $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{i}$ ist, d. h., wir haben entweder $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} \subset \mathfrak{i}$ oder $\mathfrak{a} + \mathfrak{c} \subset \mathfrak{i}$. Die beiden Fälle können in eine Relation $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \frown (\mathfrak{a} + \mathfrak{c}) \subset \mathfrak{i}$ vereinigt werden. Da aber — wie in **3** gleich bewiesen wird — der Durchschnitt aller $\mathfrak{i}$ gerade $\mathfrak{d}$ darstellt, muß die Relation $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \frown (\mathfrak{a} + \mathfrak{c}) \subset \mathfrak{d}$ gültig und daher der Ring arithmetisch sein, w. z. b. w.

3. Nun beweisen wir ohne Benutzung der Arithmetizität den folgenden Satz, den wir schon unter **2** angewendet haben und der auch sonst im allgemeinen von grundlegender Bedeutung ist.

Jedes Ideal $\mathfrak{a}$ ist gleich dem Durchschnitt aller seiner irreduziblen Teiler.

Der Satz besteht aus zwei Behauptungen:

a) der Durchschnitt der irreduziblen Teiler von $\mathfrak{a}$ existiert und teilt $\mathfrak{a}$;

b) der Durchschnitt enthält keine anderen Elemente, als die von $\mathfrak{a}$.

a) ist trivial, da jedes Ideal einen trivialen irreduziblen Teiler: das Einheitsideal hat. Der Beweis der Behauptung b) stützt sich auf das bekannte Lemma von *M. Zorn* [7]. Ist α ein Element, das nicht zu $\mathfrak{a}$ gehört, so besitzt $\mathfrak{a}$ nach dem Lemma einen Teiler $\mathfrak{a}_\alpha$, der ebenfalls α nicht enthält und der außerdem die Eigenschaft hat, daß α in jedem echten Teiler von $\mathfrak{a}_\alpha$ vorkommt [6]). Nach der letzten Eigenschaft von $\mathfrak{a}_\alpha$ ist $\mathfrak{a}_\alpha$

[5]) $(x^2, x + y)$ ist im Polynomring von x, y mit rationalen Koeffizienten ein irreduzibles Ideal, das nicht primitiv ist; denn es enthält wohl den Durchschnitt $(x) \frown (x^2, x - y) = (x^2, xy)$, aber keine der Komponenten.

[6]) *McCoy* [4] hat bewiesen, daß es ein irreduzibles Ideal gibt, das ein gegebenes, von 0 verschiedenes a nicht enthält. Beim Beweis benützt er Wohlordnungschlüsse. Seinen Beweisgang könnte man auch hier mit Erfolg anwenden.

irreduzibel. Variiert α durch alle Elemente hindurch, die nicht zu $\mathfrak{a}$ gehören, so ist unser Satz bewiesen.

Gilt ferner der U-Satz [7]) im Ringe, so reicht schon eine endliche Anzahl der irreduziblen Komponenten hin, da die Kette $\mathfrak{i}_1 \supset \mathfrak{i}_1 \frown \mathfrak{i}_2 \supset \cdots$, wenn jedes Glied echtes Vielfaches des vorangehenden ist und alle Teiler von $\mathfrak{a}$ sind, im Endlichen abbrechen muß und demnach schon endlichviele irreduzible Ideale das Ideal $\mathfrak{a}$ darstellen müssen.

4. Ein Ideal $\mathfrak{w}$ soll *stark-primitiv* genannt werden, wenn auch für eine unendliche Anzahl der $\mathfrak{a}_k$ aus [8])

$$\varDelta \mathfrak{a}_k \subset \mathfrak{w} \qquad (\varDelta \mathfrak{a}_k \neq 0)$$

die Inklusion

$$\mathfrak{a}_k \subset \mathfrak{w} \quad \textit{für ein } k$$

folgt. Wenn der Ring dem U-Satz genügt, sind offenbar alle primitiven Ideale gleichzeitig stark-primitiv.

In A-Ringen gilt der folgende, auch an sich interessante Satz, der dem Äquivalenzsatz des Teilerkettensatzes (O-Satzes) und des Basissatzes entspricht [9]).

In einem A-Ring ist die Gültigkeit des U-Satzes die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß jedes vom Nullideal verschiedene Ideal eine Durchschnittsdarstellung mit endlichvielen stark-primitiven Komponenten zuläßt.

Zunächst ist nach **3** jedes Ideal in einem Ring mit U-Satz als Durchschnitt endlichvieler irreduzibler Ideale darstellbar, die nach **2** in einem A-Ring primitiv und somit nach dem U-Satz stark-primitiv sein müssen. Demnach ist die Bedingung notwendig.

Ist, umgekehrt, die im Satze ausgesprochene Bedingung erfüllt, und bezeichnen wir mit $\mathfrak{a}$ den Durchschnitt aller Glieder der Kette $\mathfrak{a}_1 \supset \mathfrak{a}_2 \supset \mathfrak{a}_3 \supset \cdots$, so ist $\mathfrak{a} \neq 0$ nach Voraussetzung als $\mathfrak{a} = \mathfrak{w}_1 \frown \ldots \frown \mathfrak{w}_n$ mit stark-primitiven $\mathfrak{w}_i$ darstellbar. Nun ist $\varDelta \mathfrak{a}_k \subset \mathfrak{w}_i$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ und daraus folgt $\mathfrak{a}_{k_i} \subset \mathfrak{w}_i$ für ein gewisses k_i. Wählen wir l größer als jedes k_i, so erhalten wir $\mathfrak{a}_l \subset \mathfrak{w}_1 \frown \ldots \frown \mathfrak{w}_m = \mathfrak{a}$, d. h. $\mathfrak{a}_l = \mathfrak{a}$ und in der

---

[7]) Vgl. *Krull* [3], S. 8; (der abgeschwächte Vielfachenkettensatz).

[8]) $\varDelta$ dient zur Bezeichnung des Durchschnitts, wenn die Anzahl der Komponenten nicht mit Sicherheit endlich ist.

[9]) Dieser Satz wurde für Ringe, die mindestens einen Nichtnullteiler besitzen, in meiner erscheinenden Note [2] mit Hilfe eines *Akizuki*schen Satzes bewiesen. Der neue Beweis stützt sich statt des *Akizuki*schen auf den unter 3 bewiesenen Satz.

gegebenen absteigenden Kette sind in der Tat von der l-ten Stelle an alle Glieder gleich.

5. Wir nehmen im folgenden an, daß $\mathfrak{R}$ ein A-Ring mit O-Satz ist.

Wir führen in $\mathfrak{R}$ eine der Idealquotientenbildung[10]) analoge Operation ein, die nur im Falle von A-Ringen existiert. Sind zwei Ideale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ gegeben, so betrachten wir alle Ideale $\mathfrak{c}$, die der Relation $\mathfrak{b} \frown \mathfrak{c} \subset \mathfrak{a}$ genügen. Wenn $\mathfrak{b} \frown \mathfrak{c}_1 \subset \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b} \frown \mathfrak{c}_2 \subset \mathfrak{a}$ gelten, so gilt nach (2) auch $\mathfrak{b} \frown (\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{c}_2) = (\mathfrak{b} \frown \mathfrak{c}_1) + (\mathfrak{b} \frown \mathfrak{c}_2) \subset \mathfrak{a}$. Es gibt daher ein einziges maximales Ideal $\mathfrak{c}^*$ mit $\mathfrak{b} \frown \mathfrak{c}^* \subset \mathfrak{a}$; $\mathfrak{c}^*$ ist nämlich der größte gemeinsame Teiler aller Ideale $\mathfrak{c}$, für die $\mathfrak{b} \frown \mathfrak{c} \subset \mathfrak{a}$ gilt. (Wir können demnach aus einer Relation $\mathfrak{b} \frown \mathfrak{c} \subset \mathfrak{a}$ auf $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{c}^*$ folgern.) Dieses maximale $\mathfrak{c}^*$ bezeichnen wir mit dem Symbol $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}$.

Man überzeugt sich leicht, daß im Ring der ganzen rationalen Zahlen die Bildung des Ideals $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}$ in folgender Weise vor sich geht: man läßt aus der Primzahlzerlegung der Basiszahl von $\mathfrak{a}$ die Potenzen derjenigen Primzahlen weg, die in der Basiszahl von $\mathfrak{b}$ mit mindestens ebenso großen Exponenten vorkommen.

6. Nun sollen die Grundeigenschaften der Operation $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}$ untersucht werden.

a) Offensichtlich ist zunächst $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a} \circ \mathfrak{b} \subset \mathfrak{o}$, und zwar ist $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b} = \mathfrak{o}$ dann und nur dann, wenn $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ ist.

b) Unsere Operation ist monoton: aus $\mathfrak{a}_1 \supset \mathfrak{a}_2$ folgt $\mathfrak{a}_1 \circ \mathfrak{b} \supset \mathfrak{a}_2 \circ \mathfrak{b}$; aus $\mathfrak{b}_1 \supset \mathfrak{b}_2$ folgt $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}_1 \subset \mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}_2$. Gilt für jedes $\mathfrak{m}$ die Relation $\mathfrak{a}_1 \circ \mathfrak{m} \supset \mathfrak{a}_2 \circ \mathfrak{m}$, so ist $\mathfrak{a}_1 \supset \mathfrak{a}_2$. Wir dürfen nämlich $\mathfrak{m} = \mathfrak{a}_2$ wählen, dann erhalten wir $\mathfrak{a}_1 \circ \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{o}$ d. h. $\mathfrak{a}_1 \supset \mathfrak{a}_2$. Es gilt auch die entsprechende Behauptung: aus der für jedes $\mathfrak{m}$ geltenden Relation $\mathfrak{m} \circ \mathfrak{b}_1 \supset \mathfrak{m} \circ \mathfrak{b}_2$ ergibt sich $\mathfrak{b}_1 \subset \mathfrak{b}_2$. (Beweis derselbe: man wähle $\mathfrak{m} = \mathfrak{b}_2$.)

c) Die $\circ$-Operation ist anti-kommutativ, d. h. Kommutativität $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \circ \mathfrak{a}$ besteht dann und nur dann, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gleich sind. Nach der Definition und nach a) gilt nämlich $\mathfrak{b} = \mathfrak{b} \frown (\mathfrak{b} \circ \mathfrak{a}) = \mathfrak{b} \frown (\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}) \subset \mathfrak{a}$ und ähnlicherweise $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$.

Wichtig sind die beiden folgenden distributiven Gesetze:

d) $$(\mathfrak{a}_1 \frown \cdots \frown \mathfrak{a}_n) \circ \mathfrak{b} = (\mathfrak{a}_1 \circ \mathfrak{b}) \frown \cdots \frown (\mathfrak{a}_n \circ \mathfrak{b}) .$$

Es gilt nämlich $\mathfrak{b} \frown \mathfrak{c} \subset \mathfrak{a}_1 \frown \cdots \frown \mathfrak{a}_n$ dann und nur dann, wenn für jedes i, $\mathfrak{b} \frown \mathfrak{c} \subset \mathfrak{a}_i$ gilt. Insbesondere ist also $(\mathfrak{a} \frown \mathfrak{b}) \circ \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}$.

---

[10]) Siehe z. B. *Waerden* [6], S. 24.

e) $\mathfrak{a} \circ (\mathfrak{b}_1 + \cdots + \mathfrak{b}_m) = (\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}_1) \frown \cdots \frown (\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}_m)$.

Aus $(\mathfrak{b}_1 + \cdots + \mathfrak{b}_m) \frown \mathfrak{c} = (\mathfrak{b}_1 \frown \mathfrak{c}) + \cdots + (\mathfrak{b}_m \frown \mathfrak{c}) \subset \mathfrak{a}$ folgt $\mathfrak{b}_j \frown \mathfrak{c} \subset \mathfrak{a}$ für jedes j und umgekehrt. Insbesondere ist $\mathfrak{a} \circ (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}$.

f) Es ist stets $(\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}_1) \circ \mathfrak{b}_2 = \mathfrak{a} \circ (\mathfrak{b}_1 \frown \mathfrak{b}_2) = (\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}_2) \circ \mathfrak{b}_1$, denn aus $\mathfrak{c} \subset (\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}_1) \circ \mathfrak{b}_2$ ergibt sich $\mathfrak{b}_2 \frown \mathfrak{c} \subset \mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}_1$ und weiter $(\mathfrak{b}_1 \frown \mathfrak{b}_2) \frown \mathfrak{c} \subset \mathfrak{a}$; und umgekehrt.

g) Es ist jeweils $\mathfrak{a} \circ (\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}) \supset \mathfrak{b}$, weil nach f) $\{\mathfrak{a} \circ (\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b})\} \circ \mathfrak{b} = (\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}) \circ (\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}) = \mathfrak{o}$ ist, und nach a) erhält man die Behauptung. Ist dagegen $\mathfrak{b}$ von der Gestalt $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{c}$, so gilt auch das umgekehrte Zeichen $\subset$; wir können nämlich mit Anwendung des eben Bewiesenen mit Hilfe von b) auf $\mathfrak{a} \circ \{\mathfrak{a} \circ (\mathfrak{a} \circ \mathfrak{c})\} \subset \mathfrak{a} \circ \mathfrak{c}$ folgern. Es gilt daher die Gleichung $\mathfrak{a} \circ \{\mathfrak{a} \circ (\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b})\} = \mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}$ für jedes $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$.

Wir beweisen nun eine der wichtigsten Eigenschaften der Operation $\circ$:

h) Ist $\mathfrak{a}$ irreduzibel, so ist $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}$ entweder gleich $\mathfrak{a}$ oder gleich $\mathfrak{o}$. Ist nämlich $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}$, d. h. ist $\mathfrak{b}$ kein Vielfaches von $\mathfrak{a}$, so muß wegen der Primitivität von $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{b} \frown (\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}) \subset \mathfrak{a}$ folgen, daß $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ ist, es gilt daher $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$.

7. Nach *E. Noether* [5] gibt es bekanntlich für jedes Ideal eines Ringes eine endliche Darstellung durch irreduzible Ideale in dem Falle, wenn der Ring dem O-Satz genügt; diese Zerlegung ist jedoch i. a. nicht eindeutig. Über Zerlegungen in A-Ringen läßt sich eine weitere Aussage machen:

Ist ein Ideal in einem beliebigen A-Ring als unverkürzbarer[11]) *Durchschnitt von endlichvielen irreduziblen (primitiven) Idealen darstellbar, so ist diese Darstellung eindeutig*[12]).

Sind nämlich $\mathfrak{m} = \mathfrak{a}_1 \frown \cdots \frown \mathfrak{a}_n = \mathfrak{b}_1 \frown \cdots \frown \mathfrak{b}_m$ zwei endliche unverkürzbare Darstellungen von $\mathfrak{m}$ mit irreduziblen $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_j$, so bildet man $\mathfrak{m} \circ \mathfrak{a}_i^*$, wo $\mathfrak{a}_i^* = \mathfrak{a}_1 \frown \cdots \frown \mathfrak{a}_{i-1} \frown \mathfrak{a}_{i+1} \frown \cdots \frown \mathfrak{a}_n$ ist. Nun ist einerseits $\mathfrak{m} \circ \mathfrak{a}_i^*$ offenbar gleich $\mathfrak{a}_i$, andrerseits gleich dem Durchschnitt gewisser $\mathfrak{b}_j$ (Anwendung von 6d)). Aus der Irreduzibilität von $\mathfrak{a}_i$ folgt für ein $\mathfrak{b}_j$, daß $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{b}_j$ ist. So ergibt sich, daß die Komponenten der beiden und daher auch aller endlichen unverkürzbaren Darstellungen paarweise übereinstimmen.

---

[11]) Unverkürzbarkeit bedeutet, daß keine Komponente einfach weggelassen werden kann.

[12]) Dieser Satz ist die Hälfte eines *Birkhoff*schen Satzes [1].

Während wir im allgemeinen von den Komponenten der Durchschnittsdarstellungen die Teilbarkeit von zwei Idealen überhaupt nicht ablesen können — sind doch diese nicht einmal geeignet, die Gleichheit der Ideale zu entscheiden —, ist die Teilbarkeit im Falle eines A-Ringes leicht entscheidbar. $\mathfrak{a}$ geht nämlich dann und nur dann in $\mathfrak{b}$ auf, wenn sämtliche irreduziblen Komponenten von $\mathfrak{a}$ unter den irreduziblen Komponenten von $\mathfrak{b}$ ein Vielfaches haben. Das „dann" dieser Behauptung ist ganz trivial, das „nur dann" ergibt sich sofort, wenn man bloß in Betracht zieht, daß die irreduziblen Komponenten von $\mathfrak{a}$ primitiv sind.

Der oben bewiesene Satz ermöglicht zu definieren: $\mathfrak{k}$ ist ein *Komponentenideal von* $\mathfrak{a}$, wenn in der (eindeutig bestimmten) Zerlegung von $\mathfrak{k}$ in endlichviele irreduzible Ideale nur solche Komponenten vorkommen, die auch Komponenten der ebensolchen Zerlegung des Ideals $\mathfrak{a}$ sind[13]). Wir können leicht beweisen:

$\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}$ *ist immer ein Komponentenideal von* $\mathfrak{a}$, *und zwar dasjenige, das gleich dem Durchschnitt von den nicht in* $\mathfrak{b}$ *aufgehenden irreduziblen Komponenten von* $\mathfrak{a}$ *ist.*

Die Behauptung folgt mühelos angesichts 6h) aus dem distributiven Gesetz 6d).

Aus diesem Satze folgt, daß man durch die Operation $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}$ alle Komponentenideale von $\mathfrak{a}$ darstellen kann. Man wähle für $\mathfrak{b}$ z. B. den Durchschnitt aller übrigen irreduziblen Komponenten von $\mathfrak{a}$. Die Operation stellt daher 2^n verschiedene Ideale dar, wo n die genaue Anzahl der irreduziblen Komponenten von $\mathfrak{a}$ bezeichnet.

8. Nun liegt der Gedanke nahe, zwei Ideale $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$ hinsichtlich $\mathfrak{a}$ *äquivalent* zu betrachten, wenn $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}_2$ ist. Man sieht sofort, daß die so eingeführte Äquivalenzrelation eine reflexive, symmetrische und transitive Relation ist, so daß sie eine Klasseneinteilung der Ideale liefert. Wir schreiben $\mathfrak{b}_1 \sim \mathfrak{b}_2 \langle \mathfrak{a} \rangle$, oder wenn kein Mißverständnis obwalten kann, kurz $\mathfrak{b}_1 \sim \mathfrak{b}_2$.

Die Äquivalenz bleibt bei der Summen- und Durchschnittsbildung unverändert: aus $\mathfrak{b}_1 \sim \mathfrak{b}_2$ folgen die Äquivalenzen $\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{c} \sim \mathfrak{b}_2 + \mathfrak{c}$ bzw. $\mathfrak{b}_1 \frown \mathfrak{c} \sim \mathfrak{b}_2 \frown \mathfrak{c}$ für jedes $\mathfrak{c}$. Der erste Teil der Behauptung ergibt sich unmittelbar aus 6e) durch leichte Umformung: $\mathfrak{a} \circ (\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}_1) \frown (\mathfrak{a} \circ \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}_2) \frown (\mathfrak{a} \circ \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \circ (\mathfrak{b}_2 + \mathfrak{c})$, der zweite ebenso leicht aus 6f): $\mathfrak{a} \circ (\mathfrak{b}_1 \frown \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}_1) \circ \mathfrak{c} = (\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}_2) \circ \mathfrak{c} = \mathfrak{a} \circ (\mathfrak{b}_2 \frown \mathfrak{c})$.

---

[13]) Das Einheitsideal und das Ideal $\mathfrak{a}$ selbst sollen den Komponentenidealen zugerechnet werden.

Aus 6g) folgt, daß $\mathfrak{b}$ zu $\mathfrak{a} \circ (\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b})$, einem Komponentenideal von $\mathfrak{a}$ äquivalent ist.

Sind $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$ zwei Komponentenideale von $\mathfrak{a}$, dann ist $\mathfrak{k}_1 \sim \mathfrak{k}_2 \langle \mathfrak{a} \rangle$ nur in dem Falle, wenn $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{k}_2$ ist. Um dies zu beweisen, braucht man nur zu beachten, daß das Ideal $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{k}$ ein Komponentenideal von $\mathfrak{a}$ ist, und zwar so entsteht, wenn man gerade diejenigen irreduziblen Komponenten von $\mathfrak{a}$ wegläßt, die auch Komponenten von $\mathfrak{k}$ sind.

Aus diesen Bemerkungen ergibt sich unmittelbar die Tatsache, daß jedes Ideal $\mathfrak{b}$ zu einem und nur zu einem Komponentenideal von $\mathfrak{a}$ äquivalent ist: zu dem Durchschnitt der in $\mathfrak{b}$ aufgehenden Komponentenideale[14]). So existieren gerade 2^n nicht-äquivalente Ideale; jede der 2^n Klassen kann durch ein einziges Komponentenideal von $\mathfrak{a}$ repräsentiert werden.

9. Unter den Idealklassen kann man leicht eine *ein-eindeutige Abbildung* $\mathfrak{A}$ konstruieren. Bezeichnet K eine Klasse und ist $\mathfrak{k}$ ein Repräsentant von K, etwa das Komponentenideal von $\mathfrak{a}$ in K, so soll der Klasse K bei der Abbildung $\mathfrak{A}$ jene Klasse K' zugeordnet werden, welche das Ideal $\mathfrak{k}' = \mathfrak{a} \circ \mathfrak{k}$ enthält.

Die Abbildung $\mathfrak{A}$ ist involutorisch. Nach 6g) ist nämlich $\mathfrak{k}' = \mathfrak{a} \circ \mathfrak{k} = \mathfrak{a} \circ \{\mathfrak{a} \circ (\mathfrak{a} \circ \mathfrak{k})\} = \mathfrak{a} \circ (\mathfrak{a} \circ \mathfrak{k}')$ und daraus folgt $\mathfrak{k} = \mathfrak{a} \circ \mathfrak{k}'$, da diese Ideale äquivalent und gleichzeitig Komponentenideale von $\mathfrak{a}$ sind. Dem Ideal $\mathfrak{k}_1 + \mathfrak{k}_2$ entspricht bei der Abbildung offensichtlich das Ideal $\mathfrak{k}_1' \frown \mathfrak{k}_2'$ infolge 6e), und ebenso entspricht $\mathfrak{k}_1' + \mathfrak{k}_2'$ dem Ideal $\mathfrak{k}_1 \frown \mathfrak{k}_2$.

Nun wenden wir uns dem Beweis des folgenden Satzes zu:

Zwei Ideale sind dann und nur dann äquivalent hinsichtlich $\mathfrak{a}$, *wenn sie hinsichtlich aller irreduziblen Komponenten von* $\mathfrak{a}$ *äquivalent sind.*

Gilt nämlich $\mathfrak{b}_1 \sim \mathfrak{b}_2 \langle \mathfrak{i}_k \rangle$ für alle irreduziblen Komponenten $\mathfrak{i}_k$ von $\mathfrak{a}$, so folgt aus 6d) nach Voraussetzung

$$\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}_1 = (\mathfrak{i}_1 \frown \cdots \frown \mathfrak{i}_n) \circ \mathfrak{b}_1 = (\mathfrak{i}_1 \circ \mathfrak{b}_1) \frown \cdots \frown (\mathfrak{i}_n \circ \mathfrak{b}_1) =$$
$$= (\mathfrak{i}_1 \circ \mathfrak{b}_2) \frown \cdots \frown (\mathfrak{i}_n \circ \mathfrak{b}_2) = (\mathfrak{i}_1 \frown \cdots \frown \mathfrak{i}_n) \circ \mathfrak{b}_2 = \mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}_2 ,$$

also $\mathfrak{b}_1 \sim \mathfrak{b}_2 \langle \mathfrak{a} \rangle$.

Umgekehrt, sei $\mathfrak{b}_1 \sim \mathfrak{b}_2 \langle \mathfrak{a} \rangle$. Wir können jedes Komponentenideal, insbesondere jede irreduzible Komponente $\mathfrak{i}_k$ in der Form $\mathfrak{i}_k = \mathfrak{a} \circ \mathfrak{c}$ für

[14]) Man sieht ohne weiteres, daß jede Klasse ein einziges maximales Ideal enthält, das eindeutig dadurch ausgezeichnet ist, daß es ein Komponentenideal von $\mathfrak{a}$ ist.

geeignetes $\mathfrak{c}$ darstellen. Ist nun $\mathfrak{c}$ so gewählt, so folgt aus $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}_2$ nach 6f)

$$\mathfrak{i}_k \circ \mathfrak{b}_1 = (\mathfrak{a} \circ \mathfrak{c}) \circ \mathfrak{b}_1 = (\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}_1) \circ \mathfrak{c} = (\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}_2) \circ \mathfrak{c} = (\mathfrak{a} \circ \mathfrak{c}) \circ \mathfrak{b}_2 = \mathfrak{i}_k \circ \mathfrak{b}_2 ,$$

w. z. b. w.

Somit haben wir die Äquivalenzrelation hinsichtlich $\mathfrak{a}$ auf solche hinsichtlich irreduzibler Ideale zurückgeführt. Die Bedeutung dieser Aufspaltung liegt darin, daß die Verhältnisse bei irreduziblen Idealen in jeder Hinsicht ungemein einfach sind. Nach 6h) existieren nämlich nur zwei Komponentenideale, somit auch nur zwei Idealklassen, und zwar gehören zwei Ideale dann und nur dann zu derselben Klasse, wenn beide durch $\mathfrak{i}$ teilbar oder aber beide durch $\mathfrak{i}$ unteilbar sind. Die Abbildung besteht nun einfach daraus, daß man die beiden Klassen einander zuordnet. Durch diese *trivialen Abbildungen* ergibt sich also eine sehr einfache Übersicht über die Abbildung $\mathfrak{A}$.

(Eingegangen den 1. August 1948.)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] *G. Birkhoff*, Rings of sets, Duke Math. J. 3 (1937), S. 443—454.

[2] *L. Fuchs*, A note on the descending chain condition, Norske Vid. Selsk. Forh., unter der Presse.

[3] *W. Krull*, Idealtheorie, Berlin (1935).

[4] *N. H. McCoy*, Subrings of infinite direct sums, Duke Math. J. 4 (1938) S. 486 bis 494.

[5] *E. Noether*, Idealtheorie in Ringbereichen, Math. Ann. 83 (1921), S. 24—66.

[6] *B. L. van der Waerden*, Moderne Algebra II, 2. Aufl, Berlin (1940).

[7] *M. Zorn*, A remark on method in transfinite algebra, Bull. Am. Math. Soc. 41 (1935), S. 667—670.