La cohomologie mod 2 de certains espaces homogènes

Par A. Borel, Princeton N. J.

Introduction

Ce travail est consacré à l'étude de la cohomologie mod 2 de quelques espaces homogènes ou fibrés principaux des groupes orthogonaux, pour la plupart classiques. Comme dans [2], nous utilisons systématiquement les espaces classifiants et l'algèbre spectrale des espaces fibrés ; cependant, peu de résultats de [2] interviendront aussi, pour donner à ce travail une certaine autonomie, avons-nous rappelé brièvement dans les Nos 1 et 2 les principales notions et notations dont nous ferons usage.

Un des principaux buts de [2] est l'étude des espaces classifiants et des relations que l'on peut établir entre leur cohomologie et celle des groupes de Lie ; en ce qui concerne les groupes orthogonaux, le cas le plus intéressant est, comme on sait, celui de la cohomologie mod 2, mais, si nous en avons dit quelques mots pour le groupe orthogonal unimodulaire $\boldsymbol{SO}(n)$, nous avons complètement laissé de côté le groupe orthogonal complet $\boldsymbol{O}(n)$, et notre premier but dans I sera de combler cette lacune. On sait que la variété de Stiefel $\boldsymbol{V}_{n+1+k,n}$ des n-repères orthonormaux de l'espace euclidien R^{n+1+k} est un espace universel $E(k, \boldsymbol{O}(n))$ pour $\boldsymbol{O}(n)$ et pour k ; sa base, qui est par définition un espace classifiant $B(k, \boldsymbol{O}(n))$ pour $\boldsymbol{O}(n)$ et pour k, est la grassmannienne $\boldsymbol{G}_{n+1+k,n}$ des sous-espaces à n dimensions de R^{n+1+k}. Ainsi, étudier $H(B_{O(n)}, Z_2)$ jusqu'à k revient, si l'on veut, à étudier $H(\boldsymbol{G}_{n+1+k,n}, Z_2)$ jusqu'à k, ce qui a été fait à l'aide de décompositions cellulaires notamment par Ehresmann [6], Chern [4], [5], et Wu [12], [13]. Nous retrouverons leurs résultats dans les Nos 5, 6, 7, mais en partant d'un point de vue différent : Soit en effet $\boldsymbol{Q}(n)$ le sous-groupe des matrices diagonales de $\boldsymbol{O}(n)$, c'est donc un groupe isomorphe au produit direct $(\boldsymbol{Z}_2)^n$ de n groupes cycliques d'ordre deux et le produit direct de n espaces projectifs réels est un espace classifiant pour $\boldsymbol{Q}(n)$, l'algèbre de cohomologie $H(B_{Q(n)}, Z_2)$ est donc isomorphe à une algèbre de polynômes $Z_2[x_1, \ldots, x_n]$ à n générateurs de degré 1. Nous montrerons au No 5 que l'homomorphisme

$$\varrho^*(\boldsymbol{Q}(n), \boldsymbol{O}(n)) : H(B_{\boldsymbol{O}(n)}, Z_2) \to H(B_{\boldsymbol{Q}(n)}, Z_2) ,$$

défini par l'inclusion $\boldsymbol{Q}(n) \subset \boldsymbol{O}(n)$, (voir No 1), est biunivoque, applique $H(B_{\boldsymbol{O}(n)}, Z_2)$ sur l'ensemble des fonctions symétriques en $x_1, \ldots, x_n$ et que l'image de la i-ème classe de Stiefel-Whitney réduite mod 2 w^i est la i-ème fonction symétrique élémentaire en $x_1, \ldots, x_n$; pour y parvenir, nous devons au préalable étudier la cohomologie de l'espace homogène $\boldsymbol{O}(n)/\boldsymbol{Q}(n)$, ce qui est fait au No 4. Nous retrouvons ainsi le fait que les classes de Stiefel-Whitney réduites sont algébriquement indépendantes et engendrent $H(\boldsymbol{G}_{n+1+k,n}, Z_2)$ pour les degrés $\leqq k$, ([4], [5], [13]). L'interprétation des classes réduites comme fonctions symétriques élémentaires permet de déduire d'une identité évidente entre fonctions symétriques les formules de dualité mod 2 de Whitney ; elle permet aussi de ramener à un problème de fonctions symétriques la détermination des i-carrés des classes caractéristiques réduites et nous donnons au No 7 une démonstration des formules de Wu Wen Tsün ([13], [5]) qui résolvent cette question.

On passe aisément de là aux espaces classifiants pour les groupes orthogonaux unimodulaires, que l'on peut représenter comme grassmanniennes de sous-espaces orientés ; en effet, nous verrons au No 8 que

$$\varrho^*(\boldsymbol{SO}(n), \boldsymbol{O}(n))$$

identifie $H(B_{\boldsymbol{SO}(n)}, Z_2)$ au quotient de $H(B_{\boldsymbol{O}(n)}, Z_2)$ par l'idéal de w^1. C'est donc une algèbre de polynômes à $n-1$ variables de degrés $2, \ldots, n$, résultat dû à Pontrjagin [9] que nous avions retrouvé d'une autre manière dans [2], § 23 ; de plus les formules de Wu donnent évidemment aussi les Sq^i dans $H(B_{\boldsymbol{SO}(n)}, Z_2)$; or nous avons montré dans [2] que $H(\boldsymbol{SO}(n), Z_2)$ a un système simple de générateurs $h_1, \ldots, h_{n-1}$ universellement transgressifs, w^{i+1} étant une image de h_i par transgression ; comme la transgression commute aux i-carrés ([10], No 9), on obtient immédiatement les Sq^i dans $\boldsymbol{SO}(n)$, On trouve

$$Sq^i h_j = \binom{j}{i} h_{i+j} \quad (i + j \leqq n - 1) ; \quad Sq^i h_j = 0 \quad (i + j \geqq n) .$$

En fait, comme la sous-algèbre engendrée par $h_k, h_{k+1}, \ldots, h_{n-1}$ s'identifie à $H(\boldsymbol{V}_{n,n-k}, Z_2)$, ces formules décrivent plus généralement les i-carrés dans la cohomologie des variétés de Stiefel, qui ont été déterminés d'une tout autre manière par Miller [8].

Dans I le sous-groupe $\boldsymbol{Q}(n)$, qui est visiblement un sous-groupe abélien maximal de type $(2, 2, \ldots, 2)$, joue un rôle décisif, tout à fait analogue à celui d'un tore maximal dans l'étude de la cohomologie réelle des classifiants ([2], Chapitre VI) ; pour une discussion plus étendue nous renvoyons au début de II, où cette analogie est poursuivie et conduit à la détermination de la cohomologie mod 2 de certains espaces homogènes. On sait que la cohomologie réelle d'un espace homogène G/H se décrit aisément lorsque G et H ont même rang, c'est-à-dire ont un tore maximal commun. Nous établirons ici en cohomologie mod 2, dans certains cas particuliers où G et H ont un sous-groupe abélien maximal de type $(2, \ldots, 2)$ commun, des résultats qui s'écrivent et se démontrent sensiblement de la même façon. Nous obtenons ainsi notamment l'algèbre de cohomologie mod 2 des espaces $\boldsymbol{O}(n)/\boldsymbol{O}(n_1) \times \cdots \times \boldsymbol{O}(n_k)$, $(n_1 + \cdots + n_k = n)$, $\boldsymbol{U}(n)/\boldsymbol{O}(n)$, $\boldsymbol{G}_2/\boldsymbol{SO}(4)$. Rappelons que les variétés $\boldsymbol{O}(n)/\boldsymbol{O}(n_1) \times \ldots \times \boldsymbol{O}(n_k)$ ont été étudiées, au point de vue additif, par Ehresmann [6] ; parmi elles figurent les grassmanniennes dont nous déterminons ainsi l'algèbre de cohomologie complète, et non pas seulement jusqu'à la dimension «critique» comme dans I. Dans tous les cas traités ici, $H(G/H, Z_2)$ est un quotient de $H(B_H, Z_2)$; par conséquent, lorsque H est un produit de groupes orthogonaux, les formules de Wu déterminent aussi les i-carrés de G/H [1]).

1. Espaces universels, espaces classifiants

Tous les espaces fibrés que nous rencontrerons dans ce travail seront des variétés compactes, et même des espaces fibrés différentiables ; ils vérifieront donc a fortiori toutes les restrictions qu'il y a lieu d'imposer à la notion générale d'espace fibré pour que les résultats rappelés ci-dessous soient valables, aussi ne mentionnerons-nous pas ces conditions, renvoyant à [2] pour plus de détails. Nous ne répétons pas la définition d'espaces fibrés et d'espaces fibrés principaux (voir par exemple [2], No 2) ; indiquons simplement que nous désignons le système formé par un espace E fibré de base B et de fibres F par (E, B, F) ou (E, B, F, p) si nous voulons mettre en évidence la projection de E sur B.

---

[1]) Nous avons renoncé à faire figurer dans ce travail les résultats concernant la cohomologie de ***Spin*** (n), $\boldsymbol{G}_2$, $\boldsymbol{F}_4$ énoncés dans [1], contrairement à ce qui avait été annoncé dans l'introduction de [2]; ils seront établis dans un Mémoire ultérieur, consacré à la cohomologie de quelques groupes de Lie. Signalons encore à ce propos que la référence [2] dans la bibliographie de [3] renvoie à ce Mémoire, et non au présent travail.

G désignera toujours un groupe de Lie compact. On appelle *espace universel* pour G et pour k un espace fibré principal compact connexe, noté $E(n, G)$ ou E_G, à cohomologie triviale jusqu'à k,

$$(\text{i. e. } H^0(E(n, G), \Gamma) \cong \Gamma, \quad H^i(E(n, G), \Gamma) = 0 \ , \quad (0 < i \leqq k)) \ ,$$

pour tout anneau de coefficients Γ). Sa base $B(n, G)$ ou B_G est dite *espace classifiant* pour G et pour k. Deux espaces classifiants pour G et pour k ont des algèbres de cohomologie isomorphes jusqu'à k ([2], Prop. 18.2) ce qui permet de définir une algèbre graduée $H(B_G, \Gamma)$ qui pour tout k est isomorphe à $H(B(k, G), \Gamma)$ jusqu'à k ([2], Déf. 18.2). Quand G est discret, $H(B_G, \Gamma)$ n'est autre que l'algèbre de cohomologie de G au sens de Hopf.

Si (E, B, G) est un espace fibré principal compact de fibre G, il existe un homomorphisme $\sigma^* : H(B_G, \Gamma) \to H(B, \Gamma)$, l'homomorphisme *caractéristique*, qui est un invariant de la fibration (E, B, G). Son image est la *sous-algèbre caractéristique*. Si U est un sous-groupe fermé de G, nous convenons d'appeler sous-algèbre caractéristique de $H(G/U, \Gamma)$ la sous-algèbre caractéristique de la fibration $(G, G/U, U)$. Nous utiliserons fréquemment le résultat suivant ([2], Corollaire à la Prop. 18.3) :

(1.1) *Soient (X, Y, G) un espace fibré principal compact connexe, et U un sous-groupe fermé de G. Si $H(G/U, \Gamma)$ est égale à sa sous-algèbre caractéristique, alors G/U est totalement non homologue à zéro, relativement à Γ, dans la fibration $(X/U, Y, G/U)$.*

(En effet, l'homomorphisme caractéristique σ^* de $(G, G/U, U)$ est le composé $i^* \cdot \sigma_1^*$ de l'homomorphisme caractéristique de $(X, X/U, U)$ par le transposé de l'inclusion $G/U \subset X/U$; si σ^* est sur, il doit en être de même de i^*.)

Soit toujours U un sous-groupe fermé de G ; un espace $E(k, G)$ universel pour G est évidemment universel pour U, d'où une projection $\varrho(U, G) : \ E(k, G)/U = B(k, U) \to B(k, G) = E(k, G)/G$ qui permet de définir un homomorphisme $\varrho^*_\Gamma(U, G) : \ H(B_G, \Gamma) \to H(B_U, \Gamma)$ qui joue un rôle fondamental dans [2]. Ici, nous désignerons cet homomorphisme par $\varrho^*(U, G)$ lorsque $\Gamma \cong Z_2$.

(1.2) Remarquons encore que $\varrho(U, G)$ définit une fibration $(B_U, B_G, G/U, \varrho(U, G))$ et que l'homomorphisme i^* transposé de l'inclusion d'une fibre est l'homomorphisme caractéristique de $(G, G/U, U)$, (voir [2], Théorème 22.2).

2. Algèbre spectrale des espaces fibrés

Pour nous conformer à un usage de plus en plus répandu, nous noterons une algèbre spectrale (E_r) au lieu de (H_r) comme dans [2]. Dans le cas d'un espace fibré on a, comme on sait

$$E_2 = H\bigl(B, H(F, \Gamma)\bigr) \ , \qquad E_2^{p,q} = H^p\bigl(B, H^q(F, \Gamma)\bigr)$$

et E_∞ est l'algèbre graduée associée à $H(E, \Gamma)$ convenablement filtrée ; $H\bigl(B, H(F, \Gamma)\bigr)$ est l'algèbre de cohomologie de B à coefficients dans le système local formé par les algèbres de cohomologie des différentes fibres ; nous utiliserons sans commentaire le fait que ce système est simple lorsque B est simplement connexe, ou lorsque E est fibré principal de groupe structural G connexe, ou encore quotient d'un tel espace par un sous-groupe fermé de G. Dans le cas du système simple et si Γ est isomorphe à un corps K, on a donc $E_2 = H(B, K) \otimes H(F, K)$, (produit tensoriel «gauche» sur K).

Nous ne répétons pas ici la définition de l'algèbre spectrale des espaces fibrés et nous n'allons mentionner que certaines de ses propriétés, celles qui interviendront le plus fréquemment dans la suite (pour plus de détails, voir [7], [2] § 2, 4, [10]).

(2.1) Nous notons Dx le degré total d'un élément de E_r, et ${}^iE_r$ l'ensemble des éléments de degré total i de E_r, i. e.

$${}^iE_r = \textstyle\sum_{p+q=i} E_r^{p,q} \ .$$

Si l'algèbre spectrale est prise relativement à un corps K de coefficients on désigne par $P_K(E_r, t)$ le polynôme de Poincaré de E_r relativement au degré total. On a donc

$$P_K(E_\infty, t) = P_K(E, t)$$

et, puisque E_{r+1} est l'algèbre de cohomologie de E_r relativement à d_r

$$P_K(E_{r+1}, t) \leqq P_K(E_r, t)$$

l'égalité valant si et seulement si $d_r \equiv 0$, c'est-à-dire si $E_r \cong E_{r+1}$.

(2.2) $E_\infty^{0,q}$ s'identifie à un sous-module de $E_2^{0,q}$, l'ensemble des éléments de $E_2^{0,q}$ qui sont cocycles pour toutes les différentielles, et forme l'image de l'homomorphisme i^*: $H^q(E, \Gamma) \to H^q(F, \Gamma)$ transposé de l'inclusion.

(2.3) En fait, toutes les algèbres spectrales auxquelles nous aurons affaire, sauf une, seront triviales (i. e. $E_2 = E_\infty$, ou si l'on veut $d_r \equiv 0$

pour tout $r \geqq 2$), aussi allons nous parler de ce cas plus en détails. Rappelons tout d'abord un résultat connu ([7], Théorèmes 7.1, 7.3, [2] Prop. 4.1).

Pour que l'algèbre spectrale de (E, B, F, p) sur un corps K soit triviale et que l'on ait dans E_2 des coefficients ordinaires, il faut et il suffit que F soit totalement non homologue à zéro dans E, relativement à K. Dans ce cas p^* est biunivoque, i^* identifie $H(F, K)$ au quotient de $H(E, K)$ par l'idéal qu'y engendrent les éléments de degrés >0 de $p^*(H(B, K))$.

Il est clair que si les conditions précédentes sont réalisées on a

$$P_K(E, t) = P_K(E_\infty, t) = P_K(E_2, t) = P_K(B \times F, t) .$$

Cette condition est aussi suffisante ; en effet :

Proposition 2.1. *Soit (E, B, F) un espace fibré compact, connexe, de base localement connexe, à fibres connexes. Pour que F soit totalement non homologue à zéro dans E, relativement à K, il faut et il suffit que $P_K(E, t) = P_K(B, t) \cdot P_K(F, t)$.*

Vu (2.3), nous pouvons nous borner à établir la suffisance de la condition ; montrons tout d'abord que le système des $H(F, K)$ est *simple.* Soit $C^q(F, K)$ le plus grand sous-espace de $H^q(F, K)$ sur lequel le groupe fondamental de B agit trivialement, on a donc

$$E_2^{0,q} = H^0(B, H^q(F, K) = C^q(F, K)$$

et nous devons prouver que $C^q(F, K) = H^q(F, K)$; c'est clair pour $q = 0$, supposons-le vrai pour $q < k$, $(k > 0)$, on a donc

$$E_2^{p,q} = H^p(B, H^q(F, K)) = H^p(B, K) \otimes H^q(F, K) \qquad (q < k)$$

d'où

$$\dim. {}^kE_2 = \dim. H^k(B \times F, K) - \dim. H^k(F, K) + \dim. C^k(F, K)$$

$$\dim. {}^kE_2 = \dim. {}^kE_\infty - \dim. H^k(F, K) + \dim. C^k(F, K)$$

et puisque $\dim. {}^kE_2 \geqq \dim. {}^kE_\infty$, on obtient $\dim. C^k(F,K) \geqq \dim. H^k (F,K)$ donc $C^k(F, K) = H^k(F, K)$.

Ainsi le système des $H(F,K)$ est simple et $E_2 = H(B,K) \otimes H(F,K)$, d'où

$$P_K(E_2, t) = P_K(B, t)\, P_K(F, t) = P_K(E, t) = P_K(E_\infty, t)$$

et l'algèbre spectrale est triviale d'après (2.1), F est totalement non homologue à zéro d'après (2.3).

3. Remarques auxiliaires

Pour ne pas devoir interrompre le cours de certaines démonstrations de I, nous rassemblons ici quelques remarques à peu près évidentes sur le groupe fondamental d'un espace.

Soit (E, B, π) un espace fibré principal, globalement et localement connexe et simplement connexe par arcs, dont la fibre est un groupe abélien discret. Le groupe $\pi_1(B)$ est donc isomorphe à π, de façon précise on a un isomorphisme canonique $\zeta_b : \pi \to \pi_1(B, b)$, $(b \in B)$ obtenu ainsi : Soit $\tilde{b} \in p^{-1}(b)$, on fait correspondre à $x \in \pi$ la classe des lacets qui sont projections d'arcs joignant $\tilde{b}$ à $\tilde{b} \cdot x$; cela ne dépend pas de $\tilde{b}$ puisque π est supposé abélien.

Supposons que E soit aussi fibré principal pour un surgroupe $\bar{\pi}$ de π, dans lequel π est invariant ; $\bar{\pi}$ opère alors sur E en respectant la fibration (E, B, π, p) et opère donc sur B par passage au quotient ; soit k_b l'isomorphisme de $\pi_1(B, b)$ sur $\pi_1(B, k(b))$ qui se déduit ainsi de l'homéomorphisme $x \to x \cdot k^{-1}$ de E ; il est immédiat que $\zeta_{k(b)}^{-1} \circ k_b \circ \zeta_b$ est l'automorphisme T_k: $x \to k x k^{-1}$, et ainsi le quotient $\bar{\pi}/\pi$ opère sur $\pi_1(B)$, donc sur le premier groupe d'homologie $H_1(B, Z) \cong \pi_1(B)$, par les automorphismes T_k.

Soient π' un sous-groupe de π, et f la projection de E/π' sur E/π. Il est clair que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(E/\pi', a) & \xleftarrow{\zeta_a} & \pi' \\ \downarrow f & & \downarrow i \\ \pi_1(E/\pi, f(a)) & \xleftarrow{\zeta_{f(a)}} & \pi \end{array} \qquad (i \text{ inclusion de } \pi' \text{ dans } \pi)$$

On peut donc identifier canoniquement π', resp. π, à $H_1(E/\pi', Z)$, resp. $H_1(E/\pi, Z)$, de manière à ce que $f_* : H_1(E/\pi', Z) \to H_1(E/\pi, Z)$ soit l'inclusion i ; si Γ est un groupe abélien, $f_* : H_1(E/\pi', \Gamma) \to H_1(E/\pi, \Gamma)$ est l'homomorphisme $\pi' \otimes \Gamma \to \pi \otimes \Gamma$ défini par l'inclusion $\pi' \subset \pi$ et par l'identité sur Γ ; remarquons encore qu'il est biunivoque et que $\pi' \otimes \Gamma \cong \pi'$; $\pi \otimes \Gamma \cong \pi$ quand $\Gamma \cong Z_2$ et quand π est de type $(2, 2, \ldots, 2)$.

Cas particulier. Soient $\boldsymbol{Q}(n)$ le groupe des matrices diagonales de $\boldsymbol{O}(n)$, et $\boldsymbol{N}_n$ le normalisateur de $\boldsymbol{Q}(n)$ dans $\boldsymbol{O}(n)$. Il est clair que $\boldsymbol{Q}(n) = (Z_2)^n$ et que $\boldsymbol{N}_n/\boldsymbol{Q}(n)$ s'identifie au groupe des permutations d'un système convenable de générateurs de $\boldsymbol{Q}(n)$, soit $u_1, \ldots, u_n$; à ce système correspond une base $v_1, \ldots, v_n$ de $H_1(B, Z_2) \cong H_1(B, Z) \otimes Z_2$. Soit encore $x_1, \ldots, x_n$ la base duale de $H^1(B, Z_2)$. Alors $\boldsymbol{N}_n/\boldsymbol{Q}(n)$, considéré comme groupe d'opérateurs de $H^1(B, Z_2)$ est le groupe des permutations de $x_1, \ldots, x_n$.

Si $\pi' = \boldsymbol{Q}(i)$ est le sous-groupe engendré par $u_{n-i+1}, \ldots, u_n$, $f_*: H_1(E/\boldsymbol{Q}(i), Z_2) \to H_1(E/\boldsymbol{Q}(n), Z_2)$ identifie $H_1(E/\boldsymbol{Q}(i), Z_2)$ au sous-espace de $H_1(E/\boldsymbol{Q}(n), Z_2)$ ayant $v_{n-i+1}, \ldots, v_n$ comme base. Désignons enfin par $y_1, \ldots, y_i$ la base de $H^1(E/\boldsymbol{Q}(i), Z_2)$ qui est duale à la base de $H_1(E/\boldsymbol{Q}(i), Z_2)$ définie par $u_{n-i+1}, \ldots, u_n$; l'homomorphisme transposé $f^*: H^1(E/\boldsymbol{Q}(n), Z_2) \to H^1(E/\boldsymbol{Q}(i), Z_2)$ est défini par

$$f^*(x_{n-i+j}) = y_j \quad (j = 1, 2, \ldots, i)\,; \quad f^*(x_k) = 0 \quad (1 \leqq k \leqq n - i)\ . \qquad (3.1)$$

I. Espaces classifiants pour les groupes orthogonaux; variétés de Stiefel

Dorénavant, nous considérerons exclusivement la cohomologie mod 2, aussi convenons-nous de désigner par $H(X)$ l'algèbre de cohomologie de X relativement au corps à deux éléments; de même $P(X, t)$ sera le polynôme de Poincaré de $H(X)$, et une suite spectrale (E_r) sera toujours relative à Z_2.

Nous notons $\boldsymbol{Q}(n)$, (resp. $\boldsymbol{SQ}(n)$), le sous-groupe des matrices diagonales de $\boldsymbol{O}(n)$, (resp. de $\boldsymbol{SO}(n)$), donc

$$\boldsymbol{Q}(n) \cong (Z_2)^n\ ; \qquad \boldsymbol{SQ}(n) \cong (Z_2)^{n-1}$$

d'où

$$H(B_{\boldsymbol{Q}(n)}, Z_2) \cong Z_2[x_1, \ldots, x_n] \qquad (Dx_i = 1)$$

$$H(B_{\boldsymbol{SQ}(n)}) \quad \cong Z_2[y_1, \ldots, y_{n-1}] \quad (Dy_i = 1)$$

$$P(B_{\boldsymbol{Q}(n)}, t) = (1 - t)^{-n}\ ; \qquad P(B_{\boldsymbol{SQ}(n)}, t) = (1 - t)^{-n+1}\ .$$

$\boldsymbol{F}_n$ désignera l'espace homogène

$$\boldsymbol{F}_n = \boldsymbol{O}(n)/\boldsymbol{Q}(n) \cong \boldsymbol{SO}(n)/\boldsymbol{SQ}(n)\ .$$

4. Cohomologie de $\boldsymbol{F}_n$

Nous avons surtout en vue l'étude de l'homomorphisme

$$\varrho^*(\boldsymbol{Q}(n), \boldsymbol{O}(n))$$

mais ce dernier est le transposé de la projection dans la fibration

$$(B_{\boldsymbol{Q}(n)}, B_{\boldsymbol{O}(n)}, \boldsymbol{F}_n)$$

et c'est pourquoi l'étude de $\boldsymbol{F}_n$ s'avèrera utile ; remarquons que l'on peut aussi l'envisager comme fibre dans la fibration $(B_{SQ(n)}, B_{SO(n)}, \boldsymbol{F}_n)$ correspondant à l'inclusion $\boldsymbol{SQ}(n) \subset \boldsymbol{SO}(n)$.

Lemme 4.1. *La dimension de* $H^1(\boldsymbol{F}_n)$ *est* $\geqq n-1$, $(n = 2, 3, \ldots)$. Dans l'algèbre spectrale de $(B_{SQ(n)}, B_{SO(n)}, \boldsymbol{F}_n)$ on a

$$E_2 = H(B_{SO(n)}) \otimes H(\boldsymbol{F}_n) \quad \text{et} \quad E_2^{1,0} = 0$$

car $B_{SO(n)}$ est simplement connexe, d'où

$$^1E_2 = E_2^{0,1} \cong H^1(\boldsymbol{F}_n) \tag{4.1}$$

d'autre part

$$\dim {}^1E_\infty = \dim H^1(B_{SQ(n)}) = n-1 \tag{4.2}$$

et le lemme résulte de l'inégalité $\dim {}^1E_2 \geqq \dim {}^1E_\infty$.

Proposition 4.1. $H(\boldsymbol{F}_n)$ *est engendrée par ses éléments de degré* $\leqq 1$ *et son polynôme de Poincaré est*

$$P(\boldsymbol{F}_n, t) = (1-t^2)(1-t^3)\ldots(1-t^n)(1-t)^{1-n} \quad (n \geqq 2) .$$

Démonstration par récurrence sur n. Pour $n = 2$, $\boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{SO}(2)/\boldsymbol{Z}_2$ est un cercle, supposons la proposition vraie pour $\boldsymbol{F}_{n-1}$, $(n \geqq 3)$, on a donc en particulier $\dim H^1(\boldsymbol{F}_{n-1}) = n-2$.

Soit $Z_2 \times \boldsymbol{O}(n-1)$ le sous-groupe de $\boldsymbol{O}(n)$ formé des matrices dont le premier coefficient est ± 1, il contient $\boldsymbol{Q}(n) = \boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Q}(n-1)$ et comme le quotient $\boldsymbol{O}(n)/\boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{O}(n-1)$ est l'espace projectif réel à $n-1$ dimensions $\boldsymbol{P}_{n-1}$, on a une fibration

$$\big(\boldsymbol{O}(n)/\boldsymbol{Q}(n), \boldsymbol{P}_{n-1}, \boldsymbol{O}(n-1)/\boldsymbol{Q}(n-1), p_n\big)$$

que l'on peut aussi écrire $(\boldsymbol{F}_n, \boldsymbol{P}_{n-1}, \boldsymbol{F}_{n-1}, p_n)$ dont nous voulons étudier l'algèbre spectrale. On a

$$\dim E_2^{1,0} = \dim H^1(\boldsymbol{P}_{n-1}) = 1$$

$$\dim E_2^{0,1} = \dim H^0\big(\boldsymbol{P}_{n-1}, H^1(\boldsymbol{F}_{n-1})\big) = \dim C^1(\boldsymbol{F}_{n-1}) \leqq n-2$$

donc $\dim {}^1E_2 \leqq n-1$, $(C^1(\boldsymbol{F}_{n-1})$ est le sous espace maximum de $H^1(\boldsymbol{F}_{n-1})$ sur lequel $\pi_1(\boldsymbol{P}_{n-1})$ agit trivialement). Mais

$$\dim {}^1E_\infty = \dim H^1(\boldsymbol{F}_n) \geqq n-1$$

il faut donc que $C^1(\boldsymbol{F}_{n-1}) = H^1(\boldsymbol{F}_{n-1})$ et que les éléments de $E_2^{0,1}$ soient cocycles pour toutes les différentielles d_r ; par conséquent l'image de l'homomorphisme $i^*: H(\boldsymbol{F}_n) \to H(\boldsymbol{F}_{n-1})$ transposé de l'inclusion contient $H^1(\boldsymbol{F}_{n-1})$, donc aussi $H(\boldsymbol{F}_{n-1})$ qui est engendré par ses éléments de degrés $\leqq 1$. Ainsi $\boldsymbol{F}_{n-1}$ est totalement non homologue à zéro dans $\boldsymbol{F}_n$, l'algèbre spectrale est triviale (voir (2.3)), et

$$P(\boldsymbol{F}_n, t) = P(\boldsymbol{P}_{n-1}, t)\, P(\boldsymbol{F}_{n-1}, t) = (1-t^2)(1-t^3)\ldots(1-t^n)(1-t)^{1-n}$$

compte tenu de l'hypothèse d'induction. Enfin,

$$E_\infty = E_2 = H(\boldsymbol{P}_{n-1}) \otimes H(\boldsymbol{F}_{n-1})$$

est engendré par ses éléments de degrés $\leqq 1$, il en est donc de même pour $H(\boldsymbol{F}_n)$, puisque E_∞ est l'algèbre graduée associée à $H(\boldsymbol{F}_n)$ convenablement filtrée (voir [2], Prop. 8.1a).

Corollaire. *$H(\boldsymbol{SO}(n)/\boldsymbol{SQ}(n))$ est égale à sa sous-algèbre caractéristique ; la série de Poincaré de $H(B_{\boldsymbol{SO}(n)})$ est*

$$P(B_{\boldsymbol{SO}(n)}, t) = (1-t^2)^{-1}(1-t^3)^{-1}\ldots(1-t^n)^{-1} .$$

Nous reprenons l'algèbre spectrale de $(B_{\boldsymbol{SQ}(n)}, B_{\boldsymbol{SO}(n)}, \boldsymbol{F}_n)$ considérée dans le lemme 4.1 ; la proposition 4.1, jointe à (4.1) et (4.2), montre que $\dim {}^1E_\infty = \dim {}^1E_2 = n-1$. Les différentielles doivent donc être nulles sur les éléments de degré total 1, en particulier sur $1 \otimes H^1(\boldsymbol{F}_n)$, donc aussi sur $1 \otimes H(\boldsymbol{F}_n)$ qui est engendré par ses éléments de degré $\leqq 1$; ainsi $\boldsymbol{F}_n$ est totalement non homologue à zéro dans cette fibration, dont l'algèbre spectrale est par suite triviale. Il en résulte que

$$H(\boldsymbol{SO}(n)/\boldsymbol{SQ}(n))$$

est égale à sa sous-algèbre caractéristique (No 2) et que

$$P(B_{\boldsymbol{SO}(n)}, t)\cdot P(\boldsymbol{F}_n, t) = P(B_{\boldsymbol{SQ}(n)}, t) = (1-t)^{-n+1}$$

d'où l'égalité annoncée (compte tenu de la Proposition 4.1).

5. Cohomologie de $B_{\boldsymbol{O}(n)}$; classes caractéristiques réduites

Pour $m<n$, nous identifions $\boldsymbol{O}(m)$ au sous-groupe de $\boldsymbol{O}(n)$ formé des matrices dont les $n-m$ premiers termes diagonaux sont égaux à 1, et $\varrho^*(\boldsymbol{O}(m), \boldsymbol{O}(n))$ désigne l'homomorphisme de $H(B_{\boldsymbol{O}(m)})$ dans $H(B_{\boldsymbol{O}(n)})$, correspondant à cette inclusion (voir 1).

On sait que les premiers groupes de cohomologie (mod 2) de la variété de Stiefel $V_{n,n-i} = \boldsymbol{O}(n)/\boldsymbol{O}(i)$ sont donnés par (voir par exemple [2], Proposition 10.3) :

$$H^j(V_{n,n-i}) = 0 \quad (j<i) \ ; \quad H^i(V_{n,n-i}) = Z_2 \ . \tag{5.1}$$

Lemme 5.1. *La classe de Stiefel-Whitney réduite* mod 2 *de degré* $i+1$ *de* $B_{O(n)}$, *soit* w^{i+1}, *est l'unique élément non nul de degré* $i+1$ *contenu dans le noyau de* $\varrho^*(\boldsymbol{O}(i), \boldsymbol{O}(n))$, $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$.

Dans cet énoncé, $B_{O(n)}$ désigne un espace classifiant pour une dimension assez grande, par exemple $>n$.

On sait (voir [11], p. 139) que w^{i+1} est l'image par transgression de l'élément non nul de $H^i(V_{n,n-i})$ dans la fibration

$$\left(E_{O(n)}/\boldsymbol{O}(i), E_{O(n)}/\boldsymbol{O}(n), V_{n,n-i}, \varrho(\boldsymbol{O}(i)/\boldsymbol{O}(n))\right) ,$$

c'est-à-dire $\left(B_{O(i)}, B_{O(n)}, V_{n,n-i}, \varrho(\boldsymbol{O}(i), \boldsymbol{O}(n))\right)$. Dans son algèbre spectrale on a d'après (5.1)

$$E_r^{p,q} = 0 \quad \text{pour} \quad p+q \leqq i, \ p>0, \ r \geqq 2 \tag{5.2}$$

donc

$$E_{i+1}^{i+1,0} \cong E_2^{i+1,0} \cong H^{i+1}(B_{O(n)}) \tag{5.3}$$

et, puisque $\pi_1(B_{O(n)})$ agit forcément trivialement sur Z_2

$$E_2^{0,i} \cong E_3^{0,i} \cong \cdots \cong E_{i+1}^{0,i} \cong H^i(V_{n,n-i})$$

Soit v^i l'élément non nul de $H^i(V_{n,n-i})$; comme la transgression en dimension i coincide avec l'homomorphisme $E_{i+1}^{0,i} \to E_{i+1}^{i+1,0}$ défini par d_{i+1} ([2], Proposition 5.1), on doit avoir

$$d_{i+1}(1 \otimes v^i) = w^{i+1} \otimes 1 \ .$$

Ensuite, comme toujours dans une algèbre spectrale :

$$E_{i+2}^{i+1,0} \cong E_{i+1}^{i+1,0}/d_{i+1}({}^iE_{i+1}) \frown E_{i+1}^{i+1,0}$$

$$E_{i+2}^{i+1,0} \cong E_{i+3}^{i+1,0} \cong \cdots \cong E_\infty^{i+1,0} \cong \varrho^*\left(H^{i+1}(B_{O(n)})\right)$$

mais, vu (5.2), $d_{i+1}({}^iE_{i+1}) \frown E_{i+1}^{i+1,0}$ est engendré par w^{i+1}, d'où le lemme.

Théorème 5.1. *L'homomorphisme* $\varrho^*(\boldsymbol{Q}(n), \boldsymbol{O}(n))$ *de* $H(B_{O(n)})$ *dans* $H(B_{Q(n)}) = Z_2[x_1, \ldots, x_n]$, $(Dx_i = 1)$, *est biunivoque. Son image est l'algèbre des fonctions symétriques en* $x_1, \ldots, x_n$; *il applique la classe caractéristique réduite* w^i *sur la i-ème fonction symétrique élémentaire* σ^i $(i = 1, \ldots, n)$.

Dans la démonstration, divisée en trois parties, on écrira $\varrho^*_{(i)}$ au lieu de $\varrho^*(\boldsymbol{Q}(i), \boldsymbol{O}(i))$.

a) Nous montrerons tout d'abord que $\varrho^*_{(n)}$ *est biunivoque et que*

$$P(B_{\boldsymbol{O}(n)}, t) = (1-t)^{-1}(1-t^2)^{-1}\dots(1-t^n)^{-1} .$$

Dans l'algèbre spectrale de $(B_{Q(n)}, B_{O(n)}, F_n, \varrho_{(n)})$ on a

$$\dim {}^1E_2 = \dim E_2^{1,0} + \dim E_2^{0,1}$$

$$\dim {}^1E_2 = \dim H^1(B_{\boldsymbol{O}(n)}) + \dim H^0\big(B, H^1(\boldsymbol{F}_n)\big) \leqq n$$

vu la Proposition 4.1 et le fait que $\pi_1(B_{\boldsymbol{O}(n)}) \cong \pi_0\big(\boldsymbol{O}(n)\big) \cong \boldsymbol{Z}_2$, (suite d'homotopie dans $\big(E_{\boldsymbol{O}(n)}B_{\boldsymbol{O}(n)}, \boldsymbol{O}(n)\big)$. D'autre part

$$\dim {}^1E_\infty = \dim H^1(B_{\boldsymbol{Q}(n)}) = n$$

ainsi, il faut que $\dim {}^1E_2 = n$, donc que $H^0\big(B_{\boldsymbol{Q}(n)}, H^1(F_n)\big)$ soit isomorphe à $H^1(\boldsymbol{F}_n)$ et formé d'éléments qui sont cocycles pour toutes les différentielles. Puisque $H(\boldsymbol{F}_n)$ est engendré par ses éléments de degré $\leqq 1$, on voit que $H^0\big(B_{\boldsymbol{Q}(n)}, H^k(\boldsymbol{F}_n)\big) = H^k(\boldsymbol{F}_n)$ pour tout k et que ses éléments sont cocycles pour toutes les différentielles. Ainsi

$$E_2 = H(B_{\boldsymbol{O}(n)}) \otimes H(\boldsymbol{F}_n) = E_\infty$$

l'algèbre spectrale est triviale, $\varrho^*_{(n)}$ est biunivoque, (voir (2.3)), et

$$P(B_{\boldsymbol{O}(n)}, t)\cdot P(\boldsymbol{F}_n, t) = P(B_{\boldsymbol{Q}(n)}) = (1-t)^{-n}$$

d'où, compte tenu de la Proposition 4.1,

$$P(B_{\boldsymbol{O}(n)}, t) = (1-t)^{-1}(1-t^2)^{-1}\dots(1-t^n)^{-1} .$$

b) Nous notons $S(x_1, \dots, x_n)$ l'algèbre des fonctions symétriques en $x_1, \dots, x_n$. Nous voulons montrer que $S(x_1, \dots, x_n)$ *est l'image de* $\varrho^*_{(n)}$.

Le normalisateur $\boldsymbol{N}_n$ de $\boldsymbol{Q}(n)$ dans $\boldsymbol{O}(n)$ opère sur la fibration $\big(E_{\boldsymbol{O}(n)}, B_{\boldsymbol{Q}(n)}, \boldsymbol{Q}(n)\big)$. On peut appliquer les remarques du No 3 (cas particulier) à $E = E_{\boldsymbol{O}(n)}$, $B = B_{\boldsymbol{O}(n)}$; ainsi, le groupe $\Psi_n = \boldsymbol{N}_n/\boldsymbol{Q}(n)$ opère sur $H(B_{\boldsymbol{Q}(n)}) = \boldsymbol{Z}_2[x_1, \dots, x_n]$ et est le groupe des permutations de $x_1, \dots, x_n$.

N_n opère sur la fibration $\big(E_{\boldsymbol{O}(n)}, B_{\boldsymbol{O}(n)}, \boldsymbol{O}(n)\big)$ et commute évidemment avec la projection en laissant chaque fibre invariante il opère donc trivialement sur $B_{\boldsymbol{O}(n)}$ et sur $H(B_{\boldsymbol{O}(n)})$; il est clair que N_n commute à la projection $\varrho^*_{(n)}$: $B_{\boldsymbol{Q}(n)} \to B_{\boldsymbol{O}(n)}$, donc finalement Ψ_n commute à $\varrho^*_{(n)}$:

$H(B_{O(n)}) \to H(B_{Q(n)})$ et agit trivialement sur la première algèbre. L'image de $\varrho^*_{(n)}$ est certainement contenue dans la sous-algèbre de $H(B_{Q(n)})$ formée par les éléments sur lesquels Ψ_n opère trivialement, et qui est $S(x_1, \ldots, x_n)$. Mais d'après a) $\varrho^*_{(n)}$ est biunivoque, et la série de Poincaré de $H(B_{O(n)})$ est justement celle de $S(x_1, \ldots, x_n)$; l'image de $\varrho^*_{(n)}$ est donc tout $S(x_1, \ldots, x_n)$.

c) *A montrer:* $\varrho^*_{(n)}(w^j) = \sigma^j \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$. Pour $j = 1$, c'est évident car σ^1 est le seul élément non nul de degré 1 de $S(x_1, \ldots, x_n)$; soit donc $j = i + 1 \quad (i \geqq 1)$, et considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E_{O(n)}/Q(i) & \xrightarrow{\alpha} & E_{O(n)}/Q(n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_{O(n)}/O(i) & \xrightarrow{\beta} & E_{O(n)}/O(n) \end{array}$$

qui peut s'écrire

$$\begin{array}{ccc} B_{Q(i)} & \xrightarrow{\alpha} & B_{Q(n)} \\ \downarrow \varrho_{(i)} & & \downarrow \varrho_{(n)} \\ B_{O(i)} & \xrightarrow{\beta} & B_{O(n)} \end{array}$$

d'où l'on déduit

$$\begin{array}{ccc} H(B_{Q(i)}) & \xleftarrow{\alpha^*} & H(B_{Q(n)}) \\ \uparrow \varrho^*_{(i)} & & \uparrow \varrho^*_{(n)} \\ H(B_{O(i)}) & \xleftarrow{\beta^*} & H(B_{O(n)}) \end{array}$$

où $\alpha^* = \varrho^*\big(Q(i), Q(n)\big)$ et $\beta^* = \varrho^*\big(O(i), O(n)\big)$; d'après (3.1) on a pour un choix convenable de générateurs $y_1, \ldots, y_i$ de $H(B_{Q(i)})$

$$\alpha^*(x_{n-i+k}) = y_k \quad (k = 1, \ldots, i)\,; \quad \alpha^*(x_k) = 0 \quad (k \leqq n - i)\ . \qquad (5.4)$$

Nous savons par ailleurs que $\varrho^*_{(i)}$ et $\varrho^*_{(n)}$ sont biunivoques et ont comme images respectives $S(y_1, \ldots, y_i)$ et $S(x_1, \ldots, x_n)$; de plus, d'après le lemme 5.1 :

$$\alpha^* \circ \varrho^*_{(n)}(w^{i+1}) = \varrho^*_{(i)} \circ \beta^*(w^{i+1}) = 0\ .$$

Par conséquent, $\varrho^*_{(n)}(w^{i+1})$ est une fonction symétrique de degré $i + 1$, non nulle, dont l'image par l'homomorphisme que définit (5.4) est nulle, c'est forcément σ^{i+1}. C. Q. F. D.

Remarque. Dans la partie a) de la démonstration, nous avons vu que l'algèbre spectrale de $(B_{Q(n)}, B_{O(n)}, \boldsymbol{F}_n, \varrho_{(n)})$ est triviale, par conséquent, $H\big(O(n)/Q(n)\big)$ est égale à sa sous-algèbre caractéristique.

Interprétation géométrique. Prenons comme espace universel pour $\boldsymbol{O}(n)$ la variété de Stiefel $\boldsymbol{V}_{m,n}$ (m grand), des n-repères orthonormaux de R^m. Il est clair que si $(e_1, \ldots, e_n)$ est un n-repère orthonormal, ses transformés par $\boldsymbol{Q}(n)$ sont les repères $(\pm e_1, \pm e_2, \ldots, \pm e_n)$. L'espace $\boldsymbol{V}^*_{m,n} = \boldsymbol{V}_{m,n}/\boldsymbol{Q}(n)$ est donc *la variété des systèmes ordonnés de n droites non orientées de R^n, orthogonales deux à deux, passant par l'origine.* Cet espace est par ailleurs le quotient d'un espace universel, c'est donc un espace classifiant $B_{Q(n)}$ pour $\boldsymbol{Q}(n)$ (et pour $m-n-1$) donc $H(\boldsymbol{V}^*_{m,n}) = \boldsymbol{Z}_2[x_1, \ldots, x_n]$ pour $D < m-n$; la fibration

$$\left(B_{Q(n)}, B_{O(n)}, \boldsymbol{O}(n)/\boldsymbol{Q}(n), \varrho(\boldsymbol{Q}(n), \boldsymbol{O}(n))\right)$$

s'écrit ici $\left(\boldsymbol{V}^*_{m,n}, \boldsymbol{G}_{m,n}, \boldsymbol{O}(n)/\boldsymbol{Q}(n)\right), \varrho\left(\boldsymbol{Q}(n), \boldsymbol{O}(n)\right)$. Sous a) nous avons en somme démontré que $\boldsymbol{O}(n)/\boldsymbol{Q}(n)$ était totalement non homologue à zéro (mod 2) dans $\boldsymbol{V}^*_{m,n}$ donc $\varrho^* : \; H(\boldsymbol{G}_{m,n}) \to H(\boldsymbol{V}^*_{m,n})$ est biunivoque en toute dimension, sous b) nous avons vu que l'image de ϱ^* est pour les degrés $< m-n$ l'ensemble des fonctions symétriques en $x_1, \ldots, x_n$.

Soit encore $(E, \boldsymbol{V}^*_{m,n}, \boldsymbol{O}(n), p)$ l'espace fibré image réciproque de $(\boldsymbol{V}_{m,n}, \boldsymbol{G}_{m,n}, \boldsymbol{O}(n), q)$ par $\varrho_{(n)}$ («induced bundle» dans [11] § 10), E est donc un espace fibré principal, muni d'un homomorphisme $\bar{\varrho} : \; E \to \boldsymbol{V}_{m,n}$ qui induit $\varrho_{(n)}$ par passage au quotient ; l'égalité $\varrho^*_{(n)}(w^i) = \sigma^i$ signifie que les classes caractéristiques réduites mod 2 de la fibration

$$(E, V^*_{m,n}, \boldsymbol{O}(n), p)$$

sont les fonctions symétriques élémentaires en $x_1, \ldots, x_n$.

6. Les formules de dualité mod 2

A deux espaces fibrés principaux de groupes structuraux $\boldsymbol{O}(n_1)$ et $\boldsymbol{O}(n_2)$ ayant même base B, on fait correspondre, comme on sait, un espace fibré principal de fibre $\boldsymbol{O}(n_1) \times \boldsymbol{O}(n_2)$, puis, par extension du groupe structural, un espace fibré principal de fibre $\boldsymbol{O}(n)$ $(n = n_1 + n_2)$, tous deux de base B. Les formules de dualité mod 2 de H. Whitney expriment des relations liant les classes caractéristiques réduites des 3 fibrations précédentes de groupes structuraux respectifs $\boldsymbol{O}(n_1)$, $\boldsymbol{O}(n_2)$ et $\boldsymbol{O}(n)$.

Ces formules se déduisent directement de relations entre les classes caractéristiques réduites de deux espaces fibrés principaux

$$(E_i, B_i, \boldsymbol{O}(n_i), p_i) \qquad (i = 1, 2) \;,$$

et de l'espace fibré $(E, B_1 \times B_2, \boldsymbol{O}(n), p)$ obtenu par extension du groupe structural à partir de $(E_1 \times E_2, B_1 \times B_2, \boldsymbol{O}(n_1) \times \boldsymbol{O}(n_2))$ et qui sont dues à Wu Wen Tsün [12]. Quant à ces dernières, il suffit pour les obtenir de considérer le cas des espaces universels, autrement dit où $E_i = \boldsymbol{V}_{m_i, n_i}$ (m_i grand). Soit

$$h: \quad \boldsymbol{G}_{m_1, n_1} \times \boldsymbol{G}_{m_2, n_2} \to \boldsymbol{G}_{m, n} \qquad (n = n_1 + n_2, \quad m = m_1 + m_2)$$

l'application qui associe au couple (P_1, P_2) le sous-espace de la somme directe $R^m = R^{m_1} + R^{m_2}$ sous-tendu par P_1 et P_2. Soient $w^j_{(i)}$ la j-ème classe réduite de G_{m_i, n_i}, et w^j la j-ème classe réduite de $G_{m,n}$, (on convient de poser $w^j_{(i)} = 0$ $(j > n_i)$, $w^j = 0$ $(j > n)$). Le problème consiste à exprimer l'image de w^j par l'homomorphisme

$$h^*: \quad H(\boldsymbol{G}_{m,n}) \to H(\boldsymbol{G}_{m_1, n_1}) \otimes H(\boldsymbol{G}_{m_2, n_2})$$

à l'aide des classes $w^k_{(i)}$; la solution est donnée par la Proposition suivante ([12], Théorème I).

Proposition 6.1. *Avec les notations précédentes on a*

$$h^*(w^j) = \sum\nolimits_{a+b=j} w^a_{(1)} \otimes w^b_{(2)} \qquad (j = 1, 2, \ldots) .$$

Nous admettrons provisoirement que pour $D < \operatorname{Min}(m_1 - n_1, m_2 - n_2)$ h^* s'identifie à l'homomorphisme $\varrho^*(\boldsymbol{O}(n_1) \times \boldsymbol{O}(n_2), \boldsymbol{O}(n))$ qui correspond à l'inclusion de $\boldsymbol{O}(n_1) \times \boldsymbol{O}(n_2)$ dans $\boldsymbol{O}(n)$.

Le diagramme commutatif (6.1), où les flèches désignent des projections, la flèche verticale de gauche étant l'identité :

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{V}_{m,n}/\boldsymbol{Q}(n_1) \times \boldsymbol{Q}(n_2) & \to & \boldsymbol{V}_{m,n}/\boldsymbol{O}(n_1) \times \boldsymbol{O}(n_2) \\ \downarrow & & \downarrow \gamma \\ \boldsymbol{V}_{m,n}/\boldsymbol{Q}(n) & \to & \boldsymbol{V}_{m,n}/\boldsymbol{O}(n) \end{array} \tag{6.1}$$

donne par passage à la cohomologie mod 2 un diagramme qui pour $D < \operatorname{Min}(m_1 - n_1, m_2 - n_2)$ coincide avec le diagramme (6.2) :

$$\begin{array}{ccc} H(B_{\boldsymbol{Q}(n_1)}) \otimes H(B_{\boldsymbol{Q}(n_2)}) & \xleftarrow{\beta^*} & H(B_{\boldsymbol{O}(n_1)}) \otimes H(B_{\boldsymbol{O}(n_2)}) \\ \uparrow \alpha^* & & \uparrow \gamma^* \\ H(B_{\boldsymbol{Q}(n)}) & \xleftarrow{\varrho^*_{(n)}} & H(B_{\boldsymbol{O}(n)}) . \end{array} \tag{6.2}$$

Si l'on pose

$$H(B_{\boldsymbol{Q}(n_1)}) = \boldsymbol{Z}_2[y_1, \ldots, y_{n_1}] \; ; \qquad H(B_{\boldsymbol{Q}(n_2)}) = \boldsymbol{Z}_2[y_{n_1+1}, \ldots, y_n]$$

il est clair que pour un choix convenable des y_i on a (voir No 3)

$$\alpha^*(x_i) = y_i \otimes 1 \qquad (i \leqq n_1) \; ; \qquad \alpha^*(x_j) = 1 \otimes y_j \qquad (j > n_1) .$$

β^* n'est autre que $\varrho^*(\boldsymbol{Q}(n_1)\times\boldsymbol{Q}(n_2),\ \boldsymbol{O}(n_1)\times\boldsymbol{O}(n_2))$, c'est donc le produit tensoriel des homomorphismes $\varrho^*_{(n_1)}$ et $\varrho^*_{(n_2)}$, d'où

$$\beta^*(w^j_{(1)}\otimes 1) = \sigma^j_{(1)}\otimes 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

$$\beta^*(1\otimes w^k_{(2)}) = 1\otimes \sigma^k_{(2)} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

(on note $\sigma_1^{(j)}$, resp. $\sigma^k_{(2)}$, la j-ème fonction symétrique élémentaire en $y_1, \ldots, y_{n_1}$, resp. en $y_{n_1+1}, \ldots, y_n$ et on convient que $\sigma^j_{(i)} = 0$ si j est strictement plus grand que le nombre des variables). γ^* est l'homomorphisme $\varrho^*(\boldsymbol{O}(n_1)\times\boldsymbol{O}(n_2),\ \boldsymbol{O}(n))$ qui, comme nous l'avons admis, coincide avec h^* pour $D<\mathrm{Min}(m_1 - n_1, m_2 - n_2)$. Enfin (Théorème 5.1)

$$\varrho^*_{(n)}(w^j) = \sigma^j \qquad (j = 1, 2, \ldots) .$$

La proposition 6.1 résulte alors de la commutativité de (6.2) et de l'identité évidente

$$\alpha^*(\sigma^j) = \sum\nolimits_{a+b=j} \quad \sigma^a_{(1)}\otimes\sigma^b_{(2)} \qquad (j = 1, 2, \ldots) .$$

Pour compléter cette démonstration, nous devons encore établir le

Lemme 6.1. *Pour* $D<\mathrm{Min}\,(m_1 - n_1, m_2 - n_2)$, *on a*

$$h^* = \varrho^*(\boldsymbol{O}(n_1)\times\boldsymbol{O}(n_2),\ \boldsymbol{O}(n)) .$$

$\boldsymbol{V}_{m,n}/\boldsymbol{O}(n_1)\times\boldsymbol{O}(n_2)$ est l'espace des systèmes formés par un sous-espace P_1 de dimension n_1 de R^{m_1} et un sous-espace P_2 de dimension n_2 orthogonal à P_1 ; on a une inclusion évidente

$$i:\quad \boldsymbol{G}_{m_1,n_1}\times\boldsymbol{G}_{m_2,n_2}\subset \boldsymbol{V}_{m,n}/\boldsymbol{O}(n_1)\times\boldsymbol{O}(n_2)$$

telle que $h = \gamma\circ i$; l'application i provient par passage au quotient d'une inclusion de $\boldsymbol{V}_{m_1,n_1}\times\boldsymbol{V}_{m_2,n_2}$ dans $\boldsymbol{V}_{m,n}$ qui est un homomorphisme d'espaces fibrés principaux (de groupes structuraux $\boldsymbol{O}(n_1)\times\boldsymbol{O}(n_2)$). Ces deux espaces étant universels pour $\boldsymbol{O}(n_1)\times\boldsymbol{O}(n_2)$ et pour

$$D<\mathrm{Min}\,(m_1 - n_1, m_2 - n_2) ,$$

il s'ensuit que i^* est un isomorphisme sur pour ces valeurs de D, ([2], Propositions 18.2 et 18.3), ainsi h^* se ramène bien à

$$\gamma^* = \varrho^*(\boldsymbol{O}(n_1)\times\boldsymbol{O}(n_2),\ \boldsymbol{O}(n))$$

pour les degrés considérés.

Remarque. En fait ce lemme n'est qu'un cas particulier d'un résultat général facile à établir concernant les extensions de groupes structuraux.

Soient U un sous-groupe fermé du groupe de Lie compact G, (E, B, U, p) un espace fibré principal, (E', B, G, p') un espace obtenu par extension du groupe structural à partir de (E, B, U, p), σ_U^* et σ_G^* les homomorphismes caractéristiques de ces deux fibrations (au sens du No 1), alors $\sigma_G^* = \sigma_U^* \circ \varrho^*(U, G)$ (voir à ce sujet un article ultérieur de J. P. Serre et l'auteur). Plus haut nous avons considéré un cas où E est universel, donc où σ_U^* est l'identité.

7. Les i-carrés des classes caractéristiques réduites

Pour compléter Nos 5, 6, nous donnons ici une démonstration des formules de Wu Wen Tsün ([13], [5]), qui du reste ne diffère pas essentiellement de la sienne.

Nous désignons comme précédemment par w^j $(j = 1, 2, \ldots)$ les classes caractéristiques réduites de $H(B_{O(n)})$, en convenant de poser $w^j = 0$ pour $j > n$.

Théorème 7.1. *On a les formules*

$$Sq^i w^j = \sum_{0 \leqq t \leqq i} \binom{j - i + t - 1}{t} \; w^{i-t} \; w^{j+t} \qquad (i \leqq j)$$

avec les conventions suivantes: $\binom{a}{b}$ = *coefficient binomial réduit* mod 2 *si* $a \geqq b$; $\binom{a}{b} = 1$ *si* $b = 0$; $\binom{a}{b} = 0$ *si* $a < b$ *et* $b \neq 0$.

Dans $H(B_{Q(n)}) = Z_2[x_1, \ldots, x_n]$, les i-carrés sont déterminés par

$$Sq^0 x_i = x_i \; ; \quad Sq^1 x_i = x_i^2 \; ; \quad Sq^j x_i = 0 \quad (j > 1) \tag{7.1}$$

et par la formule de H. Cartan

$$Sq^i(u \cdot v) = \sum_{a+b=i} Sq^a u \cdot Sq^b v \; . \tag{7.2}$$

Il en résulte visiblement que pour $i \leqq j$, $i_1 < i_2 < \cdots < i_j$:

$$S q^i (x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_j}) = \sum_{k_1 < \cdots < k_i} x_{k_1}^2 x_{k_2}^2 \ldots x_{k_i}^2 x_{k_{i+1}} \ldots x_{k_j} \tag{7.3}$$

$(k_1, \ldots, k_i)$ étant une partie de $(i_1, \ldots, i_j)$ et $(k_{i+1}, \ldots, k_j)$ son complément.

D'après le Théorème 5.1 on a $\varrho_{(n)}^*(w^j) = \sigma^j$; on tire donc de (7.3) que

$$Sq^i \varrho_{(n)}^* (w^j) = \sum x_1^2 x_2^2 \ldots x_i^2 x_{i+1} \ldots x_j \qquad (i \leqq j)$$

le deuxième membre désignant la fonction symétrique en $x_1, \ldots, x_n$ de terme typique $x_1^2 x_2^2 \ldots x_i^2 x_{i+1} \ldots x_j$. Comme $\varrho^*_{(n)}$ est biunivoque, le Théorème 7.1 équivaut à la formule

$$\sum x_1^2 x_2^2 \ldots x_i^2 x_{i+1} \ldots x_j = \sum_{0 \leqq i \leqq t} \binom{j-i+t-1}{t} \sigma^{i-t} \quad \sigma^{j+t} \tag{7.5}$$

avec les conventions du Théorème 7.1 pour les coefficients. Introduisons la notation

$$c_t^{i,j} = \binom{j-i+t-1}{t} , \tag{7.6}$$

les coefficients $c_t^{i,j}$ vérifient donc les formules

$$\begin{aligned} c_0^{i,j} &= 1 && (i \leqq j) \\ c_t^{i,j} &= c_t^{i-1,j-1} && (0 \leq t < i \leqslant j) \\ c_t^{i,j} &= c_t^{i,j-1} + c_{t-1}^{i,j} && (0 < t \leqq i < j) \ . \end{aligned} \tag{7.7}$$

La démonstration de (7.5) se fait par récurrence sur le nombre des variables. Pour $n = 1$, c'est immédiat, supposons (7.5) établie pour $n-1$ variables. Si $i = j$, (7.5) devient

$$\sum x_1^2 x_2^2 \ldots x_j^2 = \sigma^j \cdot \sigma^j$$

et est évidemment vraie, puisque nous calculons mod 2 ; il reste à considérer le cas $i < j$. Nous noterons

$$\sum{}^* x_1^2 \cdot x_2^2 \ldots x_i^2 \, x_{i+1} \ldots x_j$$

une fonction symétrique en $x_1, \ldots, x_{n-1}$ de terme typique

$$x_1^2 x_2^2 \ldots x_i^2 x_{i+1} \ldots x_j$$

et σ_*^j sera le j-ème fonction symétrique élémentaire en $x_1, \ldots, x_{n-1}$.

Le premier membre de (7.5) s'écrit

$$x_n^2 \sum{}^* x_1^2 \ldots x_{i-1}^2 x_i \ldots x_{j-1} + x_n \sum{}^* x_1^2 \ldots x_i^2 x_{i+1} \ldots x_{j-1} \\ + \sum{}^* x_1^2 \ldots x_i^2 x_{i+1} \ldots x_j$$

le deuxième membre, soit $A^{i,j}$, se transforme de la manière suivante :

$$A^{i,j} = c_i^{i,j} (x_n \sigma_*^{j+i-1} + \sigma_*^{j+i}) + \sum_{0 \leqq t < i} c_t^{i,j} (x_n \sigma_*^{i-t-1} + \sigma_*^{i-t}) (x_n \sigma_*^{j+t-1} + \sigma_*^{j+}$$

$$A^{i,j} = x_n^2 \sum_{0 \leqq t < i} c_t^{i,j} \sigma_*^{i-t+1} \sigma_*^{j+t-1} + x_n \sum_{0 \leqq t \leqq i} (c_t^{i,j-1} + c_{t-1}^{i,j}) \sigma_*^{i-t} \sigma_*^{j+t-1} \\ + \sum_{0 \leqq i \leqq t} c_t^{i,j} \sigma_*^{i-t} \sigma_*^{j+t}$$

(en posant $c_{-1}^{i,j} = 0$) ; l'égalité des deux membres résulte alors de l'hypothèse de récurrence et de (7.7).

8. Cohomologie de $B_{SO(n)}$

$\boldsymbol{SO}(n)$ étant invariant dans $\boldsymbol{O}(n)$, il existe une algèbre spectrale qui mène de $E_2 = H\big(B_{O(n)/SO(n)}, H(B_{SO(n)})\big)$ à $H(B_{O(n)})$ (voir [2], Proposition 22.2) ; ici du reste, $\boldsymbol{O}(n)/\boldsymbol{SO}(n) = \boldsymbol{Z}_2$ et $B_{SO(n)}$ est le revêtement à deux feuillets simplement connexe de $B_{O(n)}$, on peut aussi prendre la suite spectrale des revêtements finis (Cartan-Leray, Colloque de Topologie algébrique, Paris 1947, p. 83—85). Quelle que soit la manière dont on envisage cette suite spectrale, il est facile de voir que les éléments de $E_2^{0,q}$ qui sont cocycles pour toutes les différentielles forment l'image de $\varrho^*\big(\boldsymbol{SO}(n), \boldsymbol{O}(n)\big)$ pour le degré q. (Dans [2], cela résulte du Théorème 22.1 et de la manière dont on obtient la Proposition 22.2 à partir de ce théorème.)

Puisque $\boldsymbol{O}(n)/\boldsymbol{SO}(n) = \boldsymbol{Z}_2$ on a

$$H(B_{O(n)/SO(n)}) \cong Z_2[x] \qquad (Dx = 1)$$

on en tire à l'aide du Théorème 5.1 et du corollaire à la Proposition 4.1 :

$$P\big(B_{O(n)/SO(n)}, t\big) \cdot P(B_{SO(n)}, t) = P(B_{O(n)}, t)$$

d'où (Proposition 2.1) :

$$E_2 = H(B_{O(n)/SO(n)}) \otimes H(B_{SO(n)}) = E_\infty$$

et $B_{SO(n)}$ est totalement non homologue à zéro. Par conséquent, vu (2.3) :

Proposition 8.1. *L'homomorphisme $\varrho^*\big(\boldsymbol{SO}(n), \boldsymbol{O}(n)\big)$ applique $H(B_{O(n)})$ sur $H(B_{SO(n)})$; son noyau est l'idéal engendré par w^1.*

Nous voyons ainsi que $H(B_{SO(n)})$ est une algèbre de polynômes en $n-1$ variables $\hat{w}^2, \dots, \hat{w}^n$ de degrés $2, 3, \dots, n$, images de $w^2, \dots, w^n$ par $\varrho^*\big(\boldsymbol{SO}(n), \boldsymbol{O}(n)\big)$. La grassmannienne $\boldsymbol{G}^0_{m,n}$ des plans orientés est classifiante pour $\boldsymbol{SO}(n)$ et pour $m - n - 1$, donc pour ces degrés, $H(\boldsymbol{G}^0_{m,n})$ est une algèbre de polynômes en $\hat{w}^2, \dots, \hat{w}^n$, qui sont évidemment les classes caractéristiques réduites de la fibration

$$\big(\boldsymbol{V}_{m,n}, \boldsymbol{G}_{m,n}, \boldsymbol{SO}(n)\big) \ .$$

Remarquons encore que l'on déduit du Théorème 7.1 et de la Proposition 8.1, (en posant $\hat{w}^1 = 0$) :

$$Sq^i \hat{w}^j = \textstyle\sum_{0 \leqslant t \leqslant i} \binom{j-i+t-1}{t} \hat{w}^{i-t} \hat{w}^{j+t} \qquad (i \leqslant j,\ j = 2, \dots, n) \ . \qquad (8.1)$$

Proposition 8.2. *a) L'homomorphisme $\varrho^*\big(\boldsymbol{SQ}(n), \boldsymbol{Q}(n)\big)$ est sur, et identifie $H(B_{SQ(n)})$ au quotient de $H(B_{Q(n)}) = Z_2[x_1, \dots, x_n]$ par l'idéal $(x_1 + \dots + x_n)$ qu'y engendre $x_1 + \dots + x_n$.*

b) *L'homomorphisme* $\varrho^*(\boldsymbol{SQ}(n), \boldsymbol{SO}(n))$ *est biunivoque, son image est le quotient de* $S(x_1, \ldots, x_n)$ *par* $(x_1 + \cdots + x_n)$.

a) On peut appliquer à la projection $\varrho(\boldsymbol{SQ}(n), \boldsymbol{Q}(n)) : B_{SQ(n)} \to B_{Q(n)}$ les remarques du No 3 : $\varrho_*(\boldsymbol{SQ}(n), \boldsymbol{Q}(n)) : H_1(B_{SQ(n)}) \to H_1(B_{Q(n)})$ est biunivoque et se ramène à l'inclusion $\boldsymbol{SQ}(n) \subset \boldsymbol{Q}(n)$. L'homomorphisme transposé ϱ^* est par conséquent *sur* en dimension 1, donc en toute dimension puisque $H(B_{SQ(n)})$ est engendré par ses éléments de degré $\leqq 1$. Il est d'autre part visible que si $x_1, \ldots, x_n$ est une base convenable de $H^1(B_{Q(n)})$, le sous-espace $H_1(B_{SQ(n)})$ de $H_1(B_{Q(n)})$ est précisément le plus grand sous-espace sur lequel $x_1 + \cdots + x_n$, (envisagé comme forme linéaire), s'annule ; ainsi l'idéal $(x_1 + \cdots + x_n)$ fait partie du noyau de $\varrho^*(\boldsymbol{SQ}(n), \boldsymbol{Q}(n))$, il constitue tout le noyau car sa série de Poincaré est $t(1-t)^{-n}$, donc égale à la différence $P(B_{Q(n)}, t) - P(B_{SQ(n)}, t)$.

b) Aux inclusions

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{SQ}(n) & \to & \boldsymbol{Q}(n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \boldsymbol{SO}(n) & \to & \boldsymbol{O}(n) \end{array}$$

correspond le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H(B_{SQ(n)}) & \xleftarrow{\varrho^*(SQ(n),\, Q(n))} & H(B_{Q(n)}) \\ \uparrow \varrho^*(SQ(n),\, SO(n)) & & \uparrow \varrho^*(Q(n),\, O(n)) \\ H(B_{SO(n)}) & \xleftarrow{\varrho^*(SO(n), O(n))} & H(B_{O(n)}) \end{array}$$

$\varrho^*(\boldsymbol{SO}(n), \boldsymbol{O}(n))$ est sur (proposition 8.1), l'image de $\varrho^*(\boldsymbol{SQ}(n), \boldsymbol{SO}(n))$ est donc la même que celle de $\varrho^*(\boldsymbol{SQ}(n), \boldsymbol{Q}(n)) \circ \varrho^*(\boldsymbol{Q}(n), \boldsymbol{O}(n))$, qui est justement $S(x_1, \ldots, x_n)/(x_1 + \cdots + x_n)$ compte tenu de a) et du Théorème 5.1. Enfin $\varrho^*(\boldsymbol{SQ}(n), \boldsymbol{SO}(n))$ est biunivoque car $H(B_{SO(n)})$ a même série de Poincaré que son image ; cela résulte aussi déjà de la trivialité de l'algèbre spectrale de $(B_{SQ(n)}, B_{SO(n)}, \boldsymbol{F}_n)$ (voir démonstration du Corollaire à la Proposition 4.1).

Remarque. Soit $\boldsymbol{SN}_n$ le normalisateur de $\boldsymbol{SQ}(n)$ dans $\boldsymbol{SO}(n)$; il est clair que $\boldsymbol{SN}_n/\boldsymbol{SQ}(n)$ est isomorphe à $\Psi_n = \boldsymbol{N}_n/\boldsymbol{Q}(n)$, qu'il opère sur

$$H(B_{SQ(n)}) = Z_2[x_1, \ldots, x_n]/(x_1 + \cdots + x_n)$$

par les permutations de $x_1, \ldots, x_n$. Ainsi, comme dans le cas de $\varrho^*(\boldsymbol{Q}(n), \boldsymbol{O}(n))$ nous voyons que $\varrho^*(\boldsymbol{SQ}(n), \boldsymbol{SO}(n))$ identifie $H(B_{SO(n)})$ aux invariants du normalisateur de $\boldsymbol{SQ}(n)$.

9. Les i-carrés dans les variétés de Stiefel

Nous disons que $h_1, \dots, h_m$ est un système simple de générateurs de $H(X)$ si les monômes

$$h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_k} \qquad (i_1 < i_2 < \cdots < i_k \, ; \, k = 1, 2, \dots, m)$$

forment avec l'élément neutre une base d'espace vectoriel sur Z_2 de $H(X)$ (voir [2], Définition 6.4) ; si $X = G$ est un groupe de Lie compact connexe, $H(X)$ a toujours un système simple de générateurs ([2], Proposition 6.1a). Dans le cas du groupe orthogonal, nous avons démontré dans [2] (Proposition 10.3 et remarque 1 à cette proposition, Proposition 23.1) :

Proposition 9.1. *$H(\boldsymbol{SO}(n))$ a un unique système simple de générateurs universellement transgressifs $h_1, \dots, h_{n-1}$ de degrés $1, 2, \dots, n-1$.*

L'homomorphisme p_{n-k}^* transposé de la projection p_{n-k} :

$$\boldsymbol{SO}(n) \to \boldsymbol{SO}(n)/\boldsymbol{SO}(k) = \boldsymbol{V}_{n, n-k}$$

applique $H(\boldsymbol{V}_{n,n-k})$ biunivoquement sur la sous-algèbre engendrée par $h_k, h_{k+1}, \dots, h_{n-1}$ $(k = 1, 2, \dots, n-1)$.

On sait que la transgression dans une espace fibré (E, B, F, p) applique un sous-espace de $H^s(F)$, que nous noterons ici $\mathfrak{T}^s$, dans un *quotient* de $H^{s+1}(B)$ $(s = 0, 1, \dots)$ (voir par exemple [2], § 5). Dans le cas particulier d'une fibration $\left(E_{\boldsymbol{SO}(n)}, B_{\boldsymbol{SO}(n)}, \boldsymbol{SO}(n), p\right)$ où $E_{\boldsymbol{SO}(n)}$ est universel pour $\boldsymbol{SO}(n)$, cela se précise de la façon suivante ([2], fin du § 21, et § 23) :

Soient D^j le sous-espace des éléments décomposables de $H^j(B_{\boldsymbol{SO}(n)})$ et $Q^j = H^j(B_{\boldsymbol{SO}(n)})/D^j$; pour $j = 2, 3, \dots, n$, Q^j est de dimension 1 et a comme base la projection $\hat{w}^j_*$ de $\hat{w}^j$; d'autre part $\mathfrak{T}^j$ est le sous-espace de base h_j. Alors la transgression τ est un isomorphisme de $\mathfrak{T}^j$ sur Q^{j+1} autrement dit :

$$\mathfrak{T}(h_j) = \hat{w}^{j+1}_* \qquad (j = 1, \dots, n-1) \,. \tag{9.1}$$

On a évidemment $Sq^i(D^j) \subset D^{i+j}$ vu la formule du produit (7.2), et Sq^i définit par passage au quotient un homomorphisme $Q^j \to Q^{j+i}$ que nous désignons aussi par Sq^i. Dire que les i-carrés commutent à la transgression ([10], No 9) signifie dans notre cas particulier exactement que le diagramme suivant est commutatif :

$$
\begin{array}{ccc}
\mathfrak{T}^j & \overset{Sq^i}{\rightarrow} & \mathfrak{T}^{i+j} \\
\downarrow \mathfrak{T} & & \downarrow \mathfrak{T} \\
Q^{j+1} & \overset{Sq^i}{\rightarrow} & Q^{j+1+i} .
\end{array} \tag{9.2}
$$

De la formule (8.1), on tire

$$
Sq^i\, \hat{w}^j_* = \binom{j-1}{i} \hat{w}^{j+i}_* \qquad (i \leqq j\,; j = 2, 3, \ldots) . \tag{9.3}
$$

Cette égalité, jointe à (9.1), (9.2) et à la Proposition 9.1, donne le :

Théorème 9.1. *$H(V_{n,n-k})$ a un système simple de générateurs*

$$
h_k, h_{k+1}, \ldots, h_{n-1} \qquad (Dh_i = i) \ ,
$$

liés par les relations :

$$
Sq^i h_j = \binom{j}{i} h_{i+j} \quad (i \leqq j\,; i + j \leqq n - 1)\,; \quad Sq^i h_j = 0 \quad (i + j \geqq n) \ .
$$

Ces formules ont été obtenues par Miller [8] à l'aide de décompositions cellulaires. Dans la Note [1], nous nous étions bornés à indiquer les cup-carrés $Sq^i h_i$. Rappelons que l'on déduit aisément de cette formule le théorème de Steenrod-Whitehead relatif aux champs de vecteurs sur les sphères (voir [8]). Par la même méthode, on montre que *si la fibration* $(V_{n,r+1}, V_{n,r}, V_{n-r,1})$ *a une section et si* $r = 2^k s$ *(s impair), alors* $n-r-1$ *est divisible par* 2^{k+1}, ce qui contient des résultats de B. Eckmann (Colloque de Topologie, Bruxelles 1950, p. 83—99, No 4.2).

II. Quelques espaces homogènes

10. Remarques générales

Dans l'introduction nous avons fait allusion à une analogie entre les rôles de $Q(n)$ en cohomologie mod 2 et des tores maximaux en cohomologie réelle que nous allons maintenant expliciter ; pour les démonstrations des théorèmes de cohomologie réelle rappelés ci-dessous nous renvoyons à [2], § 19, 26, 27.

On sait que les tores maximaux d'un groupe de Lie compact connexe sont conjugués et que leur dimension commune, le *rang* de G, a un sens topologique : C'est la dimension d'un espace dont $H(G, R)$ est l'algèbre extérieure, ou encore la dimension de l'espace qu'engendrent les éléments universellement transgressifs, ou enfin le nombre de générateurs de

$H(B_G, R)$ (qui est une algèbre de polynômes). Soit T^n un tore maximal de G, l'homomorphisme $\varrho_R^*(T^n, G)$ applique $H(B_G, R)$ biunivoquement dans $H(B_{T^n}, R) \cong R[y_1, \ldots, y_n]$ $(Dy_i = 2)$, sur l'algèbre des invariants du groupe de Weyl $\Phi(G) = N(T^n)/T^n$, quotient par T^n de son normalisateur dans G ; enfin $H(G/T^n, R)$ est égale à sa sous-algèbre caractéristique, isomorphe au quotient de $H(B_{T^n}, R)$ par l'idéal qu'y engendrent les éléments de degrés >0 de l'image de $\varrho_R^*(T^n, G)$, et son polynôme de Poincaré en caractéristique zéro est

$$P_0(G/T^n, t) = (1 - t^{m_1})(1 - t^{m_2}) \ldots (1 - t^{m_n})(1 - t^2)^{-n} \qquad (10.1)$$

où $m_1, \ldots, m_n$ sont les degrés de générateurs de $H(B_G, R)$ ou aussi les degrés augmentés de 1 des éléments d'un système de générateurs de $H(G, R)$.

Si nous substituons $\boldsymbol{Q}(n)$, ou $\boldsymbol{SQ}(n)$, à T^n et $\boldsymbol{O}(n)$, ou $\boldsymbol{SO}(n)$, à G et la cohomologie mod 2 à la cohomologie réelle, les résultats précédents se traduisent aisément en propositions obtenues dans I. Le groupe $\boldsymbol{Q}(n)$ est évidemment abélien maximal de type $(2, \ldots, 2)$ dans $\boldsymbol{O}(n)$ et tous les sous-groupes de ce type lui sont conjugués ; comme il est isomorphe à $(Z_2)^n$ nous dirons que le 2-rang de $\boldsymbol{O}(n)$ est n. Ce 2-rang a aussi une interprétation topologique, c'est le nombre de générateurs de $H(B_{\boldsymbol{O}(n)}, Z_2)$ (qui est une algèbre de polynômes, Théorème 5.1), c'est aussi si l'on veut le nombre d'éléments d'un système simple de générateurs de $H(\boldsymbol{O}(n))$ pour autant que l'on convienne d'ajouter aux générateurs de $H(\boldsymbol{SO}(n))$ un générateur de degré zéro pour tenir compte du fait que $H^0(\boldsymbol{O}(n)) = Z_2 + Z_2$ [2]. De plus $H(B_{\boldsymbol{Q}(n)}) \cong Z_2[x_1, \ldots, x_n]$, $(Dx_i = 1)$, l'homomorphisme $\varrho^*(\boldsymbol{Q}(n), \boldsymbol{O}(n))$ est biunivoque, son image est l'ensemble des invariants de $\Psi_n = \boldsymbol{N}_n/\boldsymbol{Q}(n)$, l'algèbre $H(\boldsymbol{O}(n)/\boldsymbol{Q}(n))$ est égale à sa sous-algèbre caractéristique, isomorphe au quotient de $H(B_{\boldsymbol{Q}(n)})$ par l'idéal qu'y engendrent les éléments de degrés >0 de l'image de $\varrho^*(\boldsymbol{Q}(n), \boldsymbol{O}(n))$ et son polynôme de Poincaré mod 2 est

$$P(\boldsymbol{O}(n)/\boldsymbol{Q}(n), t) = (1 - t)(1 - t^2) \ldots (1 - t^n)(1 - t)^{-n} \qquad (10.2)$$

où les exposants sont les degrés de générateurs de $H(B_{\boldsymbol{O}(n)})$, ou les degrés augmentés de 1 d'éléments formant un système simple de générateurs de $H(\boldsymbol{O}(n))$, formule dont l'analogie avec (10.1) est claire. Nous avons également obtenu des résultats tout à fait semblables pour $\boldsymbol{SQ}(n)$, $\boldsymbol{SO}(n)$ et $\boldsymbol{SO}(n)/\boldsymbol{SQ}(n)$.

[2]) De même nous dirons que l'algèbre de cohomologie de l'*espace* $\boldsymbol{Q}(n)$, qui se réduit évidemment à ses éléments de degré 0, a un système simple de n générateurs.

Ces propositions sont très suggestives et il est naturel de se demander si elles se généralisent. Nous verrons que les principales d'entre elles s'étendent à $\boldsymbol{U}(n)$, $\boldsymbol{SU}(n)$, $\boldsymbol{Sp}(n)$, $\boldsymbol{G}_2$, mais néanmoins elles ne sont pas toutes générales. Par exemple on peut montrer que le 2-rang du quotient $\boldsymbol{SO}(4k)/Z_2$ de $\boldsymbol{SO}(4k)$ par son centre est $< 4k-1$, alors que $H(\boldsymbol{SO}(4k)/Z_2)$, a un système simple de $4k-1$ générateurs [3]). D'autre part $H(B_G)$ n'est pas toujours une algèbre de polynômes, ni même le produit tensoriel d'une algèbre de dimension finie par une algèbre de polynômes [3]). L'analogie avec la cohomologie réelle n'est donc pas parfaite, mais cependant ces exemples et contre-exemples n'élucident pas complètement la question, qui nous paraît intéressante, de savoir jusqu'à quel point les phénomènes décrits plus haut découlent de théorèmes généraux [4]).

Revenons à la cohomologie réelle. On sait qu'une fois $H(G/T^n, R)$ connue, on détermine aisément l'algèbre de cohomologie $H(G/U, R)$ lorsque U est connexe, de même rang que G. Cette algèbre est égale à sa sous-algèbre caractéristique, isomorphe au quotient de $H(B_U, R)$ par l'idéal qu'y engendrent les éléments de degrés >0 de l'image de $\varrho_R^*(U, G)$, qui est biunivoque, et son polynôme de Poincaré est donné par la formule de Hirsch :

$$P_0(G/U, t) = \frac{(1-t^{m_1})(1-t^{m_2})\dots(1-t^{m_n})}{(1-t^{q_1})(1-t^{q_2})\dots(1-t^{q_n})}, \tag{10.4}$$

où $m_1, \dots, m_n$ resp. $q_1, \dots, q_n$, sont les degrés des générateurs de $H(B_G, R)$ resp. $H(B_U, R)$.

En répétant presque mot pour mot les raisonnements qui font passer de $H(G/T^n, R)$ à $H(G/U, R)$ nous obtiendrons ici la cohomologie mod. 2 de G/U lorsque G et U ont même 2-rang, dans quelques «bons cas» où $H(G/Q(n))$ et $H(U/Q(n))$ ont les principales propriétés de $H(\boldsymbol{O}(n)/\boldsymbol{Q}(n))$. Pour le polynôme de Poincaré (mod. 2) nous trouverons une expression que nous appellerons la *formule de Hirsch* mod. 2 qui s'écrit exactement comme (10.3) mais où les exposants m_i et q_i sont les degrés augmentés de 1 d'éléments formant des systèmes simples de générateurs de $H(G)$ et $H(U)$ (ou aussi ici les degrés de générateurs de $H(B_G)$ et $H(B_U)$). Dans ce sens (10.2) apparaît déjà comme un cas particulier de la formule de Hirsch mod. 2.

---

[3]) Cela sera démontré dans le travail cité dans la note 1, p. 4.

[4]) Pour d'autres considérations sur les relations qu'il y a entre la torsion de G et ses sous-groupes abéliens maximaux de type $(2, 2, \dots, 2)$ ou plus généralement de type $(p, p, \dots, p)$, voir [3].

Lemme 10.1. *Soient U un sous-groupe fermé de G, ayant même 2-rang que G, et $Q(n)$ un sous-groupe abélien maximal de type $(2, 2, \ldots, 2)$ commun.*

Si $H(G/Q(n))$ et $H(U/Q(n))$ vérifient la formule de Hirsch mod 2 et si $H(U/Q(n))$ est égale à sa sous-algèbre caractéristique, alors $H(G/U)$ vérifie la formule de Hirsch mod. 2.

En effet, d'après les hypothèses faites et (1.1), $U/Q(n)$ est totalement non homologue à zéro dans la fibration $(G/Q(n), G/U, U/Q(n))$, donc

$$P(G/Q(n), t) = P(G/U, t)\, P(U/Q(n), t)$$

et si $P(G/Q(n), t)$ et $P(U/Q(n), t)$ vérifient la formule de Hirsch mod. 2, il en est alors évidemment de même pour $P(G/U, t)$.

11. Les espaces homogènes $\boldsymbol{O}(n)/\boldsymbol{O}(n_1)\times\cdots\times\boldsymbol{O}(n_k)$, $(n_1+\cdots+n_k=n)$.

Notations. (B) est l'idéal engendré dans une algèbre A par une partie B de A.

Si A est une algèbre graduée par des degrés $\geqq 0$, A^+ désigne la sous-algèbre formée par les éléments de A dont le degré est >0.

$S(x_1, \ldots, x_n)$: algèbre des fonctions symétriques en $x_1, \ldots, x_n$, à coefficients dans $\boldsymbol{Z}_2$.

Enfin nous posons

$$\boldsymbol{G}(n_1, \ldots, n_k) = \boldsymbol{O}(n)/\boldsymbol{O}(n_1)\times\cdots\times\boldsymbol{O}(n_k) \;, \qquad (n_1+\cdots+n_k=n) \;.$$

Cet espace est la variété dont l'élément générateur est formé de $k-1$ sous-espaces emboîtés de R^n, de dimensions respectives

$$n_1, n_1+n_2, \ldots, n_1+\cdots+n_{k-1} \;.$$

En particulier $\boldsymbol{G}(n_1, n_2) = \boldsymbol{G}_{n,n_1}$. Parmi ces variétés figurent aussi les variétés de Stiefel de systèmes de droites non orientées dont il a été question à la fin du No 5, en effet, $\boldsymbol{O}(1)$ est isomorphe à $\boldsymbol{Z}_2$ et

$$\boldsymbol{V}^*_{m,n} = \boldsymbol{V}_{m,n}/(\boldsymbol{Z}_2)^n = \boldsymbol{O}(n+m)/(\boldsymbol{O}(1))^n\times\boldsymbol{O}(m) \;.$$

Théorème 11.1. *$\varrho^*(\boldsymbol{O}(n_1)\times\cdots\times\boldsymbol{O}(n_k), \boldsymbol{O}(n))$ est biunivoque,*

$$H(\boldsymbol{G}(n_1, \ldots, n_k))$$

est égale à sa sous-algèbre caractéristique, est le quotient de $H(B_{\boldsymbol{O}(n_1)\times\cdots\times\boldsymbol{O}(n_k)})$ par l'idéal qu'y engendrent les éléments de degrés >0 de l'image de

$$\varrho^*\big(\boldsymbol{O}(n_1)\times\cdots\times\boldsymbol{O}(n_k),\ \boldsymbol{O}(n)\big)\ ,$$

donc est isomorphe au quotient de

$$S(x_1,\ldots,x_{n_1})\otimes S(x_{n_1+1},\ldots,x_{n_1+n_2})\otimes\ldots\otimes S(x_{n-n_k+1},\ldots,x_n)$$

par $\big(S^+(x_1,\ldots,x_n)\big)$. *Son polynôme de Poincaré mod 2 est*

$$P\big(\boldsymbol{G}(n_1,\ldots,n_k,t)\big)=\frac{(1-t)(1-t^2)\ldots(1-t^{n-1})(1-t^n)}{\Pi_{i=1}^{i=k}(1-t)(1-t^2)\ldots(1-t^{n_i})}$$

Ici groupe et sous-groupe ont un 2-rang égal à n, l'espace

$$\boldsymbol{O}(n_1)\times\cdots\times\boldsymbol{O}(n_k)/\boldsymbol{Q}(n)$$

est le produit des espaces $\boldsymbol{F}_{n_i}=\boldsymbol{O}(n_i)/\boldsymbol{Q}(n_i)$. Son algèbre de cohomologie mod 2 et celle de $\boldsymbol{F}_n=\boldsymbol{O}(n)/\boldsymbol{Q}(n)$ vérifient donc la formule de Hirsch mod 2 et sont égales à leurs sous-algèbres caractéristiques (Proposition 4.1 et remarque au Théorème 5.1), et le Lemme 10.1 donne le polynôme de Poincaré annoncé. Utilisant ensuite le Théorème 5.1 on voit que

$$P\big(\boldsymbol{G}(n_1,\ldots,n_k),t\big)\cdot P(B_{\boldsymbol{O}(n)},t)=P(B_{\boldsymbol{O}(n_1)\times\cdots\times\boldsymbol{O}(n_k)},t)\ ;$$

par conséquent l'algèbre spectrale de la fibration

$$\big(B_{\boldsymbol{O}(n_1)\times\cdots\times\boldsymbol{O}(n_k)},\ B_{\boldsymbol{O}(n)},\ \boldsymbol{G}(n_1,\ldots,n_k)\big)$$

est triviale (Proposition 2.1), d'où les autres assertions du théorème, compte tenu de (1.2) et de (2.3).

Le cas particulier des grassmanniennes. Nous voulons déduire du Théorème 11.1 appliqué au cas particulier $k=2$ quelques propriétés cohomologiques connues des grassmanniennes.

Les grassmanniennes $\boldsymbol{G}_{m,n}$ et $\boldsymbol{G}_{m,m-n}$ sont homéomorphes et $H(G_{m,n})$ a deux systèmes de classes caractéristiques réduites $w^0=1,\ w^1,\ldots,w^n$ et $\overline{w}^0=1,\ \overline{w}^1,\ldots,\overline{w}^{m-n}$ suivant que l'on considère $G_{m,n}$ comme base de la fibration $\big(\boldsymbol{V}_{m,n},\ \boldsymbol{G}_{m,n},\ \boldsymbol{O}(n)\big)$ ou de la fibration

$$\big(\boldsymbol{V}_{m,m-n},\ \boldsymbol{G}_{m,m-n},\ \boldsymbol{O}(m-n)\big)\ .$$

Nous convenons de poser $w^j=0$ $(j>n)$, $\overline{w}^k=0$ $(k>m-n)$.

Proposition 11.1.[5]) *Les classes w^i et $\overline{w}^j$ sont liées par les relations*

$$\textstyle\sum_{i+j=k} w^i\,\overline{w}^j=0\qquad(k=1,2,\ldots)$$

---

[5]) Cette proposition est due à S. S. Chern [4], [5], p. 90.

chacun des systèmes $w^0, \ldots, w^n$ *et* $\bar{w}^0, \ldots, \bar{w}^{m-n}$ *engendre multiplicativement* $H(\boldsymbol{G}_{m,n})$.

Soient $\sigma^j_{(1)}$ le j-ème fonction symétrique élémentaire en $x_1, \ldots, x_n$, avec la convention $\sigma^j_{(1)} = 0$ si $j > n$, et de même $\sigma_2^{(j)}$, resp. σ^j, la j-ème fonction symétrique élémentaire en $x_{n+1}, \ldots, x_m$, resp. en $x_1, \ldots, x_m$. Les classes w^j et $\bar{w}^j$ sont les images de $\sigma^j_{(1)} \otimes 1$ et $1 \otimes \sigma^j_{(2)}$ par l'homomorphisme canonique de

$$S(x_1, \ldots, x_n) \otimes S(x_{n+1}, \ldots, x_m)$$

sur $H(\boldsymbol{G}_{m,n})$, qui n'est autre que l'homomorphisme caractéristique de la fibration $(\boldsymbol{O}(m), \boldsymbol{G}_{m,n}, \boldsymbol{O}(n) \times \boldsymbol{O}(m-n))$, (vu (1.2) et le Théorème 5.1). Comme $S^+(x_1, \ldots, x_n)$ fait partie du noyau de cet homomorphisme (Théorème 11.1), les relations annoncées résultent par passage au quotient des identités

$$\sigma^k = \sum_{i+j=k} \sigma^i_{(1)} \otimes \sigma^j_{(2)} \ .$$

Les éléments $\sigma^j_{(1)} \otimes 1$ et $1 \otimes \sigma^j_{(2)}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ engendrent évidemment $S(x_1, \ldots, x_n) \otimes S(x_{n+1}, \ldots, x_m)$ leurs images (w^i) et $(\bar{w}^j)$ engendrent donc $H(\boldsymbol{G}_{m,n})$; mais les relations que nous venons d'établir entre ces classes montrent que w^j, resp. $\bar{w}^j$, est un polynôme en $\bar{w}^0, \ldots, \bar{w}^{m-n}$, resp. en $w^0, \ldots, w^n$ $(j = 1, 2, \ldots)$; ainsi chacun des systèmes (w^j) et $(\bar{w}^j)$ engendre $H(\boldsymbol{G}_{m,n})$.

12. Les espaces homogènes $\boldsymbol{U}(n)/\boldsymbol{Q}(n)$ et $\boldsymbol{U}(n)/\boldsymbol{O}(n)$

On sait que le groupe unitaire de l'espace de n variables complexes, soit $\boldsymbol{U}(n)$, est sans torsion, que $H(\boldsymbol{U}(n))$ est une algèbre extérieure à générateurs de degrés $1, 3, 5, \ldots, 2n-1$ (voir par exemple [2], Proposition 9.1), et que $H(B_{\boldsymbol{U}(n)})$ est une algèbre de polynômes à n variables de degrés $2, 4, 6, \ldots, 2n$ ([2], Théorème 19.1).

Les sous-groupes abéliens maximaux de type $(2, 2, \ldots, 2)$ de $\boldsymbol{U}(n)$ sont visiblement conjugués au sous-groupe des matrices diagonales, ils sont donc contenus dans des tores maximaux, le rang et le 2-rang de $\boldsymbol{U}(n)$ sont égaux à n [6]).

Lemme 12.1. $\varrho^*(\boldsymbol{Q}(n), \boldsymbol{U}(n))$ *est biunivoque, son image est* $S(x_1^2, \ldots, x_n^2)$. Soit $\boldsymbol{T}^n$ un tore contenant $\boldsymbol{Q}(n)$, l'homomorphisme $\varrho^*(\boldsymbol{Q}(n), \boldsymbol{T}^n)$ est

[6]) Plus généralement, si G est sans 2-torsion, son 2-rang est égal à son rang au sens usuel ([3], Théorème 2). Cependant nous ignorons si dans ce cas un sous-groupe abélien de type $(2, 2, \ldots, 2)$ est toujours contenu dans un tore maximal.

évidemment le produit tensoriel de n homomorphismes $\varrho^*(\boldsymbol{Q}(1), \boldsymbol{T}^1)$; ce dernier se calcule aisément. Posons

$$H(B_{T^1}) = Z_2[y] \quad (Dy = 2) \ , \qquad H(B_{Q(1)}) = Z_2[x] \quad (Dx = 1) \ ,$$

(rappelons que l'on peut prendre comme espace classifiant pour T^1 un espace projectif complexe). L'espace $\boldsymbol{T}^1/\boldsymbol{Q}(1)$ est un cercle, donc

$$P(B_{T^1}, t) \cdot P(\boldsymbol{T}^1/\boldsymbol{Q}(1), t) = P(\boldsymbol{Q}(1), t)$$

et l'algèbre spectrale de $(B_{Q(1)}, B_{T^1}, \boldsymbol{T}^1/Q(1), \varrho(\boldsymbol{Q}(1), \boldsymbol{T}^1)$ est triviale (Proposition 2.1) ; ainsi $\varrho^*(\boldsymbol{Q}(1), \boldsymbol{T}^1)$ est biunivoque et son image est forcément $Z_2[x^2]$, ce qui montre que $\varrho^*(\boldsymbol{Q}(n), \boldsymbol{T}^n)$ est biunivoque et a $Z_2[x_1^2, \ldots, x_n^2]$ comme image.

D'autre part on déduit des inclusions $\boldsymbol{Q}(n) \subset \boldsymbol{T}^n \subset \boldsymbol{U}(n)$ que

$$\varrho^*(\boldsymbol{Q}(n), \boldsymbol{U}(n)) = \varrho^*(\boldsymbol{Q}(n), \boldsymbol{T}^n) \circ \varrho^*(\boldsymbol{T}^n, \boldsymbol{U}(n)) \ ;$$

l'homomorphisme $\varrho^*(\boldsymbol{T}^n, \boldsymbol{U}(n))$ est biunivoque et son image dans $H(B_{T^n}) = Z_2[y_1, \ldots, y_n]$ $(Dy_i = 2)$, est $S(y_1, \ldots, y_n)$, ([2], Proposition 29.2, Exemple 1), d'où le lemme.

Remarques. 1) Plus généralement *si* $Q(n)$ *est contenu dans un tore maximal* T^n *de* G, *et si* G *et* G/T^n *sont sans 2-torsion,* $\varrho^*(Q(n), G)$ *est biunivoque.* En effet, $\varrho^*(Q(n), G) = \varrho^*(Q(n), T^n) \cdot \varrho^*(T, G)$, et $\varrho^*(T^n, G)$ est biunivoque d'après la Proposition 29.2 de [2].

2) Ici le quotient $N(\boldsymbol{Q}(n))/\boldsymbol{Q}(n)$ par $\boldsymbol{Q}(n)$ du normalisateur de $\boldsymbol{Q}(n)$ dans $\boldsymbol{U}(n)$ est de nouveau isomorphe au groupe des permutations de n objets. L'image de $\varrho^*(\boldsymbol{Q}(n), \boldsymbol{U}(n))$ ne contient donc pas tous les invariants de $N(\boldsymbol{Q}(n))/\boldsymbol{Q}(n)$, qui forment $S(x_1, \ldots, x_n)$; sur ce point, l'analogie avec la cohomologie réelle (cf. No 10) n'a plus lieu. Bien entendu, dans tous les cas, l'image de $\varrho^*(Q(n), G)$ est contenue dans les invariants de $N(Q(n))/Q(n)$.

Proposition 12.1. *$H(\boldsymbol{U}(n)/\boldsymbol{Q}(n), Z_2)$ est égale à sa sous-algèbre caractéristique ; elle est isomorphe au quotient de $H(B_{Q(n)}, Z_2)$ par l'idéal qu'y engendrent les éléments de degrés > 0 contenus dans l'image de $\varrho^*(\boldsymbol{Q}(n), \boldsymbol{U}(n))$, c'est à dire à $Z_2[x_1, \ldots, x_n]/(S^+(x_1, \ldots, x_n))$ $(Dx_i = 1)$. Son polynôme de Poincaré mod. 2 est*

$$P(\boldsymbol{U}(n)/\boldsymbol{Q}(n), t) = (1 - t^2)(1 - t^4) \ldots (1 - t^{2n})(1 - t)^{-n} \ .$$

Pour $n = 1$, cela résulte du fait que T^1/Z_2 est un cercle et que l'algèbre spectrale de $(B_{Z_2}, B_{T^1}, T^1/Z_2)$ est triviale, comme nous l'avons remarqué dans la démonstration du lemme 12.1 ; supposons la proposition établie pour $n-1$ et considérons les inclusions

$$\boldsymbol{U}(n) \supset Z_2 \times \boldsymbol{U}(n-1) \supset \boldsymbol{Q}(n) \quad \text{où} \quad \boldsymbol{U}(n)/Z_2 \times \boldsymbol{U}(n-1) = \boldsymbol{S}_{2n-1}/Z_2 = \boldsymbol{P}_{2n-1}$$

il existe donc une fibration $\big(\boldsymbol{U}(n)/\boldsymbol{Q}(n), \boldsymbol{P}_{2n-1}, \boldsymbol{U}(n-1)/\boldsymbol{Q}(n-1)\big)$ dans laquelle la fibre est totalement non homologue à zéro mod 2, vu l'hypothèse d'induction et (1.1), d'où

$$\begin{aligned} P\big(\boldsymbol{U}(n)/\boldsymbol{Q}(n), t\big) &= P(\boldsymbol{P}_{2n-1}, t)\, P\big(\boldsymbol{U}(n-1)/\boldsymbol{Q}(n-1), t\big) \\ &= (1-t)^{-n}\, \Pi_{i=1}^{i=n} (1-t^{2i}) \end{aligned}$$

par conséquent

$$P(B_{\boldsymbol{Q}(n)}, t) = P(B_{\boldsymbol{U}(n)}, t) \cdot P\big(\boldsymbol{U}(n)/\boldsymbol{Q}(n), t\big)$$

et l'algèbre spectrale sur Z_2 de $\big(B_{\boldsymbol{Q}(n)}, B_{\boldsymbol{U}(n)}, \boldsymbol{U}(n)/\boldsymbol{Q}(n)\big)$ est triviale ce qui démontre la proposition.

Remarque. Cette démonstration présente une grande analogie avec celle de la Proposition 1.1 ; nous n'avons pas utilisé mais démontré à nouveau le fait que $\varrho_2^*\big(\boldsymbol{Q}(n), \boldsymbol{U}(n)\big)$ est biunivoque (lemme 12.1), mais ce lemme nous a permis de donner explicitement l'image de cet homomorphisme.

Les groupes $\boldsymbol{SU}(n)$ et $\boldsymbol{Sp}(n)$ sont sans torsion, $H\big(\boldsymbol{SU}(n), Z_2\big)$ et $H\big(\boldsymbol{Sp}(n), Z_2\big)$ ont des générateurs de degrés $3, 5, \ldots, 2n-1$, resp. $3, 7, \ldots, 4n-1$ (voir p. ex. [2], Proposition 9.1), $H(B_{\boldsymbol{SU}(n)}, Z_2)$ et $H(B_{\boldsymbol{Sp}(n)}, Z_2)$ sont des algèbres de polynômes à générateurs de degrés $4, 6, \ldots, 2n$, resp. $4, 8, \ldots, 4n$ ([2] Théorème 19.1). Les sous-groupes abéliens maximaux de $\boldsymbol{SU}(n)$ et $\boldsymbol{Sp}(n)$ sont conjugués aux sous-groupes $\boldsymbol{SQ}(n)$ et $\boldsymbol{Q}(n)$ de leurs matrices diagonales, par une démonstration à peu près identique à celle de la Proposition 12.1, et que nous ne reproduirons pas, on obtient :

Proposition 12.2. *$\varrho^*\big(\boldsymbol{SQ}(n), \boldsymbol{SU}(n)\big)$ et $\varrho^*\big(\boldsymbol{Q}(n), \boldsymbol{U}(n)\big)$ sont biunivoques. $H\big(\boldsymbol{SU}(n)/\boldsymbol{SQ}(n)\big)$, resp. $H\big(\boldsymbol{Sp}(n)/\boldsymbol{Q}(n)\big)$, est égale à sa sous-algèbre caractéristique, est le quotient de $H(B_{\boldsymbol{SQ}(n)})$, resp. $H(B_{\boldsymbol{Q}(n)})$, par l'idéal qu'y engendrent les éléments de degré >0 de l'image de $\varrho^*\big(\boldsymbol{SQ}(n), \boldsymbol{SU}(n)\big)$ resp. $\varrho^*\big(\boldsymbol{Q}(n), \boldsymbol{Sp}(n)\big)$. On a*

$$P(\boldsymbol{SU}(n)/\boldsymbol{SQ}(n), t) = (1-t^4)(1-t^6)\ldots(1-t^{2n})(1-t)^{1-n} \ ,$$

$$P(\boldsymbol{Sp}(n)/\boldsymbol{Q}(n), t) = (1-t^4)(1-t^8)\ldots(1-t^{4n})(1-t)^{-n} \ .$$

En fait ce résultat peut encore être précisé. En utilisant le fait que $\varrho^*(\boldsymbol{T}^n, \boldsymbol{Sp}(n))$ est biunivoque et a comme image dans

$$H(B_{T^n}) = Z_2[y_1, \ldots, y_n]$$

l'algèbre $S(y_1^2, \ldots, y_n^2)$ ([2], Proposition 29.2, exemple 2), on montre que

$$H(\boldsymbol{Sp}(n)/\boldsymbol{Q}(n)) = Z_2[x_1, \ldots, x_n]/(S^+(x_1^4, \ldots, x_n^4)) \ .$$

$\boldsymbol{SU}(n)$ est totalement non homologue à zéro dans $\boldsymbol{U}(n)$, donc

$$\varrho^*(\boldsymbol{SU}(n), \boldsymbol{U}(n))$$

est sur ([2], Corollaire à la Proposition 21.3). Cela étant on voit très aisément que si $\boldsymbol{T}^{n-1}$ est un tore maximal de $\boldsymbol{SU}(n)$, on peut écrire $H(B_{T^{n-1}})$ sous la forme $Z_2[y_1, \ldots, y_n]/(y_1 + \cdots + y_n)$ de manière à ce que l'image de $\varrho^*(\boldsymbol{T}^{n-1}, \boldsymbol{SU}(n))$ dans ce quotient soit celle de $S(y_1, \ldots, y_n)$. On en déduit que

$$H(\boldsymbol{SU}(n)/\boldsymbol{SQ}(n)) = Z_2[x_1, \ldots, x_n]/ J \ .$$

J désignant l'idéal engendré par $S^+(x_1^2, \ldots, x_n^2)$ et $x_1 + \cdots + x_n$.

Théorème 12.1. *$\varrho^*(\boldsymbol{O}(n), \boldsymbol{U}(n))$ est biunivoque ; $H(\boldsymbol{U}(n)/\boldsymbol{O}(n))$ est égale à sa sous-algèbre caractéristique, est le quotient de $H(B_{O(n)})$ par l'idéal qu'y engendrent les éléments de degré > 0 de l'image de*

$$\varrho^*(\boldsymbol{O}(n), \boldsymbol{U}(n)) \ ,$$

donc est isomorphe à $S(x_1, \ldots, x_n)/(S^+(x_1^2, \ldots, x_n^2))$. On a

$$P(\boldsymbol{U}(n)/\boldsymbol{O}(n), t) = \Pi_{i=1}^{i=n} (1 - t^{2i})(1 - t^i)^{-1} = \Pi_{i=1}^{i=n} (1 + t^i) \ .$$

On obtient le polynôme de Poincaré en appliquant le lemme 10.1, les Propositions 4.1, 12.1 et la remarque au Théorème 5. On en déduit

$$P(B_{O(n)}, t) = P(B_{U(n)}, t)\, P(\boldsymbol{U}(n)/\boldsymbol{O}(n), t)$$

l'algèbre spectrale de $(B_{O(n)}, B_{U(n)}, \boldsymbol{U}(n)/\boldsymbol{O}(n), \varrho(\boldsymbol{O}(n), \boldsymbol{U}(n)))$ est donc triviale (Proposition 2.1), ce qui établit les autres assertions du théorème.

Remarque. Il est clair que la même démonstration permet de prouver un théorème analogue, et en particulier la formule de Hirsch mod 2, pour les quotients $\boldsymbol{U}(n)/\boldsymbol{O}(n_1) \times \cdots \times \boldsymbol{O}(n_k)$, $(n_1 + \cdots + n_k = n)$ ou même plus généralement pour les quotients

$$\boldsymbol{U}(n)/\boldsymbol{U}(n_1) \times \cdots \times \boldsymbol{U}(n_i) \times \boldsymbol{O}(n_{i+1}) \times \cdots \times \boldsymbol{O}(n_k) \qquad (n_1 + \cdots + n_k = n) \ ,$$

par exemple

$$P(\boldsymbol{U}(n)/\boldsymbol{U}(a)\times\boldsymbol{O}(b),t)=\frac{(1-t^2)(1-t^4)\ldots(1-t^{2n})}{(1-t^2)\ldots(1-t^{2a})(1-t)\ldots(1-t^b)}\,,$$
$$(a+b=n)\ .$$

Cela s'applique aussi à $\boldsymbol{SU}(n)/\boldsymbol{SO}(n)$, quotient de deux groupes dont le 2-rang est égal à $n-1$.

13. Les espaces homogènes $G_2/Q(3)$ et $G_2/SO(4)$

Nous parlerons ici de deux cas où la formule de Hirsch mod 2 est valable, dont l'intérêt est surtout de mettre en jeu un groupe exceptionnel, le groupe $\boldsymbol{G}_2$ des automorphismes des octaves de Cayley, qui est simplement connexe, à 14 paramètres et de rang deux. Cependant, pour ne pas trop allonger, nous nous permettrons d'énoncer plus bas sans démonstration (et sans renvois) quelques propriétés de $\boldsymbol{G}_2$ qui du reste s'obtiennent sans difficulté.

$H(\boldsymbol{G}_2)$ a un système simple de générateurs universellement transgressifs de degrés $3, 5, 6$[2]), par conséquent $H(B_{G_2})$ est une algèbre de polynômes à 3 générateurs de degrés $4, 6, 7$ ([2], Proposition 19.2) et

$$P(B_{G_2},t)=(1-t^4)^{-1}(1-t^6)^{-1}(1-t^7)^{-1}\ . \tag{13.1}$$

$\boldsymbol{G}_2$ contient des sous-groupes isomorphes à $\boldsymbol{SO}(4)$[7]), donc des sous-groupes $Q(3)=(Z_2)^3$ et son 2-rang est $\geqq 3$. On peut de plus voir qu'il est égal à trois[8]), et que les sous-groupes abéliens de type $(2, 2, 2)$ de $\boldsymbol{G}_2$ sont conjugués.

$\boldsymbol{G}_2$ contient également un sous-groupe $\boldsymbol{SU}(3)$ tel que $\boldsymbol{G}_2/\boldsymbol{SU}(3)=\boldsymbol{S}_6$, fibration bien connue, obtenue en faisant agir $\boldsymbol{G}_2$ sur les nombres de Cayley purement imaginaires de norme 1. On trouve de plus aisément un sous-groupe $\boldsymbol{Q}(3)$ abélien de type $(2, 2, 2)$ faisant partie du normalisateur de $\boldsymbol{SU}(3)$ tel que $\boldsymbol{Q}(3)\cap\boldsymbol{SU}(3)\cong\boldsymbol{SQ}(3)\cong Z_2+Z_2$; soit $\boldsymbol{K}$ le sous-groupe engendré par $\boldsymbol{Q}(3)$ et $\boldsymbol{SU}(3)$; ce dernier y est invariant et $\boldsymbol{K}/\boldsymbol{SU}(3)\cong Z_2$; $\boldsymbol{K}/\boldsymbol{Q}(3)$ est homéomorphe à $\boldsymbol{SU}(3)/\boldsymbol{SQ}(3)$.

Théorème 13.1. *$\varrho^*(\boldsymbol{Q}(3), \boldsymbol{G}_2)$ et $\varrho^*(\boldsymbol{SO}(4), \boldsymbol{G}_2)$ sont biunivoques, $H(\boldsymbol{G}_2/\boldsymbol{Q}(3))$, resp. $H(\boldsymbol{G}_2/\boldsymbol{SO}(4))$ est égale à sa sous-algèbre caractéristique, est le quotient de $H(B_{Q(3)})$, resp. $H(B_{SO(4)})$, par l'idéal qu'y engendrent les éléments de degré >0 de l'image de $\varrho^*(\boldsymbol{Q}(3), \boldsymbol{G}_2)$, resp. $\varrho^*(\boldsymbol{SO}(4), \boldsymbol{G}_2)$. On a*

---

[7]) A. Borel-J. de Siebenthal, Comment. Math. Helv. 23 (1949—1950) 200—221.

[8]) Le fait que le 2-rang de G_2 est $\leqq 3$ se déduit des résultats relatifs à $H(G_2)$ précités et du Corollaire à la Proposition 6 de [3], travail auquel nous renvoyons aussi pour un exemple explicite de sous-groupe abélien de type $(2, 2, 2)$.

$$P(\boldsymbol{G}_2/\boldsymbol{Q}(3), t) = (1-t^4)(1-t^6)(1-t^7)(1-t)^{-3}$$

$$P(\boldsymbol{G}_2/\boldsymbol{SO}(4), t) = \frac{(1-t^4)(1-t^6)(1-t^7)}{(1-t^2)(1-t^3)(1-t^4)} = 1 + t^2 + t^3 + \cdots + t^5 + t^6 + t^8 .$$

Nous étudions tout d'abord l'abord l'algèbre spectrale de la fibration $(\boldsymbol{G}_2/\boldsymbol{Q}(3), \boldsymbol{G}_2/\boldsymbol{K}/\boldsymbol{Q}(3))$. L'espace $\boldsymbol{G}_2/\boldsymbol{K}$ est le quotient de $\boldsymbol{G}_2/\boldsymbol{SU}(3) = \boldsymbol{S}_6$ par $\boldsymbol{K}/\boldsymbol{SU}(3) = \boldsymbol{Z}_2$, sa cohomologie est donc celle de l'espace projectif $\boldsymbol{P}_6$. L'espace $\boldsymbol{K}/\boldsymbol{Q}(3)$ est homéomorphe à $\boldsymbol{SU}(3)/\boldsymbol{SQ}(3)$, donc, vu la Proposition 12.2,

$$H^1(\boldsymbol{K}/\boldsymbol{G}(3)) = \boldsymbol{Z}_2 + \boldsymbol{Z}_2 \quad \textit{et engendre} \quad H(\boldsymbol{K}/\boldsymbol{Q}(3)) . \tag{13.2}$$

On en tire :

$$\dim {}^1E_2 = \dim H^1(\boldsymbol{G}_2/\boldsymbol{K}) + \dim H^0(\boldsymbol{G}_2/\boldsymbol{K}, H^1(\boldsymbol{K}/\boldsymbol{Q}(3)) \leqq 3 ,$$

mais $\boldsymbol{Q}(3)$ est isomorphe au groupe fondamental de $\boldsymbol{G}_2/\boldsymbol{Q}(3)$, donc

$$\dim {}^1E_\infty = \dim H^1(\boldsymbol{G}_2/\boldsymbol{Q}(3)) = 3 ;$$

puisque $\dim {}^1E_\infty \leqq \dim {}^1E_2$, il faut que $H^0(\boldsymbol{G}_2/\boldsymbol{K}, H^1(\boldsymbol{K}/\boldsymbol{Q}(3))$ soit isomorphe à $H^1(\boldsymbol{K}/\boldsymbol{Q}(3))$ et formé d'éléments qui sont cocycles pour toutes les différentielles. Ainsi, vu (2.2), l'image de i^* :

$$H(\boldsymbol{G}_2/\boldsymbol{Q}(3)) \to H(\boldsymbol{K}/\boldsymbol{Q}(3)) \quad \text{contient} \quad H^1(\boldsymbol{K}/\boldsymbol{Q}(3)) ,$$

donc tout $H(\boldsymbol{K}/\boldsymbol{Q}(3))$ d'après (13.2) ; $\boldsymbol{K}/\boldsymbol{Q}(3)$ est totalement non homologue à zéro, l'algèbre spectrale est triviale et

$$P(\boldsymbol{G}_2/\boldsymbol{Q}(3), t) = P(\boldsymbol{G}_2/\boldsymbol{K}, t)\, P(\boldsymbol{K}/\boldsymbol{Q}(3), t)$$
$$P(\boldsymbol{G}_2/\boldsymbol{Q}(3), t) = P(\boldsymbol{P}_6, t)\, P(\boldsymbol{SU}(3)/\boldsymbol{SQ}(3), t)$$
$$P(\boldsymbol{G}_2/\boldsymbol{Q}(3), t) = (1-t^7)(1-t)^{-1}(1-t^4)(1-t^6)(1-t)^{-2}$$

ce qui est la formule annoncée ; le polynôme de Poincaré de $\boldsymbol{G}_2/\boldsymbol{SO}(4)$ s'obtient alors en appliquant le lemme 10.1, compte tenu du No 4.

Cela étant, (13.1) et la Proposition 8.1 montrent que

$$P(B_{\boldsymbol{Q}(3)}, t) = P(\boldsymbol{G}_2/\boldsymbol{Q}(3), t) \cdot P(B_{\boldsymbol{G}_2}, t)$$
$$P(B_{\boldsymbol{SO}(4)}, t) = P(\boldsymbol{G}_2/\boldsymbol{SO}(4), t) \cdot P(B_{\boldsymbol{G}_2}, t)$$

les algèbres spectrales des fibrations

$$(B_{\boldsymbol{Q}(3)}, B_{\boldsymbol{G}_2}, \boldsymbol{G}_2/\boldsymbol{Q}(3)) \quad \text{et} \quad (B_{\boldsymbol{SO}(4)}, B_{\boldsymbol{G}_2}, \boldsymbol{G}_2/\boldsymbol{SO}(4))$$

sont donc triviales (Proposition 2.1), d'où le théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] *A. Borel,* Sur la cohomologie des variétés de Stiefel et de certains groupes de Lie, C. R. Acad. Sci. Paris **231** (1950) 943—945.

[2] *A. Borel,* Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts, Ann. Math. (2) **57** (1953) 115—207.

[3] *A. Borel et J.-P. Serre,* Sur certains sous-groupes des groupes de Lie compacts, Comment. Math. Helv. **27** (1953) 128—139.

[4] *S. S. Chern,* On the multiplication in the characteristic ring of a sphere bundle, Ann. Math. (2) **49** (1948) 362—372.

[5] *S. S. Chern,* Topics in differential geometry, Princeton 1951, mimeographed notes.

[6] *C. Ehresmann,* Sur la topologie de certaines variétés algébriques réelles, J. Math. Pur. Appl IXs. **16** (1937) 69—100.

[7] *J. Leray,* L'homologie d'un espace fibré dont la fibre est connexe, Ibid. **29** (1950) 169—213.

[8] *C. Miller,* The topology of the rotation groups, Ann. Math. (2) **57** (1953) 90—114.

[9] *L. S. Pontrjagin,* Characteristic cycles on differentiable manifolds, Rec. Math. Moscou N. S. **21** (1947) 233—284.

[10] *J.-P. Serre,* Homologie singulière des espaces fibrés. Applications, Ann. Math. (2) **54** (1951) 425—505.

[11] *N. Steenrod,* The topology of fibre bundles, Princeton 1951.

[12] *Wu Wen Tsün,* On the product of sphere bundles and the duality theorem mod 2, Ann. Math. (2) **49** (1948) 641—653.

[13] *Wu Wen Tsün,* Les i-carrés dans une variété grassmannienne, C. R. Acad. Sci. Paris **230** (1950) 918—920.

(Reçu le 15 décembre 1952.)