Structures feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoïdes

par André Haefliger, Lausanne

Introduction

La notion de variété feuilletée a été introduite par C. Ehresmann et G. Reeb (cf. [4], a) et [15], a)). Sur une variété topologique V de dimension n, une structure de variété feuilletée de codimension q est définie par un ensemble maximal *(atlas)* d'homéomorphismes f_i *(cartes)* d'ouverts U_i de $R^q \times R^p$ (R^p et R^q étant les espaces numériques de dimension p et q, $p+q = n$) sur des ouverts de V de telle sorte que les *buts* $f_i(U_i)$ des cartes f_i recouvrent V et que les changements de cartes $f_j^{-1} f_i$ soient des homéomorphismes localement de la forme $(x, y) \to (\varphi(x), \psi(x, y))$, où $x \in R^q$ et $y \in R^p$. La structure sera dite différentiable ou analytique si de plus les changements de cartes sont différentiables ou analytiques. Pour des exemples de variétés feuilletées, on se reportera à la thèse de G. Reeb (cf. [15], a)).

C. Ehresmann a ensuite généralisé cette notion en remplaçant R^q et R^p par des espaces topologiques quelconques B et F, les changements de cartes étant des éléments d'un pseudogroupe d'automorphismes locaux du produit $B \times F$ localement de la forme $(x, y) \to (\varphi(x), \psi_x(y))$, où φ et ψ_x appartiennent resp. à des pseudogroupes d'automorphismes locaux de B et F. Il a introduit la notion fondamentale de *groupe d'holonomie* et il a généralisé le *théorème de stabilité* de G. Reeb (cf. [15], a)). Ces structures seront appelées ici structures feuilletées *régulières*.

Des généralisations d'espaces feuilletés avec singularités ont été données par C. Ehresmann dans [4], b), et par G. Reeb dans [15], b), qui étend à ces structures plus générales certaines propriétés des systèmes dynamiques; le théorème de stabilité a été généralisé par C. Ehresmann et Shih Weishu (cf. [4], h)).

L'origine de ce travail est une question posée par G. Reeb dans sa thèse: après avoir construit une structure de variété feuilletée de codimension un sur la sphère S^3 à 3 dimensions et remarqué qu'elle n'est pas analytique, il soulève la *question de l'existence d'une structure feuilletée analytique de codimension un sur la sphère* S^3 (cf. [15], a), p. 112/113). Dans [8], c), nous avons répondu par la négative en démontrant qu'il ne peut exister de structure de variété feuilletée analytique de codimension un sur une variété analytique réelle compacte dont le premier groupe d'homotopie est fini. C'est une conséquence presque immédiate d'un *lemme fondamental* dont la démonstration conduit à étudier des structures feuilletées, obtenues par image réciproque d'une structure donnée, et présentant des singularités du type de celles des applications continues; le lemme et la plupart des résultats qu'on en tire se généralisent sans autre pour ces structures et s'appliquent à l'étude des formes de PFAFF complètement intégrables (cf. [8], c)). Il était donc naturel de partir d'une définition des structures feuilletées incluant certaines singularités et mettant l'accent sur la structure «transverse» aux feuilles. D'ailleurs une telle généralisation avait été indiquée par C. EHRESMANN dans [4], e), p. 107; il l'a développée plus tard dans ses cours (voir aussi [4], g)).

Une *Γ-structure feuilletée* σ sur un espace topologique X est définie comme suit. Soit Γ un pseudogroupe d'automorphismes locaux d'un espace topologique B; deux applications continues f et f' d'ouverts U et U' de X dans B seront dites compatibles avec Γ, si pour tout point $x \in U \cap U'$, il existe un élément γ de Γ tel que $f' = \gamma f$ au voisinage de x. Une Γ-structure feuilletée σ sur X est définie par un ensemble maximal d'applications continues d'ouverts de X dans B, compatibles avec Γ (appelées *applications distinguées* de σ), leur source formant un recouvrement de X. Les images réciproques des points de B par les applications distinguées de σ forment une base des ouverts d'une topologie sur X; une *feuille* de σ est une composante connexe de X suivant cette topologie. Si f est une application continue d'un espace X' dans X, les composés de f avec les applications distinguées de σ sont des applications distinguées d'une Γ-structure feuilletée sur X', appelée l'*image réciproque* de σ par f.

La notion d'holonomie peut encore être définie pour une Γ-structure feuilletée σ si la condition supplémentaire suivante (A) est vérifiée: *Condition*(A): si f et f' sont deux applications distinguées de σ de source U et U', et si $x \in U \cap U'$, alors l'élément γ tel que $f' = \gamma f$ au voisinage de x est essentiellement unique, c'est-à-dire que son germe au point $f(x)$ est unique. On dira alors que σ est *non dégénérée*.

Moyennant quelques hypothèses topologiques sur X et B, le théorème de stabilité est encore vrai pour une Γ-structure feuilletée non dégénérée. Il en est de même du lemme fondamental signalé plus haut et des propriétés qu'on en déduit, B étant alors la droite numérique réelle R et Γ le pseudogroupe des automorphismes locaux analytiques réels de R.

Cependant si une Γ-structure feuilletée σ sur X vérifie la condition (A), il n'en est plus de même en général pour les Γ-structures feuilletées images réciproques de σ par des applications continues dans X, bien que toutes les propriétés citées ci-dessus restent encore vraies.

Il fallait donc faire un pas de plus en ajoutant un élément nouveau à la définition des Γ-structures feuilletées ne vérifiant pas la condition (A). On est conduit ainsi à la notion de Γ-structure sur X, définie de la manière suivante: on se donne une famille d'applications continues f_i d'ouverts U_i de X dans B, dont les sources recouvrent X, et compatibles avec Γ; de plus, pour chaque couple (f_i, f_j) et chaque point $x \in U_i \cap U_j$, on se donne un élément γ_x^{ji} de Γ tel que $f_j = \gamma_x^{ji} f_i$ au voisinage de x, de sorte que *le germe de* γ_x^{ji} *au point* $f_i(x)$ *varie d'une manière continue avec* x [1]. Une telle donnée se présente formellement (cf. par ex. [5]) comme celle d'un 1-cocycle, relativement au recouvrement $\{U_i\}$, à valeur dans le faisceau de germes d'applications continues de X dans un groupe topologique, le groupe étant simplement remplacé ici par le groupoïde topologique Π_Γ des germes des éléments de Γ aux points de B. Deux cocycles (f) et (f') relatifs à des recouvrements $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{U}'$ de X à valeur dans le faisceau $\mathfrak{P}_\Gamma$ des germes d'applications locales continues de X dans Π_Γ, déterminent la même Γ-structure s sur X si et seulement si les 1-cocycles (f) et (f') sont «homologues». Ainsi *une Γ-structure sur X est définie formellement comme un élément s du premier ensemble de cohomologie $H^1(X, \mathfrak{P}_\Gamma)$ de X à valeur dans le faisceau de groupoïdes $\mathfrak{P}_\Gamma$.*

D'après cette définition, toute Γ-structure s admet une Γ-structure feuilletée sous-jacente σ, la réciproque n'étant pas vraie en général, mais si une Γ-structure feuilletée σ est non dégénérée, il existe alors une et une seule Γ-structure s admettant σ comme structure sous-jacente. Si f est une application continue d'un espace X' dans X, alors X' est muni fonctoriellement d'une Γ-structure s', image réciproque de s par f, dont la Γ-structure feuilletée sous-jacente est l'image réciproque par f de σ. Par exemple, si F est une feuille de σ et i l'injection naturelle de F (muni de sa topologie de feuille) dans X, la Γ-structure sur F, image réciproque de s par i, donne l'holonomie de la feuille F (alors que la Γ-structure feuilletée image réciproque de σ par i est triviale).

On voit donc que la notion de Γ-structure permet d'enrichir considérablement celle de structure induite sur un sous-espace non ouvert de X. Supposons par exemple que X soit muni d'une structure locale s, définie par un atlas complet de B sur X compatible avec Γ; s peut être considérée comme une Γ-structure sur X. Moyennant quelques hypothèses topologiques, la Γ-structure induite par s sur un sous-espace F de X (c'est-à-dire la Γ-structure image réciproque de s par l'application identique de F dans X) caractérise le germe de voisinage de F (cf. chap. IV, th. 1). Ces considérations permettent par exemple de classer effectivement, dans certains cas, les classes d'isomorphie de germes de plongement d'un espace F comme feuille d'une structure régulière; elles s'appliquent également au problème général des variations de structures.

[1]) et que $\gamma_x^{ki} = \gamma_x^{kj} \gamma_x^{ji}$ au voisinage de $f_i(x)$.

Dans le premier chapitre de ce travail, nous avons rappelé et adapté à notre but quelques notions générales que M. C. EHRESMANN a développées dans ses cours. Nous partons alors, dans le chapitre II, de la notion fondamentale de cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoïdes de façon à définir, au chapitre III, les Γ-structures et les notions qui s'y rattachent directement; nous y définissons notamment l'holonomie d'une feuille d'une Γ-structure feuilletée sous-jacente à une Γ-structure, et nous étendons le théorème de stabilité.

Les chapitres IV et V sont indépendants l'un de l'autre. Le premier est consacré à l'étude des germes de Γ-plongement d'un espace localement isomorphe à un sous-espace de B; ce n'est que dans quelques cas très particuliers que nous avons réussi à déterminer explicitement les classes d'isomorphie de germes de Γ-plongement. Le chapitre V contient les résultats essentiels de ce travail; il est consacré à une étude plus approfondie des Γ_ω-structures feuilletées, où Γ_ω désigne le pseudogroupe des automorphismes locaux analytiques réels de la droite numérique R.

Chaque chapitre est précédé d'un bref résumé destiné à mettre en évidence les notions et les propriétés les plus importantes qu'il contient.

La notion de structure feuilletée que nous envisageons ici, c'est-à-dire celle de Γ-structure feuilletée sous-jacente à une Γ-structure, nous a paru la mieux adaptée pour généraliser certaines propriétés essentielles des variétés feuilletées (par exemples l'holonomie, le théorème de stabilité, les propriétés des structures analytiques de codimension un, etc.). Il est à peine nécessaire d'ajouter qu'on pourrait concevoir bien d'autres généralisations de la notion de structure feuilletée, par exemple celles qui généraliseraient les structures définies par les trajectoires d'un champ de vecteurs, les orbites d'un groupe, ou encore les orbites d'un pseudogroupe de transformations.

Je suis heureux de dire ici tout ce que je dois à la pensée de M. CHARLES EHRESMANN, le profit inestimable que j'ai retiré, tant pour ma formation que pour l'élaboration de ce travail, de ses cours, des conversations enrichissantes que j'ai eues avec lui, des idées non publiées qu'il m'a généreusement communiquées. Ma reconnaissance va également à M. RENÉ THOM dont l'intérêt bienveillant pour les problèmes qui me préoccupaient m'a constamment soutenu; il n'a jamais hésité à me consacrer tout son temps lors des entretiens qui ont été d'un intérêt décisif pour mon travail. Je tiens aussi à remercier très sincèrement mon Maître M. GEORGES DE RHAM qui n'a cessé de me guider et de me soutenir par ses précieux conseils et ses encouragements.

Que M. H. CARTAN, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse, et M. P. LELONG, qui a bien voulu me proposer un sujet de seconde thèse, veuillent trouver ici l'expression de mes remerciements.

Table des matières

CHAPITRE I

Notions préliminaires

Le but de ce premier chapitre est de rappeler brièvement quelques notions de base que C. EHRESMANN a introduites dans ses cours et quelques articles ([4], e), f) et g)).

1. Pseudogroupe de transformations. Atlas.

Si f est une application d'une partie A d'un ensemble E dans un ensemble E', le sous-ensemble A est appelé la *source* de f, le sous-ensemble $f(A) = B$ le *but* de f. Si g est une application d'une partie A' de E' dans un ensemble E'', le *composé* gf est l'application $x \to g(f(x))$ de la partie $f^{-1}(A' \cap B)$ de E (qui peut être vide) dans E''. Si U est une partie de E, $f(U)$ désigne l'image par f de $U \cap A$.

Soit f_i une famille d'applications des parties A_i de E dans E', i parcourant un ensemble d'indices I. Lorsque f_i et f_j coïncident sur $A_i \cap A_j$ pour tout couple d'indices i, j de I, l'application f de la réunion des A_i dans E' dont la restriction à chaque A_i coïncide avec f_i, est appelée la *réunion* des applications f_i.

Un *pseudogroupe de transformations* d'un ensemble E est un ensemble Γ d'applications biunivoques de parties de E sur parties de E tel que:

a) si $f \in \Gamma$, $g \in \Gamma$, alors $gf \in \Gamma$,

b) si $f \in \Gamma$, alors l'application inverse f^{-1} de f appartient à Γ,

c) l'application identique de E appartient à Γ,

d) si une application biunivoque f est réunion des applications $f_i \in \Gamma$, alors $f \in \Gamma$.

Il résulte de ces axiomes que les sources des éléments de Γ sont les ouverts d'une topologie sur E, appelée *topologie sous-jacente au pseudogroupe* Γ.

Un ensemble Γ_0 d'applications vérifiant les trois premiers axiomes seulement est une base de pseudogroupe; il engendre un pseudogroupe bien déterminé formé de toutes les réunions des applications de Γ_0.

Un *sous-pseudogroupe de* Γ est un sous-ensemble de Γ qui est lui-même un pseudogroupe de transformations de E.

Si E est déjà muni d'une topologie, un pseudogroupe d'automorphismes locaux de l'espace E est un pseudogroupe Γ de transformations de E dont chaque élément est un homéomorphisme d'un ouvert de E sur un ouvert de E. Dans ce qui suit, nous supposerons, sauf mention explicite du contraire, que la topologie sous-jacente à Γ coïncide avec la topologie de E. Plus généralement, si E est muni d'une structure locale s (cf. [4], g)), un pseudogroupe d'automorphismes locaux de E sera formé d'automorphismes locaux de E muni de la structure locale s.

Exemples: 1. Le pseudogroupe formé des homéomorphismes différentiables de classe r ou analytiques complexes (ainsi que leurs inverses) d'ouverts sur ouverts de l'espace numérique réel R^n ou complexe C^n.

2. Soit G un groupe d'automorphismes d'un espace topologique E; l'ensemble des restrictions des transformations de G aux ouverts de E forme une base de pseudogroupe qui engendre le *pseudogroupe déduit de G par localisation.*

Un atlas $\mathfrak{A}$ d'un espace topologique B sur un espace topologique E compatible avec un pseudogroupe d'automorphismes locaux Γ de B est un ensemble d'homéomorphismes d'ouverts de B sur ouverts de E (appelés *cartes* de B dans E) tels que leurs buts forment un recouvrement de E et que, si f, $f' \in \mathfrak{A}$, alors $f^{-1} f' \in \Gamma$. L'atlas $\mathfrak{A}$ sera dit *complet* si toute carte g de B dans E compatible avec Γ (c'est-à-dire que pour tout $f \in \mathfrak{A}$, alors $f^{-1} g \in \Gamma$) appartient à $\mathfrak{A}$. Un tel atlas définit sur E une *structure d'espace localement isomorphe à B muni du pseudogroupe Γ*. Dans la suite de ce travail, une telle structure sera appelée une *(B, Γ)-structure* sur E; on dira aussi que E, muni de cette structure, est localement isomorphe à (B, Γ). Le pseudogroupe des automorphismes locaux de cette structure sur E est engendré par les transformations $f' f^{-1}$, où f, $f' \in \mathfrak{A}$.

Exemples: Les structures de variétés différentiables ou analytiques définies par un atlas complet compatible avec le pseudogroupe des automorphismes locaux différentiables de R^n ou analytiques de C^n.

2. Espaces étalés. Jets locaux ou germes.

Un *espace topologique E* muni d'une projection p dans un espace topologique B est dit *étalé par p dans B* si, pour tout point $x \in E$, la restriction de p à un voisinage ouvert suffisamment petit de x est un homéomorphisme sur un ouvert de B. On dit aussi que p étale E dans B, ou encore que E est un *faisceau d'ensembles sur B*.

E et E' étant des espaces topologiques, on introduit dans l'ensemble des *applications locales continues pointées* de E dans E', c'est-à-dire des couples (f, x) formés d'une application continue f d'un ouvert U de E dans E' et d'un point $x \in U$, la relation d'équivalence qui identifie deux couples (f, x) et (f', x') si $x = x'$ et si les restrictions de f et f' à un voisinage convenable de x coïncident. La classe, suivant cette relation, à laquelle appartient (f, x)

est appelée le *jet (local) au point* x ou le *germe au point* x *de l'application* f et sera souvent désignée par $j_x^\lambda f$. La *source* du jet local $j_x^\lambda f$ est le point x et son *but* le point $f(x)$.

L'ensemble des jets locaux de E dans E' (c'est-à-dire l'ensemble de tous les jets locaux aux divers points de E de toutes les applications continues d'ouverts de E dans E') est muni d'une *topologie* naturelle: un base des ouverts de cette topologie est formée des sous-ensembles de la forme $j_x^\lambda f$, où f est une application continue d'un ouvert U de E dans E' et où x parcourt U. La *projection source* α, qui à tout jet local fait correspondre sa source, étale cet espace sur E; la *projection but* β, qui à tout jet fait correspondre son but est une application continue.

La loi de composition partiellement définie entre applications locales pointées définit par passage au quotient une *loi de composition* continue partiellement définie entre jets locaux. Si Z est un jet local de E dans E', et Z' un jet local de E' dans un espace E'', le composé de Z et Z' est défini si et seulement si la source de Z' est le but de Z; il sera noté $Z' \cdot Z$ ou simplement $Z'Z$ (cf. [4], e)).

Exemple: L'espace des jets locaux d'applications analytiques locales d'une variété analytique dans une autre est un espace séparé.

3. Groupoïdes

Un *groupoïde* (cf. [4], g)) est un ensemble Π muni d'une loi de composition $(x, y) \to xy$ définie pour certains couples d'éléments x, y de Π et vérifiant les axiomes suivants:

a) Si $x, y, z \in \Pi$ et si les composés $(xy)z$ ou $x(yz)$ sont définis, alors ils sont définis tous les deux et égaux:

$$(xy)z = x(yz) \qquad \text{(associativité)}$$

b) Si xy et yz sont définis, alors $(xy)z$ est défini.

c) Un élément e de Π est appelé une unité à droite (resp. à gauche) si pour tout $x \in \Pi$ tel que xe (resp. ex) soit défini, alors $xe = x$ (resp. $ex = x$). L'axiome c) exige que tout élément $x \in \Pi$ admette une *unité à droite* et *une unité à gauche*.

d) Tout élément $x \in \Pi$ admet un *inverse* x^{-1}, c'est-à-dire un élément x^{-1} de Π tel que $x^{-1}x$ soit l'unité à droite de x. Alors xx^{-1} est l'unité à gauche de x.

Il résulte de ces axiomes que chaque élément x de Π possède une seule unité à droite, une seule unité à gauche et un inverse unique. La projection de Π

sur l'ensemble B de ses unités qui fait correspondre à tout élément son unité à droite (resp. à gauche) sera désignée par a (resp. b). Pour que le composé xy soit défini, il faut et il suffit que $a(x) = b(y)$.

Un groupoïde Π est dit *transitif* s'il agit transitivement sur l'ensemble de ses unités, c'est-à-dire si, pour tout couple d'unités e et e' de Π, il existe au moins un élément x tel que $a(x) = e$ et $b(x) = e'$.

Un *sous-groupoïde de Π* est un sous-ensemble de Π qui, muni de la loi de composition induite par celle de Π, est lui-même un groupoïde.

Un *sous-groupoïde complet* d'un groupoïde Π est un sous-ensemble Π' de Π tel que s'il contient un élément x de Π, il contient aussi tout élément de Π ayant mêmes unités que x. Tout groupoïde est réunion de sous-groupoïdes complets transitifs et disjoints.

Une *représentation* d'un groupoïde Π dans un groupoïde Π' est une application φ de Π dans Π' telle que, si $x, y \in \Pi$ et si xy est défini, alors $\varphi(x)\varphi(y)$ est défini et égal à $\varphi(xy)$, et que toute unité de Π est appliquée sur une unité de Π'. L'image $\varphi(\Pi)$ n'est en général pas un sous-groupoïde de Π'.

Un *groupoïde topologique* est un ensemble Π muni d'une structure de groupoïde et d'une structure d'espace topologique telles que:

a) l'application $(x, y) \to xy$ du sous-espace de $\Pi \times \Pi$ formé des couples composables (c'est-à-dire tels que $a(x) = b(y)$) dans Π définie par la loi de composition de Π soit continue,

b) l'application $x \to x^{-1}$ de Π dans Π soit continue.

Il en résulte que les projections a et b sont des applications continues de Π sur le sous-espace B de ses unités.

Une représentation d'un groupoïde topologique Π dans un groupoïde topologique Π' est une application continue φ qui est une représentation au sens précédent de Π dans Π'.

Exemple: L'espace des jets locaux des éléments d'un pseudogroupe Γ d'automorphismes locaux d'un espace topologique B (muni de sa topologie naturelle, cf. 2) est un groupoïde topologique noté Π_Γ; ses unités sont les jets locaux aux différents points de B de l'application identique de B et seront identifiées aux points de B. Les projections a et b étalent Π_Γ sur B. Le *groupe d'isotropie de Π_Γ* (ou de Γ) *au point x* est le groupe formé des jets locaux au point x des éléments de Γ laissant fixe x.

4. Espaces fibrés

Un *espace fibré (E, p) de base B* (ou sur B) est un espace topologique E muni d'une projection continue p sur l'espace topologique B. La *fibre* de (E, p) au-dessus du point x de X est le sous-espace $p^{-1}(x)$ de E. Une *section* de (E, p) au-dessus d'un sous-espace A de B est une application continue σ de A dans E telle que $p\sigma$ soit l'application identique de A. Une section de (E, p) est une section de (E, p) au-dessus de B. Une *représentation* d'un espace fibré (E, p) sur B dans un espace fibré (E', p') sur B' est une application continue φ de E dans E' compatible avec les projections p et p' et se projetant sur une application continue de B dans B'. Une représentation inversible de (E, p) sur (E', p') est un *isomorphisme* de (E, p) sur (E', p').

Si f est une application continue d'un espace X dans B, *l'espace fibré sur X image réciproque* (ou *induit) par f de l'espace fibré (E, p) sur* B est le sous-espace du produit $X \times E$ formé des couples (x, e) tels que $f(x) = p(e)$, muni de sa projection naturelle $(x, e) \to x$ sur X. L'espace fibré image réciproque de (E, p) par l'application identique d'un sous-espace A de B est canoniquement isomorphe au sous-espace $p^{-1}(A)$ de E muni de la restriction de p à $p^{-1}(A)$, appelé la restriction de (E, p) à A.

Un *isomorphisme local* de (E, p) dans (E', p') est un isomorphisme de l'espace fibré restriction de (E, p) à un ouvert de B sur l'espace fibré restriction de (E', p') à un ouvert de B'. Un *automorphisme local de* (E, p) est un isomorphisme local de (E, p) dans (E, p). Les automorphismes locaux de (E, p) forment un pseudogroupe de transformations de E dont la topologie sous-jacente est formée des ouverts de E images réciproques par p des ouverts de B. Chaque élément de ce pseudogroupe se projette sur un automorphisme local de B.

Nous dirons que deux isomorphismes locaux de l'espace fibré (E, p) sur B dans l'espace fibré (E', p') sur B' définissent le même *germe d'isomorphisme local au point x de B*, si leur source contient $p^{-1}(x)$ et si leur restriction à $p^{-1}(U)$ coïncident, U étant un voisinage convenable de x. L'ensemble Π des germes d'automorphismes locaux de (E, p) aux différents points de B est muni d'une structure évidente de groupoïde; ses unités sont les germes d'automorphismes locaux aux points de B de l'application identique de E et elles seront identifiées aux points de B; si f est un automorphisme local quelconque de (E, p) de source $p^{-1}(U)$, les germes de f aux points $x \in U$ forment une base des ouverts d'une topologie sur Π; le groupoïde Π est ainsi muni d'une structure de groupoïde topologique et sera appelé le *groupoïde des germes d'automorphismes locaux de* (E, p). Les projections a et b de Π sur l'espace de ses unités, identifié à B, étalent Π sur B. Le groupoïde Π se projette dans un groupoïde de germes d'automorphismes locaux de B.

5. Groupoïde topologique d'opérateurs sur un espace fibré

Soit Π un groupoïde topologique dont l'espace des unités est B et soit (E, p) un espace fibré sur B. On dira que Π est un *groupoïde d'opérateurs sur (E, p)* si, Π_E désignant le sous-espace du produit $\Pi \times E$ formé des couples (z, y) tels que $a(z) = p(y)$, il existe une application continue ψ de Π_E sur E telle que, $\psi(z, y)$ étant noté zy:

a) $p(zy) = b(z)$
b) $(z'z)y = z'(zy)$
c) $ey = y$ si $e \in B$.

Cette définition s'applique aussi dans le cas où p est une application continue de E *dans* B, et on dira encore que Π est groupoïde d'opérateurs sur (E, p), ou sur E relativement à la projection p; le sous-espace $p(E)$ de B est alors l'espace des unités d'un sous-groupoïde complet de Π.

L'espace Π_E est muni d'une structure de groupoïde topologique dont les unités sont identifiées aux points de E: le composé de (z_1, y_1) avec (z_2, y_2) n'est défini que si $y_1 = z_1 y_2$, et il est alors égal à $(z_1 z_2, y_2)$. Le groupoïde Π_E sera appelé le *groupoïde extension du groupoïde Π d'opérateurs sur (E, p)*.

La restriction à Π_E de la projection canonique de $\Pi \times E$ sur Π est une représentation de Π_E sur Π. L'espace Π_E, muni de la restriction a_E de la projection canonique de $\Pi \times E$ sur E, est l'espace fibré image réciproque de l'espace fibré (Π, a) par la projection p de E dans B. Il en résulte que si (Π, a) est par exemple un espace étalé sur B, ou un revêtement de B, ou encore un espace fibré à groupe structural topologique, alors (Π_E, a_E) est resp. un espace étalé sur E, un revêtement de E ou un espace fibré à groupe structural topologique.

On dira que Π est un *groupoïde d'opérateurs simple* sur (E, p) si, étant donné deux points y et y' de E, il existe au plus un élément z de Π tel que $y' = zy$.

Exemples: 1. Tout groupoïde topologique Π est groupoïde d'opérateurs sur l'espace B de ses unités (muni de la projection identique sur B). Le groupoïde Π sera dit *simple* s'il est groupoïde d'opérateurs simple sur l'espace de ses unités.

2. Un groupoïde de germes d'automorphismes locaux d'un espace fibré (E, p) sur B est un groupoïde d'opérateurs sur (E, p).

3. Si (E, p) est un espace fibré à groupe structural topologique, le groupoïde des isomorphismes de fibre de E sur fibre de E (cf. [4], d)) est un groupoïde d'opérateurs sur (E, p).

6. Espace fibré muni d'un groupoïde structural

Le plus souvent un espace fibré (E, p) sur B sera muni d'un sous-pseudogroupe Γ du pseudogroupe Γ^* de ses automorphismes locaux (admettant la même topologie sous-jacente que Γ^*). Le groupoïde Π des germes des automorphismes locaux de (E, p) appartenant à Γ est un sous-groupoïde ouvert du groupoïde Π^* de tous les germes d'automorphismes locaux de (E, p). Inversement, la donnée d'un sous-groupoïde ouvert Π de Π^* admettant les mêmes unités que Π^* détermine un sous-pseudogroupe Γ de Γ^* dont le groupoïde des germes est Π.

L'espace fibré (E, p) muni du groupoïde Π sera noté (E, p, Π) et Π sera le *groupoïde structural* de (E, p, Π). Un automorphisme local de (E, p, Π) est un élément du pseudogroupe Γ associé à Π. Un espace fibré (E', p') sur B' est muni d'une structure d'espace localement isomorphe à (E, p, Π) si l'on s'est donné un atlas $\mathfrak{A}$ complet de E sur E' dont les cartes sont des isomorphismes locaux de (E, p) dans (E', p') et qui est compatible avec Γ. Tout automorphisme local de (E', p') muni de cette structure est réunion d'automorphismes locaux de la forme $f' f^{-1}$, où $f, f' \in \mathfrak{A}$.

Supposons que Π soit un groupoïde topologique étalé par a sur l'espace B de ses unités, et que Π soit groupoïde d'opérateurs sur un espace fibré (E, p) sur B. Alors Π admet une représentation canonique sur un sous-groupoïde Π_0 du groupoïde Π^* des germes d'automorphismes locaux de (E, p); si cette représentation est injective, on dira que Π est un groupoïde d'opérateurs fidèle sur (E, p). Par abus de langage, on dira encore qu'un espace fibré (E', p') est localement isomorphe à (E, p) muni du groupoïde d'opérateurs Π (ou localement isomorphe à (E, p, Π)), si (E', p') est muni d'une structure d'espace fibré localement isomorphe à (E, p, Π_0).

CHAPITRE II

La notion de cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoïdes

On définit la notion de premier ensemble de cohomologie $H^1(X, \mathfrak{P})$ d'un espace topologique X à valeur dans un faisceau de groupoïdes $\mathfrak{P}$ sur X. Cette définition et les développements qui suivent se présentent formellement comme ceux de la théorie de la cohomologie à valeur dans un faisceau de groupes non abéliens (cf. [3], a) et b), [5], [7], [9]); pour la plupart des démonstrations, nous renvoyons donc le lecteur aux travaux cités ci-dessus. Les notions d'espaces fibrés déduits, de faisceau principal et de faisceau de groupes associés à un élément s de $H^1(X, \mathfrak{P})$ sont essentielles pour la suite. La proposition 7 permet, dans plusieurs cas, de ramener la détermination de l'ensemble $H^1(X, \mathfrak{P})$ à celle du premier ensemble de cohomologie de X à valeur dans un faisceau de groupes. Les considérations du paragraphe 8, qui traite le cas d'un faisceau constant, seront utiles pour définir l'holonomie d'une feuille d'une structure feuilletée (chapitre III). On pourrait développer beaucoup plus longuement, comme dans [5] ou [7], des notions analogues à celles de suite exacte de cohomologie relative à une suite exacte de faisceaux de groupes; un cas particulier est donné à titre d'exemple dans le paragraphe 9.

1. Faisceau de groupoïdes

Soit X un espace topologique. *Un faisceau $\mathfrak{P}$ de groupoïdes sur X est un espace étalé sur X par une projection p tel que l'ensemble $S(U, \mathfrak{P})$ des sections de $\mathfrak{P}$ au-dessus d'un ouvert quelconque U de X soit muni d'une structure de groupoïde, l'application de restriction $S(U, \mathfrak{P}) \to S(V, \mathfrak{P})$, où V est un ouvert contenu dans U, étant une représentation de groupoïdes.*

Pour tout $x \in X$, la fibre $\mathfrak{P}_x = p^{-1}(x)$, qui s'identifie à la limite inductive des $S(U, \mathfrak{P})$ lorsque U parcourt l'ordonné filtrant des voisinages ouverts de x, est aussi muni d'une structure de groupoïde. L'ensemble des unités des groupoïdes $\mathfrak{P}_x$, lorsque x parcourt X, est un sous-faisceau $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{P}$. *Le faisceau $\mathfrak{P}$ peut être considéré comme un groupoïde topologique dont l'espace des unités est $\mathfrak{B}$*: la loi de composition qui est partiellement définie dans chaque fibre de $\mathfrak{P}$ est continue par rapport à la topologie d'espace étalé de $\mathfrak{P}$. On a deux projections canoniques a et b de $\mathfrak{P}$ sur $\mathfrak{B}$ qui sont compatibles avec les projections des faisceaux $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{B}$ sur X et qui font correspondre à tout $z \in \mathfrak{P}_x$ son unité à droite et à gauche respectivement. Si f et f' sont deux sections de $\mathfrak{P}$ définies au-dessus des ouverts U et U' de X, alors $f'f$ désigne la section locale $x \to f'(x)f(x)$ définie pour tout $x \in U \cap U'$ tel que $f'(x)f(x)$ soit défini, c'est-à-dire tel que $bf(x) = af'(x)$.

A toute notion sur les groupoïdes correspond d'une manière naturelle une notion sur les faisceaux de groupoïdes; on a par exemple les notions de représentation de faisceaux de groupoïdes sur X, de sous-faisceau de groupoïdes d'un faisceau de groupoïdes, etc.; on définit également comme d'habitude la notion de faisceau $\mathfrak{P}'$ de groupoïdes sur un espace X' image réciproque d'un faisceau $\mathfrak{P}$ de groupoïdes sur X par une application continue f de X' dans X.

Exemples: Soit Π un groupoïde topologique (non vide); le faisceau $\mathfrak{P}$ des germes d'applications continues d'ouverts de X dans Π est muni d'une structure de faisceau de groupoïdes sur X: les sections de $\mathfrak{P}$ au-dessus d'un ouvert U de X correspondent canoniquement aux applications continues de U dans $\mathfrak{P}$; le sous-faisceau $\mathfrak{B}$ des unités de $\mathfrak{P}$ est le sous-faisceau des germes d'applications continues d'ouverts de X dans le sous-espace des unités de Π.

Le faisceau des germes d'applications continues de X dans un groupoïde Π muni de la topologie discrète est identique au faisceau des germes d'applications constantes de X dans Π; il est isomorphe au produit $X \times \Pi$ muni de sa projection canonique sur X.

Les faisceaux de groupes sur X sont évidemment des cas particuliers de faisceaux de groupoïdes sur X.

2. Cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoïdes

Soit $\mathfrak{P}$ un faisceau de groupoïdes sur l'espace topologique X. Nous allons définir l'ensemble $H^1(X, \mathfrak{P})$, construit formellement exactement de la même manière que le premier ensemble de cohomologie de X à valeur dans un faisceau de groupes non abéliens sur X (cf. [3], [5], [7], [9]).

Soit $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement formé d'ouverts U_i de X, i parcourant un ensemble d'indices I. *Une p-cochaîne de $\mathfrak{U}$ à valeur dans $\mathfrak{P}$* est une fonction qui associe à toute suite $i_0, i_1, \ldots, i_p$ de $p+1$ éléments de I tels que $U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_p}$ ne soit pas vide, une section de $\mathfrak{P}$ au-dessus de cet ouvert.

Une 0-cochaîne (g) de $\mathfrak{U}$ à valeur dans $\mathfrak{P}$ associe donc à tout $i \in I$ une section g_i de $\mathfrak{P}$ au-dessus de U_i; on dira que (g) est un 0-cocycle si $g_i = g_j$ sur l'intersection $U_i \cap U_j$, pour tout $i, j \in I$; dans ce cas les sections locales g_i admettent une réunion qui est une section de $\mathfrak{P}$ au-dessus de X. Par définition, *$H^0(X, \mathfrak{P})$ sera le groupoïde $S(X, \mathfrak{P})$ des sections de $\mathfrak{P}$ au-dessus de X.*

Soit (f) une 1-cochaîne de $\mathfrak{U}$ à valeur dans $\mathfrak{P}$, c'est-à-dire une fonction qui associe à tout couple (i, j) d'indices de I tels que $U_i \cap U_j$ ne soit pas vide une section f_{ij} de $\mathfrak{P}$ au-dessus de $U_i \cap U_j$. On dira que (f) est un *1-cocycle* de $\mathfrak{U}$ à valeur dans $\mathfrak{P}$ si, pour tout triple (i, j, k) d'indices de I,

$$f_{ik} = f_{ij} f_{jk} \text{ sur } U_i \cap U_j \cap U_k .$$

Ceci entraîne en particulier que f_{ii} est une section au-dessus de U_i du sous-faisceau $\mathfrak{B}$ des unités de $\mathfrak{P}$ et que $f_{ij} = f_{ji}^{-1}$.

L'ensemble des 1-cocycles de $\mathfrak{U}$ à valeur dans $\mathfrak{P}$ sera désigné par $Z^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{P})$. Deux 1-cocycles (f) et $(f') \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{P})$ seront dits homologues, s'il existe une 0-cochaîne (g) de $\mathfrak{U}$ à valeur dans $\mathfrak{P}$ telle que

$$f'_{ij} = g_i f_{ij} g_j^{-1} \quad \text{sur} \quad U_i \cap U_j .$$

On vérifie aisément que la relation ainsi définie dans $Z^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{P})$ est une relation d'équivalence. Le quotient de $Z^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{P})$ par cette relation d'équivalence sera désigné par $H^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{P})$, et sera appelé le premier ensemble de cohomologie de $\mathfrak{U}$ à valeur dans $\mathfrak{P}$.

Soit $\mathfrak{V} = \{V_m\}_{m \in M}$ un recouvrement ouvert de X plus fin que $\mathfrak{U}$; soit τ une application $m \to \tau m$ de M dans I telle que, pour tout $m \in M$, $V_m \subset U_{\tau m}$. Soit $(f) = \{f_{ij}\}$ un 1-cocycle $\in Z^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{P})$; la fonction qui associe à tout couple d'indices $m, n \in M$ tel que $V_m \cap V_n \neq \emptyset$ la section restriction de $f_{\tau m \tau k}$ à $V_m \cap V_k$ est un 1-cocycle $\tau(f)$ de $\mathfrak{V}$ à valeur dans $\mathfrak{P}$. On définit ainsi une application de $Z^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{P})$ dans $Z^1(\mathfrak{V}, \mathfrak{P})$ qui applique deux cocycles homologues sur deux cocycles homologues. Par passage aux quotients, on obtient une application φ_{VU} de $H^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{P})$ dans $H^1(\mathfrak{V}, \mathfrak{P})$; elle est indépendante du choix particulier de l'application τ.

En effet, soit τ' une application de M dans I telle que $V_m \subset U_{\tau' m}$; comme

$$f_{\tau m \tau n} = f_{\tau m \tau' m} f_{\tau' m \tau' n} (f_{\tau n \tau' n})^{-1} \quad \text{sur} \quad V_m \cap V_n ,$$

les deux cocycles $\tau(f)$ et $\tau'(f)$ sont homologues.

Si $\mathfrak{W}$ est un recouvrement ouvert de X plus fin que $\mathfrak{V}$, on a $\varphi_{WU} = \varphi_{WV} \varphi_{VU}$ et φ_{UU} = identité. La relation « $\mathfrak{V}$ plus fin que $\mathfrak{U}$ » est une relation de préordre entre recouvrements ouverts de X. Si l'on considère que $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$ sont équivalents si $\mathfrak{U}$ est plus fin que $\mathfrak{V}$ et $\mathfrak{V}$ plus fin que $\mathfrak{U}$, l'ensemble des classes de recouvrements de X est muni d'une structure d'ensemble ordonné filtrant. En vertu de ce qui précède, $H^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{P})$ ne dépend que de la classe de $\mathfrak{U}$ (c'est-à-dire que si $\mathfrak{V}$ est équivalent à $\mathfrak{U}$, l'application φ_{UV} est bijective), et si $\mathfrak{V}$ est plus fin que $\mathfrak{U}$, l'application φ_{VU} ne dépend que des classes de $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$. On peut donc poser la

Définition: *Le premier ensemble de cohomologie $H^1(X, \mathfrak{P})$ de X à valeur dans le faisceau de groupoïdes $\mathfrak{P}$ est la limite inductive des ensembles $H^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{P})$ relativement aux applications φ_{VU}, $\mathfrak{U}$ parcourant l'ordonné filtrant des classes de recouvrements ouverts de X.*

Il se peut que l'ensemble $H^1(X, \mathfrak{P})$ soit vide.

Tout cocycle $(f) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{P})$ représente une classe de cohomologie, c'est-à-dire un élément de $H^1(X, \mathfrak{P})$, à savoir l'image dans la limite inductive de la classe de (f) dans $H^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{P})$. Deux cocycles $(f) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{P})$ et $(g) \in Z^1(\mathfrak{V}, \mathfrak{P})$, $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$ désignant deux recouvrements ouverts de X, seront dits homologues s'ils représentent le même élément de $H^1(X, \mathfrak{P})$.

Exemple: Soit (E, p, Π) un espace fibré muni d'un groupoïde structural Π (cf. I, 6), et soit $\mathfrak{P}$ le faisceau sur X des germes d'homéomorphismes d'ouverts de X sur ouverts de Π. Les éléments de $H^1(X, \mathfrak{P})$ sont en correspondance biunivoque avec les classes d'isomorphie d'espaces fibrés sur X localement isomorphes à (E, p, Π).

3. Représentation induite par une représentation de groupoïdes

Soient $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}'$ deux faisceaux de groupoïdes sur l'espace X. Une représentation φ de $\mathfrak{P}$ dans $\mathfrak{P}'$ est une application continue de $\mathfrak{P}$ dans $\mathfrak{P}'$ se projetant sur l'identité de X et dont la restriction à chaque fibre $\mathfrak{P}_x$, pour tout $x \in X$, est une représentation du groupoïde $\mathfrak{P}_x$ dans le groupoïde $\mathfrak{P}'_x$. Elle induit une application de $H^1(X, \mathfrak{P})$ dans $H^1(X, \mathfrak{P}')$; en effet, $\mathfrak{U}$ étant un recouvrement ouvert de X, on définit une application de $Z^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{P})$ dans $Z^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{P}')$ en faisant correspondre au 1-cocycle $(f) = \{f_{ij}\}$ le 1-cocycle $\{\varphi f_{ij}\}$; elle applique des cocycles homologues sur des cocycles homologues; par passage aux quotients, on obtient donc une application de $H^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{P})$ dans $H^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{P}')$, et en passant à la limite inductive, une application φ^* de $H^1(X, \mathfrak{P})$ dans $H^1(X, \mathfrak{P}')$.

Soit f une application continue d'un espace topologique X' dans X, et soit $\mathfrak{P}'$ le faisceau de groupoïdes sur X image réciproque par f du faisceau $\mathfrak{P}$ (les points de $\mathfrak{P}'$ sont les couples (x', z) formés d'un point $x' \in X'$ et d'un point $z \in \mathfrak{P}_{f(x')}$). On a alors une application f^* de $H^1(X, \mathfrak{P})$ dans $H^1(X, \mathfrak{P}')$: si $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de X, soit $\mathfrak{U}'$ le recouvrement ouvert $\{f^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$ de X'; faisons correspondre au 1-cocycle $\{f_{ij}\} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{P})$ le 1-cocycle $\{f'_{ij}\} \in Z^1(\mathfrak{U}', \mathfrak{P}')$, où f'_{ij} est la section de $\mathfrak{P}'$ au-dessus de $f^{-1}(U_i) \cap f^{-1}(U_j)$ définie par $f'_{ij}(x') = (x', f_{ij}f(x'))$; on définit ainsi une application de $Z^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{P})$ dans $Z^1(\mathfrak{U}', \mathfrak{P}')$ qui applique deux cocycles homologues sur deux cocycles homologues; on en déduit par passage aux quotients une application f_U de $H^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{P})$ dans $H^1(\mathfrak{U}', \mathfrak{P}')$; comme les applications f_U commutent avec les applications φ_{VU} de la limite inductive, on a une application f^* de $H^1(X, \mathfrak{P})$ dans $H^1(X', \mathfrak{P}')$.

Plus généralement, soient $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}'$ deux faisceaux de groupoïdes sur les espaces topologiques X et X' respectivement. Une *représentation de $\mathfrak{P}$ dans $\mathfrak{P}'$ relative à une application continue f de X' dans X* est une représentation φ du faisceau de groupoïdes sur X', image réciproque par f de $\mathfrak{P}$, dans le faisceau $\mathfrak{P}'$. D'après ce qui précède, en composant les deux applications f^* et φ^*, on obtient une application (encore désignée par φ^*) de $H^1(X, \mathfrak{P})$ dans $H^1(X', \mathfrak{P}')$.

Proposition 1: *La correspondance associant à la représentation φ l'application φ^* est un foncteur de la catégorie Φ des représentations de faisceaux de groupoïdes dans la catégorie des applications d'ensembles de cohomologie.*

Ce foncteur fait correspondre à l'«objet» $\mathfrak{P}$ de Φ l'ensemble $H^1(X, \mathfrak{P})$. (Pour les notions de catégories et de foncteurs, on pourra se reporter à [4], g)).

4. Espaces fibrés déduits

Soit (E, p) un espace fibré sur l'espace $\mathfrak{B}$ des unités d'un faisceau de groupoïdes $\mathfrak{P}$ sur X, admettant $\mathfrak{P}$ comme groupoïde d'opérateurs; alors $\mathfrak{P}$ admet une représentation canonique dans le groupoïde des germes d'automorphismes locaux de (E, p) (cf. I, 6).

Tout cocycle $(f) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{P})$, où $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de X, permet de déduire de (E, p) un espace fibré (E^f, p^f) de base X. Considérons en effet l'espace somme $\Sigma = \bigcup_{i \in I}(i, E_i^f)$, où $E_i^f = p^{-1} f_{ii}(U_i)$. Comme (f) est un cocycle, la relation $(i, x_i) \sim (j, x_j)$, où $x_i \in E_i^f$ et $x_j \in E_j^f$, si et seulement si $x_j = f_{ji} x_i$ est une relation d'équivalence ($f_{ji} x_i$ désigne le transformé du point x_i de E par l'élément $f_{ji}(x)$ de $\mathfrak{P}$, x étant la projection de $p(x_i)$ dans X). La projection $(i, x_i) \to \mathfrak{p} p(x)$ de Σ sur X ($\mathfrak{p}$: projection de $\mathfrak{P}$ sur X) est compatible avec cette relation; par passage au quotient, on obtient un espace fibré (E^f, p^f) sur X qui sera appelé *l'espace fibré sur X déduit de (E, p) par (f)*.

Proposition 2: *Soit (E, p) un espace fibré sur $\mathfrak{B}$ admettant $\mathfrak{P}$ comme groupoïde d'opérateurs; l'espace fibré (E^f, p^f) déduit de (E, p) par un cocycle $(f) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{P})$ est localement isomorphe à $(E, p, \mathfrak{P})$. Les espaces fibrés déduits de (E, p) par deux cocycles homologues sont isomorphes, relativement à leur structure d'espace fibré localement isomorphe à $(E, p, \mathfrak{P})$* (cf. I, 6).

Remarques: 1. Vu cette proposition, on désignera par (E^s, p^s) la classe des espaces fibrés déduits de (E, p) par un cocycle (f) quelconque représentant l'élément s de $H^1(X, \mathfrak{P})$; par abus de langage, un espace fibré sur X isomorphe à un espace fibré quelconque de cette classe sera aussi désigné par (E^s, p^s) et appelé *un espace fibré déduit de (E, p) par s*. Remarquons encore que deux espaces fibrés de la classe (E^s, p^s) sont isomorphes, mais qu'en général il n'existe pas d'isomorphisme canonique entre eux.

2. Si (E, p) et (E', p') sont deux espaces fibrés sur $\mathfrak{B}$ admettant $\mathfrak{P}$ comme groupoïde d'opérateurs, et si ψ est une représentation de (E, p) dans (E', p') compatible avec les opérations de $\mathfrak{P}$, il existe une représentation ψ^f bien déterminée de l'espace fibré (E^f, p^f) dans l'espace fibré (E'^f, p'^f). La correspondance $\psi \to \psi^f$ est fonctorielle.

Nous allons donner dans les paragraphes suivants deux exemples d'espaces fibrés déduits qui joueront un rôle essentiel dans la suite.

5. Faisceau de groupes associé à un élément de $H^1(X, \mathfrak{P})$

Soit a (resp. b) la projection de $\mathfrak{P}$ sur $\mathfrak{B}$ qui fait correspondre à tout élément de $\mathfrak{P}$ son unité à droite (resp. à gauche). Soit $\mathfrak{G}$ le faisceau de groupes sur $\mathfrak{B}$ formé des éléments de $\mathfrak{P}$ ayant même unité à droite et à gauche. Le groupoïde $\mathfrak{P}$ peut être considéré de la manière suivante comme groupoïde d'opérateurs sur $\mathfrak{G}$: si $z \in \mathfrak{P}$, $z_0 \in \mathfrak{G}$ et $a(z) = a(z_0) = b(z_0)$, alors le transformé de z_0 par z sera l'élément zz_0z^{-1} de $\mathfrak{G}$; ainsi $\mathfrak{P}$ respecte la structure de groupe sur chaque fibre du faisceau $\mathfrak{G}$ sur $\mathfrak{B}$; on peut donc déduire du faisceau $\mathfrak{G}$, par un cocycle $(f) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{P})$, un faisceau de groupes $\mathfrak{G}^f$ sur X appelé le *faisceau de groupes associé à* (f); par abus de langage (cf. 4, remarque 1), $\mathfrak{G}^s$ sera appelé un faisceau de groupes associé à l'élément s de $H^1(X, \mathfrak{P})$.

Proposition 3: *Soit* (E^f, p^f) *l'espace fibré déduit par un cocycle* (f) *d'un espace fibré* (E, p) *sur* $\mathfrak{B}$ *admettant* $\mathfrak{P}$ *comme groupoïde d'opérateurs. Le faisceau de groupes* $\mathfrak{G}^f$ *associé à* (f) *admet une représentation canonique sur le groupoïde des germes d'automorphismes locaux de* (E^f, p^f).

Il est entendu que (E^f, p^f) est muni de sa structure d'espace fibré localement isomorphe à $(E, p, \mathfrak{P})$.

Remarques: 1. Lorsque $\mathfrak{P}$ est un groupoïde fidèle d'opérateurs sur (E, p) (cf. I, 6), cette représentation est un isomorphisme; le groupe $H^0(X, \mathfrak{G}^f)$ est canoniquement isomorphe au groupe des automorphismes de (E^f, p^f).

2. Comme $\mathfrak{G}^f$ est un faisceau de groupes sur X, l'ensemble $H^1(X, \mathfrak{G}^f)$ est défini. Si (f) et (g) sont deux cocycles homologues représentant le même élément s de $H^1(X, \mathfrak{P})$, les ensembles $H^1(X, \mathfrak{G}^f)$ et $H^1(X, \mathfrak{G}^g)$ sont en correspondance biunivoque *canonique*.

3. Soit φ une représentation d'un faisceau de groupoïdes $\mathfrak{P}$ sur X dans un faisceau de groupoïdes $\mathfrak{P}'$ sur X' relative à une application continue f de X' dans X; elle induit une application φ^* de $H^1(X, \mathfrak{P})$ dans $H^1(X', \mathfrak{P}')$ (cf. 3), et une représentation relative à f d'un faisceau de groupes $\mathfrak{G}^s$ associé à $s \in H^1(X, \mathfrak{P})$ dans un faisceau de groupes $\mathfrak{G}'^{s'}$ associé à $s' = \varphi^*(s)$, d'où une représentation φ^s de $H^1(X, \mathfrak{G}^s)$ dans $H^1(X', \mathfrak{G}'^{s'})$. La correspondance $\varphi \to \varphi^s$ est fonctorielle (si l'on convient de choisir un représentant parmi les ensembles $H^1(X, \mathfrak{G}^s)$).

6. Faisceau principal associé à un élément de $H^1(X, \mathfrak{P})$

Le groupoïde $\mathfrak{P}$, muni de sa projection a sur $\mathfrak{B}$, peut être considéré comme un espace fibré sur $\mathfrak{B}$ sur lequel $\mathfrak{P}$ est groupoïde d'opérateurs, l'action d'un élément $z \in \mathfrak{P}$ sur un élément z_0 tel que $a(z_0) = a(z)$ étant z_0z^{-1}. L'espace fibré $(\mathfrak{P}^f, a^f)$ déduit de $(\mathfrak{P}, a)$ par un cocycle $(f) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{P})$ sera appelé le *faisceau principal associé à* (f), et (cf. 4, remarque 1) un espace fibré $(\mathfrak{P}^s, a^s)$ déduit de $(\mathfrak{P}, a)$ par $s \in H^1(X, \mathfrak{P})$ un *faisceau principal associé à* s.

Le groupoïde d'opérateurs $\mathfrak{P}$ sur l'espace fibré $(\mathfrak{P}, a)$ laisse invariante la projection b de $\mathfrak{P}$ sur $\mathfrak{B}$, et $\mathfrak{P}$ agit également comme groupoïde d'opérateurs à gauche sur $\mathfrak{P}$ muni de la projection b. On en déduit que $(\mathfrak{P}^f, a^f)$ *est muni d'une projection canonique* b^f *dans* $\mathfrak{B}$ *et que* $\mathfrak{P}$ *est groupoïde d'opérateurs sur* $(\mathfrak{P}^f, b^f)$. Remarquons que $\mathfrak{P}$ est simplement transitif dans chaque fibre de $(\mathfrak{P}^f, a^f)$.

Proposition 4: *Soit* (E^f, p^f) *l'espace fibré déduit par un cocycle* (f) *d'un espace fibré* (E, p) *sur* $\mathfrak{B}$ *admettant* $\mathfrak{P}$ *comme groupoïde fidèle d'opérateurs; le faisceau principal associé à* (f) *s'identifie au faisceau sur* X *des germes d'isomorphismes locaux de* (E^f, p^f) *dans* (E, p).

La projection b^f s'identifie à la projection naturelle de ce faisceau dans $\mathfrak{B}$, et l'action de $\mathfrak{P}$ sur $(\mathfrak{P}^f, b^f)$ s'identifie à l'action naturelle de $\mathfrak{P}$ sur ce faisceau.

Si $\mathfrak{P}$ n'est pas un groupoïde fidèle d'opérateurs sur (E, p), le faisceau principal associé à (f) admet une représentation canonique sur le faisceau des germes d'isomorphismes locaux de (E^f, p^f) dans (E, p).

Il résulte de la proposition 4 que l'espace fibré (E^f, p^f) est canoniquement isomorphe au quotient du sous-espace du produit $\mathfrak{P}^f \times E$ formé des couples (h, y) tels que $b^f(h) = p(y)$ par la relation d'équivalence qui identifie les couples (zh, zy) et (h, y), où $z \in \mathfrak{P}$ et $a(z) = p(y)$.

Cocycle maximal: Soit K l'ensemble de tous les relèvements k d'ouverts V_k de X dans le faisceau principal $(\mathfrak{P}^f, a^f)$. Pour tout couple $k, k' \in K$, soit $g_{kk'}$ l'application continue de $V_k \cap V_{k'}$ dans $\mathfrak{P}$ qui associe à tout $x \in V_k \cap V_{k'}$ l'élément $g_{kk'}(x)$ unique de $\mathfrak{P}$ tel que $k(x) = g_{kk'}(x) k'(x)$. Si l'on identifie les applications $g_{kk'}$ avec les sections qu'elles déterminent dans $\mathfrak{P}$, alors $(g) = \{g_{kk'}\}$ est un cocycle $\in Z^1(\mathfrak{V}, \mathfrak{P})$ relatif au recouvrement $\mathfrak{V} = \{V_k\}_{k \in K}$ et qui représente le même élément $s \in H^1(X, \mathfrak{P})$ que (f). Il sera appelé *un cocycle maximal représentant* s: si $(h) \in Z^1(\mathfrak{W}, \mathfrak{P})$ représente aussi s, où $\mathfrak{W} = \{W_m\}_{m \in L}$ est un recouvrement ouvert de X, il existe une application τ (qui n'est pas unique en général) de L dans K telle que $W_m = V_{\tau m}$ et $h_{mn} = g_{\tau m \tau n}$. Si (h) est aussi un cocycle maximal représentant s, l'application τ est biunivoque.

Cette construction montre que la donnée d'un faisceau $\mathfrak{Q}$ sur X muni d'une projection q dans $\mathfrak{B}$ relativement à laquelle $\mathfrak{P}$ est groupoïde d'opérateurs sur $\mathfrak{Q}$, simplement transitif dans chaque fibre de $\mathfrak{Q}$, détermine un élément s de $H^1(X, \mathfrak{P})$, et que $\mathfrak{Q}$ est un faisceau principal associé à s.

7. Sous-faisceau complet. Le foncteur $H^1(X, \mathfrak{P}) \to H^0(X, \mathfrak{B}/\mathfrak{P})$

Un *sous-faisceau complet* $\mathfrak{P}'$ *de* $\mathfrak{P}$ est un sous-faisceau de groupoïdes de $\mathfrak{P}$ tel que chaque fibre $\mathfrak{P}'_x$ de $\mathfrak{P}'$ au-dessus du point x de X soit un sous-groupoïde complet du groupoïde $\mathfrak{P}_x$.

On a immédiatement la

Proposition 5: *Si* $\mathfrak{P}'$ *est un sous-faisceau complet de* $\mathfrak{P}$, *l'application de* $H^1(X, \mathfrak{P}')$ *dans* $H^1(X, \mathfrak{P})$, *induite par l'injection de* $\mathfrak{P}'$ *dans* $\mathfrak{P}$, *est injective.*

On remarquera que, si (E, p) est un espace fibré sur $\mathfrak{B}$ admettant $\mathfrak{P}$ comme groupoïde d'opérateurs, l'espace fibré déduit de l'espace fibré restriction de (E, p) au sous-espace des unités de $\mathfrak{P}'$, par un cocycle $(f) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{P}')$, est identique à l'espace fibré déduit de (E, p) par le cocycle (f) considéré comme un élément de $Z^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{P})$. En particulier, les faisceaux principaux associés à (f) et à son image dans $Z^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{P})$ sont identiques.

L'intersection de deux sous-faisceaux complets de $\mathfrak{P}$ est encore un sous-faisceau complet de $\mathfrak{P}$. Toute partie ouverte de $\mathfrak{P}$ se projetant sur X engendre un sous-faisceau complet, à savoir l'intersection de tous les sous-faisceaux complets qui la contiennent. *A tout élément s de* $H^1(X, \mathfrak{P})$ *correspond un sous-faisceau complet minimal* $\mathfrak{P}_s$ *de* $\mathfrak{P}$; en effet, si $(f) = \{f_{ij}\}$ et $(g) = \{g_{mn}\}$ sont deux cocycles qui représentent s, les sections locales f_{ij} et g_{mn} engendrent le même sous-faisceau complet $\mathfrak{P}_s$; il est de plus minimal, car le groupoïde $\mathfrak{P}_s$ agit transitivement dans chaque fibre du sous-faisceau $\mathfrak{B}_s$ de ses unités.

Soit $\mathfrak{B}/\mathfrak{P}$ le faisceau quotient de $\mathfrak{B}$ par la relation d'équivalence déterminée sur $\mathfrak{B}$ par l'action de $\mathfrak{P}$. Il existe une correspondance biunivoque naturelle entre les sous-groupoïdes complets minimaux de $\mathfrak{P}$ et les sections du faisceau $\mathfrak{B}/\mathfrak{P}$, c'est-à-dire les éléments de $H^0(X, \mathfrak{B}/\mathfrak{P})$. On a donc la

Proposition 6: *Il existe une application fonctorielle* χ *de* $H^1(X, \mathfrak{P})$ *dans* $H^0(X, \mathfrak{B}/\mathfrak{P})$.

L'application χ est un homomorphisme des foncteurs $H^1(X, \mathfrak{P})$ et $H^0(X, \mathfrak{B}/\mathfrak{P})$ définis sur la catégorie des représentations de faisceaux de groupoïdes (et dont les objets sont les faisceaux de groupoïdes).

On peut se proposer de rechercher quelle est l'image inverse d'un élément σ de $H^0(X, \mathfrak{B}/\mathfrak{P})$ par χ, autrement dit de calculer $H^1(X, \mathfrak{P}_\sigma)$, où $\mathfrak{P}_\sigma$ est le sous-faisceau complet minimal de $\mathfrak{P}$ déterminé par la section σ de $\mathfrak{B}/\mathfrak{P}$. La réponse est donnée par la

Proposition 7: *Soit* $\mathfrak{P}_\sigma$ *un sous-faisceau de groupoïdes complet minimal de* $\mathfrak{P}$. *Supposons qu'il existe un élément* $s \in H^1(X, \mathfrak{P}_\sigma)$, *et soit* $\mathfrak{G}^s$ *un faisceau de groupes sur* X *associé à* s. *Il existe alors une application biunivoque canonique* μ *de* $H^1(X, \mathfrak{P}_\sigma)$ *sur* $H^1(X, \mathfrak{G}^s)$ *qui applique* s *sur la classe neutre de* $H^1(X, \mathfrak{G}^s)$.

Vu l'importance de cette proposition, nous en donnons une brève démonstration.

Soit $(f) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{P}_\sigma)$ un cocycle relatif au recouvrement $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de X et représentant l'élément s. Le faisceau de groupes $\mathfrak{G}^f$ associé à (f) (cf. 4 et 5) est le quotient de l'espace somme $\Sigma = \bigcup_{i \in I} (i, G_i^f)$, où G_i^f est formé des éléments g_i de $\mathfrak{P}_\sigma$ tels que $a(g_i) = b(g_i) \in f_{ii}(U_i)$, par la relation d'équivalence qui identifie (i, g_i) et (j, g_j) si $g_j = f_{ji} g_i f_{ij}$; on désignera par $\{i, g_i\}$ la classe de (i, g_i); c'est donc un point de $\mathfrak{G}^f$.

Soit $s' \in H^1(X, \mathfrak{P}_\sigma)$; on peut représenter cet élément par un cocycle $(h) \in Z^1(\mathfrak{V}, \mathfrak{P}_\sigma)$, où $\mathfrak{V} = \{V_l\}_{l \in L}$ est un recouvrement ouvert de X plus fin que $\mathfrak{U}$, et tel que, pour une application τ de L dans I avec $V_l \subset U_{\tau l}$, h_{ll} soit la restriction de $f_{\tau l \tau l}$ à V_l; ceci est possible parce que $\mathfrak{P}_\sigma$ est minimal. En posant $g_{lm} = \{m, f_{\tau m \tau l} h_{lm}\}$, on définit un cocycle $(g) = \{g_{lm}\} \in Z^1(\mathfrak{V}, \mathfrak{G}^f)$; la classe $\mu(s') \in H^1(X, \mathfrak{G}^f)$ qu'il représente est indépendante du cocycle (h) qui représente s'.

Inversement, soit $t \in H^1(X, \mathfrak{G}^f)$; on le représente par un cocycle $(g) \in Z^1(\mathfrak{V}, \mathfrak{G}^f)$, où $\mathfrak{V} = \{V_l\}_{l \in L}$ est un recouvrement ouvert de X plus fin que $\mathfrak{U}$. Soit τ une application de L dans I telle que $V_l \subset U_{\tau l}$. Si le cocycle (g) est défini par $g_{lm} = \{m, t_{lm}\}$, en posant $h_{lm} = f_{\tau l \tau m} t_{lm}$, on définit un cocycle $(h) = \{h_{lm}\} \in Z^1(\mathfrak{V}, \mathfrak{P}_\sigma)$ qui représente un élément $\nu(t) \in H^1(X, \mathfrak{P}_\sigma)$ indépendant du choix de (h). On vérifie immédiatement que $\nu = \mu^{-1}$, donc μ est une application bijective. En tenant compte de la remarque 2 de 5, la proposition 7 est démontrée.

Remarques: 1. *L'application μ est fonctorielle:* soit φ une représentation d'un faisceau minimal de groupoïdes $\mathfrak{P}$ sur X dans un faisceau minimal de groupoïdes $\mathfrak{P}'$ sur un espace X', induisant la représentation φ^* de $H^1(X, \mathfrak{P})$ dans $H^1(X', \mathfrak{P}')$, qui applique l'élément s sur un élément s'; elle induit également une représentation φ^s de $H^1(X, \mathfrak{G}^s)$ dans $H^1(X', \mathfrak{G}'^{s'})$ (cf. 5, remarque 3); le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} H^1(X, \mathfrak{P}) & \xrightarrow{\varphi^*} & H^1(X', \mathfrak{P}') \\ \downarrow \mu & & \downarrow \mu \\ H^1(X, \mathfrak{G}^s) & \xrightarrow{\varphi^s} & H^1(X', \mathfrak{G}'^{s'}) \end{array}$$

2. Si le faisceau de groupoïdes $\mathfrak{P}$ est simple, (c'est-à-dire que chaque élément de $\mathfrak{P}$ est déterminé par ses unités à droite et à gauche), l'application $\chi: H^1(X, \mathfrak{P}) \to H^0(X, \mathfrak{B}/\mathfrak{P})$ est bijective, puisque $\mathfrak{G}$ est réduit dans ce cas au faisceau $\mathfrak{B}$. Dans ce cas, tout faisceau principal associé à $s \in H^1(X, \mathfrak{P})$ est canoniquement isomorphe au sous-faisceau $\mathfrak{B}_s$ de $\mathfrak{B}$.

3. Comme on l'a vu (5, propos. 3), un faisceau de groupes $\mathfrak{G}^s$ associé à s agit comme faisceau de groupes d'opérateurs sur tout espace fibré (E^s, p^s) déduit par s d'un espace fibré (E, p) sur $\mathfrak{B}$ admettant $\mathfrak{P}$ comme groupoïde d'opérateurs; tout élément de $H^1(X, \mathfrak{G}^s)$ permet donc de déduire de (E^s, p^s) un espace fibré sur X. *Tout espace fibré déduit de* (E, p) *par un élément* $t \in H^1(X, \mathfrak{P}_\sigma)$ *est isomorphe à un espace fibré déduit de* (E^s, p^s) *par l'élément* $\mu(t) \in H^1(X, \mathfrak{G}^s)$.

8. Cas d'un faisceau constant. Holonomie

Supposons que le faisceau de groupoïdes $\mathfrak{P}$ sur X soit le faisceau des germes d'applications constantes de X dans un groupoïde Π. Alors $\mathfrak{P}$ est canoniquement isomorphe au produit $X \times \Pi$ (où Π est muni de la topologie discrète) muni de sa projection canonique sur X, le sous-faisceau $\mathfrak{B}$ des unités de $\mathfrak{P}$ s'identifiant au produit de X par l'ensemble B des unités de Π (B étant muni de la topologie discrète). Comme dans le cas des faisceaux constants de groupes, $H^1(X, \mathfrak{P})$ sera souvent désigné par $H^1(X, \Pi)$.

Tout faisceau principal $(\mathfrak{P}^s, a^s)$ associé à un élément $s \in H^1(X, \Pi)$ sera appelé un *espace fibré principal sur X à groupoïde structural discret Π*. Soit β^s le composé de la projection canonique b^s de $\mathfrak{P}^s$ sur $\mathfrak{B}$ avec la projection canonique de $\mathfrak{B}$ sur B. Relativement à cette projection, le groupoïde Π agit comme groupoïde d'opérateurs sur $\mathfrak{P}^s$ simplement transitif dans chaque fibre de $(\mathfrak{P}^s, a^s)$ (cf. 6). Remarquons que $(\mathfrak{P}^s, a^s)$ *est un revêtement de* X, car $\mathfrak{P}$ est un revêtement (trivial) de $\mathfrak{B}$. Les considérations qui suivent sont analogues à celles que M. C. EHRESMANN a développées dans ses cours sur les revêtements.

Un *isomorphisme de la fibre* $\mathfrak{P}^s_x$ de $\mathfrak{P}^s$ au-dessus de $x \in X$ *sur la fibre* $\mathfrak{P}^s_y$ au-dessus de $y \in X$ est une application biunivoque i de $\mathfrak{P}^s_x$ sur $\mathfrak{P}^s_y$ compatible avec les opérations de Π, c'est-à-dire que, pour tout $\hat{x} \in \mathfrak{P}^s_x$, on a $\beta^s i(\hat{x}) = \beta^s(\hat{x})$ et $i(z\hat{x}) = z(i(\hat{x}))$, où z est un élément de Π dont l'unité à droite est $\beta^s(\hat{x})$.

Soit Φ^s le groupoïde de ces isomorphismes, α et β ses projections canoniques sur X faisant correspondre à un isomorphisme de $\mathfrak{P}^s_x$ sur $\mathfrak{P}^s_y$ les points x et y respectivement; les unités de Φ^s sont les isomorphismes identiques des fibres de $\mathfrak{P}^s$ et correspondent donc biunivoquement aux points de X.

On peut définir sur Φ^s une topologie telle que (Φ^s, α) soit un revêtement de X: si i est un isomorphisme de $\mathfrak{P}^s_x$ sur $\mathfrak{P}^s_y$ et U un voisinage ouvert de x admettant un relèvement f dans $\mathfrak{P}^s$, pour tout $x' \in U$, les isomorphismes de $\mathfrak{P}^s_{x'}$ sur $\mathfrak{P}^s_y$ qui appliquent $f(x')$ sur $if(x)$ forment un voisinage ouvert de i. L'application β de Φ^s sur X est localement constante.

Supposons X localement connexe. La réunion Φ^s_0 des composantes connexes des unités de Φ^s est un sous-groupoïde de Φ^s appelé le *groupoïde d'holonomie de* $\mathfrak{P}^s$, et le groupe formé des isomorphismes de $\mathfrak{P}^s_x$ sur $\mathfrak{P}^s_x$ appartenant à Φ^s_0 *le groupe d'holonomie de* $\mathfrak{P}^s$ *au point* x.

L'espace Φ^s_0, muni de la restriction de α, est un revêtement de X. Si $\hat{x} \in \mathfrak{P}^s_x$, le groupe d'holonomie de $\mathfrak{P}^s$ au point x est isomorphe au sous-groupe formé des éléments z de Π qui transforment en elle-même la composante connexe de $\mathfrak{P}^s$ contenant $\hat{x}$; ces éléments appartiennent au groupe G_b des éléments de Π ayant comme unité à droite et à gauche $b = \beta^s(\hat{x})$: si i est un élément du groupe d'holonomie appliquant $\hat{x}$ sur $\hat{x}'$, il existe un élément unique z de G_b tel que $\hat{x}' = z\hat{x}$. Les groupes d'holonomie de $\mathfrak{P}^s$ en deux points x et y appartenant à la même composante connexe de X sont isomorphes. Si X est connexe, on appellera *groupe d'holonomie de s* un groupe isomorphe au groupe d'holonomie de $\mathfrak{P}^s$ en un point quelconque de X.

Tout chemin C dans X d'origine x et d'extrémité y se relève d'une manière unique suivant un chemin dans $\mathfrak{P}^s$ d'origine donnée $\hat{x} \in \mathfrak{P}^s_x$; soit $i(\hat{x})$ son extrémité: l'application $\hat{x} \to i(\hat{x})$ est un isomorphisme de $\mathfrak{P}^s_x$ sur $\mathfrak{P}^s_y$ qui appartient au groupoïde d'holonomie Φ^s_0; cet isomorphisme est l'extrémité du relèvement de C dans le revêtement (Φ^s, α) d'origine l'automorphisme identique de $\mathfrak{P}^s_x$; il ne dépend que de la classe d'homotopie de C. Si X est localement connexe par arc, tout élément de Φ^s_0 peut être obtenu de cette manière. On a ainsi une *antireprésentation* bien déterminée *du premier groupe d'homotopie* $\pi_1(X, x)$ de X de point base x *sur le groupe d'holonomie de* $\mathfrak{P}^s$ *au point* x. Dans le cas où X est connexe et localement simplement connexe par arc, cette représentation définit $\mathfrak{P}^s$ à un isomorphisme près.

Supposons maintenant X connexe; alors $\mathfrak{P}^s$ est appliqué par β^s sur un sous-groupoïde complet minimal Π_0 de Π. Soit (f) le 1-cocycle relatif au recouvrement de X formé du seul ouvert X et qui lui fait correspondre l'application constante sur une unité b de Π_0. Le faisceau de groupes sur X associé à (f) est dans ce cas le faisceau constant isomorphe au produit de X par le groupe G_b formé des éléments de Π ayant b comme unité à droite et à gauche. D'après la proposition 7, on a la

Proposition 8: *Si X est connexe, l'ensemble $H^1(X, \Pi_0)$, où Π_0 est un sous-groupoïde complet minimal de Π dont b est une unité, est en correspondance biunivoque canonique avec l'ensemble $H^1(X, G_b)$, où G_b est le groupe des éléments de Π ayant b comme unité à droite et à gauche.*

Si b' est une autre unité de Π_0, on a un isomorphisme de G_b sur $G_{b'}$ défini à un automorphisme intérieur près, mais qui induit un isomorphisme canonique de $H^1(X, G_b)$ sur $H^1(X, G_{b'})$ (cf. 5, remarque 2).

Comme on le sait, lorsque X est connexe et localement simplement connexe par arc, les éléments de $H^1(X, G_b)$ correspondent aux classes de représentations de $\pi_1(X, x)$ dans G_b définies à un automorphisme intérieur près. L'image de $\pi_1(X, x)$ dans G_b par une représentation associée à un élément $s \in H^1(X, \Pi_0)$ est isomorphe au groupe d'holonomie de s.

9. Suite exacte de cohomologie

Voici un cas particulier de suite exacte de cohomologie relative à une suite exacte de faisceaux de groupoïdes.

Soit $\mathfrak{P}$ un faisceau de groupoïdes sur X et $\mathfrak{B}$ le sous-faisceau de ses unités; soit φ_0 une représentation sur $\mathfrak{B}$ d'un faisceau d'ensembles $\mathfrak{B}'$ sur X, et supposons que $\mathfrak{P}$ soit un groupoïde d'opérateurs sur $(\mathfrak{B}', \varphi_0)$. Le groupoïde extension du groupoïde $\mathfrak{P}$ d'opérateurs sur $\mathfrak{B}'$ (cf. I, 5) peut être considéré comme un faisceau de groupoïdes $\mathfrak{P}'$ sur X dont le faisceau des unités est $\mathfrak{B}'$; il admet une représentation canonique φ sur $\mathfrak{P}$. Ecrivons la suite

$$\mathfrak{B}' \xrightarrow{i} \mathfrak{P}' \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{P} \to \mathfrak{B} \tag{1}$$

analogue à une suite exacte; la première application est l'injection de $\mathfrak{B}'$ dans $\mathfrak{P}'$. On se pose le

Problème: *Etant donné un élément $s \in H^1(X, \mathfrak{P})$, déterminer les éléments de $H^1(X, \mathfrak{P}')$ appliqués sur s par la représentation φ: $H^1(X, \mathfrak{P}') \to H^1(X, \mathfrak{P})$ induite par φ.*

Soit $\mathfrak{G}$ le faisceau de groupes sur $\mathfrak{B}$ formé des éléments de $\mathfrak{P}$ ayant même unité à droite et à gauche, et soit $\mathfrak{P}_0'$ le sous-faisceau de $\mathfrak{P}'$ appliqué sur $\mathfrak{G}$ par φ. Alors $\mathfrak{P}$ peut être considéré comme groupoïde d'opérateurs sur $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{B}'$ et $\mathfrak{P}_0'$ considérés comme espaces fibrés sur $\mathfrak{B}$; par exemple, si $z_0' \in \mathfrak{P}_0'$ est le couple (z_0, y), où $z_0 \in \mathfrak{G}$, et $y \in \mathfrak{B}'$ avec $\varphi_0(y) = a(z_0)$ (cf. I, 5), l'action de $z \in \mathfrak{P}$, tel que $a(z) = a(z_0)$, sur z_0' sera l'élément $zz_0' = (zz_0z^{-1}, zy)$.

Soient alors $\mathfrak{G}^s$, $\mathfrak{P}'^s$, $\mathfrak{B}'^s$ les espaces fibrés sur X déduits resp. de $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{B}'$ par un cocycle (f) représentant l'élément s. On a une suite de représentations déduite de la suite (1) (cf. 4, remarque 2)

$$\mathfrak{B}'^s \xrightarrow{i^s} \mathfrak{P}'^s \xrightarrow{\varphi^s} \mathfrak{G}^s \to X \tag{2}$$

$\mathfrak{G}^s$ étant encore un faisceau de groupes d'opérateurs sur $\mathfrak{B}'^s$ (cf. 5) et $\mathfrak{P}'^s$ s'identifiant au groupoïde extension du groupoïde $\mathfrak{G}^s$ d'opérateurs sur $\mathfrak{B}'^s$.

Soit $\mathfrak{P}_s$ le sous-faisceau complet minimal de $\mathfrak{P}$ déterminé par s (cf. 7) et soit $\mathfrak{P}_s'$ le sous-faisceau de groupoïdes complet $\varphi^{-1}(\mathfrak{P}_s)$ de $\mathfrak{P}'$. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^1(X, \mathfrak{P}'_s) & \xrightarrow{\varphi} & H^1(X, \mathfrak{P}_s) \\ \downarrow \mu' & & \downarrow \mu \\ H^1(X, \mathfrak{P}'^s) & \xrightarrow{\varphi^s} & H^1(X, \mathfrak{G}^s) \end{array}$$

où les applications verticales sont bijectives, μ' étant définie de la même manière que μ (cf. 7, démonstr. de la propos. 7). Comme s est appliqué par μ sur la classe neutre de $H^1(X, \mathfrak{G}^s)$, *les éléments de* $H^1(X, \mathfrak{P}')$ *appliqués par* φ *sur* s *sont en correspondance biunivoque (par* μ'*) avec les éléments de* $H^1(X, \mathfrak{P}'^s)$ *appliqués par* φ^s *sur la classe neutre de* $H^1(X, \mathfrak{G}^s)$.

Or la suite (2) induit la suite

$$H^0(X, \mathfrak{B}'^s) \xrightarrow{i^s} H^1(X, \mathfrak{P}'^s) \xrightarrow{\varphi^s} H^1(X, \mathfrak{G}^s) \tag{3}$$

qui est *exacte* dans le sens suivant: *les éléments de* $H^1(X, \mathfrak{P}'^s)$ *appliqués par* φ^s *sur la classe neutre* ε *de* $H^1(X, \mathfrak{G}^s)$ *sont les images par* i^s *des éléments de* $H^0(X, \mathfrak{B}'^s)$. *De plus,* $H^0(X, \mathfrak{G}^s)$ *est un groupe d'opérateurs sur* $H^0(X, \mathfrak{B}'^s)$: *deux éléments* σ_1 *et* σ_2 *de* $H^0(X, \mathfrak{B}'^s)$ *ont la même image par* i^s *si et seulement s'il existe un élément* $g \in H^0(X, \mathfrak{G}^s)$ *transformant* σ_1 *en* σ_2.

En effet, il est clair que, si $s' \in H^1(X, \mathfrak{P}'^s)$ est l'image par i^s d'un élément de $H^0(X, \mathfrak{B}'^s)$, alors $\varphi^s(s') = \varepsilon$. Inversement, si $\varphi^s(s') = \varepsilon$, soit $(f') \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{P}'^s)$ un cocycle représentant s', où $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de X; on a $f'_{ij} = (g_{ij}, l_{ij})$, où b_{ij} et et g_{ij} sont des sections de $\mathfrak{B}'^s$ et $\mathfrak{G}^s$ au-dessus de $U_i \cap U_j$; on a les relations $g_{ik} = g_{ij} g_{jk}$ et $b_{ii} = g_{ij} b_{jj}$ sur $U_i \cap U_j$. Comme par hypothèse $\{g_{ij}\}$ est un cocycle représentant ε, il existe, si $\mathfrak{U}$ est assez fin, des relèvements h_i de U_i dans $\mathfrak{G}^s$ tels que $h_i g_{ij} h_j^{-1}$ soit le relèvement de $U_i \cap U_j$ dans la section neutre de $\mathfrak{G}^s$. Le cocycle $f''_{ij} = (h_i g_{ij} h_j^{-1}, h_j b_{ij})$ est homologue à (f'); il est l'image par i^s de la section de $\mathfrak{B}'^s$ qui est réunion des sections locales $h_i b_{ii}$. Si les sections σ_1 et σ_2 de $\mathfrak{B}'^s$ déterminent le même élément de $H^1(X, \mathfrak{P}'^s)$, il existe un recouvrement $\mathfrak{B} = \{V_i\}_{i \in I}$ de X et des relèvements g_i de V_i dans $\mathfrak{G}^s$ tels que, sur V_i, $\sigma_1 = g_i \sigma_2$ et $g_i g_j^{-1}$ soit le relèvement de $V_i \cap V_j$ dans la section neutre de $\mathfrak{G}^s$; les sections locales g_i admettent donc une réunion $g \in H^0(X, \mathfrak{G}^s)$ et on a $\sigma_1 = g \sigma_2$.

Donc, si l'on considère comme équivalentes deux sections σ_1 et σ_2 de deux espaces fibrés sur X lorsqu'il existe un isomorphisme ψ du premier sur le second tel que $\sigma_2 = \psi \sigma_1$, la réponse au problème posé est donnée par la

Proposition 9: *Les éléments de* $H^1(X, \mathfrak{P}')$ *appliqués par* φ *sur un élément* s *de* $H^1(X, \mathfrak{P})$ *sont en correspondance biunivoque canonique avec les classes d'équivalence de sections des espaces fibrés sur* X *déduits par* s *de l'espace fibré* $\mathfrak{B}'$ *sur* $\mathfrak{B}$.

Soit $\mathfrak{P}$ un faisceau de groupoïdes sur X et soit $\mathfrak{P}_0$ un sous-faisceau de groupoïdes de $\mathfrak{P}$ ayant le même sous-faisceau d'unités $\mathfrak{B}$ que $\mathfrak{P}$. Si l'on identifie deux éléments z_1 et z_2 de $\mathfrak{P}$ s'il existe un élément z_0 de $\mathfrak{P}_0$ tel que $z_2 = z_0 z_1$, on obtient un faisceau quotient $\mathfrak{P}/\mathfrak{P}_0$ et $\mathfrak{P}$ est encore un groupoïde d'opérateurs sur $\mathfrak{P}/\mathfrak{P}_0$ relativement à la projection a_0 sur $\mathfrak{B}$ déduite de la projection a de $\mathfrak{P}$ sur $\mathfrak{B}$.

Par une démonstration directe, ou à l'aide d'une suite exacte analogue à celle qu'on utilise pour résoudre le problème de la réduction du groupe structural, dans la théorie de la cohomologie à valeur dans un faisceau de groupes, on démontre la

Proposition 10: *Les éléments de $H^1(X, \mathfrak{P}_0)$ appliqués sur un élément $s \in H^1(X, \mathfrak{P})$, par l'application induite par l'injection de $\mathfrak{P}_0$ dans $\mathfrak{P}$, sont en correspondance biunivoque canonique avec les classes d'équivalence de sections d'un espace fibré sur X déduit par s de l'espace fibré $(\mathfrak{P}/\mathfrak{P}_0, a_0)$.*

CHAPITRE III

Γ-structures et Γ-structures feuilletées

Soit Γ un pseudogroupe d'automorphismes locaux d'un espace B. Une Γ-structure s sur un espace topologique X est un élément du premier ensemble de cohomologie de X à valeur dans le faisceau de groupoïdes $\mathfrak{P}_\Gamma$ formé des jets locaux de X dans le groupoïde Π_Γ des jets locaux de Γ (cf. introduction). Une application continue f d'un espace X' dans X définit, par image réciproque de s, une Γ-structure sur X'. De tout espace fibré sur B admettant Π_Γ comme groupoïde d'opérateurs, on peut déduire par s un espace fibré sur X défini à un isomorphisme près; par exemple, un espace fibré principal associé à s est déduit du groupoïde Π_Γ muni de sa projection source sur B. Le théorème 1 du § 6 permet de déterminer les Γ-structures sur X dans le cas particulier où Γ est déduit par localisation d'un groupe de transformations de B vérifiant une condition simple.

Une Γ-structure feuilletée sur X est définie comme une section σ du faisceau quotient du faisceau $\mathfrak{B}$ des jets de X dans B par la relation d'équivalence associée à l'action de Π_Γ sur $\mathfrak{B}$. Toute Γ-structure s sur X admet une Γ-structure feuilletée sous-jacente σ. Les Γ-structures feuilletées qui interviennent le plus souvent dans la pratique sont non dégénérées (cf. 9); elles sont sous-jacentes à une Γ-structure unique. Les notions de jets distingués, de groupoïde d'holonomie et de feuilletage localement simple (cf. [4], h)) sont dues à M. EHRESMANN et ont été adaptées à notre cadre; il apparaît ici que l'holonomie d'une feuille F d'une Γ-structure feuilletée sous-jacente à une Γ-structure s sur X caractérise la Γ-structure image réciproque de s par l'application identique de F dans X. Le paragraphe 12 définit les structures feuilletées régulières telles que M. EHRESMANN les a introduites dans ses cours. La démonstration du théorème de stabilité (13), qui a été d'abord énoncé et démontré par G. REEB dans le cas particulier des variétés feuilletées (cf. [15], a)), est inspirée de la démonstration donnée par EHRESMANN et SHIH dans [4], h). La proposition 5 du paragraphe 14, qui montre comment on peut réaliser les éléments du groupoïde d'holonomie, est importante pour les applications géométriques.

1. L'espèce des Γ-structures sur les espaces topologiques

Soit Γ un pseudogroupe d'automorphismes locaux d'un espace topologique B, et soit Π_Γ le groupoïde formé des jets locaux des transformations de Γ, muni de sa topologie naturelle d'espace étalé sur B par la projection source (ou but) (cf. I, 1, 2, 3).

Pour tout espace topologique X, l'espace des jets locaux d'applications continues d'ouverts de X dans Π_Γ est un faisceau de groupoïdes $\mathfrak{P}_\Gamma$ sur X. Le sous-faisceau $\mathfrak{B}$ de ses unités s'identifie à l'espace des jets locaux d'applications continues d'ouverts de X dans B, identifié au sous-espace des unités de Π_Γ. Le groupoïde Π_Γ est un groupoïde d'opérateurs sur l'espace $\mathfrak{B}$ muni de sa projection but β sur B (cf. I, 5), le transformé d'un jet local $y \in \mathfrak{B}$ de but $b \in B$ par un élément z de Π_Γ de source b, étant le composé des jets locaux zy. On a la

Proposition 1: *Le faisceau de groupoïdes $\mathfrak{P}_\Gamma$, considéré comme un groupoïde topologique dont $\mathfrak{B}$ est l'espace des unités, est canoniquement isomorphe au groupoïde extension du groupoïde Π_Γ d'opérateurs sur* $(\mathfrak{B}, \beta)$ (cf. I, 5).

Démonstration: Considérons l'application φ de $\mathfrak{P}_\Gamma$ dans le produit topologique $\Pi_\Gamma \times \mathfrak{B}$ qui fait correspondre à un jet local de X dans Π_Γ son but (qui est un élément de Π_Γ) et son unité à droite (qui est un élément de $\mathfrak{B}$). L'application φ est une représentation du groupoïde $\mathfrak{P}_\Gamma$ sur le groupoïde extension du groupoïde Π_Γ d'opérateurs sur $\mathfrak{B}$ qui est défini comme un sous-espace E de $\Pi_\Gamma \times \mathfrak{B}$ (cf. I, 5). Enfin φ est un homéomorphisme de $\mathfrak{P}_\Gamma$ sur E, comme on le vérifie en représentant les jets locaux par des applications pointées.

Tout homéomorphisme h de l'espace X sur un espace X' se prolonge suivant un isomorphisme bien déterminé des faisceaux de groupoïdes $\mathfrak{P}_\Gamma$ et $\mathfrak{P}'_\Gamma$ formés des jets locaux de X et X' dans Π_Γ, et il induit donc une application biunivoque h^* de $H^1(X, \mathfrak{P}_\Gamma)$ sur $H^1(X', \mathfrak{P}'_\Gamma)$.

Définition: *Tout élément* $s \in H^1(X, \mathfrak{P}_\Gamma)$ *sera appelé une Γ-structure sur l'espace topologique* X. L'espèce des Γ-structures sur les espaces topologiques est définie par le foncteur $h \to h^*$ de la catégorie des homéomorphismes des espaces topologiques dans la catégorie des applications biunivoques des ensembles de cohomologie (cf. [4], g)). Le couple (h, s) est un *isomorphisme* de la Γ-structure s sur X sur la Γ-structure $h^*(s)$ sur X'.

2. Image réciproque d'une Γ-structure par une application

Une application continue f d'un espace topologique X' dans X induit une représentation canonique f_Γ de $\mathfrak{P}_\Gamma$ dans $\mathfrak{P}'_\Gamma$ relative à f (cf. II, 3): au couple formé d'un point $x' \in X'$ et d'un jet local z de X dans Π_Γ de source $f(x')$ correspond le jet local composé du jet local de f au point x' et de z.

La correspondance $f \to f_\Gamma$ est un foncteur contravariant de la catégorie des applications continues des espaces topologiques dans la catégorie des représentations de faisceaux de groupoïdes. L'application f_Γ induit une application f^* de $H^1(X, \mathfrak{P}_\Gamma)$ dans $H^1(X', \mathfrak{P}'_\Gamma)$; la correspondance $f \to f^*$ est un foncteur contravariant.

Définition: *Si s est une Γ-structure sur X, c.-à-d. un élément de $H^1(X, \mathfrak{P}_\Gamma)$, l'élément $f^*(s)$ de $H^1(X', \mathfrak{P}'_\Gamma)$ sera appelé la Γ-structure sur X' image réciproque par f de la Γ-structure s sur X.*

Si f est l'application identique d'un sous-espace X' dans X, on dira aussi que $f^*(s)$ est la Γ-structure induite sur X' par s.

3. Sous-espèce de l'espèce des Γ-structures

On considère souvent des sous-espèces de l'espèce des Γ-structures en remplaçant la catégorie dont les objets sont les faisceaux de groupoïdes formés de tous les jets locaux d'applications continues dans Π_Γ par une sous-catégorie dont les objets sont des sous-faisceaux complets. Un sous-faisceau complet (cf. II, 7) du faisceau de groupoïdes $\mathfrak{P}_\Gamma$ sur X est formé des éléments de $\mathfrak{P}_\Gamma$ dont les unités appartiennent à un sous-faisceau du faisceau $\mathfrak{B}$ des unités de $\mathfrak{P}_\Gamma$ stable par les opérations de Π_Γ (cf. 1).

Rappelons que, si $\mathfrak{P}$ est un sous-faisceau complet de $\mathfrak{P}_\Gamma$, l'application de $H^1(X, \mathfrak{P})$ dans $H^1(X, \mathfrak{P}_\Gamma)$, induite par l'injection de $\mathfrak{P}$ dans $\mathfrak{P}_\Gamma$, est injective (cf. II, propos. 5).

Exemples: 1. *L'espèce des* (B, Γ)*-structures.* On peut restreindre la catégorie des applications continues des espaces topologiques à la sous-catégorie C_B dont les objets sont les espaces topologiques localement homéomorphes à B et dont les «morphismes» sont les applications de ces espaces qui sont localement des homéomorphismes. On considérera sur chaque espace X de C_B le faisceau de groupoïdes formé des jets locaux des homéomorphismes locaux de X dans Π_Γ (le sous-faisceau $\mathfrak{B}$ de ses unités est formé des jets d'homéomorphismes locaux de X dans B). On obtient ainsi *l'espèce des structures d'espaces localement isomorphes à B muni du pseudogroupe Γ ou,* comme elle sera appelée ici, *l'espèce des* (B, Γ)*-structures* (cf. I, 1). Une structure de cette espèce est donnée en général par un atlas $\mathfrak{A} = \{f_i\}_{i\in I}$ de B sur X compatible avec Γ (cf. I, 1); il lui correspond le 1-cocycle $(f) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{P}_\Gamma)$, $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ étant le recouvrement de X formé des buts U_i des cartes f_i de $\mathfrak{A}$, $f_{ij}(x)$ étant le germe au point x de l'application $x \to j_b^\lambda(f_i^{-1}f_j)$ de $U_i \cap U_j$ dans Π_Γ, où $b = f_j^{-1}(x)$. Un atlas $\mathfrak{A}'$ formé de cartes compatibles avec $\mathfrak{A}$ déterminerait un cocycle (f') homologue à (f), et un atlas complet un cocycle maximal. L'espèce des (B, Γ)-structures est une espèce de structures locales (cf. [4], g)); on a une correspondance biunivoque entre les (B, Γ)-structures sur X et les sections du faisceau quotient $\mathfrak{B}/\Gamma$ de $\mathfrak{B}$ par la relation d'équivalence associée à l'action de Π_Γ sur $\mathfrak{B}$ (cf. II, 7, remarque 2).

2. *L'espèce des Γ-structures différentiables.* Supposons que B soit une variété r-différentiable ($r = 1, 2, \ldots, \infty$ ou ω, c'est-à-dire analytique réelle) et que Γ soit un pseudogroupe d'automorphismes locaux de cette structure sur B. Soit C_r la catégorie des applications r-différentiables des variétés r-différentiables; considérons sur les espaces X de C_r les faisceaux de groupoïdes dont les unités sont les germes d'applications locales r-différentiables de X dans B. On obtient de cette manière l'*espèce des Γ-structures r-différentiables* sur les variétés r-différentiables. Si l'on se borne à considérer les jets d'applications r-différentiables de *rang maximum* de X dans B (en supposant de plus que $\dim X \geqslant \dim B$), on obtient l'espèce des *Γ-structures r-différentiables régulières;* c'est une espèce de structures locales.

Lorsque Γ est un pseudogroupe d'automorphismes locaux d'un espace analytique complexe B, on peut considérer de la même manière l'espèce des *Γ-structures analytiques complexes* sur les espaces analytiques complexes.

3. Soit (H, p) un espace fibré sur X muni d'un pseudogroupe d'automorphismes locaux Γ se projetant par p sur le pseudogroupe des applications identiques des ouverts de X. On pourra considérer le faisceau de groupoïdes sur X, formé des jets des applications locales de X dans Π_Γ qui sont des relèvements relativement à la projection naturelle de Π_Γ sur X. Cette situation se présente en géométrie différentielle.

4. Espace fibré déduit d'un espace fibré sur B. Faisceau principal

Soit (E, p) un espace fibré sur B admettant Π_Γ comme groupoïde d'opérateurs. Alors $\mathfrak{P}_\Gamma$ est groupoïde d'opérateurs sur l'espace fibré (E', p') sur $\mathfrak{B}$, image réciproque de (E, p) par la projection but de $\mathfrak{B}$ dans B. Donc, si (f) est un 1-cocycle $\in Z^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{P}_\Gamma)$, on peut déduire de l'espace fibré (E', p') par (f) un espace fibré (E^f, p^f) qui sera encore appelé *l'espace fibré sur X déduit par (f) de l'espace fibré (E, p) sur B*. On dira aussi que (E^f, p^f) est un espace fibré déduit de (E, p) par l'élément $s \in H^1(X, \mathfrak{P}_\Gamma)$ représenté par (f), et il sera aussi désigné par (E^s, p^s) (cf. II, 4).

On a la propriété fonctorielle suivante:

Proposition 2: *Soit h une application continue d'un espace X' dans X, et soit s' la Γ-structure sur X' image réciproque par h d'une Γ-structure s sur X. Tout espace fibré $(E^{s'}, p^{s'})$ déduit par s' d'un espace fibré (E, p) sur B, est isomorphe à l'espace fibré image réciproque par h d'un espace fibré (E^s, p^s) déduit de (E, p) par s.*

Remarque: Si (E, p) est un espace fibré sur B à groupe structural topologique (au sens classique) dont Π_Γ est un groupoïde de germes d'automorphismes locaux, l'espace fibré (E^s, p^s) sur X déduit par une Γ-structure s est aussi un espace fibré à groupe structural topologique.

Faisceau principal: Le groupoïde Π_Γ muni de sa projection a sur B (qui associe à tout élément de Π_Γ sa source) est un espace fibré sur B, admettant Π_Γ comme groupoïde d'opérateurs. L'espace fibré $(\mathfrak{P}^f_\Gamma, a^f)$ déduit de (Π_Γ, a) par un 1-cocycle $(f) \in Z^1(U, \mathfrak{P}_\Gamma)$ n'est autre que *le faisceau principal associé à* (f) que nous avons défini dans II, 6. Il admet une projection canonique b^f dans $\mathfrak{B}$, et par composition avec la projection but β de $\mathfrak{B}$ dans B, une *projection canonique β^f dans B*; le groupoïde Π_Γ *est groupoïde d'opérateurs sur $\mathfrak{P}^f_\Gamma$ muni de la projection β^f, simplement transitif dans chaque fibre de $(\mathfrak{P}^f_\Gamma, a^f)$.*

Si (g) est un 1-cocycle représentant le même élément $s \in H^1(X, \mathfrak{P}_\Gamma)$ que (f), tout isomorphisme du faisceau principal $(\mathfrak{P}^f_\Gamma, a^f)$ associé à (f) sur le faisceau principal $(\mathfrak{P}^g_\Gamma, a^g)$ associé à (g) est compatible avec les projections β^f et β^g dans B et avec les opérations de Π_Γ.

On remarquera encore, comme dans II, 6, qu'une Γ-structure sur X est complètement déterminée par tout faisceau principal qui lui est associé: la donnée d'un faisceau $\mathfrak{Q}$ sur X, muni d'une projection dans B par rapport à laquelle Π_Γ est groupoïde d'opérateurs, simplement transitif dans chaque fibre de ce faisceau, détermine une Γ-structure s; tout faisceau principal associé à s est isomorphe à $\mathfrak{Q}$.

5. Γ_0-superstructure

Soit Γ_0 un sous-pseudogroupe du pseudogroupe Γ d'automorphismes locaux de B. L'injection du groupoïde Π_{Γ_0} dans le groupoïde Π_Γ induit une représentation injective du faisceau de groupoïdes $\mathfrak{P}_{\Gamma_0}$ dans le faisceau $\mathfrak{P}_\Gamma$ sur X, d'où une application φ de $H^1(X, \mathfrak{P}_{\Gamma_0})$ dans $H^1(X, \mathfrak{P}_\Gamma)$; cette application est une transformation naturelle de foncteurs. Ainsi, *toute Γ_0-structure s_0 sur X admet une Γ-structure sous-jacente* $\varphi(s_0)$; on dit aussi que s_0 est une *Γ_0-superstructure* de $\varphi(s_0)$.

Exemples: 1. *Γ-structure déterminée par une application.* Soit Γ_0 le pseudogroupe des applications identiques des ouverts de B. Si une Γ-structure s sur X admet une Γ_0-superstructure, elle peut être représentée par un cocycle $(f) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{P}_{\Gamma_0})$, où $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de X. Les applications f_{ii} des U_i dans l'espace $\mathfrak{B}$ des jets locaux de X dans B admettent une réunion qui, composée avec la projection but de $\mathfrak{B}$ dans B, est une application continue f de X dans B. Ainsi la Γ-structure s sur X est complètement déterminée par l'application f.

Les Γ-structures sur X sont en correspondance biunivoque avec les applications continues de X dans B.

2. *Γ-structure orientable.* Soit Γ un pseudogroupe d'automorphismes locaux de l'espace numérique R^n, et soit Γ^+ le sous-pseudogroupe de Γ formé des transformations de Γ dont le degré topologique local est $+1$. Considérons l'espace fibré (E, p) sur R^n formé des germes d'orientation de R^n: c'est un revêtement à deux feuillets de R^n admettant Π_Γ comme groupoïde d'opérateurs; un élément z de Π_Γ, de source x et de but y, applique un germe d'orientation au point x sur un germe au point y définissant ou non la même orientation de R^n suivant que z appartient à Π_{Γ^+} ou non.

Un espace fibré (E^s, p^s) sur X déduit de (E, p) par une Γ-structure s sur X est un revêtement à deux feuillets de X; les Γ^+-superstructures de s correspondent aux classes d'équivalence de sections de (E^s, p^s) (cf. II, 9). La Γ-structure s sera dite *orientable* si elle admet une Γ^+-superstructure, c'est-à-dire si le revêtement (E^s, p^s) est trivial.

D'une manière générale, si l'on identifie deux éléments z_1 et z_2 de Π_Γ s'il existe un élément z_0 de Π_{Γ_0} tel que $z_2 = z_0 z_1$, on obtient un faisceau quotient Π_{Γ/Γ_0} sur B admettant Π_Γ comme groupoïde d'opérateurs relativement à la projection a_0 déduite de la projection a de Π_Γ sur B.

D'après la proposition 10 de II, *les Γ_0-superstructures d'une Γ-structure s sur X sont en correspondance biunivoque canonique avec les classes d'équivalence des sections d'un espace fibré déduit par s de l'espace fibré $(\Pi_{\Gamma/\Gamma_0}, a_0)$ sur B.*

6. Les Γ_G-structures

Soit G un groupe d'automorphismes de l'espace topologique B, tel que si, en un point b de B, les jets locaux de deux éléments g et g' de G sont égaux, alors $g = g'$. C'est le cas, par exemple, si G est un groupe de transformations analytiques d'une variété analytique connexe B. Soit Γ_G le pseudogroupe déduit de G par localisation (cf. I, 1, Exemple 2).

Nous dirons, comme dans II, 9, que deux sections σ et σ' de deux espaces fibrés (E, p) et (E', p') sur X sont équivalentes, s'il existe un isomorphisme ψ de (E, p) sur (E', p') tel que $\sigma' = \psi\sigma$.

Théorème 1: *Les Γ_G-structures sur un espace topologique X sont en correspondance biunivoque canonique avec les classes d'équivalence des sections des espaces fibrés de base X, fibre B et groupe structural discret G.*

Démonstration: On pourrait faire une démonstration directe de ce théorème. Nous nous contenterons de montrer qu'il est une application immédiate de la proposition 9 du chapitre II.

Comme tout jet local d'un élément g de G détermine g, le groupoïde Π_G des jets locaux des éléments de Γ_G (ou de G) admet une représentation canonique sur le groupe G muni de la topologie discrète; on a donc une représentation du faisceau de groupoïdes $\mathfrak{P}_G$, formé des jets locaux de X dans Π_G, dans le faisceau de groupes $\mathfrak{G}$ sur X, formé des jets locaux de X dans G muni de la topologie discrète; de plus, $\mathfrak{G}$ peut être considéré comme un faisceau de groupoïdes d'opérateurs sur l'espace $\mathfrak{B}$ des jets locaux de X dans B muni de sa projection sur X, et $\mathfrak{P}_G$ s'identifie au groupoïde extension du groupoïde $\mathfrak{G}$ d'opérateurs sur $\mathfrak{B}$. On a donc, comme dans II, 9, la suite

$$\mathfrak{B} \to \mathfrak{P}_G \to \mathfrak{G} \to X .$$

Soit s un élément de $H^1(X, \mathfrak{G})$, c'est-à-dire de $H^1(X, G)$; le faisceau $\mathfrak{B}$ s'identifie au faisceau des germes de sections de l'espace fibré trivial $E = X \times B$, à groupe structural discret G, muni de sa projection canonique p sur X; donc $\mathfrak{B}^s$ est isomorphe au faisceau des germes de sections d'un espace fibré (E^s, p^s) déduit de (E, p) par s. Comme (E^s, p^s) est un espace fibré de fibre B et à groupe structural discret G (au sens classique), le théorème est bien une conséquence de la proposition 9 de II.

Remarques: 1. Supposons X connexe et localement simplement connexe par arc; soit alors $(\hat{X}, \hat{p})$ le revêtement universel de X. Le premier groupe d'homotopie $\pi_1(X, x)$ de X, relatif au point $x \in X$, admet une représentation canonique λ sur le groupe des automorphismes du revêtement $(\hat{X}, \hat{p})$. Le théorème précédent peut alors se formuler de la manière suivante: Les Γ_G-structures sur X sont en correspondance biunivoque avec les classes de couples (f, φ) formés d'une application continue f de $\hat{X}$ dans B et d'une représentation φ de $\pi_1(X, x)$ dans G telles que $f\lambda(\alpha) = \varphi(\alpha)f$, pour tout $\alpha \in \pi_1(X, x)$; deux couples (f, φ) et (f', φ') déterminent la même Γ_G-structure s'il existe un élément $g \in G$ tel que $f' = gf$ et $\varphi' = g\varphi g^{-1}$.

2. Lorsque X et B sont des variétés différentiables (analytiques réelles ou complexes), les Γ_G-structures différentiables (analytiques réelles ou complexes) sur X correspondent aux classes de sections différentiables (analytiques réelles ou holomorphes) des espaces fibrés sur X, de fibre B et à groupe structural discret G.

Exemple: Sur une variété différentiable (ou analytique complexe) V, la donnée d'une forme de Pfaff α (ou d'une forme holomorphe de degré un) telle que $d\alpha = 0$ est équivalente à la donnée d'une Γ_G-structure différentiable (ou analytique complexe) sur V, G étant le groupe additif des nombres réels R (ou complexes C) agissant par translations sur $B = R$ (ou C).

Si G est un groupe de Lie agissant par translations à gauche sur $B = G$, une Γ_G-structure différentiable sur V est donnée par une forme différentielle α de degré un à valeur dans l'algèbre de Lie de G et telle que $d\alpha = 1/2\,[\alpha, \alpha]$.

7. L'espèce des Γ-structures feuilletées sur les espaces topologiques

Soit $\mathfrak{B}$ le faisceau des jets locaux de X dans B, et $\mathfrak{B}/\Gamma$ le faisceau quotient de $\mathfrak{B}$ par la relation d'équivalence définie par l'action du groupoïde Π_Γ sur $\mathfrak{B}$: deux jets locaux y et $y' \in \mathfrak{B}$ sont équivalents, s'il existe un jet local $z \in \Pi_\Gamma$ dont la source est le but de y et tel que $y' = zy$. Tout homéomorphisme h de X sur un espace topologique X' se prolonge suivant un isomorphisme du faisceau $\mathfrak{B}/\Gamma$ sur le faisceau $\mathfrak{B}'/\Gamma$ analogue sur X', et induit donc une application biunivoque h^0 de $H^0(X, \mathfrak{B}/\Gamma)$ sur $H^0(X', \mathfrak{B}'/\Gamma)$.

Définitions: *Tout élément σ de $H^0(X, \mathfrak{B}/\Gamma)$* (c'est-à-dire toute section σ du faisceau $\mathfrak{B}/\Gamma$) *sera appelé une Γ-structure feuilletée sur l'espace X.* L'espèce des Γ-structures feuilletées sur les espaces topologiques est définie par le foncteur $h \to h^0$ de la catégorie des homéomorphismes des espaces topologiques dans la catégorie des applications biunivoques des ensembles. C'est une espèce de structures locales. Le couple (h, σ) est un *isomorphisme* de la Γ-structure feuilletée σ sur X sur la Γ-structure feuilletée $h^0(\sigma)$ sur X'.

Un point de l'espace $\mathfrak{B}/\Gamma$ se projetant sur un point $x \in X$ sera appelé un *germe de Γ-structure feuilletée au point x.* Un jet local $\in \mathfrak{B}$ de source $x \in X$

sera appelé un *jet distingué au point* x de la Γ-structure feuilletée σ, si le germe de Γ-structure feuilletée qu'il détermine est $\sigma(x)$. Le sous-espace $\mathfrak{B}_\sigma$ de $\mathfrak{B}$ formé de tous les jets distingués de σ est un sous-faisceau de $\mathfrak{B}$ admettant Π_Γ comme groupoïde d'opérateurs (relativement à la projection but de $\mathfrak{B}_\sigma$ dans B) transitif dans chaque fibre du faisceau $\mathfrak{B}_\sigma$. *Une application distinguée* g de σ est une application continue d'un ouvert U de X dans B, dont le jet local en tout point x de U est un jet distingué de σ.

Définition pratique d'une Γ-structure feuilletée. Pratiquement, une Γ-structure feuilletée σ sur X est donnée par une famille d'applications continues f_i d'ouverts U_i de X dans B, les U_i formant un recouvrement de X et les f_i étant compatibles avec Γ, c'est-à-dire que pour tout point $x \in U_i \cap U_j$, il existe un élément γ_{ij}^x de Γ tel que f_i et $\gamma_{ij}^x f_j$ soient égaux au voisinage de x.

Les f_i sont des applications distinguées de σ, et le jet local $j_x^\lambda f_i$ est un jet distingué de σ au point x. Le germe de Γ-structure feuilletée de σ au point x sera la classe des jets locaux $z j_x^\lambda f_i$, où z parcourt les éléments de Π_Γ dont la source est $f_i(x)$; d'après la condition imposée aux applications f_i, en un point $x \in U_i \cap U_j$, $j_x^\lambda f_i$ et $j_x^\lambda f_j$ déterminent le même germe de Γ-structure feuilletée au point x.

8. Image réciproque d'une Γ-structure feuilletée

Sous-espèces et Γ_0-superstructures feuilletées

Ces notions sont analogues aux notions correspondantes pour les Γ-structures, le faisceau de groupoïdes $\mathfrak{P}_\Gamma$ étant remplacé ici par le faisceau d'ensembles $\mathfrak{B}/\Gamma$.

Une application continue f d'un espace X' dans X induit une représentation relative à f du faisceau $\mathfrak{B}$ sur X des jets locaux de X dans B dans le faisceau $\mathfrak{B}'$ sur X' des jets locaux de X' dans B (cf. II, 3 et III, 2) d'où, après passage au quotient par la relation d'équivalence associée à l'action de Π_Γ, une représentation relative à f des faisceaux $\mathfrak{B}/\Gamma$ dans $\mathfrak{B}'/\Gamma$; on en déduit une application f^0 de $H^0(X, \mathfrak{B}/\Gamma)$ dans $H^0(X', \mathfrak{B}'/\Gamma)$: si f_i est une application distinguée de $\sigma \in H^0(X, \mathfrak{B}/\Gamma)$, alors $f_i f$ est une application distinguée de $f^0(\sigma)$. Si σ est une Γ-structure feuilletée sur X, *la Γ-structure feuilletée $f^0(\sigma)$* sur X' sera appelée l'*image réciproque de σ par f*. Lorsque f est l'application identique d'un sous-espace X' dans X, on dira aussi que $f^0(\sigma)$ est la Γ-structure feuilletée induite par σ sur X'. On a des propriétés fonctorielles évidentes (cf. 2).

En remplaçant le faisceau $\mathfrak{B}$ par un sous-faisceau stable pour les opérations de Π_Γ, on obtient, comme dans 3, la notion de sous-espèce de l'espèce de

Γ-structures feuilletées, par exemple l'espèce des Γ-structures feuilletées différentiables sur la catégorie des variétés différentiables (cf. 3, exemple 2).

Enfin, si Γ_0 est un sous-pseudogroupe de Γ, on a une représentation du faisceau $\mathfrak{B}/\Gamma_0$ sur le faisceau $\mathfrak{B}/\Gamma$, d'où une application φ^0 de $H^0(X, \mathfrak{B}/\Gamma_0)$ dans $H^0(X, \mathfrak{B}/\Gamma)$. Toute Γ_0-structure feuilletée σ_0 sur X admet une Γ-structure feuilletée sous-jacente $\varphi^0(\sigma_0)$, et σ_0 est une Γ_0-superstructure feuilletée de $\varphi^0(\sigma_0)$.

Par exemple, si Γ_0 est le pseudogroupe des applications identiques des ouverts de B, le faisceau $\mathfrak{B}/\Gamma_0$ est identique à $\mathfrak{B}$; une Γ_0-structure feuilletée sur X est donc une section du faisceau $\mathfrak{B}$, ce qui correspond à une application continue de X dans B. Une Γ-structure feuilletée σ sur X admet une Γ_0-superstructure feuilletée s'il existe une application distinguée de σ dont la source est l'espace X tout entier. Une telle structure σ sera dite *déterminée par une application de X dans B*.

9. Γ-structure feuilletée sous-jacente à une Γ-structure

Comme on l'a vu (proposition 6, Chapitre II), il existe une application fonctorielle χ de $H^1(X, \mathfrak{P}_\Gamma)$ dans $H^0(X, \mathfrak{B}/\Gamma)$. L'image par χ d'une Γ-structure s sur X sera appelée la *Γ-structure feuilletée σ sous-jacente à s*. La Γ-structure s est une Γ-superstructure de σ.

Une *Γ-structure feuilletée* σ sur X est dite *non dégénérée*, si le groupoïde Π_Γ est un groupoïde d'opérateurs simple sur le faisceau $\mathfrak{B}_\sigma$ des jets distingués de σ; autrement dit, pour tout jet distingué y de σ et tout élément $z \in \Pi_\Gamma$ qui opère sur y, la condition $y = zy$ entraîne que z est le jet local de l'application identique de B au but de y. *Une Γ-structure feuilletée non dégénérée admet une et une seule Γ-superstructure* (cf. II, 7, rem. 2).

Dans le cas général, une Γ-structure feuilletée σ sur X n'admet pas toujours de Γ-superstructure (cf. exemple du paragraphe 13 de ce chapitre); si elle en admet une s, *l'ensemble des Γ-structures sur X admettant σ comme structure feuilletée sous-jacente est en correspondance biunivoque canonique avec l'ensemble* $H^1(X, \mathfrak{G}^s)$, où $\mathfrak{G}^s$ est un faisceau de groupes associé à s (cf. II, 5); c'est une application directe de la proposition 7 du chapitre II. Remarquons que la fibre de $\mathfrak{G}^s$ au-dessus de x est isomorphe au groupe formé des éléments de Π_Γ qui laissent fixe un jet distingué de σ au point x.

Tout faisceau principal $\mathfrak{P}_\Gamma^s$ associé à s (cf. II, 6) admet une projection canonique b^s sur le faisceau $\mathfrak{B}_\sigma$ des jets distingués de σ, compatible avec les opérations de Π_Γ. Lorsque σ est non dégénérée, cette application est biunivoque, car Π_Γ est groupoïde d'opérateurs simplement transitif dans chaque fibre de $\mathfrak{P}_\Gamma^s$ et de $\mathfrak{B}_\sigma$. On a donc la

Proposition 3: *Si la Γ-structure feuilletée σ est non dégénérée, tout faisceau principal associé à sa Γ-superstructure s est canoniquement isomorphe au faisceau $\mathfrak{B}_\sigma$ des jets distingués de σ.*

10. Feuilles d'une Γ-structure feuilletée et topologie des feuilles

Soit σ une Γ-structure feuilletée sur l'espace X, et soit f_i une famille d'applications distinguées de σ dont les sources forment un recouvrement de X. Les intersections des ouverts de X avec les images réciproques, par les applications f_i, des points de B forment la base d'une topologie T_σ sur X, appelée la *topologie des feuilles de σ*. En effet, soient W_i et W_j les intersections de $f_i^{-1}(b_i)$ et $f_j^{-1}(b_j)$, où $b_i, b_j \in B$, avec des ouverts V_i et V_j de X, et soit $x \in W_i \cap W_j$. Comme les applications f_i sont compatibles avec Γ, il existe un élément $\gamma \in \Gamma$ tel que $f_j = \gamma f_i$ dans un voisinage V de x contenu dans $V_i \cap V_j$; donc $x \in f_i^{-1}(b_i) \cap V \subset W_1 \cap W_2$. Ce raisonnement montre aussi que la définition donnée ne dépend pas du choix des applications distinguées f_i de σ.

On peut donner également une définition directe de la topologie T_σ: Si l'espace $\mathfrak{B}$ des jets de X dans B est muni de la topologie somme des topologies induites (par la topologie ordinaire de $\mathfrak{B}$) sur les images réciproques des points de B par la projection but, alors Π_Γ muni de la topologie discrète est groupoïde d'opérateurs sur $\mathfrak{B}$. Par passage au quotient, on obtient sur le faisceau $\mathfrak{B}/\Gamma$ des germes de structures feuilletées une topologie T'. La Γ-structure feuilletée σ est définie par une section σ de $\mathfrak{B}/\Gamma$, et T' induit sur $\sigma(X)$, donc sur X, une topologie T_σ. On vérifie aisément l'équivalence des deux définitions.

X muni de la topologie des feuilles de σ sera désigné par X_σ.

Définition: *Une feuille de la Γ-structure feuilletée σ sur X est une composante connexe de X_σ.*

Une feuille F de σ est dite *propre*, si les topologies induites par X et X_σ sur F sont les mêmes.

Soit h une application continue d'un espace X' dans X et soit σ' la Γ-structure feuilletée image réciproque de σ par h; alors h est une application continue de X'_σ dans X_σ; elle applique une feuille de σ' dans une feuille de σ.

Sur l'espace $\mathfrak{B}_\sigma$ des jets distingués de σ, la Γ-structure feuilletée $\hat{\sigma}$, image réciproque de σ par la projection source α de $\mathfrak{B}_\sigma$ sur X est déterminée par la projection but β de $\mathfrak{B}_\sigma$ dans B. Car si f est une application distinguée de σ, l'application $j_x^\lambda f \to f(x)$ est une application distinguée de $\hat{\sigma}$; la réunion de toutes ces applications est justement β.

11. Γ-structure induite sur une feuille et holonomie

Soient s une Γ-structure sur X, σ sa Γ-structure feuilletée sous-jacente et X_σ l'espace X muni de la topologie des feuilles de σ.

Proposition 4: *La Γ-structure s_0 sur X_σ, image réciproque de s par l'application identique de X_σ sur X, est représentée par un élément de $H^1(X_\sigma, \Pi_\Gamma)$, premier ensemble de cohomologie de X_σ à valeur dans le faisceau (sous-faisceau de $\mathfrak{P}_\Gamma$) des jets d'applications constantes de X_σ dans Π_Γ* (cf. II, 8).

Il suffit en effet de remarquer que l'espace des jets distingués de la Γ-structure feuilletée sous-jacente à s_0 est formé de jets d'applications locales constantes de X_σ dans B.

Corollaire 1: *Tout faisceau principal associé à s_0 est un revêtement de X_σ; il est isomorphe au faisceau image réciproque par l'application identique de X_σ sur X d'un faisceau principal $(\mathfrak{P}^s_\Gamma, a^s)$ associé à s, ou encore à $(\mathfrak{P}^s_\Gamma, a^s)$ muni de la topologie image réciproque*[1]) *de celle de X_σ par a^s.*

C'est une conséquence directe de II, 8 et de la proposition 2 de 3.

Lorsque σ est non dégénérée, le faisceau $\mathfrak{B}_\sigma$ des jets distingués de σ, muni de la projection source α, est un faisceau principal associé à s (cf. propos. 3); le faisceau $\mathfrak{B}_\sigma$, muni de la topologie image réciproque de celle de X par α, est un faisceau principal $\mathfrak{B}^0_\sigma$ associé à s_0. Si X_σ est localement connexe, le *groupoïde d'holonomie de s* (ou de σ) sera par définition le groupoïde d'holonomie du faisceau principal $\mathfrak{B}^0_\sigma$ à groupoïde structural discret Π_Γ (cf. II, 8), et *le groupe d'holonomie de s* (ou de σ) *au point x* sera le groupe d'holonomie de $\mathfrak{B}^0_\sigma$ au point x. Lorsque σ est dégénérée, on dira encore, par abus de langage, que le groupoïde d'holonomie d'un faisceau principal associé à s_0 est le groupoïde d'holonomie de s.

La proposition 8 de II donne le

Corollaire 2: *Sur une feuille F de σ (muni de la topologie induite par celle de X_σ), la Γ-structure s_F image réciproque de s par l'application identique de F dans X est représentée par un élément de $H^1(F, G_b)$, où G_b est le groupe d'isotropie de Γ au but d'un jet distingué de σ en un point de F.*

Définition: *L'élément de $H^1(F, G_b)$ qui représente s_F sera appelé l'holonomie de la feuille F de σ.*

L'holonomie de F détermine complètement la Γ-structure image réciproque de s par l'application identique de F dans X (la Γ-structure induite sur F par s, si F est propre).

---

[1]) Si E' est un espace étalé dans un espace E par une projection a, et si T est une topologie sur E plus fine que celle de E, alors la topologie T' sur E' image réciproque de T par a est définie par la condition que a étale E' muni de T' sur E muni de T.

Si F est localement connexe, le groupe d'holonomie de F sera le groupe d'holonomie de s_F (cf. II, 8).

Remarque : On sait qu'à chaque élément de $H^1(F, G_b)$ est associé une classe de représentations (ou d'antireprésentations) du premier groupe d'homotopie $\pi_1(F, x)$ de F, relatif à un point $x \in F$, dans G_b, qui se déduisent l'une de l'autre par un automorphisme intérieur de G_b (cf. II, 8). Lorsque σ est non dégénérée, *tout jet distingué $\hat{x}$ au point x détermine une antireprésentation (ou une représentation) ψ de $\pi_1(F, x)$ dans G_b associée à l'holonomie de F :* si C est un chemin dans F qui représente l'élément $\alpha \in \pi_1(F, x)$, alors $\psi(\alpha)$ est l'élément de G_b tel que $\psi(\alpha)\hat{x}$ (ou $\psi(\alpha)^{-1}\hat{x}$) soit le jet distingué qui est l'extrêmité du relèvement d'origine $\hat{x}$ de C dans $\mathfrak{B}_\sigma$.

12. Structures feuilletées régulières

Soient Γ et Γ' des pseudogroupes d'automorphismes locaux des espaces topologiques B et F respectivement, et soit $\tilde{\Gamma}$ un pseudogroupe d'automorphismes locaux du produit topologique $B \times F$, engendré par des transformations de la forme

$$(x, y) \to (\gamma(x), \gamma'_x(y)) , \tag{1}$$

où x appartient à la source U d'un élément γ de Γ, et où y appartient à la source V des éléments γ'_x de Γ' associés à chaque $x \in U$.

Soit $\tilde{s}$ une $(B \times F, \tilde{\Gamma})$-structure sur un espace X, définie par un atlas complet $\mathfrak{A}$ de $B \times F$ sur X compatible avec $\tilde{\Gamma}$.

Le groupoïde $\Pi_{\tilde{\Gamma}}$ admet une représentation canonique dans le groupoïde Π_Γ: au jet local au point $(x, y) \in B \times F$ d'un élément de $\tilde{\Gamma}$ de la forme (1) correspond le jet local au point x de γ. On a donc aussi une représentation du faisceau sur X des jets locaux de X dans $\Pi_{\tilde{\Gamma}}$ dans le faisceau sur X des jets locaux de X dans Π_Γ. Ainsi *la $(B \times F, \tilde{\Gamma})$-structure $\tilde{s}$ sur x admet une Γ-structure sous-jacente s* bien déterminée. On remarquera de plus que la Γ-structure feuilletée σ sous-jacente à s est non dégénérée; en effet, p étant la projection canonique de $B \times F$ sur B et f une carte quelconque de $\mathfrak{A}$, les applications pf^{-1} sont des applications distinguées de σ; comme elles sont ouvertes, Π_Γ est groupoïde d'opérateurs simple sur le faisceau des jets distingués de σ qui est un faisceau principal associé à s.

Définition: *Une Γ-structure feuilletée σ (ou une Γ-structure s) sera dite régulière si elle est sous-jacente à une $(B \times F, \tilde{\Gamma})$-structure.*

Considérons sur $B \times F$ la topologie T_0 produit de la topologie discrète de B par la topologie donnée sur F. Le pseudogroupe $\tilde{\Gamma}$ est un pseudogroupe d'automorphismes locaux pour cette topologie; ainsi T_0 est transportée par l'atlas $\mathfrak{A}$ sur une topologie T_σ de X, qui n'est autre que la topologie des feuilles de σ.

Soit q la projection canonique de $B \times F$ sur F; soit $\mathfrak{A}'$ l'atlas de F sur $B \times F$, muni de la topologie T_0, formé des homéomorphismes h d'ouverts de F sur des ouverts de $B \times F$ tels que $qh \in \Gamma'$. Si F est localement connexe, l'atlas composé $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ de F sur X muni de la topologie T_σ est compatible avec Γ' et définit sur chaque feuille de σ une (F, Γ')-structure.

Toute carte $f \in \mathfrak{A}$ se relève suivant une carte f_0 de $B \times F$ dans l'espace $\mathfrak{B}_\sigma$ des jets distingués de σ: $f_0(x) = j^\lambda_{f(x)}(pf^{-1})$. Les cartes f_0 forment un atlas $\mathfrak{A}_0$ de $B \times F$ sur $\mathfrak{B}_\sigma$ compatible avec le sous-pseudogroupe Γ_0 de $\tilde{\Gamma}$ engendré par les éléments de $\tilde{\Gamma}$ qui se projettent par p sur les applications identiques des ouverts de B.

Exemples: 1. B et F sont respectivement les espaces numériques R^q et R^p de dimension q et p, Γ et Γ' les pseudogroupes des automorphismes locaux r-différentiables de R^q et R^p, et $\tilde{\Gamma}$ le pseudogroupe de tous les automorphismes locaux r-différentiables de $R^q \times R^p = R^n$ $(n = p + q)$ qui sont localement de la forme

$$(x, y) \to (\varphi(x), \psi(x, y)) ,$$

x et y appartenant à des ouverts de R^q et R^p resp. et φ, ψ étant des fonctions r-différentiables de x et y.

Un atlas de R^n sur un espace X compatible avec $\tilde{\Gamma}$ détermine sur X une *structure de variété feuilletée r-différentiable régulière de codimension q*. En vertu du théorème des fonctions implicites, il y a équivalence entre cette espèce de structures et l'espèce des Γ-structures r-différentiables régulières (définies dans 3, exemple 2). Chaque feuille d'une telle structure est une sous-variété r-différentiable de dimension p de X, plongée par une application r-différentiable et partout de rang p.

On définirait de même la notion de variété feuilletée régulière analytique réelle ou complexe.

2. Le pseudogroupe $\tilde{\Gamma}$ est engendré par toutes les transformations locales de $B \times F$ de la forme

$$(x, y) \to (\gamma(x), \gamma'(y)), \quad \text{où} \quad \gamma \in \Gamma \text{ et } \gamma' \in \Gamma'$$

($\gamma'(y)$ est indépendant de x); le pseudogroupe $\tilde{\Gamma}$ sera noté dans ce cas $\Gamma \times \Gamma'$ et appelé *le pseudogroupe produit de Γ et Γ'*. Une $(B \times F, \Gamma \times \Gamma')$-structure sur X sera appelée une *structure de produit local* sur X; elle admet une Γ-structure feuilletée et une Γ'-structure feuilletée sous-jacentes.

13. Le théorème de stabilité

Soit Γ un pseudogroupe d'automorphismes locaux d'un espace topologique B.

Théorème de stabilité (REEB-EHRESMANN): *Soit X un espace topologique muni d'une Γ-structure s, les conditions suivantes étant vérifiées:*

a) *la topologie T_σ des feuilles de la Γ-structure feuilletée σ sous-jacente à s est localement connexe et séparée,*

b) *tout point de X admet un voisinage compact,*

c) *B est localement séparé.*

Soit F une feuille compacte dont le groupe d'holonomie est fini. Alors F possède un système fondamental de voisinages ouverts (et même compacts, si E est séparé) saturés par des feuilles compactes.

Démonstration: Soit $(\mathfrak{P}^s_\Gamma, a^s)$ un faisceau principal associé à s (si σ est non dégénérée, on prendra le faisceau $\mathfrak{B}_\sigma$ des jets distingués de σ). La Γ-structure feuilletée $\tilde{\sigma}$ sur $\mathfrak{P}^s_\Gamma$, image réciproque de σ par a^s, est déterminée par la projection canonique β^s dans B (cf. 4), car β^s est une application distinguée de $\tilde{\sigma}$ (cf. 10). La topologie $T_{\tilde{\sigma}}$ des feuilles de $\tilde{\sigma}$ coïncide avec la topologie image réciproque par a^s de T_σ. D'après le corollaire 1 de la proposition 5 de 11, il en résulte que $\mathfrak{P}^s_\Gamma$ muni de la topologie $T_{\tilde{\sigma}}$ est un revêtement de X muni de la topologie T_σ, et donc que si T_σ est localement connexe, chaque feuille F_0 de $\tilde{\sigma}$ est un revêtement de la feuille $F = a^s(F_0)$ de σ. Si F est compact et à groupe d'holonomie fini, alors F_0 est aussi compacte, car les points de F_0 se projetant sur un même point de F sont en correspondance biunivoque avec les éléments du groupe d'holonomie de F (cf. II, 8). On est ainsi ramené à démontrer le théorème pour la Γ-structure feuilletée $\tilde{\sigma}$ de $\mathfrak{P}^s_\Gamma$ qui est déterminée par l'application β^s. Pour simplifier les notations, nous poserons $a^s = \alpha$ et $\beta^s = \beta$ (projections source et but si $\mathfrak{P}^s_\Gamma$ est $\mathfrak{B}_\sigma$).

Soient Ω un voisinage ouvert de F et $\Omega_0 = \alpha^{-1}(\Omega)$; il faut montrer qu'il existe un voisinage Φ_0 dans Ω_0 de F_0, saturé par des feuilles compactes. Soit U un voisinage séparé de $b_0 = \beta(F_0)$ dans B. Recouvrons la feuille F_0 compacte par un nombre fini n de voisinages compacts W_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, appliqués par β dans U, et tels que $W_i^0 \cap \beta^{-1}(b_0)$ soit connexe et contenu dans F_0, W_i^0 désignant l'intérieur de W_i. Posons $W^0 = \bigcup_i W_i^0$; l'ouvert W^0 est un voisinage de F_0 ne contenant pas d'autres points de $\beta^{-1}(b_0)$ que ceux de F_0.

Soit D_i le complémentaire dans W_i de $W^0 \cap W_i$. Les D_i sont des compacts ne rencontrant pas F_0, et ils sont appliqués par β sur des compacts de U (puisque U est séparé) qui sont aussi fermés, et qui ne contiennent pas b_0. Soit donc V un voisinage ouvert de b_0 ne rencontrant aucun des $\beta(D_i)$, et posons $\Phi_0 = \beta^{-1}(V) \cap W_0$.

L'ouvert Φ_0 est un voisinage de F_0 contenu dans Ω_0; il est saturé par des feuilles de $\tilde{\sigma}$. En effet, soit $z \in \Phi_0$; on a

$$W^0 \cap \beta^{-1}(b) = \cup W_i \cap \beta^{-1}(b) , \quad \text{où} \quad b = \beta(z) ,$$

car si un point z' de $\beta^{-1}(b)$ appartenait à W_i et pas à W^0, il appartiendrait à D_i, et son image b par β ne pourrait appartenir à V. Donc $W^0 \cap \beta^{-1}(b)$ est à la fois ouvert et compact (comme réunion finie des compacts $W_i \cap \beta^{-1}(b)$) pour la topologie $T_{\tilde{\sigma}}$; il est aussi fermé, puisque T_σ, donc $T_{\tilde{\sigma}}$, est supposée séparée. Il est donc réunion de composantes connexes compactes de $\beta^{-1}(b)$.

Ainsi l'image Φ de Φ_0 par α est un voisinage ouvert de F saturé par des feuilles compactes, et contenu dans Ω.

Soit K un voisinage de F_0 contenu dans Φ_0 et qui est réunion d'un nombre fini de compacts. Alors $\beta(K) = K'$ est un compact; donc $\beta^{-1}(K') \cap W^0$ est un voisinage de F_0, qui est réunion finie de compacts et qui est saturé par des feuilles compactes. Si X est séparé, son image dans X est un voisinage compact de F, saturé par des feuilles compactes.

Corollaire: *Avec les hypothèses du théorème, une feuille compacte et localement simplement connexe, dont le groupe fondamental est fini, possède un système fondamental de voisinages saturés par des feuilles compactes.*

En effet, on a une représentation du groupe fondamental de F sur le groupe d'holonomie de F, qui est donc fini (cf. II, 8).

Un contre-exemple: L'exemple suivant montre que ce corollaire n'est plus vrai si la Γ-structure feuilletée σ n'est pas sous-jacente à une Γ-structure s.

Soit R^2 le plan rapporté aux coordonnées polaires (r, θ), et soit Γ le pseudogroupe des automorphismes topologiques ou analytiques réels de la droite numérique R. Les courbes de la famille: $r = 1 + \lambda e^\theta$ (λ paramètre positif) et le disque $r \leqslant 1$ sont les feuilles d'une Γ-structure feuilletée σ sur R^2. Le disque $r \leqslant 1$ est une feuille compacte et simplement connexe, qui ne possède pas de voisinages saturés par des feuilles compactes; il en résulte, d'après le corollaire, que σ n'est pas sous-jacente à une Γ-structure.

Cas des structures feuilletées régulières: Dans ce cas, le théorème de stabilité est valable avec des hypothèses topologiques moins restrictives.

Théorème de stabilité *(bis): Soit X un espace muni d'une Γ-structure feuilletée régulière σ pour laquelle la topologie des feuilles T_σ est séparée. Soit V une feuille localement connexe et compacte de σ dont le groupe d'holonomie est fini. Il existe alors un système fondamental de voisinages ouverts (et même fermés ou compacts, si X est séparé et B régulier ou localement compact) de V, saturés par des feuilles compactes.*

Démonstration: Soit $\mathfrak{A}$ un atlas complet de $B \times F$ sur X compatible avec un pseudogroupe $\widetilde{\Gamma}$ et définissant sur X une $(B \times F, \widetilde{\Gamma})$-structure admettant σ comme Γ-structure feuilletée sous-jacente (cf. 12). Soit $\mathfrak{A}_0$ l'atlas de $B \times F$ sur l'espace $\mathfrak{B}_\sigma$ des jets distingués de σ, formé des relèvements canoniques des cartes de $\mathfrak{A}$ relativement à la projection α de $\mathfrak{B}_\sigma$ sur X; chaque carte de $\mathfrak{A}_0$ est compatible avec les projections p de $B \times F$ sur B et β de $\mathfrak{B}_\sigma$ dans B.

Soit V_0 une feuille de la Γ-structure feuilletée $\tilde{\sigma}$ sur $\mathfrak{B}_\sigma$, image réciproque par α de σ, se projetant par α sur V; la feuille V_0 est compacte puisque le groupe d'holonomie de V est fini. Soit Ω un voisinage ouvert de V et $\Omega_0 = \alpha^{-1}(\Omega)$. On peut trouver un nombre fini de cartes f_i de $\mathfrak{A}_0$ $(l \leqslant i \leqslant n)$ telles que: 1) la réunion O des buts O_i des cartes f_i est un voisinage de V_0 contenu dans Ω_0, 2) la source de chaque f_i est de la forme $U_i \times P_i$, où U_i est un voisinage ouvert de $\beta(V_0) = b_0 \in B$, et P_i un ouvert de F dont l'adhérence $\overline{P}_i$ est compacte, 3) chaque carte f_i se prolonge suivant une carte $f'_i \in \mathfrak{A}_0$ de source $U_i \times P'_i$, où P'_i est un ouvert contenant $\overline{P}_i$.

L'ouvert $f_i'^{-1}(O)$ est un voisinage du compact $b_0 \times \overline{P}_i$; il contient donc un voisinage de $b_0 \times \overline{P}_i$ de la forme $U'_i \times \overline{P}_i$. Soit U l'intersection des U'_i. Remarquons que, pour tout $b \in U$, $f_i(b \times P_i) \subset \beta^{-1}(b) \cap O$.

L'ouvert $T_0 = \beta^{-1}(U) \cap O$ est un voisinage de V_0 saturés par des feuilles compactes. En effet, pour tout $b \in U$, $\beta^{-1}(b) \cap O$ est compact, car il est réunion finie des compacts $f'_i(b \times \overline{P}_i)$; il est aussi ouvert pour la topologie des feuilles $T_{\tilde{\sigma}}$, car il est réunion des ouverts $f_i(b \times P_i)$. Donc $T = \alpha(T_0)$ est un voisinage ouvert de V contenu dans Ω et saturé par des feuilles compactes. Si X est séparé, et B régulier (ou localement compact), en remplaçant U par un voisinage fermé (ou compact) de b_0, le voisinage correspondant T est fermé (ou compact).

14. L'espace des feuilles. Γ-structures feuilletées localement simples et réalisation du groupoïde d'holonomie

Soit Γ un pseudogroupe d'automorphismes locaux d'un espace B, et soit σ une Γ-structure feuilletée sur un espace X.

Définition: *L'espace des feuilles $\hat{X}$ de la Γ-structure feuilletée σ est l'espace quotient de X par la relation d'équivalence qui identifie deux points de X si et seulement s'ils appartiennent à une même feuille de σ.*

On dira aussi que $\hat{X}$ est l'espace des feuilles de X, en sous-entendant que X est muni de la structure σ.

Une application continue f d'un espace X' dans X définit, par passage aux quotients, une application continue $\hat{f}$ de l'espace des feuilles $\hat{X}'$ de la Γ-structure feuilletée image réciproque de σ par f dans l'espace des feuilles $\hat{X}$ de σ: si q et q' sont les projections canoniques de X sur $\hat{X}$ et X' sur $\hat{X}'$, on a $qf = \hat{f}q'$; la correspondance $f \to \hat{f}$ est fonctorielle. En particulier, toute application distinguée de σ de source U définit une application continue $\hat{f}$ de l'espace des feuilles $\hat{U}$ de U (muni de la Γ-structure feuilletée induite par σ) dans B.

Définition: *La Γ-structure feuilletée σ sera dite localement simple si, pour toute application distinguée f de σ de source U, l'application $\hat{f}$ étale $\hat{U}$ dans B* (cf. [4], h)).

Il suffit naturellement de vérifier cette condition au voisinage de chaque point de X ou pour une famille d'applications distinguées dont les sources forment un recouvrement de X.

Une Γ-structure feuilletée σ sur X sera dite *simple* si elle est localement simple et si, pour tout ouvert U qui est source d'une application distinguée, l'injection de U dans X induit une application qui étale $\hat{U}$ dans $\hat{X}$.

Exemples: Une Γ-structure feuilletée régulière, dont la topologie des feuilles est localement connexe, est localement simple.

L'espace des jets distingués d'une Γ-structure feuilletée localement simple, muni de la Γ-structure feuilletée image réciproque de σ par la projection soucre, est simple. Une étude des variétés feuilletées simples de codimension un est faite dans [8], a).

Dans toute la suite de ce paragraphe, la Γ-structure feuilletée σ sur x sera supposée localement simple. Les applications distinguées de σ sont alors des applications ouvertes; donc σ est non dégénérée (cf. 9). De plus la topologie des feuilles est localement connexe. L'application canonique de X sur $\hat{X}$ est aussi ouverte.

La source U d'une application distinguée f de σ sera appelée un *ouvert distingué de σ*; l'espace des feuilles $\hat{U}$ de U sera appelée l'espace transverse de U, ou un espace transverse à σ, et le couple $(\hat{U}, x)$ où $x \in U$, un *espace transverse à σ au point x*. Le sous-espace connexe de U appliqué, par la projection canonique de U sur $\hat{U}$, sur un point x sera appelé la *plaque* de U correspondant à $\hat{x}$.

Un *sous-espace transverse à σ* est un sous-espace T de X tel que toute application distinguée f de source U étale $T \cap U$ dans B (ou ce qui revient au même, si la projection canonique de U sur $\hat{U}$ étale $T \cap U$ dans $\hat{U}$).

L'espace transverse $\hat{U}$ d'un ouvert distingué U est muni d'une (B, Γ)-struc-

ture canonique, image réciproque par $\hat{f}$ de la (B, Γ)-structure de B (f étant une application distinguée de source U). Si U' est un ouvert contenu dans U, l'injection de U' dans U définit une application qui est localement un isomorphisme de $\hat{U}'$ dans $\hat{U}$ munis de leur (B, Γ)-structure. Soit q_x le jet local au point $x \in U$ de la projection canonique q de U sur $\hat{U}$; on a une correspondance biunivoque canonique entre jets distingués $\mathfrak{x}$ de σ au point x et jets $\hat{\mathfrak{x}}$ d'isomorphismes locaux de $\hat{U}$ dans B au point $\hat{x} = q(x)$, définie par la relation $\hat{\mathfrak{x}} q_x = \mathfrak{x}$.

Un isomorphisme local ψ d'un espace transverse $\hat{U}$ au point $x \in U$ dans un espace transverse $\hat{U}'$ au point $x' \in U'$ (c'est-à-dire un isomorphisme local de $\hat{U}$ sans $\hat{U}'$ appliquant $\hat{x} = q(x)$ sur $\hat{x}' = q'(x')$) *détermine un isomorphisme $\hat{\psi}$ de l'ensemble des jets distingués de σ au point x sur l'ensemble des jets distingués au point x'*: au jet distingué $\mathfrak{x}$ au point x correspond par $\hat{\psi}$ le jet distingué composé du jet local au point x' de $\psi^{-1}q'$ et du jet $\hat{\mathfrak{x}}$ d'isomorphisme local de $\hat{U}$ dans B associé à $\mathfrak{x}$. Nous dirons que ψ *réalise l'élément* $\hat{\psi}$ du groupoïde Φ des isomorphismes de fibres sur fibres du faisceau principal à groupoïde structural discret Π_Γ formé des jets distingués de σ (cf. II, 8).

La proposition suivante donne une interprétation des isomorphismes locaux transverses qui réalisent les éléments du groupoïde d'holonomie Φ_0 de σ (cf. II, 8 et III, 11). Nous avons vu qu'un chemin C (ou une chaîne pointée formée de plaques), reliant x à x', situé dans une feuille F de σ déterminait un élément de source x et de but x' du groupoïde d'holonomie, celui qui applique un jet distingué $\mathfrak{x}$ au point x sur l'extrémité du relèvement d'origine $\mathfrak{x}$ de C dans le faisceau $\mathfrak{X}$ des jets distingués de σ.

Proposition 5: *Soit C un chemin situé dans une feuille F de la Γ-structure feuilletée localement simple σ et reliant x à x'. Il existe un isomorphisme local ψ d'un sous-espace transverse $\hat{U}$ au point x sur un sous-espace transverse $\hat{U}'$ au point x' qui réalise l'élément du groupoïde d'holonomie déterminé par C, et tel que les plaques correspondants à des points $\hat{y} \in \hat{U}$ et $\psi(\hat{y}) \in \hat{U}'$ soient situées dans une même feuille d'un voisinage arbitraire de C* (cf. [15], a), p. 105).

Démonstration: La Γ-structure feuilletée sur l'espace $\mathfrak{X}$ des jets distingués de σ, image réciproque de σ par la projection source α, est simple. Soit C' le relèvement de C dans le faisceau $(\mathfrak{X}, \alpha)$ d'origine $\mathfrak{x}$ et d'extrémité $\mathfrak{x}'$. Soient W_0 un voisinage ouvert de C' se projetant par α dans un voisinage donné de C, et U_0, U_0' des voisinages ouverts de $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'$ dans W_0 qui sont des relèvements d'ouverts distingués U, U' de σ. Les injections de U_0 et

U_0' dans W_0 induisent des applications $\hat{i}_0$ et $\hat{i}_0'$ qui étalent $\hat{U}_0$ et $\hat{U}_0'$ dans $\hat{W}_0$, et qui appliquent les points $\hat{\mathfrak{x}}$ et $\hat{\mathfrak{x}}'$ correspondants à $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{x}'$ sur un même point; il existe donc un isomorphisme local ψ_0 de $\hat{U}_0$ dans $\hat{U}_0'$ défini au voisinage de $\hat{\mathfrak{x}}$ et tel que $\hat{i}_0'\psi_0$ soit une restriction de $\hat{i}_0$. Par les isomorphismes de $\hat{U}_0$ sur $\hat{U}$ et $\hat{U}_0'$ sur $\hat{U}'$ définis par la projection α, l'isomorphisme local ψ_0 correspond à un isomorphisme local ψ de l'espace transverse $\hat{U}$ au point x dans l'espace transverse $\hat{U}'$ au point x' qui est l'isomorphisme cherché.

Remarques: Si C est un chemin fermé reliant x à x, l'élément du groupe d'holonomie au point x déterminé par C (cf. II, 8) peut être réalisé par un automorphisme local de tout espace transverse au point x.

Lorsqu'il existe des sous-espaces transverses aux points x et x' (dans le cas des structures feuilletées régulières par exemple), on peut partout remplacer «espace transverse» par «sous-espace transverse».

Soit $\hat{\mathfrak{X}}$ l'espace des feuilles de l'espace $\mathfrak{X}$ des jets distingués de σ (muni de la structure image réciproque de σ par α), et soit $\mathfrak{q}$ la projection canonique de $\mathfrak{X}$ sur $\hat{\mathfrak{X}}$. L'application β de $\mathfrak{X}$ dans B définit l'application $\hat{\beta}$ qui étale $\hat{\mathfrak{X}}$ dans B. Comme les opérations de Π_Γ sur $(\mathfrak{X}, \beta)$ sont compatibles avec la projection $\mathfrak{q}$, alors par passage au quotient, *Π_Γ est encore groupoïde d'opérateurs sur $(\hat{\mathfrak{X}}, \hat{\beta})$*. Le groupoïde extension du groupoïde Π_Γ d'opérateurs sur $\hat{\mathfrak{X}}$ s'identifie au groupoïde des jets locaux d'un *pseudogroupe $\hat{\Gamma}$ d'automorphismes locaux de $\hat{\mathfrak{X}}$* (muni de sa (B, Γ)-structure).

La projection source α de $\mathfrak{X}$ sur X définit une projection continue $\hat{\alpha}$ de $\hat{\mathfrak{X}}$ sur l'espace des feuilles $\hat{X}$ de X. Comme X s'identifie au quotient de $\mathfrak{X}$ par la relation d'équivalence associée à l'action du groupoïde Π_Γ, il en résulte que:

Proposition 6: *L'espace des feuilles $\hat{X}$ de X s'identifie au quotient de l'espace $\hat{\mathfrak{X}}$ des feuilles de l'espace des jets distingués par la relation d'équivalence associée à l'action sur $\hat{\mathfrak{X}}$ du groupoïde d'opérateurs Π_Γ (ou du pseudogroupe $\hat{\Gamma}$).*

On remarquera que, d'après la démonstration de la proposition 5, le groupe d'holonomie d'une feuille F de X est isomorphe au groupe d'isotropie de $\hat{\Gamma}$ en un point de $\hat{\mathfrak{X}}$ correspondant à une feuille de $\mathfrak{X}$ se projetant par α sur F.

Si la Γ-structure feuilletée σ est simple, alors $\hat{\alpha}$ étale $\hat{\mathfrak{X}}$ sur $\hat{X}$. Les projections biunivoques par $\hat{\alpha}$ d'ouverts de $\hat{\mathfrak{X}}$ sont les cartes d'un atlas $\mathfrak{A}$ de $\hat{\mathfrak{X}}$ sur $\hat{X}$ compatible avec le pseudogroupe $\hat{\Gamma}$ qui est formé d'automorphismes locaux de la (B, Γ)-structure de $\hat{\mathfrak{X}}$. On a donc la

Proposition 7: *Si σ est une Γ-structure feuilletée simple sur X, l'espace des feuilles $\hat{X}$ de X est muni d'une (B, Γ)-structure canonique.*

Remarquons encore que l'injection d'un ouvert distingué U dans X induit une application qui est localement un isomorphisme de $\hat{U}$ dans $\hat{X}$, munis de leur (B, Γ)-structure canonique.

CHAPITRE IV

Germes de plongement

Après avoir défini les notions de structure σ sur X d'espace localement isomorphe à un sous-espace de (B, Γ), de Γ-plongement de X dans un espace Y localement isomorphe à B muni du pseudogroupe Γ, et de germe de Γ-plongement, on se propose de déterminer les classes d'isomorphie de germes de Γ-plongement de X. Le théorème 1 établit le lien de ce problème avec les considérations des chapitres précédents (cf. 3): moyennant des hypothèses topologiques convenables, ces classes correspondent aux Γ-structures sur X admettant σ comme structure sous-jacente. Pratiquement, on est ramené à déterminer les éléments d'un ensemble $H^1(X, \mathfrak{G})$, où $\mathfrak{G}$ est un faisceau de groupes sur X. On obtient des résultats dans le cas où $\mathfrak{G}$ est un faisceau constant, notamment lorsque X est une feuille propre d'une structure de produit local (cf. 6) ou est localement isomorphe à un espace muni d'un groupe de transformations (cf. 7). Dans le cas où Γ est formé d'automorphismes différentiables, on peut essayer de voir ce qu'il se passe «à l'ordre r»: pour chaque entier r positif, à tout germe de Γ-plongement de X est attaché un invariant d'ordre r; c'est un élément de $H^1(X, \mathfrak{G}^r)$, où $\mathfrak{G}^r$ est un faisceau quotient de $\mathfrak{G}$, qui peut souvent se calculer par des procédés classiques. La question de savoir dans quelle mesure ces invariants caractérisent les classes de germes de plongement est laissée ouverte. Ces considérations sont appliquées aux germes de plongement des variétés analytiques (cf. 9) et aux variations infinitésimales d'ordre r de structures (cf. 10).

1. Germes de sous-espaces

Soit B un espace topologique. On dira que deux sous-espaces F_1 et F_2 de B déterminent le même *germe de sous-espace au point x de B*, si $x \in F_1 \cap F_2$ et s'il existe un voisinage U de x tel que $U \cap F_1 = U \cap F_2$. Les ensembles formés des germes d'un sous-espace quelconque F de B aux différents points de F, constituent une base d'une topologie sur l'ensemble $\check{B}$ des germes de sous-espaces de B. La projection canonique p de $\check{B}$ sur B, qui associe à tout germe de sous-espace de B au point x le point x lui-même, est continue; sa restriction à tout ouvert suffisamment petit de $\check{B}$ est un homéomorphisme sur un sous-espace de B.

Tout pseudogroupe Γ d'automorphismes locaux de B se prolonge suivant un pseudogroupe $\check{\Gamma}$ d'automorphismes locaux de $\check{B}$: si F est un sous-espace quelconque de B, et si $\gamma \in \Gamma$, les automorphismes locaux de $\check{B}$ qui appliquent le germe de F au point $x \in F$ sur le germe de $\gamma(F)$ au point $\gamma(x)$ engendrent le pseudogroupe $\check{\Gamma}$.

Définition: *Sur un espace topologique X, une structure d'espace localement isomorphe à un sous-espace de* (B, Γ) (ou simplement de B, s'il n'y a pas de confusion à craindre) *est une* $(\check{B}, \check{\Gamma})$*-structure sur* X. Elle peut être définie par un atlas complet de $\check{B}$ sur X compatible avec $\check{\Gamma}$.

Par exemple, tout sous-espace d'un espace muni d'une (B, Γ)-structure est muni d'une structure évidente d'espace localement isomorphe à un sous-espace de B.

Remarque: L'espèce des $(\check{B}, \check{\Gamma})$-structures sur X est équivalente à la sous-espèce de l'espèce des Γ-structures feuilletées sur X dont les jets distingués sont des jets d'homéomorphismes locaux de X sur des sous-espaces de B (les feuilles sont ainsi les points de X).

2. Germes de plongements et germes de voisinages

Soit X un espace localement isomorphe à un sous-espace de (B, Γ). Le couple (Y, φ) formé d'un espace Y muni d'une (B, Γ)-structure et d'un isomorphisme φ de X sur le sous-espace $\varphi(X)$ de Y est appelé un *Γ-plongement de X*. En particulier, si X est un sous-espace de Y et φ l'application identique de X dans Y, alors (Y, φ), ou simplement Y, est appelé un *Γ-voisinage de X*.

Nous dirons que deux Γ-plongements (Y, φ) et (Y', φ') de X déterminent le même *germe de Γ-plongement de X* si $\varphi = \varphi'$ et si $Y \cap Y'$ contient un voisinage ouvert U de $\varphi(X) = \varphi'(X)$ dans Y et Y' et sur lequel les (B, Γ) structures de Y et Y' induisent la même (B, Γ)-structure. Lorsque φ est l'application identique de X, on définit ainsi un *germe de Γ-voisinage de X*. Un germe de Γ-voisinage ou de Γ-plongement de X sera dit *séparé* s'il peut être représenté par un couple (Y, φ), où Y est séparé.

Soient (Y_1, φ_1) et (Y_1', φ_1) deux couples représentant le même germe P_1 de Γ-plongement de X, et (Y_2, φ_2) et (Y_2', φ_2) deux couples représentant le même germe P_2 de Γ-plongement de X; deux isomorphismes ψ et ψ' des voisinages ouverts $U_1 \subset Y_1$ et $U_1' \subset Y_1'$ de $\varphi_1(X)$ sur des voisinages ouverts $U_2 \subset Y_2$ et $U_2' \subset Y_2'$ resp. de $\varphi_2(X)$ qui prolongent $\varphi_2\varphi_1^{-1}$, déterminent le même *isomorphisme de P_1 sur P_2* si les restrictions de ψ et ψ' à un voisinage convenable de $\varphi_1(X)$ coïncident. Lorsque φ_1 et φ_2 sont tous deux l'application identique de X, on définit ainsi un isomorphisme du germe de Γ-voisinage P_1 sur le germe de Γ-voisinage P_2.

Remarquons que si X_1 et X_2 sont des sous-espaces des espaces Y_1 et Y_2 resp. munis de (B, Γ)-structures, et si h est un isomorphisme de X_1 sur X_2, alors la restriction de h à un voisinage ouvert assez petit d'un point x de X_1 se prolonge suivant un isomorphisme d'un voisinage ouvert de x dans Y_1 sur un voisinage ouvert de $h(x)$ dans Y_2, mais que h ne se prolonge pas en général suivant un isomorphisme d'un voisinage de X_1 tout entier sur un voisinage de X_2.

3. Germe de Γ-plongement et Γ-structure

Soit P un germe de Γ-plongement d'un espace X muni d'une structure σ d'espace localement isomorphe à un sous-espace de (B, Γ), représenté par un couple (Y, φ); la Γ-structure $\Phi(P)$ sur X, image réciproque par φ de la Γ-structure de Y, est indépendante du couple (Y, φ) qui représente P; de plus, si P et P' sont des germes de Γ-plongements isomorphes de X, alors les Γ-structures $\Phi(P)$ et $\Phi(P')$ sont identiques. Nous allons montrer qu'avec des hypothèses topologiques convenables, la Γ-structure $\Phi(P)$ sur X caractérise la classe d'isomorphie du germe de Γ-plongement P de X.

D'une manière précise, soit $\mathfrak{P}_\Gamma^\sigma$ le sous-faisceau de groupoïdes complet du faisceau des jets locaux de X dans Π_Γ dont les unités sont les jets d'isomorphismes locaux de X (muni de la structure σ) sur des sous-espaces de B. Les éléments de $H^1(X, \mathfrak{P}_\Gamma^\sigma)$ sont *les Γ-structures sur X qui admettent σ comme structure sous-jacente* (σ peut être considérée comme leur Γ-structure feuilletée sous-jacente, cf. la remarque de 1).

Théorème 1: *Soit Γ un pseudogroupe d'automorphismes locaux d'un espace B, et soit X un espace muni d'une structure σ d'espace localement isomorphe à un sous-espace de (B, Γ). Si B et X sont localement compacts et à base dénombrable, il existe une correspondance biunivoque canonique Φ entre les classes d'isomorphie de germes de Γ-plongement séparés de X et les Γ-structures sur X admettant σ comme structure sous-jacente.*

La démonstration de ce théorème est renvoyée au paragraphe suivant.

Supposons qu'il existe une Γ-structure s sur X admettant σ comme structure sous-jacente, et soit $\mathfrak{G}^s$ un faisceau de groupes sur X associé à s (cf. II, 5).

Si par exemple un germe P de Γ-plongement de X est représenté par le couple (Y, φ), et si s est la Γ-structure $\Phi(P)$ sur X, image réciproque par φ de la Γ-structure de Y, alors $\mathfrak{G}^s$ est isomorphe au faisceau de groupes $\mathfrak{G}^P$ formé des germes, aux points de $\varphi(X)$, des automorphismes locaux de Y se réduisant à l'identité sur $\varphi(X)$. D'après la proposition 7 du chapitre II, le théorème 1 est équivalent au

Corollaire: *Avec les hypothèses du théorème 1, s'il existe une Γ-structure s sur X admettant σ comme structure sous-jacente, l'ensemble des classes d'isomorphie de germes de Γ-plongement séparés de X est en correspondance biunivoque canonique avec l'ensemble* $H^1(X, \mathfrak{G}^s)$.

Tout automorphisme du germe P de Γ-plongement de X détermine une section de $\mathfrak{G}^P$; on a donc un isomorphisme du groupe des automorphismes de P dans le groupe des sections du faisceau $\mathfrak{G}^P$. Si $\varphi(X)$ possède un système fondamental de voisinages paracompacts dans Y, cet isomorphisme est bijectif (cf. [7], p. 17). Comme $\mathfrak{G}^s$ est isomorphe (pas canoniquement) à $\mathfrak{G}^P$, on a

Proposition 1: *Avec les hypothèses du théorème 1, le groupe des automorphismes d'un germe de Γ-plongement de X, appartenant à la classe déterminée par une Γ-structure s, est isomorphe à* $H^0(X, \mathfrak{G}^s)$.

Application: Voici un exemple d'application du théorème 1. Soit Γ un pseudogroupe d'automorphismes locaux analytiques complexes de l'espace numérique complexe C^n, de coordonnées $z^k = x^k + iy^k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Les restrictions au sous-espace réel R^n (défini par $y^k = 0$) des éléments de Γ qui transforment R^n en lui-même, engendrent un pseudogroupe Γ_0 d'automorphismes locaux analytiques réels de R^n.

Soit X une variété paracompacte de dimension n munie d'une (R^n, Γ_0)-structure σ qui peut être considérée comme une structure d'espace localement isomorphe à un sous-espace de (C^n, Γ). Les germes aux points de R^n des éléments de Γ dont la restriction à R^n est l'identité, sont les germes de l'automorphisme identique de C^n. En vertu du théorème 1 ou de son corollaire (cf. II, 7, rem. 2), l'espace X, muni de sa structure σ, admet un et un seul germe de Γ-plongement déterminé à un isomorphisme près.

Par exemple, une variété analytique réelle paracompacte peut être plongée comme «sous-variété réelle» dans une variété analytique complexe de même dimension (cf. [4], c)), et ceci d'une manière essentiellement unique.

Considérons encore le cas suivant: soit $\overline{\Gamma}$ le pseudogroupe d'automorphismes locaux de C^n engendré par Γ et par l'involution $x^k + iy^k \to x^k - iy^k$; la restriction de $\overline{\Gamma}$ à R^n est encore Γ_0. En vertu du corollaire, les classes d'isomorphie de germes de $\overline{\Gamma}$-plongement d'un espace X muni d'une (R^n, Γ_0)-

structure sont en correspondance biunivoque avec les éléments de $H^1(X, Z_2)$, où Z_2 est un groupe cyclique d'ordre 2.

4. Démonstration du théorème 1

La démonstration se fera en deux étapes ; la proposition 2 montrera que l'application Φ des classes d'isomorphie de germes de Γ-plongement de X dans l'ensemble des Γ-superstructures de σ est injective, et la proposition 3 que Φ est surjective.

Proposition 2: *Soient Y et Y' deux espaces localement compacts et à base dénombrable, munis des (B, Γ)-structures $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{s}'$ respectivement. Tout homéomorphisme h d'un sous-espace X de Y sur un sous-espace X' de Y', tel que la Γ-structure sur X, image réciproque par h de $\mathfrak{s}'$, coïncide avec la Γ-structure induite par $\mathfrak{s}$ sur X, se prolonge suivant un isomorphisme d'un voisinage ouvert de X sur un voisinage ouvert de X'.*

Démonstration: Soit $\mathfrak{A}$ un atlas de B sur Y compatible avec Γ, et qui définit sur Y la structure $\mathfrak{s}$. Soit $\mathfrak{U} = \{U_k\}_{k\in K}$ le recouvrement induit sur X par les buts des cartes g_k de $\mathfrak{A}$ qui rencontrent X. La Γ-structure induite sur X par $\mathfrak{s}$ est définie par le cocycle $(f) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{P}_\Gamma)$, f_{lk} s'identifiant à l'application continue de $U_k \cap U_l$ dans Π_Γ, qui fait correspondre à tout $x \in U_k \cap U_l$ le jet local de $g_k g_l^{-1}$ au point $z = g_k^{-1}(x)$:

$$f_{lk}(x) = j_z^\lambda(g_l^{-1} g_k) \tag{1}$$

Soit $\mathfrak{U}' = \{U_m\}_{m\in J}$ le recouvrement induit sur X par les images réciproques par h des buts des cartes g'_m d'un atlas $\mathfrak{A}'$ de B sur Y', déterminant sur Y' la Γ-structure donnée $\mathfrak{s}'$. La Γ-structure sur X, image réciproque par h de $\mathfrak{s}'$, sera représentée par le cocycle $(f') \in Z^1(\mathfrak{U}', \mathfrak{P}_\Gamma)$, défini par

$$f'_{nm}(x) = j_z^\lambda(g_n'^{-1} g'_m), \quad \text{où} \quad x \in U'_m \cap U'_n \quad \text{et} \quad z = g_m'^{-1} h(x) . \tag{1'}$$

Les deux cocycles (f) et (f') déterminent, par hypothèse, le même élément de $H^1(X, \mathfrak{P}_\Gamma)$. Il existe donc un recouvrement $\mathfrak{B} = \{V_i\}_{i\in I}$ de X, plus fin que $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{U}'$, des applications τ et τ' de I dans K et J resp., et des applications continues n_i de V_i dans Π_Γ telles que:

$$f'_{ji}(x) = n_j(x) f_{ji}(x) n_i^{-1}(x) \quad \text{pour} \quad x \in V_i \cap V_j , \tag{2}$$

où f_{ji} et f'_{ji} désignent les restrictions de $f_{\tau j \tau i}$ et $f'_{\tau' j \tau' i}$ à $V_i \cap V_j$. On posera pour simplifier $g_i = g_{\tau i}$ et $g'_i = g'_{\tau' i}$.

Pour tout $i \in I$, posons:

$$\tilde{h}_i(x) = (j_z^\lambda g'_i) \cdot n_i(x) \cdot (j_x^\lambda g_i^{-1}) , \quad \text{où} \quad x \in V_i \quad \text{et} \quad z = g_i'^{-1} h(x) ,$$

le point indiquant la loi de composition des jets locaux. L'application $x \to \tilde{h}_i(x)$ est un relèvement continu de V_i dans l'espace $\mathfrak{J}$ des germes d'isomorphismes locaux de Y dans Y', se projetant sur la restriction de h à V_i.

Les relèvements $\tilde{h}_i$ et $\tilde{h}_j$ coïncident sur $V_i \cap V_j$. En effet, de (1) et (1)' on déduit:

$$f_{ji}(x)\cdot j_x^\lambda g_i^{-1} = j_x^\lambda g_j^{-1}\,, \quad \text{où} \quad x \in V_i \cap V_j\,,$$

$$(j_w^\lambda g_j')\cdot f_{ji}'(x) = j_z^\lambda g_i'\,, \quad \text{où} \quad z = g_i'^{-1}h(x) \quad \text{et} \quad w = g_j'^{-1}h(x)\,,$$

d'où

$$\begin{aligned}\tilde{h}_j(x) &= (j_w^\lambda g_j')\cdot n_j(x)\cdot(j_x^\lambda g_j^{-1}) = (j_w^\lambda g_j')\cdot n_j(x)\cdot f_{ji}(x)\cdot(j_x^\lambda g_i^{-1})\\ &= (j_w^\lambda g_j')\cdot f_{ji}'(x)\cdot n_i(x)\cdot(j_x^\lambda g_i^{-1}) = (j_z^\lambda g_i')\cdot n_i(x)\cdot(j_x^\lambda g_i^{-1}) = \tilde{h}_i(x)\,.\end{aligned}$$

La réunion $\tilde{h}$ des $\tilde{h}_i$ est ainsi un relèvement de X dans $\mathfrak{J}$ se projetant sur h.

Comme Y est localement compact et à base dénombrable, tout voisinage ouvert de X est paracompact. En vertu de la proposition 2.2.1 p. 17 de [7], le relèvement $\tilde{h}$ de X dans $\mathfrak{J}$ peut se prolonger suivant un relèvement d'un voisinage U_0 de X; son composé avec la projection but de $\mathfrak{J}$ sur Y' est une application H de U_0 dans Y', qui prolonge h, et qui est, au voisinage de chaque point de U_0, un isomorphisme local de Y dans Y'. De même, $\tilde{h}^{-1}$ est un relèvement de X' dans l'espace $\mathfrak{J}^{-1}$ des germes d'isomorphismes locaux de Y' dans Y; on peut donc construire aussi une application H' d'un voisinage U_0' de X' dans Y, qui est localement un isomorphisme local de Y' dans Y, et telle que $j_{x'}^\lambda H' = \tilde{h}^{-1}(x')$, pour tout $x' \in X'$. Comme $j_x^\lambda H'H$ est le jet de l'application identique de Y pour tout $x \in X$, il existe un voisinage U de X tel que $H'H(y) = y$, pour tout $y \in U$. Ainsi la restriction de H à U prolonge h, et c'est un isomorphisme de la (B, Γ)-structure induite par $\mathfrak{s}$ sur U, sur la (B, Γ)-structure induite par $\mathfrak{s}'$ sur $H(U)$.

Proposition 3: *Soit X un espace muni d'une structure σ d'espace localement isomorphe à un sous-espace de (B, Γ), et soit s une Γ-structure sur X admettant σ comme structure sous-jacente. Si X et B sont localement compacts et paracompacts, il existe un espace localement compact Y muni d'une (B, Γ)-structure $\mathfrak{s}$, et un isomorphisme φ de X sur un sous-espace de Y, tels que s soit la Γ-structure image réciproque de $\mathfrak{s}$ par φ.*

Démonstration: Soit $(f) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{P}_\Gamma)$ un cocycle représentant la Γ-structure s sur X. Comme X est localement compact et paracompact, on peut supposer que le recouvrement $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ de X est de type fini, les U_i étant relativement compacts et assez petits pour que f_i, composé de f_{ii} (les f_{ij} sont identifiés avec l'application de $U_i \cap U_j$ dans Π_Γ qu'ils déterminent) avec la projection but de Π_Γ sur B, soit un homéomorphisme de U_i sur un sous-espace de B.

Soit $\mathfrak{U}' = \{U'_i\}_{i \in I}$ un recouvrement de X plus fin que $\mathfrak{U}$, et $\mathfrak{U}'' = \{U''_i\}_{i \in I}$ un recouvrement plus fin que $\mathfrak{U}'$, tels que l'adhérence $\bar{U}'_i$ de U'_i soit contenue dans U_i et que l'adhérence $\bar{U}''_i$ de U''_i soit contenue dans U'_i. Pour tout $i \in I$, soit V_i un voisinage ouvert de $f_i(U_i)$ dans B dans lequel $f_i(U_i)$ est fermé, et V'_i un voisinage ouvert de $f_i(\bar{U}''_i)$ dans V_i dont l'adhérence ne rencontre pas $f_i(C\, U'_i)$.

Pour tout couple d'indices (i, j) tel que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, soit γ_{ji} un élément de Γ dont la source soit un voisinage dans V_i de $f_i(\bar{U}'_i \cap \bar{U}'_j)$, et tel que $j^\lambda_y \gamma_{ji} = f_{ji}(x)$, où $y = f_i(x)$, pour tout $x \in \bar{U}'_i \cap \bar{U}'_j$; on choisira $\gamma_{ii} =$ application identique de V_i et $\gamma_{ji} = \gamma_{ij}^{-1}$, et la source de γ_{ji} suffisamment petite pour que l'intersection de $f_i(U_i)$ avec l'adhérence dans V_i de $\gamma_{ji}^{-1}(V'_j) \cap V'_i$ soit contenue dans $f_i(\bar{U}'_i \cap \bar{U}'_j)$; (c'est possible, car l'intersection de cette adhérence avec $f_i[C(U'_i \cap U'_j)]$ est un fermé qui ne rencontre pas le compact $f_i(\bar{U}'_i \cap \bar{U}'_j))$.

Pour tout $x \in f_i(U_i)$, soit W^i_x un voisinage ouvert de x dans V_i assez petit pour que:

1) si j est tel que $x \notin f_i(\bar{U}'_i \cap \bar{U}'_j)$, alors $W^i_x \cap \gamma_{ji}^{-1}(V'_j) \cap V'_i = \emptyset$; un tel voisinage existe, car γ_{ji} n'est défini que pour un nombre fini d'indices j, i étant fixé, et la source de γ_{ji} vérifie la condition ci-dessus,

2) pour tout couple (j, k) tel que $x \in f_i(\bar{U}'_i \cap \bar{U}'_j \cap \bar{U}'_k)$, alors $\gamma_{kj}\gamma_{ji}$ et γ_{ki} sont définis et égaux dans W^i_x.

Posons alors $W_i = \bigcup_x W^i_x \cap V'_i$, $x \in f_i(U'_i)$, et considérons l'espace somme $E = \bigcup_{i \in I} (i, W_i)$. Dans E la relation suivante: $(i, x_i) \sim (j, x_j)$ si et seulement si $x_j = \gamma_{ji} x_i$, est une relation d'équivalence: elle est réflexive et symétrique, car $\gamma_{ii} =$ identité et $\gamma_{ji} = \gamma_{ij}^{-1}$; elle est aussi transitive, car si $x_j = \gamma_{ji} x_i$ et $x_k = \gamma_{kj} x_j$, alors $x_i \in W^i_x$ où $x \in f_i(\bar{U}'_i \cap \bar{U}'_j \cap \bar{U}'_k)$ d'après 1), et d'après 2) $\gamma_{ki}(x_i) = \gamma_{kj}\gamma_{ji}(x_i)$. Par passage au quotient, on obtient un espace Y localement isomorphe à B: les applications g_i de W_i dans Y, obtenues en composant l'injection canonique de W_i dans E avec la projection canonique de E sur Y, sont les cartes d'un atlas de B sur Y compatible avec Γ, et qui détermine une (B, Γ)-structure $\mathfrak{s}$ sur Y. Les applications $g_i f_i$ admettent une réunion φ qui est un isomorphisme de X sur un sous-espace de Y; la Γ-structure sur X, image réciproque par φ de $\mathfrak{s}$, n'est autre que s, car elle est représentée par le cocycle (f) restreint au recouvrement $\{f_i^{-1}(V'_i)\}$.

Il reste à vérifier que Y est séparé; soit $y_1 = g_i(x_i)$ et $y_2 = g_j(x_j)$ deux points distincts de Y. Il existe W^i_x tel que $x_i \in W^i_x$; deux cas peuvent se présenter: 1) $x \notin f_i(\bar{U}'_i \cap \bar{U}'_j)$, alors $g_i(W^i_x)$ et $g_j(W_j)$ sont deux voisinages sans point commun de y_1 et y_2; 2) $x \in f_i(U'_i \cap \overline{U}'_j)$, alors $\gamma_{ji}(x_i)$ est défini; comme il est distinct de x_j, soient V_1 et V_2 deux voisinages sans point commun de $\gamma_{ji}(x_i)$ et x_j; donc $g_i\gamma_{ji}^{-1}(V_1)$ et $g_j(V_2)$ sont deux voisinages sans point commun de y_1 et y_2.

Remarque: Les propositions 2 et 3 pourraient être démontrées avec des hypothèses topologiques un peu moins restrictives; nous avons choisi celles qui rendaient la démonstration plus aisée.

5. Germes de voisinages des feuilles des structures régulières Variation de structures

Soient Γ' et Γ des pseudogroupes d'automorphismes locaux des espaces topologiques B et F resp. (cf. III, 12), et $\tilde{\Gamma}$ un pseudogroupe d'automorphismes locaux du produit $E = B \times F$, engendré par des éléments de la forme

$$(x, y) \to (\gamma'(x), \gamma_x(y)) ,$$

où $x \in B, y \in F, \gamma_x \in \Gamma$ et $\gamma' \in \Gamma'$.

On supposera que $\tilde{\Gamma}$ contient tous les éléments de la forme $(x, y) \to (x, \gamma(y))$, et que F est localement connexe.

Une (E, Γ)-structure sur un espace topologique X admet une Γ'-structure feuilletée sous-jacente régulière; soit V une feuille *propre* de cette structure. La feuille V est munie d'une structure d'espace localement isomorphe au sous-espace $\{b\} \times F$ de E, où b est le but d'un jet distingué en un point de V; cette structure peut être déterminée par le point $b \in B$ et la (F, Γ)-structure de la feuille V (cf. III, 12).

Réciproquement, soit V un espace connexe muni d'une (F, Γ)-structure et soit b un point de B; tout germe de $\tilde{\Gamma}$-plongement de V, considéré comme localement isomorphe au sous-espace $\{b\} \times F$ de E, peut être représenté par un couple (Y, φ), où Y est muni d'une $(E, \tilde{\Gamma})$-structure et où φ est un isomorphisme de V sur une feuille propre de Y; si (Y, φ) et (Y', φ') représentent des germes de $\tilde{\Gamma}$-plongements isomorphes de V, alors l'isomorphisme $\varphi'\varphi^{-1}$ de la feuille $\varphi(V)$ de Y sur la feuille $\varphi'(V)$ de Y' se prolonge suivant un isomorphisme d'un voisinage de $\varphi(V)$ sur un voisinage de $\varphi'(V)$. Dans les paragraphes 6 et 7, nous étudierons les classes d'isomorphie de germes de $\tilde{\Gamma}$-plongement de V dans le cas particulier où $\tilde{\Gamma}$ est le pseudogroupe produit $\Gamma' \times \Gamma$ et dans celui où Γ est déduit par localisation d'un groupe de transformations de Lie.

Variation de structures: Supposons en particulier que Γ' soit le pseudogroupe des applications identiques des ouverts de B. Considérons sur un espace produit $B \times V$ une $(E, \tilde{\Gamma})$-structure définie par un atlas de $B \times F$ sur $B \times V$ compatible avec $\tilde{\Gamma}$, et dont chaque carte f est compatible avec les projections canoniques p_0 et p de $B \times F$ et $B \times V$ sur B (c'est-à-dire pf est la restriction de p_0 à la source de f). Pour tout point $b \in B$, la feuille $V_b = \{b\} \times V$ est munie d'une (F, Γ)-structure s_b qui «varie continûment» avec b; la forme des transformations de $\tilde{\Gamma}$ (par exemple la différentiabilité ou l'analyticité) indique les conditions imposées à la variation. Si B est le segment $[0, 1]$, on a une *déformation* (ou *homotopie*) de structures[2]). Si B était le simplexe euclidien type de dimension n, on obtiendrait un «simplexe singulier» dans l'ensemble des (F, Γ)-structures sur V; l'ensemble de ces simplexes singuliers, muni de sa structure de complexe semi-simplicial, pourrait être appelé le complexe singulier de l'espace des (F, Γ)-structures sur V.

Germes de variation: Soit V un espace muni d'une (F, Γ)-structure s_b, B jouant le rôle d'espace des paramètres, comme ci-dessus, avec un point distingué b. Soit U un voisinage ouvert de b et considérons sur le produit topologique $U \times V$ une $(E, \tilde{\Gamma})$-structure $\tilde{s}$ définie par un atlas $\mathfrak{A}$ de $B \times F$ sur $U \times V$ compatible avec $\tilde{\Gamma}$, chaque carte de $\mathfrak{A}$ étant compatible avec les projections canoniques de $B \times F$ et $U \times V$ dans B. Identifions V avec le sous-espace $\{b\} \times V$ et supposons que s détermine sur V la (F, Γ)-structure donnée s_b. On dira que deux telles structures sur des espaces $U \times V$ et $U' \times V$ définissent le même *germe de $\tilde{\Gamma}$-variation de* s_b s'il existe un voisinage ouvert W de b contenu dans $U \cap U'$ et un isomorphisme du sous-espace $W \times V$ de $U \times V$ sur le sous-espace $W \times V$ de $U' \times V$ se réduisant à l'identité sur $\{b\} \times V$. La structure s_b sera dite *$\tilde{\Gamma}$-stable,* si tout germe de $\tilde{\Gamma}$-variation de s_b est le germe de la déformation triviale qui est représenté par $B \times V$ muni de la structure produit.

Lorsque B et F sont des variétés différentiables et $\tilde{\Gamma}$ un pseudogroupe d'automorphismes locaux différentiables de $B \times F$, alors, si V est compact, les germes de $\tilde{\Gamma}$-variations de s_b correspondent aux classes d'isomorphie de germes de $\tilde{\Gamma}$-plongement de V muni de la structure s_b.

Dans ce cas (ainsi que dans celui des germes de plongement de V comme feuille propre d'une structure feuilletée) on peut appliquer le corollaire du théorème 1 en partant du germe trivial représenté par $B \times V$ muni de la structure produit et l'injection canonique de V sur $\{b\} \times V$; le faisceau de groupes $\mathfrak{G}^s$ est le faisceau des germes, aux points de $\{b\} \times V$, des automorphismes locaux de $B \times V$ se réduisant à l'identité sur $\{b\} \times V$.

[2]) Les variations de structures complexes ont été étudiées par K. KODAIRA, D. C. SPENCER, A. FRÖHLICHER et A. NIJENHUIS (cf. [6] et [10]). Nous n'avons eu connaissance du mémoire [10] qu'après la rédaction de ce travail.

6. Cas des produits locaux

Soit $\tilde{\Gamma} = \Gamma' \times \Gamma$ le pseudogroupe produit des pseudogroupes Γ' et Γ de transformations de B et F (cf. III, 12). Soit $F_b = \{b\} \times F$, $b \in B$, identifié à F, et soit G_b le groupe d'isotropie de Γ' au point b. Nous supposerons que $E = B \times F$ est un espace topologique localement compact et à base dénombrable.

Théorème 2: *Soient Y_1 et Y_2 deux espaces séparés munis de $(B \times F, \Gamma \times \Gamma')$-structures de produit local dont les Γ'-structures feuilletées sous-jacentes sont σ_1 et σ_2. Si h est un isomorphisme d'une feuille propre V_1 à base dénombrable de σ_1 sur une feuille propre V_2 de σ_2 transportant l'holonomie de V_1 sur l'holonomie de V_2, alors h se prolonge suivant un isomorphisme d'un voisinage de V_1 sur un voisinage de V_2* (cf. III, 11).

Si V est un espace séparé à base dénombrable muni d'une (F, Γ)-structure et s un élément de $H^1(V, G_b)$, il existe un isomorphisme de V sur une feuille propre d'une $(B \times F, \Gamma \times \Gamma')$-structure dont l'holonomie est représentée par s.

Autrement dit, les classes d'isomorphie de germes de $(\Gamma \times \Gamma')$-plongement séparés de V sont en correspondance biunivoque avec les éléments de $H^1(V, G_b)$.

Démonstration: Le produit $Y = B \times V$, muni de sa structure naturelle de produit local, et l'injection canonique φ de V sur $V_b = \{b\} \times V$, représentent un germe de $\tilde{\Gamma}$-plongement de V.

Le faisceau de groupes sur V_b formé des germes, aux différents points de V_b, des éléments du pseudogroupe des automorphismes locaux de Y qui laissent fixe V_b, est isomorphe au faisceau constant sur V des germes d'applications constantes de V dans le groupe G_b. Le corollaire du théorème 1 (3) donne alors le théorème 2, si l'on remarque encore que, si $s \in H^1(V, G_b)$ correspond à un germe de plongement représenté par (Y', φ'), l'élément de $H^1(\varphi'(V), G_b)$ image de s par l'isomorphisme induit par φ', représente l'holonomie de la feuille $\varphi'(V)$.

Corollaire: *Les classes d'isomorphie de germes de plongement d'une variété r-différentiable paracompacte V comme feuille propre d'une structure feuilletée r-différentiable régulière de codimension q* (cf. III, 12, Ex. 1), *correspondent biunivoquement aux classes de représentations, modulo les automorphismes intérieurs, du premier groupe d'homotopie de V dans le groupe d'isotropie, à l'origine, du pseudogroupe des automorphismes locaux r-différentiables de R^q.*

Ce corollaire résulte du théorème 2 et du

Lemme: *Toute structure feuilletée r-différentiable régulière, sur une variété paracompacte X, admet une superstructure de produit local dans un voisinage assez petit d'une feuille propre V.*

Démonstration: La variété X possède une superstructure de variété différentiable de classe $r+1$ (et même analytique, d'après le théorème de plongement de WHITNEY); considérons une métrique riemanienne sur X de classe $r+1$. En chaque point $x \in V$, soit T_x un élément de contact de dimension q, transverse à l'élément de contact tangent à V en x, et qui dépend r fois différentiablement de x. Au voisinage de x, les géodésiques tangentes à T_x engendrent un morceau de sous-variété r-différentiable S_x de dimension q; S_x peut être choisi assez petit pour être transverse en chacun de ses points aux feuilles de X et pour que $S_x \cap S_{x'} = \emptyset$ lorsque $x \neq x'$. Dans un voisinage suffisamment petit de V, on a donc une superstructure de produit local de classe r.

Remarques: 1. Comme la variété V (de dim. p) admet une superstructure de variété analytique, il résulte du lemme et du corollaire que tout germe de voisinage de V admet une $\Gamma_r^q \times \Gamma_\omega^p$-superstructure de produit local, Γ_r^q étant le pseudogroupe des automorphismes locaux r-différentiables de R^q et Γ_ω^p celui des automorphismes locaux analytiques de R^p. Le germe de voisinage de V admet une superstructure de classe $r' > r$, si et seulement si le groupe d'holonomie de V est conjugué à un sous-groupe du groupe d'isotropie de $\Gamma_{r'}^q$ à l'origine. 2. Le cas $r = 0$, c'est-à-dire celui des variétés feuilletées topologiques n'est pas résolu. Il semble très difficile; par exemple, si le groupe d'holonomie de V compact est l'identité, les feuilles voisines de V sont-elles homéomorphes à V? (cf. [15], a), p. 121).

7. Cas où les feuilles sont munies de (F, Γ_G)-structures

Soit Γ' un pseudogroupe d'automorphismes locaux d'une variété B topologique (r-différentiable ou analytique), et Γ_G le pseudogroupe déduit par localisation d'un groupe de Lie G de transformations analytiques d'une variété connexe F (cf. I, 1). Considérons dans $E = B \times F$ le pseudogroupe $\tilde{\Gamma}$ engendré par les automorphismes locaux de la forme $(x, y) \to (\gamma'(x), g_x(y))$, où $\gamma' \in \Gamma'$ et où $x \to g_x$ est une application continue (r-différentiable ou analytique) de la source de γ' dans G.

Soit F_b le sous-espace $\{b\} \times F$ de E. Désignons par $\hat{G}$ le groupe des jets locaux, au point b, des applications continues (r-différentiables ou analytiques) des voisinages de b dans G, et soit J le groupe d'isotropie de Γ' au point b. L'ensemble H des couples $(a, \hat{g})$, où $a \in J$ et $\hat{g} \in \hat{G}$, muni de la loi de composition $(a', \hat{g}')(a, \hat{g}) = (a'a, \hat{g}'(a)\hat{g})$, où $\hat{g}'(a)$ désigne le composé du jet local a avec le jet local $\hat{g}'$, est un groupe (le produit croisé de $\hat{G}$ et J). Soit ψ la représentation de H sur G qui fait correspondre au couple $(a, \hat{g})$ le but du jet local $\hat{g}$. A toute (F, Γ_G)-structure sur un espace V est associé un élément de $H^1(V, G)$ (par l'application induite par la représentation de $\mathfrak{P}_G$ sur $\mathfrak{G}$, cf. III, 4).

Théorème 3: *Soit V une variété paracompacte munie d'une (F, Γ_G)-structure σ. Les classes d'isomorphie de germes de $\tilde{\Gamma}$-plongement de V, considéré comme localement isomorphe au sous-espace F_b, sont en correspondance biunivoque canonique avec les éléments de $H^1(V, H)$ se projetant, dans la représentation induite par ψ, sur l'élément de $H^1(V, G)$ associé à σ.*

Démonstration: Soit Π_G le groupoïde formé des jets locaux de Γ_G (ou de G) et soit Π_H le groupoïde formé des jets des éléments de $\tilde{\Gamma}$ dont la source et le but appartiennent à F_b. On a une représentation canonique de Π_H sur Π_G en faisant correspondre au jet d'une transformation $\tilde{\gamma}$ de $\tilde{\Gamma}$ le jet de la restriction de $\tilde{\gamma}$ à F_b (identifiée à un élément de Γ_G par la projection canonique de F_b sur F); on a également des représentations canoniques de Π_G et Π_H sur les groupes G et H resp. munis de la topologie discrète, car Π_G et Π_H sont canoniquement isomorphes aux produits $F \times G$ et $F_b \times H$ respectivement. On a donc le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} \Pi_H & \rightarrow & \Pi_G \\ \downarrow & & \downarrow \\ H & \xrightarrow{\psi} & G \end{array}$$

En désignant par $\mathfrak{P}_G$ et $\mathfrak{P}_H$ les faisceaux sur V des germes d'applications locales continues de V dans Π_G et Π_H, les représentations induites forment le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} H^1(V, \mathfrak{P}_H) & \rightarrow & H^1(V, \mathfrak{P}_G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(V, H) & \rightarrow & H^1(V, G)\,. \end{array}$$

Les éléments de $H^1(V, \mathfrak{P}_H)$ qui se projettent sur l'élément σ de $H^1(V, \mathfrak{P}_G)$ sont les $\tilde{\Gamma}$-structures sur V admettant σ comme structure sous-jacente. On vérifie immédiatement qu'elles correspondent biunivoquement (par l'application verticale de gauche) aux éléments de $H^1(X, H)$ se projetant sur l'élément de $H^1(X, G)$ associé à σ.

Corollaire: *Soit $\tilde{s}$ une $(E, \tilde{\Gamma})$-structure sur une variété X et soit V une feuille propre de la structure feuilletée sous-jacente à $\tilde{s}$. La feuille V étant supposée compacte et à premier groupe d'homotopie fini, si le groupe d'holonomie de V est l'identité, alors V admet un voisinage isomorphe à un produit.*

Autrement dit, les (F, Γ_G)-structures sur un espace V compact dont le premier groupe d'homotopie est fini sont stables (cf. 5).

Démonstration: Soit π le premier groupe d'homotopie de V relatif à un certain point. D'après le théorème 3, le germe de $\tilde{\Gamma}$-voisinage de V est caractérisé par une représentation $\hat{\varphi}$ de π dans $\hat{G}$, définie à un automorphisme intérieur près, se projetant sur une représentation φ_b de π dans G, qui représente l'élément de $H^1(V, G)$ associé à la Γ_G-structure de V.

Chaque jet local $\hat{\varphi}(\mu)$, où μ parcourt le groupe π, peut être représenté par une application f_μ continue (r-différentiable ou analytique) d'un voisinage U de b dans G. Comme π est fini, U peut être choisi assez petit pour que $\mu \to f_\mu(u)$ soit une représentation φ_u de π dans G, pour tout $u \in U$. En vertu d'un théorème de MONTGOMERY-ZIPPIN (cf. [11], p. 216), si u est suffisamment proche de b, il existe un élément g_u de G, proche de l'élément neutre, tel que $\varphi_u(\pi)$ soit conjugué par g_u à un sous-groupe contenu dans $\varphi_b(\pi)$; comme $\varphi_b(\pi)$ est fini, ce sous-groupe est égal à $\varphi_b(\pi)$. Le centralisateur C de $\varphi_b(\pi)$ est un sous-groupe fermé de G; soit δ une section locale analytique de la fibration $G \to G/C$, au voisinage de l'élément neutre. Si l'on choisit $g_u \in \delta$, l'application $u \to g_u$ est continue (r-différentiable ou analytique); ainsi son jet local $\hat{g}$ au point b est un élément de G. La représentation $\hat{g}\hat{\varphi}\hat{g}^{-1}$ applique chaque élément μ de π sur le jet au point b de l'application constante de U sur $\varphi_b(\mu)$; elle correspond au germe de $\tilde{\Gamma}$-plongement de V représenté par le produit $U \times V$ et l'injection de V sur $\{b\} \times V$.

8. Γ-superstructure d'ordre r

Dans ce qui suit, B désigne une variété ∞-différentiable ou analytique (réelle ou complexe), et Γ un pseudogroupe d'automorphismes locaux de B (le mot différentiable sera pris dans le sens d'indéfiniment différentiable).

Soit $\check{B}$ l'espace des germes de sous-espaces de B muni de sa projection canonique p sur B, et soit $\check{\Gamma}$ le pseudogroupe de ses automorphismes locaux (qui prolonge Γ, cf. 1). Comme toujours, Π_Γ et $\Pi_{\check{\Gamma}}$ désignent les groupoïdes des jets des éléments de Γ et $\check{\Gamma}$.

Soit $\check{\Pi}$ le groupoïde extension du groupoïde Π_Γ d'opérateurs sur $(\check{B}, p)$ (cf. I, 7), le sous-espace de ses unités étant identifié à $\check{B}$; les éléments de $\check{\Pi}$ sont les couples (Z, K) formés d'un élément $Z \in \Pi_\Gamma$ et d'un germe K de sous-espace de B à la source de Z. Soit Π^r le groupoïde quotient de $\check{\Pi}$ par la relation d'équivalence suivante: soient Z et Z' les jets locaux en $x \in B$ des éléments γ et γ' de Γ, et L_x le germe au point x d'un sous-espace L de B contenant x; les deux couples (Z, L_x) et (Z', L_x) seront identifiés si et seulement si les jets d'ordre r (cf. [4], e)) de γ et γ' sont égaux aux points de L voisins de x. Le groupoïde quotient Π^r est encore étalé sur l'espace $\check{B}$ de ses unités par les projections a et b, et la représentation ψ de $\check{\Pi}$ sur le groupoïde $\Pi_{\check{\Gamma}}$ donne, par passage au quotient, une représentation ψ^r de Π^r sur $\Pi_{\check{\Gamma}}$.

On a donc une suite infinie de représentations de groupoïdes topologiques

$$\check{\Pi} \to \cdots \to \Pi^{r+1} \to \Pi^r \to \cdots \to \Pi^1 \to \Pi_{\check{\Gamma}} \tag{1}$$

admettant tous $\check{B}$ comme espace de leurs unités.

Soit X un espace localement isomorphe à un sous-espace de B, c'est-à-dire muni d'une $(\check{B}, \check{\Gamma})$-structure σ. Considérons sur X les faisceaux de groupoïdes $\mathfrak{P}^r$ (resp. $\check{\mathfrak{P}}$) formés des germes d'isomorphismes locaux de X dans Π^r (resp. $\check{\Pi}$) (c'est-à-dire des germes tels que leurs unités soient des germes d'isomorphismes locaux de X dans $\check{B}$); la suite 1) induit une suite analogue de représentations des faisceaux $\mathfrak{P}^r$.

Définition: Une *Γ-superstructure d'ordre r de σ* (ou *une Γ-structure d'ordre r admettant σ comme structure sous-jacente)* est un élément de $H^1(X, \mathfrak{P}^r)$.

Tout élément de $H^1(X, \check{\mathfrak{P}})$, c'est-à-dire toute Γ-structure sur X admettant σ comme structure sous-jacente (cf. 3 car $\check{\mathfrak{P}}$ est canoniquement isomorphe à $\mathfrak{P}^g_\Gamma$), admet pour tout r une Γ-structure d'ordre r sous-jacente. La réciproque n'est pas vraie en général.

Soit G^r le faisceau de groupes sur $\check{B}$, noyau de la représentation ψ^r. Si $s \in H^1(X, \check{\mathfrak{P}})$ est une Γ-superstructure de X, soit $\mathfrak{G}^r$ le faisceau de groupes déduit de G^r par un cocycle représentant s (cf. II, 4). De la proposition 7 de II, on déduit la

Proposition 4: *Les Γ-superstructures d'ordre r de σ sont en correspondance biunivoque canonique avec les éléments de* $H^1(X, \mathfrak{G}^r)$.

L'élément neutre de $H^1(X, \mathfrak{G}^r)$ correspond à la Γ-structure d'ordre r sous-jacente à s.

La suite 1) donne naissance à la suite de représentations des faisceaux de groupes sur X: $\check{\mathfrak{G}} \to \cdots \to \mathfrak{G}^{r+1} \to \mathfrak{G}^r \to \cdots \to \mathfrak{G}^1 \to X$.

Remarques: 1. Les Γ-structures d'ordre r, sous-jacentes à une Γ-structure correspondant à un germe P de Γ-plongement de X, sont autant d'invariants attachés à ce germe. Dans le cas où Γ est formé d'automorphismes locaux analytiques, il serait intéressant de savoir *dans quelle mesure ces invariants d'ordre r suffisent à caractériser la classe d'isomorphie du germe P* (ou, d'après le théorème 1, la Γ-structure s).

2. Les représentations $\check{\mathfrak{P}} \to \mathfrak{P}^r$ déterminent une représentation de $\check{\mathfrak{P}}$ dans la limite projective $\mathfrak{P}^\infty$ des $\mathfrak{P}^r$, d'où une application μ de $H^1(X, \check{\mathfrak{P}})$ dans $H^1(X, \mathfrak{P}^\infty)$. Un élément de $H^1(X, \mathfrak{P}^\infty)$ sera appelé une *Γ-superstructure d'ordre* ∞ de σ.

On a également une application ν de $H^1(X, \mathfrak{P}^\infty)$ dans la limite projective $\varprojlim H^1(X, \mathfrak{P}^r)$.

La connaissance de l'application composée $\nu\mu$ permettrait de répondre à la question ci-dessus.

9. Germes de plongement des variétés analytiques ou différentiables

Soit Γ le pseudogroupe de tous les automorphismes locaux analytiques complexes de l'espace numérique complexe C^n, de coordonnées $y^1, \ldots, y^q, x^1, \ldots, x^p$ $(p + q = n)$, et soit C^p le sous-espace linéaire défini par $y^i = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant q)$.

Tout ce qui suit serait encore valable, si l'on remplaçait partout «analytique complexe» par «différentiable» ou «analytique réel», et C^n par l'espace numérique réel R^n.

Une structure de variété analytique de dimension complexe p, sur un espace paracompact X, peut être considérée comme une structure sur X d'espace localement isomorphe au sous-espace C^p de C^n. Les germes de Γ-plongement de X seront appelés les germes de plongement analytique (de codimension q), car ils sont représentés par des plongements analytiques de X sur une sous-variété d'une variété analytique de dimension n. Il suffira de considérer, dans l'espace des germes de sous-espaces de C^n, l'ouvert formé des germes du sous-espace C^p de C^n, qui sera identifié à C^p.

Soit $y'^m = \gamma^m(y, x)$, $x'^i = g^i(y, x)$ un automorphisme local de C^n, au voisinage de l'origine 0, se réduisant à l'identité sur C^p, c'est-à-dire que $\gamma^m(0, x) = 0$, $g^i(0, x) = x^i$. Il détermine une section locale g^r de G^r (cf. notations de 8) qui peut être aussi représentée par l'automorphisme local de C^n:

$$\begin{aligned} y'^m &= \phantom{x^i +{}} \alpha^m_j(x) y^j + \cdots + \frac{1}{r!} \alpha^m_{j_1 \ldots j_r}(x) y^{j_1} \ldots y^{j_r} \\ x'^i &= x^i + a^i_j\,(x) y^j + \cdots + \frac{1}{r!} a^i_{j_1 \ldots j_r}(x) y^{j_1} \ldots y^{j_r} \end{aligned} \tag{1}$$

$$\text{où } \alpha^m_{j_1 \ldots j_k}(x) = \frac{\partial^k \gamma^m}{y_{j_1} \cdots y_{j_k}}(0, x) \text{ et } a^i_{j_1 \ldots j_r}(x) = \frac{\partial^k g^i}{y_{j_1} \cdots y_{j_k}}(0, x)$$

et dét. $| \alpha^m_j | \neq 0$.

L'automorphisme 1) sera appelé le représentant canonique de la section locale g^r. Réciproquement, tout automorphisme local de la forme 1), où $\alpha^m_{j_1\ldots j_k}(x)$ et $a^i_{j_1\ldots j_k}(x)$ sont des fonctions analytiques arbitraires de x, symétriques dans leurs indices inférieurs, est le représentant canonique d'une section locale de G^r. Le représentant canonique du produit de deux sections locales de G^r s'obtient en composant les représentants canoniques de ces sections, et en supprimant dans le développement limité par rapport aux y tous les termes de degré $> r$.

Γ-superstructure d'ordre 1

Lorsque $r = 1$, au représentant canonique $y'^m = \alpha^m_j(x)$, $x'^i = x^i + a^i_j(x)y^i$, correspond l'application locale analytique

$$x \to \begin{pmatrix} 0 & \alpha^m_j(x) \\ I & a^i_j(x) \end{pmatrix}$$

de C^p dans le groupe $I_{n,p}$ des automorphismes de l'espace vectoriel complexe C^n qui se réduisent à l'identité sur le sous-espace C^p. Cette correspondance définit un isomorphisme de G^1, restreint à C^p, sur le faisceau des germes d'applications analytiques de C^p dans le groupe $I_{n,p}$. Ce faisceau de groupes peut être aussi considéré comme le faisceau des germes d'automorphismes de l'espace fibré des vecteurs tangents à C^n aux points de C^p, se réduisant à l'identité sur le sous-espace fibré des vecteurs tangents à C^p.

Soit P un germe de plongement analytique de X, représenté par un couple (Y, φ), où Y est, par exemple, la variété complexe $C^q \times X$ et φ le plongement analytique canonique de X sur $\{0\} \times X$. Soit s la Γ-structure sur X associée à P. Un faisceau de groupes $\mathfrak{G}^1$, associé par s à G^1, est donc, en vertu de la remarque précédente, isomorphe au faisceau des germes d'automorphismes de l'espace fibré E_Y des vecteurs tangents à Y, aux points de $\varphi(X)$, qui laissent fixe le sous-espace fibré E_X des vecteurs tangents à la sous-variété $\varphi(X)$.

Soit $M_{n,p}$ le sous-groupe du groupe des automorphismes de l'espace vectoriel complexe C^n, formé de ceux qui transforment en lui-même le sous-espace C^p, et soit L_p le groupe des automorphismes de l'espace vectoriel C^p. L'application qui fait correspondre à tout élément de $M_{n,p}$ sa restriction à C^p, est une représentation μ de $M_{n,p}$ sur L_p. On a donc la suite exacte

$$e \to I_{n,p} \to M_{n,p} \xrightarrow{\mu} L_p \to e\,. \tag{2}$$

Proposition 5: *Les Γ-superstructures du premier ordre de X correspondent biunivoquement aux classes d'isomorphie des espaces fibrés analytiques, à groupe* *structural $M_{n,p}$, qui sont des extensions (relativement à μ) de l'espace fibré des vecteurs tangents à X.*

Démonstration: De 2), on déduit la suite exacte

$$e \to \mathfrak{J}_{n,p} \to \mathfrak{M}_{n,p} \to \mathfrak{L}_p \to e \tag{3}$$

où $\mathfrak{J}_{n,p}$, $\mathfrak{M}_{n,p}$ et $\mathfrak{L}_p$ désignent les faisceaux des germes d'applications analytiques de X dans $I_{n,p}$, $M_{n,p}$ et L_p respectivement. L'espace fibré E_Y, à groupe structural $M_{n,p}$, est représenté par un élément $t \in H^1(X, \mathfrak{M}_{n,p})$, (cf. par ex. [9]), et E_X par l'image de t dans $H^1(X, \mathfrak{L}_p)$.

De (3) on déduit la suite exacte

$$e \to \mathfrak{J}^t_{n,p} \to \mathfrak{M}^t_{n,p} \to \mathfrak{L}^t_p \to e \tag{4}$$

des faisceaux de groupes déduits, par un cocycle représentant t, de $\mathfrak{J}_{n,p}$, $\mathfrak{M}_{n,p}$, $\mathfrak{L}_p$ (cf. II, 4). Le faisceau $\mathfrak{J}^t_{n,p}$ est isomorphe au faisceau des germes d'automorphismes de E_Y, se réduisant à l'identité sur E_X; il est donc isomorphe à $\mathfrak{G}^1$.

Comme L_p se relève dans $M_{n,p}$ (par injection de C^p dans C^n), on déduit de (4) la suite exacte:

$$e \to H^1(X, \mathfrak{J}^t_{n,p}) \to H^1(X, \mathfrak{M}^t_{n,p}) \to H^1(X, \mathfrak{L}^t_{n,p}) \to e \ .$$

Les images dans $H^1(X, \mathfrak{M}^t_{n,p})$ des éléments de $H^1(X, \mathfrak{J}^t_{n,p})$ correspondent aux classes d'isomorphie des espaces fibrés, à groupe structural $M_{n,p}$, qui sont des extensions analytiques de l'espace fibré E_X. En vertu de la proposition 4, les éléments de $H^1(X, \mathfrak{G}^1)$ correspondent biunivoquement aux Γ-superstructures d'ordre un de X; la proposition résulte de l'isomorphisme canonique de $H^1(X, \mathfrak{G}^1)$ et $H^1(X, \mathfrak{J}^t_{n,p})$.

Γ-superstructures d'ordre $r > 1$

Dans ce cas, le faisceau de groupes G^r, restreint à C^p, est isomorphe seulement à un *sous-faisceau* du faisceau des germes d'automorphismes de l'espace fibré des repères d'ordre r (cf. [4], e)) de C^n, aux points de C^p, se réduisant à l'identité sur le sous-espace fibré des repères d'ordre r de C^p.

Soit L^r_n le groupe des jets d'ordre r, à l'origine 0 de C^n, des automorphismes analytiques de C^n laissant fixe 0. Le noyau de l'homomorphisme canonique $L^r_n \to L^{r-1}_n$ est abélien; par les automorphismes intérieurs de L^r_n, il se transforme comme un espace tensoriel (cf. [4], e)). Comme l'espace des repères d'ordre r de C^n est un espace fibré à groupe structural L^r_n, il résulte de la remarque précédente que le noyau N^r de l'homomorphisme canonique de G^r sur G^{r-1} est aussi un faisceau de groupes abéliens.

Le représentant canonique d'une section locale de N^r a la forme

$$\begin{aligned} y'^m &= y^m + \frac{1}{r!}\,\alpha^m_{j_1\ldots j_r}(x)\,y^{j_1}\cdots y^{j_r} \\ x'^i &= x^i + \frac{1}{r!}\,a^i_{j_1\ldots j_r}(x)\,y^{j_1}\cdots y^{j_r}\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Par un changement de coordonnées $\overline{y}^m = \overline{y}^m(x, y)$, $\overline{x}^i = \overline{x}^i(x, y)$, laissant invariant le sous-espace C^p, le représentant canonique (5) est transformé en

$$\begin{aligned} \overline{y}'^m &= \overline{y}^m + \frac{1}{r!}\,\frac{\partial \overline{y}^m}{\partial y^n}\,\alpha^n_{m_1\ldots m_r}\,\frac{\partial y^{m_1}}{\partial \overline{y}^{j_1}}\cdots\frac{\partial y^{m_r}}{\partial \overline{y}^{j_r}}\,\overline{y}^{j_1}\ldots\overline{y}^{j_r} \\ \overline{x}'^i &= \overline{x}^i + \frac{1}{r!}\,\frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k}\,a^k_{m_1\ldots m_r}\,\frac{\partial y^{m_1}}{\partial \overline{y}^{j_1}}\cdots\frac{\partial y^{m_r}}{\partial \overline{y}^{j_r}}\,\overline{y}^{j_1}\ldots\overline{y}^{j_r}\,. \end{aligned} \tag{5$'$}$$

Soit s^{r-1} une Γ-superstructure d'ordre $r-1$ de X et soit s^1 la Γ-structure d'ordre 1 qui lui est sous-jacente. Par la proposition précédente, il correspond à s^1 un espace fibré à groupe structural $M_{n,p}$, et par l'homomorphisme de $M_{n,p}$ sur L_q (qui fait correspondre à tout élément de $M_{n,p}$ sa projection sur C^q), un espace fibré associé E^1 (au sens classique), de base X, de fibre C^q et de groupe structural L_q. Soit φ la section nulle de E^1. Le couple formé de la variété analytique E^1 et du plongement φ représente un germe de plongement analytique de X, correspondant à une Γ-superstructure s de X.

Soient $\mathfrak{G}^r$, $\mathfrak{G}^{r-1}$, $\mathfrak{N}^r$ les faisceaux de groupes sur X déduits, par un cocycle représentant s, des faisceaux de groupes G^r, G^{r-1}, N^r. L'espace fibré des vecteurs tangents à E^1, aux points de $\varphi(X)$, est à groupe structural $L_p \times L_q$, et $\mathfrak{N}^r$ est isomorphe, en vertu de (5)$'$, au faisceau des germes de sections analytiques de l'espace fibré associé des tenseurs de composantes $(\alpha^m_{j_1\ldots j_r}, a^i_{j_1\ldots j_r})$.

On a la suite exacte

$$e \to \mathfrak{N}^r \to \mathfrak{G}^r \to \mathfrak{G}^{r-1} \to e\,.$$

L'élément s^{r-1} correspond à un élément v de $H^1(X, \mathfrak{G}^{r-1})$. D'après la théorie générale, (cf. [7]), l'élément v est l'image d'un élément de $H^1(X, \mathfrak{G}^r)$ si et seulement si, par l'opérateur $\delta\colon H^1(X, \mathfrak{G}^{r-1}) \to H^2(X, \mathfrak{N}^r)$, v est appliqué sur l'élément nul. On a donc la

Proposition 6: *Une Γ-superstructure s^{r-1} d'ordre $r-1$ de X, représentée par l'élément $v \in H^1(X, \mathfrak{G}^{r-1})$, est sous-jacente à une Γ-structure d'ordre r, si et seulement si la classe $\delta v \in H^2(X, \mathfrak{N}^r)$ est nulle.*

Rappelons que $\mathfrak{N}^r$ est isomorphe au faisceau des germes de sections analytiques d'un certain espace fibré vectoriel, qui ne dépend que de la Γ-structure d'ordre 1 sous-jacente à s^{r-1}.

Lorsque X est une variété de STEIN, alors $H^1(X, \mathfrak{G}^r) \to H^1(X, \mathfrak{G}^{r-1})$ est un isomorphisme, car $H^1(X, \mathfrak{N}^r)$ et $H^2(X, \mathfrak{N}^r)$ sont nuls, puisque N^r est un faisceau analytique cohérent. (Cf. H. CARTAN, Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, Bruxelles, 1953, p. 41–55). On a donc le

Corollaire: *Si X est une variété de Stein, les Γ-superstructures d'ordre r de X correspondent biunivoquement aux Γ-superstructures d'ordre 1, donc aux classes d'isomorphie des espaces fibrés topologiques de base X, et de groupe structural le groupe linéaire complexe L_q.*

Ce corollaire est aussi vrai si X est une variété analytique réelle, plongeable dans un espace euclidien. Dans le cas d'une variété analytique réelle quelconque, on sait néanmoins que $H^2(X, \mathfrak{N}^r)$ est nul (cf. B. MALGRANGE, Bull. Soc. Math. Fr., 83, 1955, p. 231–237); donc toute Γ-structure analytique réelle d'ordre r est sous-jacente à une Γ-structure d'ordre r', pour tout $r' > r$.

Dans le cas différentiable, il est bien connu que les classes d'isomorphie de germes de plongements différentiables de codimension q d'une variété différentiable X sont en correspondance biunivoque avec les classes d'isomorphie des espaces fibrés sur X à groupe structural le groupe orthogonal $0(q)$.

En effet, soit φ un plongement différentiable de X dans une variété Y de dimension n. Introduisons dans Y une métrique riemanienne et soit N l'espace fibré des vecteurs normaux à $\varphi(X)$; c'est un espace fibré à groupe structural $0(q)$, et qui est lui-même une variété différentiable de dimension n. L'application φ_0 de X dans N, qui fait correspondre à tout $x \in X$ le vecteur nul en $\varphi(x)$, est un plongement différentiable de X dans N. Les couples (Y, φ) et (N, φ_0) déterminent des germes de plongement différentiable de X isomorphes, car chaque vecteur normal suffisamment petit de N peut être appliqué sur l'arc de géodésique de même longueur qu'il détermine dans X.

Ce résultat est-il aussi valable pour les variétés de STEIN ($0(q)$ étant naturellement remplacé par le groupe unitaire $U(q)$)? Le corollaire précédent semble le confirmer.

10. Variations infinitésimales de structures

Soit Γ un pseudogroupe d'automorphismes locaux d'une variété indéfiniment différentiable V^p, et considérons un pseudogroupe d'automorphismes locaux différentiables $\tilde{\Gamma}$ de $V^n = R^q \times V^p$ formé d'éléments localement de la forme

$$(y, x) \to (y, \gamma_y(x)), \quad \text{où} \quad y \in R^q, \; x \in V^p \quad \text{et} \quad \gamma_y \in \Gamma.$$

On suppose que $\tilde{\Gamma}$ contient en particulier tous les éléments de la forme $(y, x) \to (y, \gamma(x))$, où γ ne dépend pas de y (cf. 5).

Soit σ une (V^p, Γ)-structure sur une variété X; elle peut être considérée comme une structure sur X d'espace localement isomorphe au sous-espace $\{0\} \times V^p$ de V^n. Lorsque X est compact, les $\tilde{\Gamma}$-superstructures de σ correspondent aux germes de variations de σ (cf. 5). Les $\tilde{\Gamma}$-superstructures d'ordre r de σ peuvent être appelées les *variations (infinitésimales) d'ordre r de σ.*

Le produit $R^q \times X$ est muni d'une $(V^n, \tilde{\Gamma})$-structure qui correspond à une variation triviale de σ, et qui induit sur X, identifié à $X_0 = \{0\} \times X$, une $\tilde{\Gamma}$-structure s.

Soit $\tilde{\Gamma}_0$ le sous-pseudogroupe des automorphismes locaux de $R^q \times X$, formé de ceux qui laissent fixes les points de X_0. En identifiant les germes des éléments de $\tilde{\Gamma}_0$, en un point $x \in X_0$, si leurs jets d'ordre r, au voisinage de x dans X_0, sont les mêmes, on obtient le faisceau de groupes $\mathfrak{G}^r$ sur X (cf. 3). Une section de $\mathfrak{G}^r$ peut être identifiée à une *q-transformation infinitésimale d'ordre r du pseudogroupe Γ_X* des automorphismes locaux de X. D'après le paragraphe 3, *les variations infinitésimales d'ordre r de σ correspondent biunivoquement aux éléments de* $H^1(X, \mathfrak{G}^r)$.

On remarquera que le noyau $\mathfrak{N}^r$ de l'homomorphisme de $\mathfrak{G}^r$ sur $\mathfrak{G}^{r-1}$ $(r>0)$ est isomorphe à un sous-faisceau du faisceau des germes de sections de l'espace fibré vectoriel des applications multilinéaires symétriques $a^i_{j_1 \ldots j_r}$ de R^q dans l'espace fibré des vecteurs tangents à X (cf. 9). Ainsi $\mathfrak{N}^r$ est dans le centre de $\mathfrak{G}^r$. D'après la suite exacte (cf. [7]): $\ldots H^1(X, \mathfrak{G}^r) \to H^1(X, \mathfrak{G}^{r-1}) \xrightarrow{\delta} H^2(X, \mathfrak{N}^r)$, un élément v de $H^1(X, \mathfrak{G}^{r-1})$ est l'image d'un élément de $H^1(X, \mathfrak{G}^r)$ si et seulement si $\delta v = 0$.

Supposons, en particulier, que Γ soit le pseudogroupe des automorphismes analytiques complexes de C^p et que $\tilde{\Gamma}$ soit le pseudogroupe engendré par tous les automorphismes différentiables (ou analytiques) de $R \times C^p$ (ou $C \times C^p$) de la forme $(y, x) \to (y, \gamma_y(x))$, où $\gamma_y \in \Gamma$. Alors X sera une variété analytique complexe; $\mathfrak{G}^1$ *et* $\mathfrak{N}^r$ (pour tout $r > 0$) *sont isomorphes au faisceau* $\mathfrak{T}$ *sur X des germes de sections holomorphes de l'espace fibré des vecteurs tangents à X.* Ainsi par exemple, lorsque $H^1(X, \mathfrak{T}) = 0$, alors $H^1(X, \mathfrak{G}^r)$ pour tout $r > 0$, est réduit à un seul élément correspondant à la variation triviale. Cette remarque est à rapprocher du résultat (beaucoup plus profond) de [6].

Exemple: Si X est muni d'une (F, Γ_G)-structure σ (cf. 7), les variations infinitésimales d'ordre r de σ correspondent aux classes de représentations, modulo les automorphismes intérieurs, du premier groupe d'homotopie π de X dans le groupe G^r, se projetant sur la classe des représentations de π dans G associée à σ (G^r étant le groupe des jets d'ordre r, à l'origine, des applications de R^q dans le groupe G).

CHAPITRE V

Structures feuilletées transversalement analytiques de codimension un

La lecture de ce chapitre est indépendante de celle du chapitre précédent.

Dans tout ce chapitre, Γ_ω désigne le pseudogroupe des automorphismes locaux analytiques de la droite numérique R, et Π_ω le groupoïde formé des jets locaux des éléments de Γ_ω. Une structure feuilletée transversalement analytique de codimension 1 est une Γ_ω-structure feuilletée; il ne s'agira ici que de celles qui sont sous-jacentes à une Γ_ω-structure.

La proposition 1 montre que toute Γ_ω-structure est l'image réciproque d'une Γ_ω-structure régulière (cf. III, 12); elle permettra dans plusieurs cas d'étendre aux Γ_ω-structures générales plusieurs propriétés des Γ_ω-structures régulières. Toutes les propriétés des Γ_ω-structures découlent d'un lemme fondamental qui affirme que toute transversale fermée à une Γ_ω-structure feuilletée sur un espace X, sous-jacente à une Γ_ω-structure, représente un élément d'ordre infini du premier groupe d'homotopie de X. Les principales conséquences du lemme fondamental sont réunies dans le théorème 1 (cf. 4) et dans le paragraphe 5, où l'on montre l'existence, dans certains cas, d'une intégrale première différentiable globale d'une forme de Pfaff complètement intégrable. Dans le paragraphe 6, on montre l'existence d'au moins une feuille compacte, moyennant une hypothèse sur le premier groupe d'homotopie. Enfin le paragraphe 7 donne des renseignements sur le nombre des feuilles compactes.

Comme le montrent des contre-exemples simples, aucune des propriétés démontrées dans ce chapitre ne serait vraie, en général, si Γ_ω était remplacé par le pseudogroupe des automorphismes locaux différentiables de R. Tous les procédés utilisés sont particuliers à l'analyticité et à la codimension 1.

1. Γ_ω-structure et Γ_ω-structure feuilletée régulière

Proposition 1: *Soit s une Γ_ω-structure sur un espace X. Il existe un espace E, muni d'une structure de produit local $\tilde{s}$, localement isomorphe au produit $R \times X$ muni du pseudogroupe produit $\Gamma_\omega \times J$ (où J est le pseudogroupe des applications identiques des ouverts de X), et une application continue φ de X dans E, telle que s soit la Γ_ω-structure image réciproque par φ de la Γ_ω-structure sous-jacente à $\tilde{s}$.*

Démonstration: Remarquons tout d'abord que toute projection qui étale, dans R, un espace séparé connexe est un homéomorphisme sur un intervalle ouvert de R. Comme les éléments de Γ_ω sont des automorphismes locaux analytiques de R, alors Π_ω est un espace *séparé,* étalé par ses projections source et but dans R. Donc les points de la composante connexe de Π_ω qui contient un germe μ sont les jets locaux d'un élément maximal γ_μ de Γ_ω.

Soit $\mathfrak{P}^s$ un faisceau principal sur X associé à s (cf. III, 4), et soient α et β ses projections canoniques sur X et R respectivement. Dans le produit $R \times \mathfrak{P}^s$, soit ϱ la relation d'équivalence qui identifie les couples (t, y) et (t', y'), si et seulement s'il existe un élément $\mu \in \Pi_\omega$ tel que $y' = \mu y$ (on se souvient que Π_ω est un groupoïde d'opérateurs sur $(\mathfrak{P}^s, \beta)$), et si $t' = \gamma_\mu(t)$. Cette relation ϱ est une relation d'équivalence: elle est réflexive et symétrique, car $\gamma_{\mu^{-1}} = \gamma_\mu^{-1}$; elle est aussi transitive: si $y'' = \mu' y'$ et $t'' = \gamma_{\mu'}(t')$, on a $y'' = \mu'\mu(y)$ et $t'' = \gamma_{\mu'\mu}(t)$, car la source de $\gamma_{\mu'}\gamma_\mu$ est connexe (comme intersection de deux intervalles), et elle est donc contenue dans la source de $\gamma_{\mu'\mu}$. Soit donc E l'espace quotient de $R \times \mathfrak{P}^s$ par la relation d'équivalence ϱ, et p la projection canonique de $R \times \mathfrak{P}^s$ sur E.

Soit g un relèvement d'un ouvert U de X dans $\mathfrak{P}^s$. L'application $\overline{g}$ de $R \times U$ dans E, obtenue en composant l'application $(t, x) \to (t, g(x))$ de $R \times U$ dans $R \times \mathfrak{P}^s$ avec p, est ouverte et biunivoque. En effet, si $g'(x) = \mu g(x)$, alors $x = x'$ et μ est le jet de l'application identique de R, car Π_ω est simplement transitif dans les fibres du faisceau principal $\mathfrak{P}^s$.

Les cartes $\overline{g}$, associées à tous les relèvements g des ouverts de X dans $\mathfrak{P}^s$, forment un atlas de $R \times X$ sur E compatible avec $\Gamma_\omega \times J$: si $\overline{g}$ et $\overline{g}'$ sont les cartes associées aux relèvements g et g' de U et U' dans $\mathfrak{P}^s$, alors $\overline{g}(t, x) = \overline{g}'(t', x')$ si et seulement si $x = x'$ et $t' = \gamma_\mu(t)$, où μ est déterminé par $g'(x) = \mu g(x)$.

De plus les applications $x \to \overline{g}(\beta g(x), x)$ admettent une réunion φ, qui est une application continue et biunivoque de X dans E. La projection de $R \times \mathfrak{P}^s$ sur X définit une projection q de E sur X; φ est un relèvement relativement à q.

La Γ_ω-structure sur E, sous-jacente à sa $(R \times X,\ \Gamma_\omega \times J)$-structure peut être donnée par le cocycle (h), relatif au recouvrement formé des buts 0_g des cartes $\overline{g}$, la section locale $h_{g',g}$ appliquant le point $y \in 0_g \cap 0_{g'}$ sur l'élément μ de Π_ω déterminé par $g'(x) = \mu g(x)$, où $x = q(y)$. L'image réciproque de ce cocycle par φ est un cocycle (maximal) qui détermine s (cf. II, 6).

Remarque: *Si X est paracompact, alors $\varphi(X)$ possède un voisinage séparé E_0 dans E.*

Considérons, en effet, un recouvrement $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ localement fini de X, par des ouverts U_i qui admettent un relèvement g_i dans $\mathfrak{P}^s$; soit $\mathfrak{U}' = \{U'_i\}_{i \in I}$ un recouvrement de X tel que l'adhérence $\overline{U}'_i$ de U'_i soit contenue dans U_i. Pour tout $x \in X$, on peut trouver un voisinage ouvert W_x ne rencontrant qu'un nombre fini de U_i, assez petit pour que 1) si $x \notin \overline{U}'_i$, alors $W_x \cap U'_i = \emptyset$,

2) si $x \in \overline{U}_i'$, alors $W_x \subset U_i$, 3) si $x \in \overline{U}_i' \cap \overline{U}_j'$, alors le changement de cartes $\overline{g}_j^{-1}\overline{g}_i$ est défini dans un ouvert contenant $(\beta g_i(W_x), W_x)$. Les buts des restrictions des cartes g_i à $\bigcup_x [\beta g_i(W_x), W_x \cap U_i']$, où $x \in U_i'$, forment un recouvrement d'un voisinage séparé E_0 de $\varphi(X)$.

2. Un lemme d'approximation

Un point singulier d'une fonction 2-différentiable f sur R^n est un point x de R^n où toutes les dérivées partielles premières de f s'annulent; on dit que le point singulier x est un *point singulier quadratique non dégénéré* si de plus la forme quadratique, dont les coefficients sont les dérivées partielles secondes de f en x, est non dégénérée. Si f ne présente comme points singuliers, dans une partie U de R^n, que des points quadratiques non dégénérés, f sera dite non dégénérée sur U.

Lemme: *Soit V une variété 2-différentiable munie d'une structure feuilletée 2-différentiable régulière σ de codimension 1* (cf. III, 12). *Toute application 2-différentiable f de R^n dans V (et ses dérivées partielles premières et secondes) peut être approchée d'aussi près qu'on veut par une application 2-différentiable g (et ses dérivées partielles premières et secondes) telle que, pour toute application distinguée p_i de σ, la fonction $p_i g$ soit non dégénérée.*

Démonstration: D'après M. Morse (cf. [13], p. 178), toute fonction 2-différentiable f sur R^n (et ses dérivées partielles premières et secondes) peut être approchée arbitrairement près par une fonction 2-différentiable g non dégénérée sur un compact donné K. De plus, si U est un voisinage de K, on peut même supposer que f et g coïncident sur le complémentaire de U.

La structure feuilletée régulière σ peut être définie à partir d'un atlas $\mathfrak{A}$ de $R \times R^m$ sur V, compatible avec le pseudogroupe engendré par les automorphismes locaux 2-différentiables de la forme $(x, y) \to (\varphi(x), \psi(x, y))$, où $x \in R$ et $y \in R^m$. Soient p et q les projections canoniques de $R \times R^m$ sur R et R^m respectivement.

Soit $\mathfrak{K}$ un recouvrement de R^n par une suite de voisinages compacts $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$ tels que: a) tout compact de R^n ne rencontre qu'un nombre fini de compacts K_i, b) pour chaque entier positif i, $f(K_i)$ soit contenu dans le but U_i d'une carte h_i de $\mathfrak{A}$ de source $A_i \times B_i$, A_i et B_i étant des ouverts de R et R^m respectivement. Posons $p_i = p h_i^{-1}$ et $q_i = q h_i^{-1}$. Soit encore $\mathfrak{K}' = \{K_i'\}$ un recouvrement de R^n par des voisinages compacts K_i' des K_i vérifiant aussi les conditions a) et b).

Soit Ω un voisinage ouvert de f dans l'espace fonctionnel des applications

2-différentiables de R^n dans V (muni de la topologie définie par l'écart sur les dérivées d'ordre $\leqslant 2$). Supposons que nous ayons déjà construit une application f_{i-1} de R^n dans V vérifiant les conditions du lemme sur un voisinage du compact $K^{i-1} = \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant i-1} K_j$ et telle que $f_{i-1}(K'_j) \subset U_j$ pour tout entier j.

D'après le résultat de MORSE rappelé ci-dessus, on peut construire une fonction 2-différentiable $\tilde{f}_i$ définie sur $f_{i-1}^{-1}(U_i)$, non dégénérée sur un voisinage de $K^i \cap K'_i$, identique à $p_i f_{i-1}$ en dehors de K'_i, et suffisamment proche de $p_i f_{i-1}$ pour que l'application

$$f_i(x) = \begin{cases} f_{i-1}(x) & \text{pour } x \in C K'_i \\ h_i[q_i f_{i-1}(x), \tilde{f}_i(x)] & \text{pour } x \in K'_i \end{cases}$$

appartienne à Ω et que $f_i(K'_j) \subset U_j$ pour tout j. Alors, pour tout $j \leqslant i$, les applications $p_j f_i$ sont non dégénérées.

La fonction g sera alors définie comme limite des $f_i(x)$ pour i tendant vers l'infini, ce qui a un sens, puisque, pour chaque $x \in R^n$, il existe un entier n_x tel que $f_i = f_{i'}$ au voisinage de x dès que i et i' sont plus grands que n_x.

Remarque: Ce lemme est un cas très particulier d'un lemme général de R. THOM (cf. [16]).

3. Le lemme fondamental des Γ_ω-structures

Soit X un espace topologique muni d'une Γ_ω-structure feuilletée σ. Appelons *transversale* à σ une application τ de la droite numérique R dans X, telle que les applications locales de R dans R, obtenues en composant τ avec les applications distinguées de σ, soient localement des homéomorphismes. Une *transversale fermée* sera une application d'un cercle C dans X jouissant de la même propriété.

Lemme fondamental: *Soit X un espace muni d'une Γ_ω-structure feuilletée σ sous-jacente à une Γ_ω-structure s. Toute transversale fermée τ à σ représente un élément d'ordre infini du premier groupe d'homotopie de X.*

Démonstration: Le cercle C peut être considéré comme le cercle unité $r = 1$ dans le plan R^2, rapporté aux coordonnées polaires (r, θ). Supposons que l'application τ de C dans X soit homotope à une application constante, c'est-à-dire que τ puisse se prolonger en une application continue χ, dans X, du disque $r \leqslant 1$ limité par C; nous voulons montrer que nous sommes alors conduits à une contradiction.

On peut supposer d'abord que l'application χ a été construite sur un disque D: $r < 1 + \varepsilon$ $(0 < \varepsilon < 1)$, de sorte que

$$\chi(r, \theta) = \tau(1, \theta) \quad \text{pour} \quad 1 + \varepsilon > r \geq 1 - \varepsilon . \tag{a}$$

Soit s_χ la Γ_ω-structure sur D, image réciproque de s par χ, et σ_χ sa structure feuilletée sous-jacente; elle est régulière dans la couronne $1 + \varepsilon > r > 1 - \varepsilon$, et le cercle $r = 1$ est une transversale fermée à σ_χ. En vertu de la proposition 1 et de la remarque de 1, la structure s_χ est l'image réciproque, par une application continue φ, de la Γ_ω-structure s_E sous-jacente à une structure de produit local, définie sur un espace E séparé, par un atlas de $R \times R^2$, compatible avec le pseudogroupe $\Gamma_\omega \times J$. Ainsi E est une variété analytique réelle de dimension 3, munie d'une structure feuilletée analytique régulière σ_E de codimension un. On peut tout d'abord remplacer l'application φ par une application 2-différentiable φ_0, de telle sorte que la restriction de φ_0 au cercle C: $r = 1$, soit une transversale différentiable à σ_E (c'est-à-dire que le vecteur tangent en un point de la courbe $\varphi_0(C)$ soit transversal au plan tangent à la feuille de E passant par ce point), la condition (a) étant aussi satisfaite par φ_0.

En appliquant le lemme d'approximation (cf. 2), on peut approcher φ_0 par une application 2-différentiable ψ telle que la Γ_ω-structure feuilletée σ_ψ sur D, image réciproque de σ_E par ψ, soit partout régulière, sauf en un nombre fini de points $x_1, \ldots, x_n$ situés dans le disque $r < 1 - \dfrac{\varepsilon}{2}$, et que C soit encore une transversale différentiable à σ_ψ: en dehors des points x_i, les applications distinguées de σ_ψ sont différentiables de rang 1; en un point x_i, elles présentent un point singulier quadratique non dégénéré, qui est donc un maximum, un minimum ou un point selle. La structure feuilletée σ_ψ est donc non dégénérée (cf. III, 9). On peut s'arranger de plus pour que deux points singuliers distincts x_i et x_j ne soient pas sur la même feuille de σ_ψ; en effet E peut être supposé à base dénombrable; les feuilles de E sont alors elles-mêmes à base dénombrable (cf. [8], a)). Soit f une application distinguée de σ_E, définie au voisinage de $\psi(x_i)$; l'image par f des feuilles de E contenant les points $\psi(x_j)$, $j \neq i$, est donc formée d'un ensemble dénombrable L de points de R; on pourra modifier légèrement ψ dans un ouvert U contenant le seul point singulier x_i, sans la changer sur le complémentaire de U, de telle sorte que l'application modifiée ψ', restreinte à U, et composée avec f, ne présente encore qu'un seul point singulier x_i' et que $f\psi'(x_i') \notin L$. Pour simplifier les notations, la Γ_ω-structure sur D, image réciproque de la Γ_ω-structure de E par l'application ψ convenablement modifiée, sera désignée par s, et sa Γ_ω-structure feuilletée sous-jacente par σ.

Comme D est simplement connexe, s est orientable (cf. III, 5). Les feuilles de la structure induite par σ sur le complémentaire D_0 des points singuliers x_i, sont des courbes différentiables qu'on peut orienter; plus précisément, on peut construire un champ de vecteurs V sur D, différentiable, chaque vecteur $v \in V$ étant tangent à la courbe passant par son origine, et ne s'annulant qu'aux points singuliers x_i de σ. Chaque feuille de σ est un sous-espace connexe de D, formé de trajectoires du champ V, et éventuellement de points singuliers. Nous pouvons donc utiliser les résultats de la théorie classique des courbes définies par des équations différentielles (cf. [14], [1], [11]). Dans la terminologie de POINCARÉ, les points singuliers x_i que présente le champ V sont des centres (si une application distinguée présente en x_i un maximum ou un minimum) ou des cols (si x_i est un point selle) d'une espèce particulière, puisqu'au voisinage d'un tel point, les trajectoires sont les lignes de niveau d'une fonction numérique; il y aura au plus 4 trajectoires aboutissant en un tel point; on n'a pas de foyers ou de nœuds. Le cercle C est un cycle sans contact, c'est-à-dire une courbe fermée transverse aux trajectoires.

Supposons, pour fixer les idées, que les vecteurs du champ V soient dirigés vers l'intérieur de C. Les trajectoires qui coupent C, et qui aboutissent à un col, sont en nombre fini; soit donc T une trajectoire issue d'un point de C et n'aboutissant pas à un col. D'après la théorie classique (cf. par exemple [2]), T va s'enrouler asymptotiquement autour d'un cycle limite C_0, qui est soit une trajectoire fermée simple, soit un polycycle formé de deux courbes et un col.

Supposons que nous soyons dans le premier cas. Soit δ un petit arc transverse aux trajectoires et passant par $z \in C_0$. Si y est un point de δ suffisamment proche de z, la trajectoire T_y issue du point y va recouper δ suivant un point y' (le conséquent de y, cf. [14]); dans un voisinage suffisamment petit de z dans δ, l'application $\mu: y \to y'$ ainsi définie est un homéomorphisme local de δ, laissant fixe z, qui réalise l'élément du groupe d'holonomie de la feuille C_0, au point z, déterminé en parcourant une fois C_0 (cf. III, 14). Soit f une application distinguée de Γ_ω, définie au voisinage de z, qui applique z sur l'origine 0 de R, et dont la restriction f_0 à δ est un homéomorphisme sur un ouvert de R. L'application $f_0 \mu f_0^{-1} = \gamma$ est un automorphisme local *analytique* de R (laissant fixe 0), car la structure s a été supposée transversalement analytique: soient G_0 le groupe d'isotropie de Γ_ω à l'origine et $\pi_1(C_0, z)$ le premier groupe d'homotopie de C_0; alors dans l'antireprésentation de $\pi_1(C_0, z)$ dans G_0 associée à l'holonomie de C_0 et déterminée par le jet distingué $j_z^\lambda f$ (cf. III, 11, rem.), le jet local de γ à l'origine est l'image de l'élément représenté par le chemin C_0. La trajectoire T va recouper une infinité de fois δ, au voisinage de z, suivant des points distincts dont les images par f auront tous des abscisses négatives, pour fixer les idées. Il en résulte que γ ne se réduit pas à l'identité, et qu'au voisinage de 0, les points d'abscisses positives ne sont pas laissés fixes par γ (c'est ici que l'hypothèse d'analyticité intervient d'une manière essentielle; ceci ne serait plus vrai, en général, pour une structure différentiable): pour tout point t assez proche de 0, les points $t_n = \gamma^n(t)$ ou $\gamma^{-n}(t)$ (n entier positif) forment une suite de points distincts qui s'accumulent vers 0; les points $f_0^{-1}(t_n)$ appartiennent à une même feuille de σ. Il y a donc des trajectoires non fermées à l'intérieur du domaine limité par C_0.

Dans le cas où C_0 est un polycycle contenant un col z, formé de deux courbes C_0' et C_0'' limitant deux régions D' et D'', nous voulons montrer, par un raisonnement semblable, que l'une au moins des régions D' et D'' contient une trajectoire non fermée. Dans un voisinage U de z, on peut introduire des coordonnées (x, y) telles qu'une application distinguée f s'exprime sous la forme $f = x^2 - y^2$ (cf. [13]). Les axes $x = 0$ et $y = 0$ sont les intersections de C_0 avec U; supposons, pour fixer les idées, que la trajectoire C_0' parte du point $z(0, 0)$ dans la direction positive de l'axe des x, et aboutisse en z sur le demi-axe positif des y, parcouru dans le sens négatif (elle ne peut évidemment aboutir sur l'axe des x, en vertu du théorème de JORDAN); alors C_0'' part dans la direction négative de l'axe des x, et aboutit sur le demi-axe négatif des y. Le groupe $\pi_1(C_0, z)$ a deux générateurs α' et α'' représentés par les trajectoires C_0' et C_0''. Soient δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 les transversales $x = 1$, $x = -1$, $y = 1$, $y = -1$, qui coupent les axes aux points A_1, A_2, A_3, A_4. Comme précédemment, on a des homéomorphismes locaux μ' de δ_1 dans δ_3, et μ'' de δ_2 dans δ_4, définis au voisinage de A_1 et A_2, en faisant correspondre, par exemple, à un point a_1 proche de A_1 sur δ_1, le point de δ_3 où la trajectoire issue de a_1 va recouper δ_3. Les isomorphismes locaux μ' et μ'' réalisent les éléments du groupoïde d'holonomie déterminés par les chemins A_1A_3 et A_2A_4. En désignant par f' et f'' les restrictions de f à δ_1 et δ_2, les applications $\gamma' = f\mu'f'^{-1}$ et $\gamma'' = f\mu''f''^{-1}$ sont des automorphismes locaux analytiques de R, dont les jets locaux à l'origine sont les images de α' et α'' dans l'antireprésentation de $\pi_1(C_0, z)$ dans G_0 associée à l'holonomie de la feuille C_0 et déterminée par $j_z^\lambda f$. L'automorphisme local $\gamma''\gamma'$ est certainement différent de l'identité, car la trajectoire T s'enroule asymptotiquement autour de C_0; donc l'un au moins des automorphismes γ' ou γ'', par exemple γ', est différent de l'identité. Il en résulte, comme précédemment, que la région D' contient des trajectoires non fermées.

On pourra donc poursuivre indéfiniment le même raisonnement en remplaçant l'intérieur du cercle C par une région limitée par un cycle limite, et l'on aboutira à une contradiction lorsqu'on aura démontré qu'il n'y a qu'un nombre fini de cycles limites. Supposons qu'il y en ait un nombre infini. Soit T_0 une trajectoire vers laquelle vont s'accumuler une suite de cycles limites

$C_1, C_2, \ldots,$ et soit C_0 la feuille de σ contenant T_0. Trois cas pourraient éventuellement se présenter:

1) $C_0 = T_0$; alors T_0 est une trajectoire fermée, sinon toutes les trajectoires voisines de T_0 seraient non fermées,

2) C_0 est un polycycle fermé, composé de deux trajectoires T_0 et T_0' issues d'un col z et y aboutissant,

3) C_0 est un polycycle contenant T_0 et deux trajectoires non fermées, dont l'une est issue du col z, et l'autre y aboutit.

Par une analyse tout à fait analogue à celle qui précède, on verrait que, dans une antireprésentation associée à l'holonomie de C_0, l'image de l'élément de $\pi_1(C_0, z)$ représenté par T_0 dans les cas 1) et 3), et par T_0 ou T_0 suivi de T_0' dans le cas 2), serait un élément de G_0 représenté par un automorphisme local analytique γ d'un voisinage de 0 dans R; γ laisserait fixe une suite infinie de points $c_1, c_2, \ldots,$ s'accumulant vers l'origine 0, et correspondant aux cycles limites $C_1, C_2, \ldots$; les jets locaux de γ aux points c_i seraient différents de l'identité. Ceci est impossible, car γ est analytique.

Ainsi, l'application τ de C dans X n'est pas homotope à une application constante; il en est de même de l'application $\tau^n = \tau(1, n\theta)$ de C dans X, car c'est évidemment aussi une transversale fermée.

Remarques: 1. Ce lemme ne serait plus vrai en général, si la Γ_ω-structure feuilletée σ n'était pas sous-jacente à une Γ_ω-structure (cf. III, 13, contre-exemple). – 2. Des exemples simples montrent qu'une transversale fermée peut être homologue à zéro.

4. Conséquences du lemme fondamental

Désignons par Γ_r le pseudogroupe des automorphismes locaux r-différentiables ($r = 1, 2, \ldots, \infty$) de R et par Γ_0 le pseudogroupe des automorphismes locaux topologiques de R. Comme Γ_ω est une sous-pseudogroupe de Γ_r, toute Γ_ω-structure (feuilletée) admet une Γ_r-structure (feuilletée) sous-jacente (cf. III, 5).

Théorème 1: *Soit X un espace topologique connexe et localement connexe par arc, et dont le premier groupe d'homotopie ne contient que des éléments d'ordre fini. Soit s une Γ_ω-structure sur X, et σ sa Γ_ω-structure feuilletée sous-jacente. Alors*

a) *toute feuille de σ est fermée,*

b) *si σ est une Γ_ω-structure feuilletée régulière, X n'est pas compact,*

c) *si s est orientable et X à base dénombrable, la Γ_0-structure feuilletée sous-jacente à σ est déterminée par une application de X dans R (cf. III, 8),*

d) *si X est de plus localement compact, la Γ_∞-structure feuilletée sous-jacente à σ et induite sur un ouvert Ω relativement compact de X, est déterminée par une application de Ω dans R.*

Démonstration: Reprenons la démonstration et les notations de la proposition 1 du paragraphe 1: nous avions construit un espace E, muni d'une structure de produit local, définie par un atlas de $R \times X$ sur E compatible avec le pseudogroupe $\Gamma_\omega \times J$; E admet une Γ_ω-structure feuilletée sous-jacente σ_1 régulière, et une J-structure feuilletée sous-jacente régulière σ_2 déterminée par la projection q de E sur X. Comme X est localement connexe, les feuilles de σ_1 sont localement isomorphes à X, et sont étalées dans X par q. Les feuilles de σ_2 sont localement isomorphes à R, mais en général non séparées; un ouvert, homéomorphe à R, d'une feuille de σ_2 sera appelé *une courbe de* σ_2; d'après la construction de E, l'intersection de deux courbes de σ_2 est toujours connexe.

Soit $x \in X$ et $y = \varphi(x) \in E$. La projection q de E sur X induit un homomorphisme q^* de $\pi_1(E, y)$ dans $\pi_1(X, x)$. C'est en fait un isomorphisme: q^* est injectif, car $q\varphi$ induit l'application identique de $\pi_1(X, x)$; q^* est surjectif, car étant donnée une application continue h du segment I: $0 \leqslant t \leqslant 1$ dans E, telle que $h(0) = h(1) = y$, on voit qu'elle est homotope à l'application $\varphi q h$ de I dans $\varphi(X)$ en la déformant localement le long des courbes de σ_2 passant par $h(t)$. Donc $\pi_1(E, y)$ n'a que des éléments d'ordre fini.

Nous pouvons supposer σ_1 orientable (cf. III, 5); si ce n'était pas le cas, on passerait à un revêtement à deux feuillets convenable de E. *Une courbe C de σ_2 ne peut alors rencontrer une feuille F de σ_1 en deux points distincts x_0* et x_1. Si c'était le cas, on pourrait construire une transversale fermée à σ_1 de la manière suivante: soit h_0 une application du segment I: $0 \leqslant t \leqslant 1$ dans F telle que $h_0(0) = x_0$ et $h_0(1) = x_1$ (F est connexe par arc); on peut prolonger h_0 suivant une application $h(t, \tau)$ de $I \times I$ dans E telle que, pour chaque valeur fixe de τ $(0 \leqslant \tau \leqslant 1)$, $h(t, \tau)$ soit un chemin contenu dans une feuille F_τ de σ_1, $h(t, 0) = h_0$, et que pour chaque t fixé, $h(t, \tau)$ soit un homéomorphisme de I sur une partie C_t d'une courbe de σ_2, C_0 et C_1 étant situés sur C et sans points communs. Comme σ_1 est orientable, lorsque le paramètre τ croit de 0 à 1, les points $h(0, \tau)$ et $h(1, \tau)$ décrivent les deux segments C_0 et C_1 sur C dans le même sens, par exemple dans celui du segment (x_0, x_1) de C. L'application T du segment $[0, 2]$ dans E qui, pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, est égale à $h(t, 1-t)$, et qui applique homéomorphiquement le segment $[1, 2]$ sur l'arc de C d'origine $h(1, 0)$ et d'extrémité $h(0, 1)$, détermine une transversale fermée à σ_1. D'après le lemme fondamental, elle représenterait un élément d'ordre infini du groupe $\pi_1(E, x_1)$.

Il en résulte que chaque feuille de σ_1 est fermée. Les feuilles de σ le sont aussi, car ce sont les composantes connexes des images réciproques par φ des feuilles de σ_1; a) est donc démontré.

Supposons à nouveau s (ou ce qui revient au même σ_1) orientable. Soit $\hat{E}$ l'espace des feuilles de σ_1 (cf. III, 14), et soit ϱ la projection canonique de E sur $\hat{E}$. En vertu de ce qui précède, la restriction de ϱ à toute courbe de σ_2 est un homéomorphisme sur un ouvert de $\hat{E}$; la structure feuilletée σ_1 est donc simple (cf. III, 14), et l'espace $\hat{E}$ est muni d'une (R, Γ_ω)-structure canonique qui en fait une variété à une dimension analytique réelle, mais non séparée. La Γ_ω-superstructure de σ_1 (et par suite la Γ_ω-structure s sur X) n'est autre que l'image réciproque par ϱ (resp. $\varrho\varphi$) de cette Γ_ω-structure sur $\hat{E}$. Il en résulte en particulier que *l'holonomie de chaque feuille de σ est triviale.* Enfin E est simplement connexe: l'homomorphisme, induit par ϱ, du premier groupe d'homotopie de E dans le premier groupe d'homotopie de $\hat{E}$ est surjectif, car chaque chemin fermé de $\hat{E}$ peut se relever, relativement à ϱ, suivant un chemin fermé de E, et le premier groupe d'homotopie d'une variété à une dimension (séparée ou non) n'a pas d'éléments d'ordre fini.

Supposons que la Γ_ω-structure s soit régulière et orientable; soit $\hat{X}$ l'espace des feuilles de σ. L'application φ définit par passage aux quotients une application $\hat{\varphi}$ qui étale $\hat{X}$ dans $\hat{E}$. Ainsi $\hat{X}$ est aussi une variété à une dimension. Si X était compact, elle serait aussi séparée, donc compacte; on pourrait le vérifier directement, ou appliquer le théorème de stabilité (bis) (cf. III, 13) pour montrer que deux feuilles de σ possèdent des voisinages saturés sans points communs. La variété X serait ainsi compacte et simplement connexe (pour la même raison que précédemment), ce qui est naturellement impossible. Donc X ne peut être compact, ce qui démontre b).

Si X est à base dénombrable, il en est de même pour E et $\hat{E}$. Or une variété simplement connexe de dimension un et à base dénombrable peut être étalée dans R par une application f (cf. [8], b)); cela signifie que la Γ_0-structure sous-jacente à la Γ_ω-structure de $\hat{E}$ est déterminée par l'application f. Comme s est l'image réciproque par $\varrho\varphi$ de la Γ_ω-structure de $\hat{E}$, sa Γ_0-structure sous-jacente est déterminée par l'application $f\varrho\varphi$ de X dans R; les feuilles de σ sont les composantes connexes des images réciproques des points de R par cette application.

Si de plus X est localement compact, alors $\varphi(X)$ possède un voisinage séparé E_0 dans E (cf. 1, remarque). Soit Ω un ouvert relativement compact de X; alors $\varphi(\Omega)$ est l'intersection de $\varphi(X)$ avec un voisinage Ω_0 localement compact dans E_0. L'espace des feuilles $\hat{\Omega}_0$ de la Γ_ω-structure feuilletée induite par σ_1 sur Ω_0 est muni d'une Γ_∞-structure sous-jacente régulière au sens de [8], b), p. 116. D'après la proposition 1, p. 117, de [8], b), il existe une application indéfiniment différentiable f qui étale $\hat{\Omega}_0$ dans R. La Γ_∞-structure feuilletée de Ω est donc déterminée par l'application composée de la restriction de φ à Ω, de la projection canonique de Ω_0 sur $\hat{\Omega}_0$ et de f.

Remarque: Comme le montrent des exemples, la Γ_ω-structure feuilletée σ n'est pas en général déterminée par une application de X dans R (même si X est une variété compacte).

Corollaire: *Une variété compacte V analytique réelle, dont le premier groupe d'homotopie est fini, n'admet pas de structure de variété feuilletée régulière analytique de codimension un.*

C'est un cas particulier du théorème 1, b); on peut le déduire aussi directement du lemme fondamental. Supposons qu'il existe sur V une structure feuilletée analytique régulière de codimension un; en passant à un revêtement à deux feuillets de V, si c'est nécessaire, on peut se ramener au cas où cette structure est orientable. Construisons un champ différentiable de vecteurs transverses aux feuilles; si T est une trajectoire de ce champ, comme V est compact, il existe une suite de points de T, correspondant à des valeurs du paramètre qui tendent vers l'infini, qui s'accumulent vers un point x de V. En déformant légèrement T au voisinage de x, on obtient une transversale fermée, ce qui est contraire, en vertu du lemme fondamental, à l'hypothèse que le premier groupe d'homotopie de V est fini.

Il en résulte, en particulier, que les sphères S^n ($n > 1$) n'admettent pas de feuilletage analytique régulier de codimension 1. On sait cependant qu'il existe sur S^3 une structure de variété feuilletée régulière indéfiniment différentiable de codimension 1 (cf. l'exemple classique de REEB ([15], a), p. 112), qu'on peut modifier légèrement pour obtenir un feuilletage indéfiniment différentiable). Nous ne connaissons pas d'exemple de structure de variété feuilletée régulière de codimension 1 sur des sphères de dimension plus grande que 3.

Voici encore une autre application du lemme fondamental:

Proposition 2: *Soit s une Γ_ω-structure sur un espace X et soit F une feuille de sa Γ_ω-structure feuilletée sous-jacente à s. Soit ψ une des représentations de $\pi_1(F, x)$, $x \in F$, dans le groupe G_0 d'isotropie de Γ_ω à l'origine associée à l'holonomie de F_x* (cf. III, 11). *Le noyau de ψ contient le noyau de la représentation de $\pi_1(F, x)$ dans $\pi_1(X, x)$ induite par l'injection de F dans X.*

Démonstration: Soit α un élément de $\pi_1(F, x)$ représenté par une application continue C du segment $I: 0 \leqslant t \leqslant 1$ dans F, telle que $C(0) = C(1) = x$. Deux cas peuvent se présenter: ou $\psi(\alpha)$ est le jet d'un automorphisme local de R qui change l'orientation de R; alors s est non orientable, et C se relève suivant un chemin non fermé dans un revêtement déduit par s du revêtement de R formé des germes d'orientation locale de R (cf. III, 5); ainsi C n'est pas homotope à une application constante dans X. Ou bien $\psi(\alpha)$ appartient au sous-groupe G_0^+ de G_0 formé des jets d'automorphismes conservant l'orientation de R.

Reprenons alors les notations de la démonstration du théorème 1: l'application $h_0 = \varphi C$ peut se prolonger en une application $h(t, \tau)$ de $I \times I$ dans E telle que, pour chaque τ fixé, $h(t, \tau)$ soit un chemin contenu dans une feuille de σ_1, $h(t, 0) = h_0(t)$, et que pour chaque t fixé, $h(t, \tau)$ soit un homéomorphisme du segment $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ sur une partie C_t d'une courbe de σ_2. L'application $h(0, \tau) \to h(1, \tau)$ est une application de C_0 sur C_1 qui est différente de l'identité si $\psi(\alpha)$ est différent de l'identité. Il existe dans ce cas des valeurs positives τ_0 et τ_1, $\tau_0 \neq \tau_1$, telles que $h(0, \tau_0) = h(1, \tau_1)$; alors $h(t, \tau_0 + t(\tau_1 - \tau_0))$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, est une transversale fermée, homotope au chemin h_0; d'après le lemme fondamental, elle ne peut être homotope à une application constante dans E. Comme l'homomorphisme induit par φ sur les premiers groupes d'homotopie est un isomorphisme, C ne peut être homotope à une application constante dans X.

Remarques: 1. Si s est orientable, le noyau de ψ contient tous les éléments d'ordre fini de $\pi_1(F, x)$.

2. La proposition 2 pourrait aussi se formuler de la manière suivante: le noyau de l'antireprésentation de $\pi_1(F, x)$ dans le groupe d'holonomie de F au point x (cf. II, 8 et III, 11) contient le noyau de la représentation de $\pi_1(F, x)$ dans $\pi_1(X, x)$ induite par l'injection de F dans X.

5. Existence d'une intégrale première d'une forme de Pfaff analytique complètement intégrable

Sur une variété analytique réelle V, soit α une forme de Pfaff analytique et complètement intégrable, c'est-à-dire telle que $d\alpha \wedge \alpha = 0$. Dans un ouvert U de V, une intégrale première r-différentiable ou analytique de α est une fonction f r-différentiable ou analytique dans U telle que $df = g\alpha$, où g est une fonction r-différentiable ou analytique différente de zéro dans U. Au voisinage d'un point régulier x de α (c'est-à-dire d'un point où tous les coefficients de α ne sont pas nuls), il existe toujours une intégrale première analytique; si f et f' sont deux telles intégrales premières locales, elles sont liées au voisinage de x par une relation analytique: $f' = F(f)$, telle que $dF/df \neq 0$.

Nous dirons qu'*une famille d'intégrales premières locales analytiques* f_i *de* α *forment un système cohérent*, si les U_i forment un recouvrement de V et si, au voisinage de tout $x \in U_i \cap U_j$, les fonctions f_i et f_j sont liées par une relation analytique. Dans ce cas, les f_i sont des applications distinguées d'une Γ_ω-structure feuilletée non dégénérée sur V, si de plus α n'est pas identiquement nulle dans une composante connexe de V. Le théorème 1, d) donne donc le

Théorème 2: *Soit V une variété analytique réelle connexe, dont le premier groupe d'homotopie n'a que des éléments d'ordre fini. Une forme de* PFAFF *sur V, qui admet un système cohérent d'intégrales premières locales analytiques, admet une intégrale première indéfiniment différentiable sur tout ouvert relativement compact de V.*

Une forme de PFAFF α complètement intégrable et qui ne s'annule en aucun point de V admet un système cohérent d'intégrales premières analytiques locales. Il en est de même, en vertu d'un théorème de G. REEB (cf. [15], a), p. 153), lorsque dim. $V > 2$, si la forme α complètement intégrable ne présente que des points singuliers isolés, où le déterminant des dérivées partielles premières des coefficients de α est différent de zéro.

6. Sur l'existence d'une feuille compacte

Théorème 3: *Soit X un espace connexe et localement simplement connexe par arc, et dont le premier groupe d'homotopie possède un sous-groupe cyclique libre d'indice fini. Soit σ une Γ_ω-structure feuilletée sur X, sous-jacente à une Γ_ω-structure s. Alors*

1) *toute transversale fermée à σ coupe une feuille de σ en un nombre fini de points au plus,*

2) *toute feuille de σ est propre; en particulier, il n'y a pas de feuille partout dense,*

3) *il existe au moins une feuille fermée; en particulier, si X est compact, il existe au moins une feuille compacte.*

Démonstration: D'après la proposition 1, nous sommes ramenés à démontrer 1) et 2) pour l'espace E, qui est muni d'une Γ_ω-structure feuilletée régulière σ_1, et qui vérifie les mêmes conditions que X. Soit T une transversale fermée à σ_1 qui coupe une feuille F de σ_1 en un point x. Elle représente un élément α d'ordre infini de $\pi_1(E, x)$. Soit E' le revêtement universel de E, et soit σ' la Γ_ω-structure feuilletée sur E', image réciproque de σ_1 par la projection canonique p' de E' sur E. Comme le sous-groupe de $\pi_1(E, x)$ engendré par α est d'indice fini m, alors $p'^{-1}(T)$ se compose d'un certain nombre $r \leqslant m$ de transversales à σ': $T_1, T_2, \ldots, T_r$. Une feuille F' de σ' qui se projette sur F rencontre chaque T_i en un point au plus, car dans E' une transversale ne peut couper une feuille en plus d'un point (cf. Th. 1). Donc F ne peut rencontrer T en plus de m points, et 1) est ainsi démontré.

Soit T une transversale coupant une feuille F en un point x. Si T recoupe F en un autre point, on en déduit comme dans la démonstration du théorème 1 (en supposant au besoin σ orientable) l'existence d'une transversale fermée coupant F en x et, d'après 1), suivant un nombre fini d'autres points. Il en résulte que F est propre.

Pour démontrer 3), reprenons le raisonnement de Reeb (cf. [15], a) th. p.109) : l'ensemble des fermés de E saturés par des feuilles de E, ordonné par inclusion, est inductif. D'après le théorème de Zorn, il existe au moins un élément minimal dans cet ensemble. Or, comme toutes les feuilles sont propres, un élément minimal ne peut être qu'une feuille fermée ; en effet, une feuille propre est un ouvert dans son adhérence, et comme X est localement connexe, l'adhérence d'une feuille de σ_1 est un fermé saturé par des feuilles (cf. III, 14, propos. 5). Il existe donc au moins une feuille fermée F dans E. Une composante connexe de l'image réciproque de E par l'application canonique φ de X dans E, est une feuille fermée de X.

7. Sur le nombre des feuilles compactes

Rappelons quelques définitions.

Une structure s de variété feuilletée (régulière) de codimension q sur une variété V est définie par un atlas complet $\mathfrak{A}$ de $R^q \times R^p$ sur V compatible avec le pseudogroupe des automorphismes locaux de $R^q \times R^p$ engendré par les transformations de la forme

$$(x, y) \to (\varphi(x), \psi(x, y)) .$$

Si φ est localement un homéomorphisme de degré topologique $+1$, la structure s sera dite *transversalement orientable*.

Si φ est analytique réelle, la structure s sera dite *transversalement analytique*.

Un *ouvert simple* de s est le but d'une carte f de $\mathfrak{A}$ dont la source est de la forme $U \times P$, où U et P sont des ouverts connexes de R^q et R^p.

La démonstration du théorème suivant ne fait pas usage du lemme fondamental.

Théorème 4: *Soit V une variété compacte connexe munie d'une structure de variété feuilletée régulière de codimension 1 et transversalement analytique. Alors,* *ou toutes les feuilles sont compactes, ou il existe au plus un nombre fini de feuilles compactes.*

Ce théorème est une conséquence facile des lemmes 1 et 2 ci-dessous.

Lemme 1: *Soit V une variété paracompacte dont le premier nombre de Betti modulo 2 est fini, et qui est munie d'une structure de variété feuilletée régulière s de codimension 1. L'ensemble des feuilles fermées est alors un fermé dans V.*

Il suffit de le montrer dans le cas où s est transversalement orientable. Par une construction analogue à celle qui est utilisée dans [8], a), II, th. 1, on montre qu'on peut trouver un recouvrement de V par des ouverts simples U_i tels que l'intersection de chaque U_i avec toute feuille fermée soit connexe (ou vide). Soit alors $F_1, F_2, \ldots$ une suite de feuilles fermées, et soit F une feuille adhérente à la réunion des F_i. Pour montrer que F est aussi fermée, il suffit de vérifier que son intersection avec chaque U_i est connexe ou vide. Supposons que $F \cap U_i$ ait deux composantes connexes au moins; alors, pour n assez grand, $F_n \cap U_i$ aurait deux composantes connexes au moins, ce qui est impossible.

Lemme 2: *Avec les hypothèses du théorème, il n'y a qu'un nombre fini de feuilles compactes dont le groupe d'holonomie est différent de l'identité.*

Raisonnons par l'absurde: supposons qu'il existe une infinité de feuilles distinctes $F_1, F_2, \ldots$ compactes et à groupe d'holonomie différent de l'identité. Une feuille F adhérente à la réunion des F_i est compacte (lemme 1). Son groupe d'holonomie G doit être fini; en effet, G est isomorphe à un sous-groupe du groupe des jets d'automorphismes locaux *analytiques* de R à l'origine 0; si γ est un tel automorphisme local dont le jet en 0 n'est pas équivalent à celui de l'application identique ou de la symétrie par rapport à l'origine, alors pour tout x suffisamment proche de 0, les points $\gamma^n(x)$ ou $\gamma^{-n}(x)$ s'accumulent vers 0; ceci est impossible, car les feuilles F_i, arbitrairement proche de F, sont compactes (cf. III, 14, propos. 5). Donc G est réduit soit à l'identité soit à un groupe cyclique d'ordre 2. Il en résulte que toute feuille assez voisine de F est compacte (th. de stabilité) et a un groupe d'holonomie réduit à l'identité, d'où la contradiction.

Démonstration du théorème: L'ensemble des feuilles compactes dont le groupe d'holonomie est l'identité ou un groupe cyclique d'ordre 2, est un ouvert W dans V, en vertu du théorème de stabilité. C'est aussi un fermé, en vertu des lemmes 1 et 2. Comme V est connexe $W = V$ ou $W = \emptyset$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BENDIXON, *Sur les courbes définies par des équations différentielles.* Acta Mathematica, 24, 1901, p. 1–80.

[2] E. CODDINGTON et N. LEVINSON, *Theory of Ordinary Differential Equations.* 1955, Intern. Series in pure and applied math.

[3] P. DEDECKER, *a) Extension du groupe structural d'un espace fibré.* Colloque de Topologie de Strasbourg, 1955.
b) Cohomologie à coefficients non abéliens et espaces fibrés. Bull. Acad. Roy. Belg., Cl. Sc. 5e, t. 41, 1955, p. 1132–1146.

[4] C. EHRESMANN, *a)* (et G. REEB), *Sur les champs d'éléments de contact de dimension p complètement intégrables.* C. R. Acad. Sc. Paris, 218, 1944, p. 995–997.
b) Sur la théorie des variétés feuilletées. Rend. di Mat. e delle sue appl., Série V, vol. X, Roma, 1951.
c) Sur les variétés presque complexes. Proc. of the intern. Congress of Math., 1950, p. 412–419.
d) Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable. Colloque de Topologie de Bruxelles, 1950, C.B.R.M., p. 29–55.
e) Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudogroupes de Lie. Colloque de géométrie différentielle de Strasbourg, C.N.R.S., 1953, p. 97–110.
f) Structures locales, Annali di Mat., 1954, p. 133–142.
g) Gattungen von lokalen Strukturen. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 60, 1957, p. 49–77.
h) (et SHIH WEISHU), *Sur les espaces feuilletés: théorème de stabilité.* C. R. Acad. Sc. Paris 243, 1956, p. 344–346.

[5] J. FRENKEL, *Cohomologie non abélienne et espaces fibrés.* Bull. Soc. Math. de France, 85, 1957, p. 135–220.

[6] A. FRÖHLICHER and A. NIJENHUIS, *A theorem on stability of complex structures.* Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A., 43, 1957, p. 239–241.

[7] A. GROTHENDIEK, *A general theory of fibre spaces with structure sheaf.* Lawrence, University of Kansas, 1955.

[8] A. HAEFLIGER, *a) Sur les feuilletages des variétés de dim. n par des feuilles fermées de dim. n — 1.* Colloque de Topologie de Strasbourg, 1955.
b) (et G. REEB), *Variétés (non séparées) à une dimension et structures feuilletées du plan.* L'enseignement mathématique, t. III, 1957, p. 107–125.
c) Sur les feuilletages analytiques. C. R. Acad. Sc. Paris, 242, 1956, p. 2908–2910.

[9] F. HIRZEBRUCH, *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie.* Ergebnisse der Mathematik, Neue Folge, Heft 9, 1956.

[10] K. KODAIRA and D. C. SPENCER, *On deformations of complex analytic structures.* Princeton 1957.

[11] S. LEFSCHETZ, *Lectures on differential equations.* Princeton, 1948.

[12] D. MONTGOMERY and L. ZIPPIN, *Topological transformation groups.* Interscience Tracts in pure and appl. math., No. 1, 1955.

[13] M. MORSE, *The Calculus of Variations in the large.* American mathematical Society colloquium publications, 18, 1934.

[14] H. POINCARÉ, *Sur les courbes définies par les équations différentielles.* Oeuvres, tome 1.

[15] G. REEB, *a) Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées* (thèse Strasbourg, 1948). Act. Scient. et Ind., Hermann, Paris (1952).
b) Sur la théorie générale des systèmes dynamiques. Ann. Inst. Fourier, VI, 1955, p. 89–115.
Voir aussi [4], *a)* et [8], *b)*.

[16] R. THOM, *Un lemme sur les applications différentiables.* Bol. Soc. mat. Mexic., Segunda Serie, t. 1, 1956, p. 59–71.

Reçu le 24 mars 1958