Elliptische Systeme von partiellen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Von Adolf Kriszten, Zürich

Einleitung

In den Zürcher Arbeiten über hyperkomplexe Funktionen[1]) wird im allgemeinen eine Cliffordsche Algebra zugrunde gelegt. Die Elemente dieser Algebra seien

$$c_0 = 1, c_1, c_2, \ldots, c_{m-1}, c_m, \ldots, c_M \qquad M \geqq m-1 \ .$$

In dem Linearsystem $\mathfrak{C}\,(c_0, \ldots, c_{m-1})$ werden die hyperkomplexe Variable

$$z = \sum_{h=0}^{m-1} c_h\, x_h$$

und die hyperkomplexe c-Funktion

$$w(z) = \sum_{h=0}^{m-1} c_h\, w_h(x_0, \ldots, x_{m-1})$$

eingeführt. Eine c-Funktion $w(z)$ heißt links-analytisch (nach der früheren Bezeichnung also links-regulär), falls

$$\sum_{h=0}^{m-1} c_h \frac{\partial w}{\partial x_h} = 0 \ ,$$

und rechts-analytisch, falls

$$\sum_{h=0}^{m-1} \frac{\partial w}{\partial x_h} c_h = 0 \ .$$

---

[1]) Ein vollständiges Literaturverzeichnis findet sich am Schluß der Arbeit von *H. G. Häfeli*: Hyperkomplexe Differentiale, Comm. Math. Helv., vol. 20; für Cliffordsche Algebren speziell *P. Boßhard*: Die Cliffordschen Zahlen, ihre Algebra und ihre Funktionentheorie, Dissertation Zürich 1940. Die Bezeichnungen links- und rechts-regulär der zitierten Arbeiten sind in dieser Arbeit durch die sinngemäßeren Bezeichnungen links- und rechts-analytisch ersetzt.

Bedeutet $v(z)$ eine rechts-analytische, $w(z)$ eine links-analytische c-Funktion, ist weiter Σ eine geschlossene, orientierbare Hyperfläche im Raume der $x_0, \ldots, x_{m-1}$, dZ ihr orientiertes hyperkomplexes Flächenelement, so gilt ein erster Integralsatz der Form

$$\int_{\Sigma} v(z)\,dZ\,w(z) = 0 \ ,$$

während die Existenz des zweiten Integralsatzes in seiner allgemeinen Form

$$w(z) = k \int_{\Sigma} v(z, \zeta)\,dZ\,w(\zeta)$$

$v(z, \zeta)$ geeignete Hilfsfunktion, z im Innern von Σ

von dem gewählten Linearsystem $\mathfrak{C}$ abhängt.

Die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{r} a_k\, z^k + a_0 = 0$$

sei die Hauptgleichung einer beliebigen Größe z aus $\mathfrak{C}$, dann ist

$$\sum_{k=1}^{r} a_k \left(\sum_{h=0}^{m-1} c_h \frac{\partial}{\partial x_h} \right)^k$$

ein reeller Differentialoperator, und jede Komponente w_i einer (links- oder rechts-) analytischen Funktion $w(z)$ ist eine Lösung der Differentialgleichung r-ter Ordnung

$$\left(\sum_{k=1}^{r} a_k \left(\sum_{h=1}^{m-1} c_h \frac{\partial}{\partial x_h} \right)^k \right) w_i = 0 \ . \tag{a}$$

Die Gültigkeit des zweiten Hauptsatzes hängt von der Differentialgleichung (a) ab; er gilt nur dann, wenn (a) eine Differentialgleichung zweiter Ordnung ($r = 2$) von elliptischem Typus ist. Das bedeutet aber in einer Cliffordschen Algebra, daß für $z \in \mathfrak{C}$ eine konjugierte Größe $\bar{z}$ existiert mit der Eigenschaft, daß

$$z\,\bar{z} = \sum_{i,h=0}^{m-1} g_{ik}\, x_i\, x_k \ .$$

Die g_{ik} sind reell, die Form ist positiv definit, $z\,\bar{z} = n(z)$ heißt die Norm von z. Speziell ist

$$n \left(\sum_{h=0}^{m-1} c_h \frac{\partial}{\partial x_h} \right) = \sum_{i,k=0}^{m-1} g_{ik} \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_k}$$

ein reeller, elliptischer Differentialoperator zweiter Ordnung.

Die Existenz einer elliptischen Norm ist eine Bedingung für das Linearsystem $\mathfrak{C}$; ihre geometrische Bedeutung liegt darin, daß die charakteristischen Kegel dieser Differentialgleichung von zweiter Ordnung und imaginär sind.

Die so definierten analytischen c-Funktionen wurden eingehend studiert (speziell die analytischen Quaternionenfunktionen), und es wurden bereits weitreichende Resultate erzielt.

In dieser Arbeit wird nun ein ganz anderer Zugang zu den hyperkomplexen Funktionen erschlossen. Wir gehen aus von einem System von partiellen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{h=0}^{n} a_{hk}^{(i)} \frac{\partial u_h}{\partial x_i} = 0 \ , \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

oder in leicht verständlicher Matrizenschreibweise

$$\left(\sum_{i=0}^{m-1} A_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) u = 0 \ . \tag{b}$$

Setzen wir voraus, daß das System einen *Multiplikator*[2]) erster Ordnung besitzt:

$$M = \sum_{h=0}^{m-1} A_k^* \frac{\partial}{\partial x_k} \ ,$$

das heißt, daß das Produkt

$$\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{h=0}^{m-1} A_k^* \frac{\partial}{\partial x_k} A_h \frac{\partial}{\partial x_h} = \sum_{h,k=0}^{m-1} g_{hk} \frac{\partial^2}{\partial x_h \partial x_k} \cdot E$$

eine Diagonalmatrix ist, so genügen die einzelnen Funktionen u_i der skalaren Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\sum_{h,k=0}^{m-1} g_{hk} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_h \partial x_k} = 0 \ . \tag{c}$$

Wir werden im folgenden voraussetzen, daß die Differentialgleichung (c) elliptisch ist. Dann läßt sie sich auf die Form

$$\Delta u_i = 0 \qquad (\Delta \text{ Laplace-Operator})$$

bringen. Wird diese Transformation auch in (b) durchgeführt, so ergibt sich eine neue Differentialgleichung

$$\sum_{h=0}^{m-1} C_h \frac{\partial u}{\partial x_h} = 0 \ ,$$

[2]) Dieser Begriff und verschiedene Entwicklungen in I. finden sich in analoger Form in der Arbeit von *H. Malmheden*: A Class of Hyperbolic Systems of Linear Differential Equations, Communications du Sém. Math. de l'Univ. de Lund, vol. 8.

ebenso ein neuer Multiplikator

$$M = \sum_{h=0}^{m-1} \overline{C}_h \frac{\partial}{\partial x_h} \quad .$$

Diese neuen Matrizen C_h bilden das erzeugende Linearsystem $\mathfrak{C}$ einer Cliffordschen Algebra und die $\overline{C}_h$ sind die konjugierten Größen zu den C_h $(C_h \overline{C}_n = +1)$, so daß die Norm

$$n\left(\sum_{h=0}^{m-1} C_h \frac{\partial}{\partial x_h}\right) = \Delta$$

wird, d. h. die Bedingung, daß ein linearer Multiplikator M existiert, und die Bedingung, daß die Norm des Operators (b) reell ist, sind äquivalent.

Damit werden wir in ganz zwangloser Weise auf die bereits bestehende Theorie der hyperkomplexen Funktionen geführt, und es besteht die Möglichkeit, Systeme von partiellen Differentialgleichungen mit funktionentheoretischen Hilfsmitteln zu behandeln. Insbesondere können ihre Singularitäten untersucht werden.

In der vorliegenden Arbeit betrachten wir die allgemeinen elliptischen Systeme von partiellen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ohne Störungsfunktion

$$\sum_{h=1}^{n} \sum_{i=0}^{m-1} a_{hk}^{(i)} \frac{\partial u_h}{\partial x_i} + \sum_{h=1}^{n} b_{hk} u_h = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n) \quad . \tag{d}$$

Die einzelnen Komponenten u_h genügen der skalaren, partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(\Delta + \omega^2)\, u_h = 0 \quad .$$

Es ist das Ziel der Arbeit, die Potenzreihen der komplexen Funktionentheorie auf die Lösungsfunktionen von (d) zu verallgemeinern. Wir folgen dabei dem Gedankengang, der zur Reihenentwicklung der Quaternionenfunktionen führte. Die Reihenentwicklung für Quaternionenfunktionen, wie auch die meisten andern wesentlichen Begriffe der hyperkomplexen Funktionentheorie stammen von *Rud. Fueter*, der durch seine grundlegenden Arbeiten diese ganze Theorie entwickelt hat.

1. In einem m-dimensionalen, reellen Raum R^m mit den Koordinaten $x_0, \ldots, x_{m-1}$ betrachten wir das folgende System von n partiellen Differentialgleichungen für die n Funktionen $u_1, \ldots, u_n$:

$$\sum_{h=1}^{n} \sum_{i=0}^{m-1} a_{hk}^{(i)} \frac{\partial u_h}{\partial x_i} + \sum_{h=1}^{n} b_{hk} u_h = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n) . \tag{1}$$

Die Größen $a_{hk}^{(i)}$ und b_{hk} seien reelle Konstante, dementsprechend die Funktionen u_h reelle Funktionen der reellen Variabeln $x_0 \ldots x_{m-1}$. Zur einfachern Schreibweise führen wir die folgenden Matrizen ein:

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11}^{(i)} \ldots a_{1n}^{(i)} \\ \\ a_{n1}^{(i)} \ldots a_{nn}^{(i)} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} \ldots b_{1n} \\ \\ b_{n1} \ldots b_{nn} \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Das System (1) kann in Matrizenform als

$$\left(\sum_{i=0}^{m-1} A_i \frac{\partial}{\partial x_i} + B \right) u = 0 \tag{2}$$

geschrieben werden. Ist $B = 0$, so nennen wir es *homogen*, im allgemeinen Fall $B \neq 0$ *inhomogen*. Da es sich um ein System mit konstanten Koeffizienten handelt, existiert immer ein Matrixoperator, der, von links her auf die Gleichung (2) angewendet, die vollständige Trennung der unbekannten Funktionen u_h herbeiführt. Ein derartiger Operator heißt nach der Bezeichnung von *Malmheden* ein *Multiplikator* der Gleichung (2). Zum Beispiel ist immer die zur Matrix

$$\sum_{i=0}^{m-1} A_i \frac{\partial}{\partial x_i} + B$$

adjungierte Matrix[3]) ein Multiplikator. Die dadurch erhaltene, skalare Differentialgleichung, der die einzelnen Funktionen u_h genügen, wird im allgemeinen n-ter Ordnung sein. Unter gewissen Bedingungen für das System (1) ist es möglich, diese Trennung der Funktionen u_h schon in einer Differentialgleichung niedrigerer Ordnung herbeizuführen. Wir werden uns im folgenden immer auf den Fall beschränken, daß bereits ein Multiplikator erster Ordnung existiert, und werden dafür eine notwendige und hinreichende Bedingung aufstellen. Dieser Multiplikator erster Ordnung, dessen Existenz wir voraussetzen, sei

$$M = \sum_{i=0}^{m-1} A_i^* \frac{\partial}{\partial x_i} + B^* ;$$

wenden wir M auf (2) an, so erhalten wir

$$\left\{ \sum_{h,k=0}^{m-1} \tfrac{1}{2} (A_k^* A_h + A_h^* A_k) \frac{\partial^2}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_{h=0}^{m-1} (A_h^* B + B^* A_h) \frac{\partial}{\partial x_h} + B^* B \right\} u = 0 .$$

[3]) adjungiert im Sinne der Determinantentheorie.

Wir haben vorausgesetzt, daß in dieser Gleichung die Komponenten u_i getrennt seien, also muß jeder einzelne Summand *Diagonalform* haben; es sei

$$A_k^* A_h + A_h^* A_k = 2g_{hk}\cdot E \ , \quad A_h^* B + B^* A_h = 2d_h E \ , \quad B^* B = c\cdot E \ ;$$

E bedeutet die Einheitsmatrix. Jede der Funktionen u_i genügt somit der Differentialgleichung

$$\left(\sum_{h,k=0}^{m-1} g_{hk} \frac{\partial^2}{\partial x_h \partial x_k} + 2\sum_{h=0}^{m-1} d_h \frac{\partial}{\partial x_h} + c\right) u_i = 0 \ . \tag{3}$$

Definition. *Das System* (1) *heißt ein elliptisches System, wenn die Gleichung* (3) *eine elliptische Differentialgleichung ist.*

Damit ein System (1) elliptisch ist, ist daher notwendig und hinreichend, daß die quadratische Form, gebildet mit den Größen g_{hk} als Koeffizienten *positiv definit* ist. Setzen wir dies voraus, so existiert immer eine lineare Transformation

$$y_h = \sum_{k=0}^{m-1} t_{hk}\, x_k \qquad (h = 0,\ldots, m-1) \qquad |t_{hk}| \neq 0 \ ,$$

die den Differentialoperator

$$\sum_{h,k=0}^{m-1} g_{hk} \frac{\partial^2}{\partial x_h \partial x_k}$$

auf Diagonalform bringt. Führen wir diese Transformation in (2) durch, so erhalten wir

$$\left(\sum_{h=0}^{m-1} B_h \frac{\partial}{\partial y_h} + B\right) u = 0 \qquad B_h = \sum_{k=0}^{m-1} t_{hk} A_k \ , \tag{4}$$

und es wird weiter

$$M = \sum_{h=0}^{m-1} B_h^* \frac{\partial}{\partial y_h} + B^* \qquad B_h^* = \sum_{k=0}^{m-1} t_{hk} A_k^* \ .$$

Diese neuen Matrizen B_h und B_h^* genügen den Gleichungen

$$B_h^* B_k + B_k^* B_h = 2E \qquad h = k$$

und

$$B_h^* B_k + B_k^* B_h = 0 \qquad h \neq k \ .$$

Indem wir die Gleichung (4) von links mit $B_0^* = B_0^{-1}$ multiplizieren und statt y_h wieder x_h schreiben, erhalten wir

$$\left(B_0^{-1} B_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + B_0^{-1} B_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + B_0^{-1} B_{m-1} \frac{\partial}{\partial x_{m-1}} + B_0^{-1} B\right) u = 0 \ .$$

Wir setzen $B_0^{-1} B_h = C_h$ und statt $B_0^{-1} B$ schreiben wir wieder B, das ergibt

$$\left(\sum_{h=0}^{m-1} C_h \frac{\partial}{\partial x_h} + B\right) u = 0 \ .$$

Diese Gleichung hat den Multiplikator

$$M = \sum_{h=0}^{m-1} B_h^* B_0 \frac{\partial}{\partial x_h} + B^* B_0 \ ;$$

auch hier führen wir neue Bezeichnungen ein und setzen $B_h^* B_0 = \overline{C}_h$, statt $B^* B_0$ schreiben wir wieder B^*; es wird also

$$M = \sum_{h=0}^{m-1} \overline{C}_h \frac{\partial}{\partial x_h} + B^* \ .$$

Zwischen den Matrizen C_h und $\overline{C}_h$ bestehen die einfachen Beziehungen

$$C_0 = \overline{C}_0 = E \ , \quad \overline{C}_h = -C_h \quad (h \neq 0) \ , \quad \overline{C}_h C_k + \overline{C}_k C_h = 0 \ , \quad (h \neq k) \ ,$$
$$\overline{C}_h C_h = E \ .$$

Die einzelnen Komponenten u_i von u genügen einer Differentialgleichung der Form

$$\left(\Delta + 2 \sum_{h=0}^{m-1} d_h \frac{\partial}{\partial x_h} + c\right) u_i = 0 \ ,$$

dabei bedeutet Δ den m-dimensionalen Laplaceoperator

$$\Delta = \sum_{h=0}^{m-1} \frac{\partial^2}{\partial x_h^2} \ .$$

Die Koeffizienten c und d_h haben in dieser Gleichung im allgemeinen einen andern Wert als die gleich bezeichneten Größen in (3)! Setzen wir endlich noch

$$w_i = e^{-\sum_{h=0}^{m-1} d_h x_h} \cdot u_i \ ,$$

und verstehen wir unter w die Spaltenmatrix gebildet aus den w_i, so genügt w der Differentialgleichung

$$\left(\sum_{h=0}^{m-1} C_h \frac{\partial}{\partial x_h} + B - \sum_{h=0}^{m-1} d_h C_h\right) w = 0 \ ;$$

der Multiplikator dieser Gleichung ist

$$\sum_{h=0}^{m-1} \overline{C}_h \frac{\partial}{\partial x_h} + \left(B^* - \sum_{h=0}^{m-1} d_h \overline{C}_h\right) \ .$$

Die einzelnen Komponenten w_i von w genügen der Differentialgleichung

$$(\Delta + \omega^2)\, w_i = 0 \ .$$

ω ist eine reelle oder rein imaginäre Konstante, und es ist

$$\omega^2 = c - \sum_{h=0}^{m-1} d_h^2 \ .$$

Setzen wir

$$C_m = \frac{1}{\omega}\,(B - \sum_{h=0}^{m-1} d_h\, C_h)$$

und

$$\overline{C}_m = \frac{1}{\omega}\,(B^* - \sum_{h=0}^{m-1} d_h\, \overline{C}_h) \ ,$$

so erhalten wir

$$\left(\sum_{h=0}^{m-1} C_h \frac{\partial}{\partial x_h} + \omega\, C_m\right) w = 0 \ , \tag{6}$$

$$M = \sum_{h=0}^{m-1} \overline{C}_h \frac{\partial}{\partial x_h} + \omega\, \overline{C}_m \ , \tag{7}$$

und die Matrizen C_h genügen den Gleichungen

$$\begin{aligned} &\overline{C}_0 = C_0 \ , \qquad \overline{C}_h = -\,C_h \qquad (h = 1, \ldots, m) \\ &\overline{C}_h C_h = C_0 = E \qquad (h = 0, \ldots, m) \\ &\overline{C}_h C_k + \overline{C}_k C_h = 0 \qquad (h \neq k) \ . \end{aligned} \tag{8}$$

Wir nennen (6) die *Normalform* des Gleichungssystems (1)[4]. Es ist vielleicht nützlich, darauf hinzuweisen, daß die (reelle oder rein imaginäre) Konstante ω nur in der Form ω^2 oder in der Kombination $\omega\, C_m$ und $\omega\, \overline{C}_m$ auftritt.

2. $\mathfrak{A}$ sei eine Cliffordsche Algebra der Ordnung 2^m mit den Basiselementen

$$c_0 = 1\, ;\, c_1, \ldots, c_m\, ;\, c_{12} = c_1\, c_2\, ; \ldots ;\, c_{1\ldots m} = c_1 \ldots c_m \ .$$

c_0 bedeutet die Haupteinheit; die c_j genügen den Relationen

$$\begin{aligned} &c_0^2 = c_0 = 1 \ , \qquad c_j^2 = -\,c_0 = -\,1 \qquad (j = 1, \ldots, m) \\ &c_0\, c_j = c_j\, c_0 \ , \qquad c_j\, c_k = -\,c_k\, c_j \qquad (j, k = 1, \ldots, m\, ;\ j \neq k). \end{aligned}$$

[4]) Für ein homogenes (hyperbolisches) System hat *Malmheden* die analoge Normalform hergeleitet.

Unter den zu den c_j *konjugierten* Größen $\bar{c}_j$ verstehen wir

$$\bar{c}_0 = c_0 \ , \qquad \bar{c}_j = - c_j \qquad (j = 1, \ldots, m) \ ,$$

es gelten die Beziehungen

$$\bar{c}_h c_k + \bar{c}_k c_h = \begin{cases} 2\, c_0 & (h = k) \\ 0 & (h \neq k) \ . \end{cases}$$

Die Zahlen a der Algebra $\mathfrak{A}$ haben die Form

$$a = a_0 c_0 + a_1 c_1 + \cdots + a_m c_m + a_{12} c_{12} + \cdots + a_{1 \ldots m} c_{1 \ldots m} \ .$$

Die Komponenten $a_0 ; \ldots ; a_{1 \ldots m}$ seien *reelle* Zahlen [5]). Unter dem Betrag von a verstehen wir

$$| a | = (a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_m^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{1 \ldots m}^2)^{\frac{1}{2}} \ , \tag{9}$$

die konjugierte Zahl $\bar{a}$ sei

$$\bar{a} = a_0 \bar{c}_0 + \cdots + a_{1 \ldots m} \bar{c}_{1 \ldots m} \ ;$$

dabei ist nach Definition

$$\bar{c}_{hk \ldots l} = \bar{c}_l \ldots \bar{c}_k \bar{c}_h \ .$$

Das Produkt $a \bar{a}$ (im allgemeinen nicht gleich $\bar{a} a$) nennen wir die *Norm* von $a : n(a) = a \bar{a}$. $n(a)$ ist im allgemeinen nicht reell; ist jedoch a etwa speziell eine Zahl aus dem für uns im folgenden wichtigen *Linearsystem* $\mathfrak{C}$ $(c_0, \ldots, c_m)$, so gilt

$$n(a) = a \bar{a} = \bar{a} a = a_0^2 + \cdots + a_m^2 \ ,$$

und weiter ist

$$| a | = (n(a))^{\frac{1}{2}} \qquad a \in \mathfrak{C} \ .$$

Diese Beziehung zwischen a und $n(a)$ läßt sich verallgemeinern auf Zahlen a nicht in $\mathfrak{C}$. Es gilt nämlich der

1. Hilfssatz. *Ist* $n(a)$ *reell, so gilt*

$$n(a) = a \bar{a} = \bar{a} a \ ,$$

und es ist

$$| a | = (n(a))^{\frac{1}{2}} \ .$$

[5]) Es werden später vorübergehend rein imaginäre Komponenten auftreten, man sieht jedoch sofort, daß in diesem Fall die ganzen Entwicklungen ihre Gültigkeit bewahren; es lohnt sich deshalb nicht, die kompliziertere Schreibweise für komplexe Koeffizienten in Kauf zu nehmen.

Beweis. Es ist

$$n(a) = a\,\overline{a} = \sum_{h=0}^{(1\ldots m)} a_h^2\, c_h\,\overline{c}_h + \tfrac{1}{2} \sum_{h \neq k} a_h\, a_k (c_h\,\overline{c}_k + c_k\,\overline{c}_h) \;,$$

damit $n(a)$ reell ist, ist es notwendig und hinreichend, daß

$$c_h\,\overline{c}_k + c_k\,\overline{c}_h = 0 \qquad (h \neq k, \text{ wenn } c_h \text{ und } c_k \text{ in } a \text{ auftreten}).$$

Weiter ist

$$c_h\,\overline{c}_h = 1 \qquad (h = 0, \ldots, m, \ldots, 1\ldots m) \;.$$

Ist jetzt also $n(a)$ reell, so gilt

$$n(a) = \sum_{h=0}^{(1\ldots m)} a_h^2 = |\, a\,|^2 \;.$$

Beachtet man die leicht zu verifizierende Beziehung zwischen zwei Zahlen a und b und ihren Konjugierten $\overline{a}$ und $\overline{b}$:

$$\overline{a\,b} = \overline{b}\,\overline{a} \;,$$

so ist dieser Hilfssatz speziell gültig für ein Produkt von Zahlen $a_1, \ldots, a_n$, die alle dem Linearsystem $\mathfrak{C}$ angehören. Es ist

$$|\, a_1 \ldots a_n \,|^2 = n(a_1 \ldots a_n) = n(a_1) \ldots n(a_n) = |\, a_1 \,|^2 \ldots |\, a_n \,|^2 \;. \qquad (10)$$

3. Wir kehren jetzt zur Betrachtung des Systems (1) von **1** zurück. Aus dem Vorangegangenen erkennt man leicht die Gültigkeit des Satzes:

1. Hauptsatz. *Ein System von partiellen Differentialgleichungen* (1)

$$\left(\sum_{h=0}^{m-1} A_h \frac{\partial}{\partial x_h} + B \right) u = 0$$

ist dann und nur dann ein System mit linearem Multiplikator

$$M = \sum_{h=0}^{m-1} A_h^* \frac{\partial}{\partial x_h} + B^* \;,$$

wenn die Matrizen A_h, aufgefaßt als abstrakte hyperkomplexe Zahlen, eine Cliffordsche Algebra $\mathfrak{A}$ erzeugen. Die Matrizen A_h^* sind dann die, im Sinne der Cliffordschen Algebra, konjugierten Größen zu den Matrizen A_h

$$A_h^* = \overline{A}_h .$$

Das System (1) *ist speziell elliptisch, wenn die Norm einer Zahl aus $\mathfrak{A}$ — sofern diese Norm reell ist — positiv definit ist.*

Es sei jetzt immer vorausgesetzt, daß das System (1) auf die elliptische Normalform (6)

$$\left(\sum_{h=0}^{m-1} C_h \frac{\partial}{\partial x_h} + \omega C_m\right) w = 0$$

transformiert sei. Es gilt also

$$C_0 = E \ , \qquad C_h C_k + C_k C_h = 0 \qquad (h \neq k, h, k = 1, \ldots, m) \ ,$$
$$C_h^2 = - C_0 \qquad (h = 1, \ldots, m) \ .$$

Der Multiplikator ist

$$M = \sum_{h=0}^{m-1} \overline{C}_h \frac{\partial}{\partial x_h} + \omega \overline{C}_m \ ,$$

wo

$$\overline{C}_0 = C_0 = E \quad \text{und} \quad \overline{C}_h = - C_h \quad (h = 1, \ldots, m) \ .$$

Weiter wollen wir vorläufig voraussetzen, daß ω *reell* sei. Es bedeute

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \qquad E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dann läßt sich w schreiben als

$$w = \sum_{k=1}^{n} w_k E_k \ .$$

Die Matrizen C_h $(h = 0, \ldots, m)$ und E_k $(k = 1, \ldots, n)$ fassen wir im folgenden als abstrakt definierte, hyperkomplexe Zahlen auf, und schreiben statt C_h c_h und statt E_k e_k. Die Zahlen $1 = c_0, c_1, \ldots, c_m$ erzeugen eine Cliffordsche Algebra $\mathfrak{A}$ der Ordnung 2^m, wie wir sie in 2 betrachtet haben. Die Zahlen $e_1, \ldots, e_n$ bilden ein Linearsystem $\mathfrak{E}$ $(e_1, \ldots, e_n)$, welches unter der *Linksmultiplikation* mit den Größen aus $\mathfrak{A}$ invariant ist; denn die Produkte $c_h e_k$ sind durch die entsprechenden Matrizenprodukte $C_h E_k$ erklärt. Diese Multiplikation ist also auch assoziativ, d. h. es gilt

$$c_i (c_h e_k) = (c_i c_h) e_k \ .$$

Die m reellen Variabeln $x_0, \ldots, x_{m-1}$ fassen wir zu der einen, *hyperkomplexen Variabeln*

$$z = c_0 x_0 + \cdots + c_{m-1} x_{m-1}$$

zusammen und schreiben statt $w(x_0, \ldots, x_{m-1})$ $w(z)$. Da

$$w(z) = \sum_{k=1}^{n} e_k w_k$$

eine Größe aus $\mathfrak{C}$ bedeutet, nennen wir $w(z)$ eine *e-Funktion* der hyperkomplexen Variabeln z.

Zur Abkürzung führen wir die folgende Operatorschreibweise ein

$$D = \sum_{h=0}^{m-1} c_h \frac{\partial}{\partial x_h} + \omega c_m ; \tag{11}$$

der Multiplikator ist jetzt einfach der zu D *konjugierte* Operator

$$\bar{D} = \sum_{h=0}^{m-1} \bar{c}_h \frac{\partial}{\partial x_h} + \omega \bar{c}_m , \tag{12}$$

und es wird

$$\varDelta + \omega^2 = n(D) = D\bar{D} = \bar{D}D . \tag{13}$$

Definition. *Eine e-Funktion*

$$w(z) = \sum_{k=1}^{n} e_k w_k$$

heißt linksanalytisch, wenn sie der Differentialgleichung

$$Dw = 0$$

genügt.

Je nachdem $\omega = 0$ oder $\omega \neq 0$ gilt, nennen wir $w(z)$ (wenn die Unterscheidung wesentlich ist) auch homogen oder inhomogen linksanalytisch.

Die linksanalytischen e-Funktionen sind somit identisch mit den Lösungsfunktionen des Systems (6). Die Komponenten w_h von w sind Lösungen der skalaren Differentialgleichung

$$(\varDelta + \omega^2)\, w_k = 0 .$$

4. Wir fassen die $m+1$ reellen Funktionen $V_0, \ldots, V_m$ der m reellen Variabeln $x_0 \ldots x_{m-1}$ zu der *c-Funktion*

$$V(z) = \sum_{h=0}^{m} c_h V_h$$

zusammen und definieren den zu

$$D = \sum_{h=0}^{m-1} c_h \frac{\partial}{\partial x_h} + \omega c_m$$

adjungierten Operator [6])

---

[6]) vgl. *Kriszten*, Funktionentheorie und Randwertproblem der Diracschen Differentialgleichungen, Comm. Math. Helv., vol. 20, S. 333.

$$E = \sum_{h=0}^{m-1} c_h \frac{\partial}{\partial x_h} - \omega c_m \ ,$$

ebenso

$$\overline{E} = \sum_{h=0}^{m-1} \overline{c}_h \frac{\partial}{\partial x_h} - \omega \overline{c}_m \ .$$

Es ist

$$n(E) = \Delta + \omega^2 = n(D) \ .$$

Während der Operator $n(D)$ selbstadjungiert ist, braucht dies für D selbst nicht der Fall zu sein. Ist ω speziell gleich Null, so ist auch D selbstadjungiert.

Definition. *Die c-Funktion $V(z)$ heißt adjungiert-linksanalytisch in einem Punkte z, wenn*

$$E\,V = \left(\sum_{h=0}^{m-1} c_h \frac{\partial}{\partial x_h} - \omega c_m\right) V = 0 \ ,$$

entsprechend adjungiert-rechtsanalytisch, falls

$$[V\,E] = \sum_{h=0}^{m-1} \frac{\partial V}{\partial x_h} c_h - V \omega c_m = 0 \ .$$

Die eckige Klammer gibt an, daß der Operator E auf die Funktion in dieser Klammer angewendet werden soll.

2. Hilfssatz. *Die adjungiert-linksanalytischen c-Funktionen $V(z)$ sind auch adjungiert-rechtsanalytisch und umgekehrt. Jede in einem einfach zusammenhängenden Gebiet des Raumes der $x_0, \ldots, x_{m-1}$ adjungiert analytische c-Funktion besitzt ein skalares Potential $\Phi(z)$, d. h. es existiert eine reelle Funktion Φ derart, daß*

$$V(z) = \overline{E}\,\Phi(z) \quad \textit{und} \quad (\Delta + \omega^2)\,\Phi = 0 \ . \tag{14}$$

Beweis. Indem man die Gleichungen

$$EV = 0 \quad \text{und} \quad [VE] = 0$$

in Komponenten schreibt, erkennt man die Äquivalenz; weiter ist das erhaltene System genau die Integrationsbedingung für die Existenz einer Funktion Φ mit den Eigenschaften

$$\overline{E}\,\Phi = V$$

und

$$(\Delta + \omega^2)\,\Phi = 0 \ .$$

Wir betrachten gleichzeitig eine c-Funktion $V(z)$ und eine e-Funktion $w(z)$. Sind beide Funktionen in einem m-dimensionalen Gebiet G und auf dessen Randhyperfläche Σ stetig und stetig differenzierbar, so ist nach dem Gaußschen Satz

$$\int_G \frac{\partial (V c_h w)^{(h)}}{\partial x_h} dr = \int_G (V c_h w)^{(h)} dr = -\int_\Sigma V c_h \pi_h w \, d\sigma \ .$$

Es ist π_h die x_h-Komponente des innern Einheitsnormalenvektors von Σ, $d\sigma$ das Hyperflächenelement von Σ und dr das m-dimensionale Volumenelement von G. Wir setzen

$$dZ = \sum_{h=0}^{m-1} c_h \pi_h \, d\sigma \ ,$$

und erhalten

$$\int_G \sum_{h=0}^{m-1} (V c_h w)^{(h)} dr = -\int_\Sigma V \, dZ \, w \ .$$

Es ist

$$\begin{aligned}\sum_{h=0}^{m-1} (V c_h w)^{(h)} &= \Big(\sum_{h=0}^{m-1} V^{(h)} c_h\Big) w + V \Big(\sum_{h=0}^{m-1} c_h w^{(h)}\Big) \\ &= \Big(\sum_{h=0}^{m-1} V^{(h)} c_h - V \omega c_m\Big) w + V \Big(\sum_{h=0}^{m-1} c_h w^{(h)} + \omega c_m w\Big) \\ &= [VE] w + V [Dw] \ .\end{aligned}$$

Eingesetzt ergibt sich

$$\int_G \{[VE] w + V [Dw]\} dr = -\int_\Sigma V \, dZ \, w \ .$$

Satz. *Die c-Funktion V sei in einem Gebiet G und auf seinem Rand Σ adjungiert-analytisch; entsprechend sei die e-Funktion dort linksanalytisch. Dann gilt*

$$\int_\Sigma V \, dZ \, w = 0 \ . \qquad (\textit{1. Integralsatz}) \qquad (15)$$

Beweis. Es ist $Dw = 0$ und $[VE] = 0$, nach der obigen Formel ist der Satz bewiesen.

Um den *zweiten Integralsatz* zu erhalten, müssen wir in (15) für V eine geeignete Funktion von zwei hyperkomplexen Variabeln

$$z = \sum_{h=0}^{m-1} c_h x_h$$

und

$$\zeta = \sum_{h=0}^{m-1} c_h \xi_h$$

$V(z, \zeta)$ einsetzen. Nach dem **2. Hilfssatz** läßt sich jede adjungiert-analytische Funktion V erzeugen als

$$V = \overline{E}\,\Phi \ .$$

Wir wählen als $\Phi(z, \zeta)$ eine Funktion, die nur von

$$\varrho = | z - \zeta |$$

abhängt. Die Funktion $\Phi(\varrho)$ genügt dann der Besselschen Differentialgleichung

$$\Phi'' + \Phi' \frac{m-1}{\varrho} + \Phi\,\omega^2 = 0 \ . \tag{16}$$

Für $\Phi(\varrho)$ machen wir den Ansatz

$$\Phi(\varrho) = \frac{f(\varrho)}{\varrho^{m-2}} + g(\varrho) \log \varrho \ ^{7)} \ ,$$

wo f und g analytische Funktionen der reellen Variabeln ϱ bedeuten sollen. Eingesetzt in die Differentialgleichung (16) ergibt sich

$$\frac{\varrho f'' + (3-m) f' + \omega^2 \varrho f + 2 \varrho^{m-2} g' + (m-2) \varrho^{m-3} g}{\varrho^{m-1}} + \log \varrho \left(g'' + (m-1) \frac{g'}{\varrho} + \omega^2 g \right) = 0 \ . \tag{17}$$

Wir wollen

$$g(\varrho) = \sum_{h=0}^{\infty} g_h \varrho^h$$

so bestimmen, daß in (17) der Koeffizient von $\log \varrho$ verschwindet, das ergibt für die g_h die Rekursionsformel

$$g_h = \frac{-\omega^2}{h(h+m-2)} g_{h-2} \ . \tag{18}$$

Die beiden Koeffizienten g_0 und g_1 sind also noch frei zu wählen. Wir setzen

$$f(\varrho) = \sum_{h=0}^{\infty} f_h \varrho^h$$

und gehen mit den beiden Funktionen g und f in (16) ein, es muß also gelten

$$\varrho f'' + f'(3-m) + \omega^2 \varrho f + 2 \varrho^{m-2} g' + (m-2) \varrho^{m-3} g = 0 \ ,$$

[7]) Die Funktion $\Phi(z, \zeta) = \Phi(\varrho)$ ist die Elementarlösung; ihre Existenz und ihre wesentlichen Eigenschaften sind aus den Arbeiten von *Hadamard* (Leçons sur le Problème de Cauchy, Paris, Hermann 1932) bekannt. Wir ziehen es jedoch vor, die Funktion $\Phi(\varrho)$ hier direkt zu konstruieren, um den exakten Freiheitsgrad, der für Φ noch besteht, zu bestimmen.

das gibt für die Koeffizienten g_h und f_k die Bedingungen

$$f_k k(k-m+2) + \omega^2 f_{k-2} + g_{k+2-m}(2k+2-m) = 0 \quad (k = 2,\ldots) \tag{19}$$

Wir haben verschiedene Fälle zu unterscheiden:

1. Es sei m *ungerade*, dann ergibt (19)

$$f_k = \frac{-1}{k(k-m+2)}\left(\omega^2 f_{k-2} + g_{k+2-m}(2k+2-m)\right) \tag{20}$$

Wir wählen $f_0 \neq 0$ und $f_1 = 0$, ebenso können wir $g(\varrho) \equiv 0$ setzen, dann verschwinden alle Koeffizienten f_h mit ungeradem h und die Koeffizienten der geraden Potenzen von ϱ sind durch die Rekursionsformel (20) eindeutig bestimmt. Es ist weiter leicht zu zeigen, daß $f(\varrho)$ eine ganze Funktion von ϱ ist. Für ungerades m erhalten wir somit

$$\Phi(z,\zeta) = \frac{f(\varrho)}{\varrho^{m-2}} ,$$

wo $f(\varrho)$ eine gerade Funktion von ϱ bedeutet, die bis auf einen konstanten Faktor bestimmt ist.

2. Es sei m *gerade*. In diesem Fall dürfen wir $g(\varrho)$ nicht identisch Null voraussetzen. Für $k < m-2$ ist

$$f_k = \frac{-1}{k(k-m+2)}\,\omega^2 f_{k-2} ,$$

alle diese f_k sind durch f_0 und f_1 bestimmt. Setzen wir in (19) $k = m-2$, so ist auch g_0 bestimmt als

$$g_0 = \frac{-1}{m-2}\,\omega^2 f_{m-4} ,$$

dadurch sind nach (18) auch alle g_h mit geradem h bestimmt. Aus der Gleichung (19) für $k = m-1$ erkennt man, daß g_1 frei gewählt werden darf. Ist endlich $k \geqq m$, so bestimmen wir die f_k eindeutig aus den g_h und aus f_{k-2}. Man erkennt wieder sehr leicht, daß die so definierten Funktionen $f(\varrho)$ und $g(\varrho)$ ganze Funktionen von ϱ sind. Für *gerades m* erhalten wir

$$\Phi(z,\zeta) = \frac{f(\varrho)}{\varrho^{m-2}} + g(\varrho)\log\varrho ,$$

dabei können die Koeffizienten f_0, f_1 und g_1 noch beliebig ($f_0 \neq 0$) gewählt werden, speziell könnte man also $f_1 = g_1 = 0$ wählen.

Setzen wir speziell $\omega = 0$, so erhalten wir

$$\Phi(z, \zeta) = \frac{f_0}{\varrho^{m-2}} .$$

Wir normieren jetzt Φ noch so, daß

$$\lim_{\varrho \to 0} \varrho^{m-1} \Phi'(\varrho) = 1 , \tag{21}$$

das ergibt für f_0 den Wert

$$f_0 = \frac{-1}{m-2} .$$

Wir bilden die Funktion

$$V(z, \zeta) = \overline{E}^{(\zeta)} \Phi(\varrho) \qquad (E^{(\zeta)}: \text{ Ableitungen nach den } \xi_h)$$

$$= \Phi'(\varrho) \frac{\overline{\zeta - z}}{|\zeta - z|} - \omega \overline{c}_m \Phi(\varrho) .$$

Man sieht sofort ein, daß $V(z, \zeta)$ den beiden Differentialgleichungen

$$E^{(\zeta)} V(z, \zeta) = 0$$

und

$$D^{(z)} V(z, \zeta) = 0$$

genügt, d. h. $V(z, \zeta)$ ist als Funktion von ζ *adjungiert-analytisch* und als Funktion von z *analytisch*. Es ist klar, was es bedeutet, daß eine c-Funktion analytisch ist.

Σ sei eine geschlossene, orientierbare Hyperfläche mit stetigem Normalenfeld, z ein Punkt im Innern von Σ und K_r eine Hyperkugel um z mit so kleinem Radius r, daß K_r ganz im Innern von Σ liegt. In bekannter Weise ergibt sich

$$\int_{K_r} V(z, \zeta)\, dZ\, w(\zeta) + \int_{\Sigma} V(z, \zeta)\, dZ\, w(\zeta) = 0 .$$

Weiter ist, wegen der Normierung (21),

$$\lim_{r \to 0} \int_{K_r} V(z, \zeta)\, dZ\, w(\zeta) = K_m w(z) ,$$

wo K_m die Oberfläche der Einheitshyperkugel des m-dimensionalen Raumes bedeutet. Es folgt der

Satz. *Die e-Funktion $w(z)$ sei im Innern einer geschlossenen, orientierbaren und genügend regulären Hyperfläche Σ und auf derselben linksanalytisch. Dann gilt für jeden Punkt z im Innern von Σ*

$$w(z) = \frac{1}{K_m} \int\limits_{\Sigma} V(z, \zeta)\, dZ\, w(\zeta) \qquad (\textit{2. Integralsatz}) \ . \tag{22}$$

Es ist

$$V(z, \zeta) = \overline{E}^{(\zeta)}\, \Phi(\varrho) \qquad \varrho = |\zeta - z|$$

und $\Phi(\varrho)$ *ist die konstruierte Elementarlösung der Gleichung*

$$(\Delta + \omega^2)\, \Phi = 0 \ .$$

Gilt speziell $\omega = 0$, *d. h. ist* $w(z)$ *homogen-analytisch, so ist*

$$w(z) = \frac{1}{K_m} \int\limits_{\Sigma} \frac{\overline{\zeta - z}}{n\,(\zeta - z)^m}\, dZ\, w(\zeta) \ .$$

Auch im 2. Integralsatz tritt die Größe ω nur in der Form ω^2 oder in der Verbindung $\omega\, c_m$ auf.

5. Um die Reihenentwicklung der linksregulären e-Funktionen zu finden, müssen wir den Kern $V(z, \zeta)$ in der Darstellungsformel (22) des zweiten Integralsatzes in eine Reihe entwickeln. Als Funktion von z genügt $V(z, \zeta)$ der Differentialgleichung

$$D^{(z)} V(z, \zeta) = 0 \ ,$$

ist also eine analytische c-Funktion. Wir wollen das allgemeinere Problem lösen, eine beliebige analytische c-Funktion in eine Reihe zu entwickeln.

Für die analytischen c-Funktionen beweist man ohne weiteres die beiden Integralsätze

Satz. *Die c-Funktion* $V(z)$ *sei in einem Gebiet* G *und auf seinem Rand* Σ *adjungiert-analytisch; entsprechend sei die c-Funktion* $W(z)$ *dort analytisch. Dann gilt*

$$\int\limits_{\Sigma} V\, dZ\, W = 0 \qquad (\textit{1. Integralsatz})$$

und

Satz. *Die c-Funktion* $W(z)$ *sei im Innern einer geschlossenen, orientierbaren und genügend regulären Hyperfläche* Σ *und auf derselben analytisch. Dann gilt für jeden Punkt* z *im Innern von* Σ

$$W(z) = \frac{1}{K_m} \int\limits_{\Sigma} V(z, \zeta)\, dZ\, W(\zeta) \qquad (\textit{2. Integralsatz}) \ . \tag{23}$$

Es ist

$$V(z, \zeta) = \overline{E}^{(\zeta)}\, \Phi(\varrho) \ , \qquad \varrho = |\zeta - z|$$

und $\Phi(\varrho)$ *ist die konstruierte Elementarlösung der Gleichung*

$$(\Delta + \omega^2)\, \Phi = 0 \ .$$

Wir betrachten zuerst die *homogene* Gleichung für eine *gerade* Dimensionszahl m; die allgemeine Reihenentwicklung werden wir durch eine Art Absteigemethode auf diesen Fall zurückführen. Es sei also

$$E = D = \sum_{h=0}^{m-1} c_h \frac{\partial}{\partial x_h}\,; \qquad m \text{ gerade.}$$

Nach dem Vorbild der regulären Quaternionenfunktionen bringen wir die Funktion

$$V(z,\zeta) = \sum_{h=0}^{m-1} c_h \frac{\partial}{\partial x_h} \frac{-1}{(m-2)\left(n(\zeta - z)\right)^{\frac{m-2}{2}}} = \frac{\overline{\zeta - z}}{n(\zeta - z)^{\frac{m}{2}}}$$

in Verbindung mit der Funktion

$$(\zeta - z)^{-1} = \frac{\overline{\zeta - z}}{n(\zeta - z)}\ .$$

Es ist

$$\Delta \frac{\overline{\zeta - z}}{n(\zeta - z)^k} = -2k(m - 2k)\frac{\overline{\zeta - z}}{n(\zeta - z)^{k+1}}$$

$$(\Delta : \text{ Ableitungen nach } x_h \text{ oder } \xi_h)\ ,$$

daraus folgt

$$V(z,\zeta) = \Delta^{\frac{m-2}{2}}(\zeta - z)^{-1}\cdot C\ ,$$

und es bedeutet

$$C = (-1)^{\frac{m-2}{2}} \frac{1}{2^{m-2}\left(\frac{m-2}{2}\,!\right)^2}\ .$$

Ist $|z| < |\zeta|$, so besteht für $(\zeta - z)^{-1}$ die Reihenentwicklung (geometrische Reihe)

$$(\zeta - z)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta^{-1}(z\,\zeta^{-1})^k\ . \tag{24}$$

Die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig in jeder Hyperkugel $|z| < r < |\zeta|$, denn für die einzelnen Summanden gilt nach dem **1. Hilfssatz**

$$|\zeta^{-1}(z\,\zeta^{-1})^k| = \frac{|z|^k}{|\zeta|^{k+1}}\ .$$

Man zeigt leicht, daß die Reihe beliebig oft gliedweise partiell nach den x_h oder ξ_h differenziert werden darf, ohne die gleichmäßige und absolute Konvergenz zu stören. Speziell konvergiert also die Reihe

$$V(z,\zeta) = C\cdot\sum_{k=0}^{\infty} \zeta^{-1}\Delta_z^{\frac{m-2}{2}}(z\,\zeta^{-1})^k \qquad (|z| < r < |\zeta|)\ .$$

Δ_z bedeutet, die Ableitungen sind nach den x_h zu bilden.

Satz. *Die Funktionen*

$$\zeta^{-1} \Delta_z^{\frac{m-2}{2}} (z\,\zeta^{-1})^k \qquad (k = 0\,,\,1\,,\ldots)$$

liegen alle im Linearsystem $\mathfrak{C}$ *und sind in den beiden Variabeln* z *und* ζ *analytisch.*

Beweis. Wir führen die reelle Hilfsvariable t $(0<t<1)$ ein und betrachten die Funktion

$$(\zeta - t\,z)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k\, \zeta^{-1} (z\,\zeta^{-1})^k \;,$$

diese Reihe konvergiert jedenfalls im betrachteten Gebiet $|\,z\,| < |\,\zeta\,|$. Die Funktion $(\zeta - t\,z)^{-1}$ liegt in $\mathfrak{C}$, also auch ihre Ableitungen beliebiger Ordnung nach der reellen Variabeln t. Es ist

$$\frac{d^k}{dt^k} (\zeta - t\,z)^{-1}\,|_{t=0} = k!\,\zeta^{-1} (z\,\zeta^{-1})^k$$

eine Funktion in $\mathfrak{C}$ und damit auch

$$\zeta^{-1} \Delta_z^{\frac{m-2}{2}} (z\,\zeta^{-1})^k \;.$$

Weiter ist

$$\left[D\,\Delta^{\frac{m-2}{2}} (\zeta - t\,z)^{-1}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \left[D\,\zeta^{-1}\,\Delta_z^{\frac{m-2}{2}} (z\,\zeta^{-1})^k\right] = 0 \;.$$

Die Ableitungen in D können nach den x_h oder ξ_h genommen werden. In Komponenten geschrieben, erhalten wir lauter konvergente, identisch verschwindende Potenzreihen nach t; somit muß jeder einzelne Koeffizient verschwinden und die Funktionen

$$\zeta^{-1} \Delta_z^{\frac{m-2}{2}} (z\,\zeta^{-1})^k \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

sind analytische c-Funktionen von z und ζ.

Die Summanden der Reihenentwicklung von $V(z,\,\zeta)$ sind *Formen* in den x_h; wir untersuchen deshalb allgemein analytische Formen. Eine c-Funktion $F(z) = \sum_{h=0}^{m-1} c_h V_h$ heißt eine Form n-ter Dimension, wenn ihre Komponenten $V_0, \ldots, V_{m-1}$ Formen n-ter Dimension in den x_h sind. Bedeutet t ein reeller Parameter, so gilt

$$F(t\,z) = t^n F(z) \;.$$

Nach dem Eulerschen Satz erhalten wir

$$n\,F(z) = \sum_{h=0}^{m-1} F^{(h)}(z)\,x_h\ ,$$

und durch Subtraktion der mit x_0 multiplizierten Regularitätsbedingung

$$n\,F(z) = \sum_{h=1}^{m-1} F^{(h)}(z)\,(x_h - c_h\,x_0)\ .$$

Die Ableitungen einer Form sind wieder Formen; wir können dieses Verfahren n mal anwenden und erhalten

$$n!\,F(z) = \sum F^{(h_1\ldots h_n)}(z)\,(x_{h_1} - c_{h_1}\,x_0)\ldots(x_{h_n} - c_{h_n}\,x_0)\ .$$

Die auftretenden Koeffizienten $F^{(h_1\ldots h_n)}$ sind Konstante. Nehmen wir an, unter den $h_1\ldots h_n$ trete ν n_ν-mal auf, so tritt der entsprechende Koeffizient $F^{(1\ldots 1,\,2\ldots 2,\ldots,\,m-1,\ldots,\,m-1)}$ so oft auf, als wir die Zahlen $1,\ldots,1,\ldots m-1,\ldots,m-1$ permutieren können. Diese Zahl sei π. Wir fassen alle Glieder mit demselben Koeffizienten zusammen und setzen

$$p_{n_1\ldots n_{m-1}}(z) = \frac{1}{n!}\sum_{\pi}(x_{h_1} - c_{h_1}\,x_0)\ldots(x_{h_n} - c_{h_n}\,x_0)\ .$$

Nach dieser Schreibweise ist

$$F(z) = \sum F^{(1,\ldots,1,\ldots,m-1,\ldots,m-1)}\,p_{n_1\ldots n_{m-1}}(z)\ ,$$

ebenso zeigt man, daß

$$F(z) = \sum p_{n_1\ldots n_{m-1}}(z)\,F^{(1,\ldots,1,\ldots,m-1,\ldots,m-1)}\ .$$

Da im ganzen n-mal differenziert wurde, muß für die n_ν die Beziehung gelten

$$n_1 + \cdots + n_{m-1} = n\ .$$

Wie im Falle der Quaternionen sei

$$p_{0\ldots 0}(z) = 1, \quad \text{und falls mindestens ein } n_\nu < 0:\ \ p_{n_1\ldots n_{m-1}}(z) = 0\ .$$

Wir stellen einige für später wichtige Sätze über die p-Funktionen zusammen; die Beweise sind ganz analog zu denjenigen für die regulären Quaternionenfunktionen.

Eine *Rekursionsformel*: Es ist

$$\begin{aligned} n\,p_{n_1\ldots n_{m-1}}(z) &= (x_1 - c_1\,x_0)\,p_{n_1-1,\,n_2\ldots n_{m-1}}(z) + \cdots + (x_{m-1} - c_{m-1}\,x_0)\,p_{n_1\ldots n_{m-2},\,n_{m-1}-1}(z) \\ &= p_{n_1-1,\ldots,n_{m-1}}(z)\,(x_1 - c_1\,x_0) + \cdots + p_{n_1\ldots n_{m-1}-1}(x_{m-1} - c_{m-1}\,x_0)\ . \end{aligned}$$

Satz. *Die Formen p liegen in $\mathfrak{C}$.*

Beweis. Durch Induktion. Nach der Rekursionsformel ist

$$n\, p_{n_1 \dots n_{m-1}}(z) = \tfrac{1}{2} \times \vartheta$$

(Summe der beiden rechten Seiten der Rekursionsformel).

Die einzelnen Glieder dieser Summe sind von der Form $ab + ba$, wobei sowohl a als auch b (nach der Induktionsvoraussetzung) in $\mathfrak{C}$ liegen. Dann liegt aber auch $ab + ba$ in $\mathfrak{C}$, womit der Satz bewiesen ist.

Ebenfalls aus der Rekursionsformel folgen die Differentiationsregeln

$$\frac{\partial}{\partial x_1} p_{n_1 \dots n_{m-1}}(z) = p^{(1)}_{n_1 \dots n_{m-1}}(z) = p_{n_1 - 1, n_2 \dots n_{m-1}}(z) \quad \text{usw.} \tag{25}$$

Satz. *Die Polynome $p_{n_1 \dots n_{m-1}}(z)$ sind im ganzen m-dimensionalen Raum analytische Funktionen.*

Beweis. Unter Anwendung von (25) schreibt sich die Rekursionsformel wie folgt

$$n\, p_{n_1 \dots n_{m-1}}(z) = \sum_{h=1}^{m-1} p^{(h)}_{n_1 \dots n_{m-1}}(z)\,(x_h - c_h x_0)$$

anderseits ergibt die Eulersche Formel

$$n\, p_{n_1 \dots n_{m-1}}(z) = p^{(0)}_{n_1 \dots n_{m-1}}(z)\, x_0 + \sum_{h=1}^{m-1} p^{(h)}_{n_1 \dots n_{m-1}}\, x_h \,.$$

Subtrahiert man die zweite Gleichung von der ersten, so findet man die gesuchte Gleichung.

Abschätzung: Für die p-Funktionen gilt die Abschätzung

$$| p_{n_1 \dots n_{m-1}}(z) | \leqslant \frac{1}{n!} \sum | x_1 - c_1 x_0 |^{n_1} \dots | x_{m-1} - c_{m-1} x_0 |^{n_{m-1}}$$

$$\leqslant \frac{1}{n_1! \dots n_{m-1}!} | z |^n \,. \tag{26}$$

Genau wie für Quaternionenfunktionen beweist man den *Binomischen Satz*:

$$p_{n_1 \dots n_{m-1}}(z + \zeta) = \sum_{\nu_1 = 0}^{n_1} \dots \sum_{\nu_{m-1}=0}^{n_{m-1}} p_{\nu_1 \dots \nu_{m-1}}(\zeta)\, p_{n_1 - \nu_1 \dots n_{m-1} - \nu_{m-1}}(z) \,.$$

Wir wenden die erhaltenen Resultate auf die Reihenentwicklung der Funktion $V(z, \zeta)$ an. Die einzelnen Summanden

$$C\, \zeta^{-1} \Delta_z^{\frac{m-2}{2}} (z\, \zeta^{-1})^n$$

sind als Funktionen von z *analytische Formen* n-ter Dimension. Somit ist

$$C\,\zeta^{-1}\,\Delta_z^{\frac{m-2}{2}}\,(z\,\zeta^{-1})^n = \sum_{n_1+\cdots+n_{m-1}=n} p_{n_1\ldots n_{m-1}}(z)\,q_{n_1\ldots n_{m-1}}(\zeta)$$

und

$$V(z,\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty}\ \sum_{n_1+\cdots+n_{m-1}=n} p_{n_1\ldots n_{m-1}}(z)\,q_{n_1\ldots n_{m-1}}(\zeta)\ . \tag{27}$$

Da diese Reihe für $|z| < r < |\zeta|$ absolut und gleichmäßig konvergiert (bezüglich der Summation nach n), können wir gliedweise nach den x_k differenzieren und erhalten speziell

$$\frac{\partial^{n_1+\cdots+n_{m-1}}}{\partial x_1^{n_1}\ldots\partial x_{m-1}^{n_{m-1}}}\,V(z,\zeta)\,|_{z=0} = q_{n_1\ldots n_{m-1}}(\zeta)$$

$$= (-1)^n\,\frac{\partial^{n_1+\cdots+n_{m-1}}}{\partial\xi_1^{n_1}\ldots\partial\xi_{m-1}^{n_{m-1}}}\,\frac{\overline{\zeta}}{n(\zeta)^{\frac{m}{2}}}\ . \tag{28}$$

Es ist weiter klar, daß die $p_{n_1\ldots n_{m-1}}(z)$ und $q_{n_1\ldots n_{m-1}}(\zeta)$ in (27) in ihrer Gesamtheit vertauscht werden dürfen.

Satz. *Die Funktionen* $q_{n_1\ldots n_{m-1}}(\zeta)$ *sind im ganzen* R^m *mit Ausnahme des Punktes* $\zeta = 0$ *analytisch und liegen im Linearsystem* $\mathfrak{C}$.

Beweis. Die Funktion

$$\frac{\overline{\zeta}}{n(\zeta)^{\frac{m}{2}}}$$

liegt in $\mathfrak{C}$ und ist analytisch, also nach (28), auch die Funktionen $q_{n_1\ldots n_{m-1}}(\zeta)$. Aus Gleichung (28) sind auch die folgenden Differentiationsregeln klar

$$\frac{\partial}{\partial\xi_h}\,q_{n_1\ldots n_{m-1}}(\zeta) = -\,q_{n_1,\ldots,n_{h-1},\,n_h-1;\,n_{h+1}\ldots;\,n_{m-1}}(\zeta)\ .$$

Weiter gilt für die q-Funktionen die folgende grobe Abschätzung

$$|q_{n_1\ldots n_{m-1}}(\zeta)| \leqslant (n+m)\,!\,|\zeta|^{-\left(n+\frac{m}{2}\right)}\ . \tag{29}$$

Für eine reguläre c-Funktion $f(z)$ gilt der zweite Integralsatz

$$f(z) = \frac{1}{K_m}\int V(z,\zeta)\,dZ\,f(\zeta)\ ,$$

durch Einsetzen der Reihe (27) ergibt sich

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\ \sum_{n_1+\cdots+n_{m-1}=n} p_{n_1\ldots n_{m-1}}(z)\,d_{n_1\ldots n_{m-1}}\ ,$$

und es bedeutet

$$d_{n_1\ldots n_{m-1}} = \frac{1}{K_m}\int q_{n_1\ldots n_{m-1}}(\zeta)\, dZ\, f(\zeta) = \frac{\partial^{n_1+\cdots+n_{m-1}}}{\partial x_1^{n_1}\ldots\partial x_{m-1}^{n_{m-1}}}\,\frac{1}{K_m}\int V(z,\zeta)\, dZ\, f(\zeta)\Big|_{z=0}$$

$$= f^{(n_1\ldots n_{m-1})}(0)\ . \qquad (30)$$

2. Hauptsatz. *Ist eine c-Funktion* $w = f(z)$ *in einem Punkte* $z = a$ *analytisch, so läßt sie sich eindeutig in eine Reihe nach den Funktionen* $p(z-a)$ *entwickeln.*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\ \sum_{n_1+\cdots+n_{m-1}=n} p_{n_1\ldots n_{m-1}}(z-a)\, d_{n_1\ldots n_{m-1}}\ .$$

Diese Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig im Innern jeder Hyperkugel

$$|z-a| < r < \varrho\ ,$$

dabei bedeutet ϱ *den Abstand des Punktes* z *vom nächsten singulären Punkt von* $f(z)$. *Umgekehrt stellt jede derartige, absolut und gleichmäßig konvergente Reihe eine linksanalytische c-Funktion dar. Diese Funktion liegt speziell in* $\mathfrak{C}$, *wenn die Summen*

$$\sum_{n_1+\cdots+n_{m-1}=n} p_{n_1\ldots n_{m-1}}(z)\, d_{n_1\ldots n_{m-1}} \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

alle in $\mathfrak{C}$ *liegen; in diesem Fall können die Funktionen* $p_{n_1\ldots n_{m-1}}(z)$ *und die Koeffizienten* $d_{n_1\ldots n_{m-1}}$ *in ihrer Gesamtheit vertauscht werden.*

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt aus den Formeln (30), sind die Koeffizienten $d_{n_1\ldots n_{m-1}}$ so vorgegeben, daß die Reihe in einer Hyperkugel absolut und gleichmäßig konvergiert, so ist dieselbe linksanalytisch, da dies für jeden Summanden der Fall ist. Liegt die Funktion $f(z)$ in $\mathfrak{C}$, so liegt auch $f(tz)$ in $\mathfrak{C}$, wo $|t| \leqq 1$ ein reeller Parameter ist. Es ist

$$\frac{d^n}{dt^n} f(tz)\Big|_{z=0} = n! \sum_{n_1+\cdots+n_{m-1}=n} p_{n_1\ldots n_{m-1}}(z)\, d_{n_1\ldots n_{m-1}}\ ,$$

also muß jede dieser Summen in $\mathfrak{C}$ liegen; damit ist gezeigt, daß diese Bedingung für die Koeffizienten notwendig und hinreichend ist dafür, daß $f(z)$ in $\mathfrak{C}$ liegt. Diese Bedingung ist jedoch *nicht* notwendig, damit $f(z)$ beidseitig analytisch ist, man kann leicht Beispiele konstruieren für beidseitig analytische Funktionen, die nicht in $\mathfrak{C}$ liegen.

Als Anwendung der besprochenen Reihenentwicklung betrachten wir die Elementarlösung $V(z, \zeta)$ für die *ungerade* Dimensionszahl $m-1$. Formal ist $V(z, \zeta)$ als Funktion von z Lösung der Differentialgleichung

$$\sum_{h=0}^{m-1} c_h \frac{\partial}{\partial x_h} V(z, \zeta) = 0\ .$$

Dabei denkt man sich die ursprünglich vorliegende Cliffordsche Algebra mit den Basiselementen $c_0, c_1, \ldots, c_{m-2}, c_1 c_2, \ldots$ um das Basiselement c_{m-1} erweitert; x_{m-1} ist eine reelle Hilfsvariable. Führen wir auch für ungerade Dimensionszahlen $m-1$ die Schreibweise

$$q_{n_1 \ldots n_{m-2}}(\zeta) = \frac{\partial^{n_1 + \cdots + n_{m-2}}}{\partial x_1^{n_1} \ldots \partial x_{m-2}^{n_{m-2}}} \left. \frac{\overline{\zeta - z}}{(n(\zeta - z))^{\frac{m-1}{2}}} \right|_{z=0}$$

ein, so ergibt sich für $|z| < |\zeta|$ die folgende Reihenentwicklung

$$V(z, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum p_{n_1 \ldots n_{m-2} 0}(z)\, q_{n_1 \ldots n_{m-2}}(\zeta)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum p_{n_1 \ldots n_{m-2}}(z)\, q_{n_1 \ldots n_{m-2}}(\zeta)$$

Man zeigt leicht, daß die Sätze und Formeln für die Reihenentwicklungen bei gerader Dimensionszahl m im Fall der ungeraden Dimensionszahl $m-1$ wörtlich übernommen werden können.

Für die p- resp. q-Funktionen gelten die Abschätzungen (26) und (29), die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1 + \cdots + n_{m-1} = n} |p_{n_1, \ldots, n_{m-1}}(z)\, q_{n_1, \ldots, n_{m-1}}(\zeta)|$$

konvergiert also im Innern der Hyperkugel

$$|z| < \frac{|\zeta|}{m-1}$$

und darf dort beliebig umgeordnet werden [8]).

Auch der allgemeine Fall der *nichthomogenen* Gleichungssysteme ordnet sich dem bisher Besprochenen unter: Wir betrachten die Elementarlösung $V(z, \zeta)$ der inhomogenen, m-dimensionalen Gleichung. Als Funktion von $z = x_0 + c_1 x_1 + \cdots + c_{m-1} x_{m-1}$ ist $V(z, \zeta)$ regulär, das heißt es gilt

$$\left(\sum_{h=0}^{m-1} c_h \frac{\partial}{\partial x_h} + c_m \omega \right) V(z, \zeta) = 0 \ .$$

Wir setzen

$$z^* = c_0 x_0 + \cdots + c_{m-1} x_{m-1} + c_m x_m \qquad (x_m: \text{ reelle Hilfsvariable})$$

und multiplizieren $V(z, \zeta)$ mit $e^{\omega x_m}$, dann ist das Produkt Lösung der $m+1$ dimensionalen, *homogenen* Gleichung

$$\sum_{h=0}^{m} c_h \frac{\partial}{\partial x_h} e^{\omega x_m} V(z, \zeta) = 0 \ .$$

[8]) Der analoge Beweis für Quaternionenfunktionen findet sich in der Vorlesung von *R. Fueter*: Theorie der reg. Funktionen einer Quaternionenvariablen (Wintersemester 1936/37).

Somit existiert für $|z^*|<|\zeta|$ die Reihenentwicklung

$$e^{\omega x_m} V(z, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1+\cdots+n_m=n} p_{n_1,\ldots,n_m}(z^*)\, \omega^{n_m} \psi_{n_1,\ldots,n_{m-1}}(\zeta) ,$$

und es bedeutet

$$\psi_{n_1,\ldots,n_{m-1}}(\zeta) = \left(\frac{\partial^n}{\partial x_1^{n_1} \ldots \partial x_{m-1}^{n_{m-1}}} V(z, \zeta)\right)_{z=0} .$$

Es sei im folgenden vorausgesetzt, daß

$$|z^*| < \frac{|\zeta|}{m-1}$$

ist, dann darf die Reihe umgeordnet werden zu

$$e^{\omega x_m} V(z, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1+\cdots+n_{m-1}=n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_{n_1,\ldots,n_{m-1},k}(z^*)\, \omega^k\right) \psi_{n_1,\ldots,n_{m-1}}(\zeta) .$$

Wir setzen $x_m = 0$ $(z^* = z)$ und definieren

$$\varphi_{n_1,\ldots,n_{m-1}}(z) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_{n_1,\ldots,n_{m-1},k}(z^*)\, \omega^k\right)_{z^*=z} .$$

Damit ergibt sich für $V(z, \zeta)$ die folgende Reihenentwicklung

$$V(z, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1+\cdots+n_{m-1}=n} \varphi_{n_1,\ldots,n_{m-1}}(z) \cdot \psi_{n_1,\ldots,n_{m-1}}(\zeta) \left(|z| < \frac{|\zeta|}{m-1}\right) .$$

Ich vermute, daß die Reihe sogar in der Hyperkugel $|z|<|\zeta|$ konvergiert, es ist mir jedoch noch nicht gelungen, dies zu beweisen.

3. Hauptsatz. *Die Funktionen $\varphi_{n_1\ldots n_{m-1}}(z)$ sind im ganzen endlichen R^m (inhomogen) analytische Funktionen von z:*

$$\left(\sum_{h=0}^{m-1} c_h \frac{\partial}{\partial x_h} + c_m \omega\right) \varphi_{n_1\ldots n_{m-1}}(z) = 0 .$$

Entsprechend sind die Funktionen $\psi_{n_1\ldots n_{m-1}}(\zeta)$ mit Ausnahme des Punktes $\zeta = 0$ im ganzen endlichen R^m adjungiert-analytisch:

$$\left(\sum_{h=0}^{m-1} c_h \frac{\partial}{\partial \xi_h} - c_m \omega\right) \psi_{n_1\ldots n_{m-1}}(\zeta) = 0 .$$

Die Funktionen φ und ψ liegen in $\mathfrak{C}$.

Beweis. Es ist

$$c_m \frac{\partial}{\partial x_m} \sum_{k=0}^{\infty} p_{n_1\ldots n_{m-1} k}(z^*)\, \omega^k = c_m \omega \sum_{k=0}^{\infty} p_{n_1\ldots n_{m-1} k}(z^*)\, \omega^k .$$

Da die Funktionen p homogen analytisch sind, gilt also

$$\sum_{h=0}^{m-1} c_h \frac{\partial}{\partial x_h} p_{n_1 \dots n_{m-1} k}(z^*)\,\omega^k + c_m\,\omega \sum_{k=0}^{\infty} p_{n_1 \dots n_{m-1} k}(z^*)\,\omega^k = 0 \ ,$$

setzen wir in dieser Gleichung $x_m = 0$, so finden wir

$$\left(\sum_{h=0}^{m-1} c_h \frac{\partial}{\partial x_h} + c_m\,\omega\right) \varphi_{n_1 \dots n_{m-1}}(z) = 0 \ .$$

Daß die Funktionen ψ adjungiert-analytisch sind, geht sofort aus der Tatsache hervor, daß sie die partiellen Ableitungen einer adjungiert-analytischen Funktion sind. Offensichtlich liegen auch alle betrachteten Funktionen im Linearsystem $\mathfrak{C}$ $(c_0, \dots, c_m)$.

Die c-Funktion $f(z)$ sei in und auf der Hyperkugel $K: |z| < R$ um den Nullpunkt inhomogen-analytisch

$$\left(\sum_{h=0}^{m-1} c_h \frac{\partial}{\partial x_h} + c_m\,\omega\right) f(z) = 0 \ .$$

Es gilt also der 2. Integralsatz

$$f(z) = \frac{1}{K_m} \int_{\dot{K}} V(z, \zeta)\, dZ\, f(\zeta) \ ,$$

und für $|z| < \dfrac{R}{m-1}$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1 + \dots + n_{m-1} = n} \varphi_{n_1, \dots, n_{m-1}}(z) \cdot d_{n_1, \dots, n_{m-1}} \ ,$$

wobei

$$d_{n_1, \dots, n_{m-1}} = \frac{1}{K_m} \int_{\dot{K}} \psi_{n_1, \dots, n_{m-1}}(\zeta)\, dZ\, f(\zeta) = \left(\frac{\partial^{n_1 + \dots + n_{m-1}}}{\partial x_1^{n_1} \dots \partial x_{m-1}^{n_{m-1}}} f(z)\right)_{z=0} .$$

4. Hauptsatz. *Ist eine c-Funktion* $f(z)$ *in einem Punkte* $a = \sum_{h=0}^{m-1} a_h c_h$ *(inhomogen) analytisch, so läßt sie sich in diesem Punkte eindeutig in eine gleichmäßig und absolut konvergente Reihe nach den Funktionen* $\varphi_{n_1, \dots, n_{m-1}}(z - a)$ *entwickeln*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1 + \dots + n_{m-1} = n} \varphi_{n_1, \dots, n_{m-1}}(z - a)\, d_{n_1, \dots, n_{m-1}}$$

$$d_{n_1, \dots, n_{m-1}} = \frac{1}{K_m} \int_{\dot{K}} \psi_{n_1, \dots, n_{m-1}}(\zeta - a)\, dZ\, f(\zeta)$$

$$= \left(\frac{\partial^{n_1 + \dots + n_{m-1}}}{\partial x_1^{n_1} \dots \partial x_{m-1}^{n_{m-1}}} f(z)\right)_{z=a} .$$

Umgekehrt stellt jede derartig, absolut und gleichmäßig konvergente Reihe eine links-analytische Funktion dar.

Der Konvergenzradius der Reihe ist (mindestens) gleich dem $(m-1)$. *Teil des Abstandes des Punktes* a *vom nächstgelegenen, singulären Punkt von* $f(z)$.

Die Reihen für die homogen-analytischen Funktionen sind ein Spezialfall dieser allgemeinen Reihe, da

$$p_{n_1,\dots,n_{m-1}}(z) = \left(\varphi_{n_1,\dots,n_{m-1}}(z)\right)_{\omega=0} .$$

Satz (*Verallgemeinerter binomischer Satz*): *Es ist*

$$\varphi_{n_1,\dots,n_{m-1}}(z+\zeta) = \sum_{h_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{h_{m-1}=0}^{n_{m-1}} \varphi_{n_1-h_1,\dots,n_{m-1}-h_{m-1}}(\zeta)\cdot\varphi_{h_1,\dots,h_{m-1}}(z) \quad (31)$$

Beweis. Es sei wieder

$$z^* = z + c_m\, x_m\,, \qquad \zeta^* = \zeta + c_m\, \xi_m\,,$$

dann gilt nach dem binomischen Satz

$$p_{n_1,\dots,n_{m-1},k}(z^*+\zeta^*) = \sum_{h_i=0}^{n_i} \sum_{r=0}^{k} p_{n_1-h_1,\dots,n_{m-1}-h_{m-1},k-r}(\zeta^*)\cdot p_{h_1,\dots,h_{m-1}}(z)\,,$$

also

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{n_1,\dots,n_{m-1},k}(\zeta^*+z^*)\,\omega^k = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h_i=0}^{n_i}\sum_{r=0}^{k} p_{n_1-h_1,\dots,n_{m-1}-h_{m-1},k-r}(\zeta^*)\,\omega^{k-r}\times$$

$$\times\, p_{h_1,\dots,h_{m-1},r}(z^*)\,\omega^r .$$

Wegen der absoluten und gleichmäßigen Konvergenz der Reihe ist dies gleich

$$\sum_{h_i=0}^{n_i}\Big(\sum_{l=0}^{\infty} p_{n_1-h_1,\dots,n_{m-1}-h_{m-1},l}(\zeta^*)\,\omega^l\Big)\Big(\sum_{r=0}^{\infty} p_{h_1,\dots,h_{m-1},r}(z^*)\,\omega^r\Big) .$$

Setzen wir $x_m = \xi_m = 0$, so erhalten wir (31).

Es ist leicht einzusehen, daß alle Ergebnisse ihre Gültigkeit behalten, wenn ω rein imaginär ist, wie dies für die Differentialgleichung

$$(\Delta - |\,\omega\,|^2)\,u = 0$$

zutrifft. Immerhin sind diese komplexen Größen störend. In der Reihenentwicklung der Elementarlösung (und damit in allen Reihen) tritt die komplexe Größe $\omega = i\,|\,\omega\,|$ nur in der Verbindung ω^2 und $c_m\, i\,|\,\omega\,|$ auf. Setzen wir

$$c_m\, i = i\, c_m = c_m^* \,; \quad - c_m\, i = \bar{c}_m^* \,,$$

so bleiben alle Beziehungen zwischen den c_h und c_m^* erhalten, mit der einen Ausnahme $c_m^* \bar{c}_m^* = -1$ [9]. Schreiben wir auch in diesem Fall statt c_m^* wieder c_m, so ändert sich nichts an der Schreibweise, und es treten keine komplexen Größen mehr auf.

Abschließend läßt sich also sagen:

Die hergeleiteten Reihenentwicklungen sind für alle elliptischen Differentialgleichungen ohne Einschränkung gültig.

6. Die von uns eingehend untersuchten c-Funktionen treten als Hilfsfunktionen im 2. Integralsatz der e-Funktionen auf. Es ist somit klar, wie sich die Resultate von **5** sinngemäß übertragen lassen. Wir beschränken uns auf die Formulierung des folgenden Satzes:

5. Hauptsatz. *Ist eine e-Funktion $w(z)$ in einem Punkte $a = \sum_{h=0}^{m-1} a_h c_h$ analytisch*

$$\left(\sum_{h=0}^{m-1} c_h \frac{\partial}{\partial x_h} + c_m \omega\right) w(z) = 0 \quad ,$$

so läßt sie sich in diesem Punkte eindeutig in eine gleichmäßig und absolut konvergente Reihe nach den Funktionen $\varphi_{n_1,\ldots,n_{m-1}}(z)$ entwickeln:

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1+\cdots+n_{m-1}=n} \varphi_{n_1,\ldots,n_{m-1}}(z-a)\, d_{n_1,\ldots,n_{m-1}} \,,$$

$$d_{n_1,\ldots,n_{m-1}} = \frac{1}{K_m} \int_K \psi_{n_1,\ldots,n_{m-1}}(\zeta - a)\, dZ\, w(\zeta) = \left(\frac{\partial^{n_1+\cdots+n_{m-1}}}{\partial x_1^{n_1}\ldots\partial x_{m-1}^{n_{m-1}}} w(z)\right)_{z=a} .$$

Die einzelnen Summanden dieser Reihe sind analytische e-Funktionen. Umgekehrt stellt jede derartige, absolut und gleichmäßig konvergente Reihe eine analytische e-Funktion dar, wenn die Koeffizienten d im Linearsystem der $e_1, \ldots, e_n$ liegen.

Der Konvergenzradius der Reihe ist (mindestens) gleich dem $(m-1)$. Teil des Abstandes des Punktes a vom nächstgelegenen, singulären Punkt von $w(z)$.

Ich gehe hier nicht auf weitere Entwicklungen (Konvergenzradius, Laurentsche Reihe, usw.) ein, behalte mir aber vor, auf diese Probleme zurückzukommen.

(Eingegangen den 12. November 1948.)

[9]) Die Algebra der c_h ist — entsprechend ihrer Erzeugung — eine Algebra von Matrizen, es treten jetzt also einfach Matrizen mit komplexen Elementen auf.