

## Problèmes d'intersections et de points fixes en géométrie hamiltonienne

JEAN-CLAUDE SIKORAV

### Introduction

Soit  $V$  une variété (compacte ou non) munie d'une forme symplectique  $\omega$ . Toute fonction  $H$  sur  $V$  définit un champ hamiltonien  $X_H$  tel que  $i(X_H)\omega = -dH$ . Une isotopie  $(\varphi_t, 0 \leq t \leq 1)$  de  $V$  est dite hamiltonienne si elle s'obtient en intégrant un champ hamiltonien  $X_t$  dépendant du temps. Nous nous intéressons aux deux problèmes suivants.

**PROBLEME 1.** Si  $L$  est une sous-variété lagrangienne fermée de  $V$ , minorer le nombre de points de  $\varphi_1(L) \cap L$ .

**PROBLEME 2.** Si  $V$  est fermée, minorer le nombre de points fixes de  $\varphi_1$ .

Ces problèmes sont liés à un ensemble de conjectures énoncées par V. I. Arnold dans les années 60 (cf. [A1], [A2], [A3], [W2] Lecture 7, [Ch1 et [W4]).

Notons que la diagonale  $\Delta_V$  est une sous-variété lagrangienne de  $(V \times V, \omega \oplus (-\omega))$  et que les points fixes de  $\varphi_1$  sont en bijection avec les points de  $(id \times \varphi_1)(\Delta_V) \cap \Delta_V$ . Comme  $(id \times \varphi_t)$  est une isotopie hamiltonienne, le problème 2 est un cas particulier du problème 1.

On ne sait pas grand-chose sur le problème 1 sans hypothèse supplémentaire; contentons-nous de remarquer que l'intersection peut être rendue vide, par exemple si  $V$  est le plan,  $L$  une courbe et  $(\varphi_t)$  une translation. Nous allons nous limiter au problème local, c'est-à-dire le cas où  $(\varphi_t(L))$  reste dans un voisinage assez petit de  $L$ . D'après [W1], ce voisinage est symplectiquement isomorphe à un voisinage de la section nulle  $L \subset T^*L$ , où le fibré cotangent est muni de la forme symplectique canonique  $\omega_L$ . Changeons de notation et posons  $M = L$ ,  $(V, \omega) = (T^*M, \omega_M)$ . Si  $(\varphi_t)$  est  $C^1$ -petite, alors  $\varphi_1(M)$  est la graphe de la différentielle d'une fonction sur  $M$ ; donc  $\#(\varphi_1(M) \cap M)$  est minoré par  $c(M)$ , nombre minimal de points critiques d'une fonction sur  $M$ ; si l'intersection est transversale, le minorant est  $c_g(M)$ , nombre minimal de points critiques d'une fonction de Morse. La conjecture d'Arnold ([A1], [A2]) pour le problème 2 dit

que le minorant est  $c(V)$ , et  $c_g(V)$  si les points fixes sont non dégénérés (cf. [A1], [A2]).

Notons  $\bar{c}(M)$  (resp.  $\bar{c}_g(M)$ ) le nombre minimal de points critiques d'une fonction (resp. de Morse) définie sur un fibré vectoriel de base  $M$  et coïncidant hors d'un compact avec une forme quadratique non dégénérée.

**THEOREME 1.** *Soient  $M$  une variété fermée et  $(\varphi_t)$  une isotopie hamiltonienne de  $(T^*M, \omega_M)$ . Alors  $\#(\varphi_1(M) \cap M)$  est minoré par  $\bar{c}(M)$ , et par  $\bar{c}_g(M)$  si l'intersection est transversale.*

Ce résultat est prouvé dans [LS] par la méthode des "géodésiques brisées" de M. Chaperon ([Ch2], [Ch3]); nous allons en donner une nouvelle démonstration qui le fait apparaître comme corollaire d'un résultat sur les fonctions génératrices d'immersions lagrangiennes (proposition 1.2). Ce dernier résultat a été annoncé dans [S2] comme corollaire du théorème 1; la preuve directe que nous en donnons ici revient à ne considérer qu'une discontinuité à la fois.

**COMMENTAIRE.** On a  $c(M) \geq CL(M) + 1$ , où  $CL(M)$  est la longueur de produit (cup-length) de l'anneau de cohomologie de  $M$ , et  $\bar{c}_g(M) \geq SB(M)$ , somme des nombres de Betti de  $M$  (cf. [ChZ], p. 90–94). Les minoration de  $\#(\varphi(M) \cap M)$  par  $CL(M) + 1$  ou  $SB(M)$  avaient été prouvées antérieurement à [LS] par H. Hofer [H]. Notons que si  $M$  est une surface fermée, alors  $c(M) = CL(M) + 1$  et  $c_g(M) = SB(M)$ .

Pour le problème 2, nous allons nous limiter à une classe spéciale de variétés symplectiques, que nous appellerons *symétriques à courbure négative ou nulle*, caractérisées par les propriétés suivantes:

(S1) Il existe sur  $V$  une métrique riemannienne de courbure négative ou nulle et une structure presque complexe  $J$  telles que

$$(*) \quad \omega(X, Y) = \langle JX, Y \rangle, \quad \text{si } X \in T_q V \text{ et } Y \in T_q V.$$

Si  $\tilde{V}$  est le revêtement universel et  $q \in \tilde{V}$ , l'application  $\exp_q$  est alors un difféomorphisme de  $T_q(\tilde{V})$  sur  $\tilde{V}$ .

(S2) Pour tout  $q \in \tilde{V}$ , la symétrie par rapport à  $q$ , définie par

$$s_q: \tilde{V} \rightarrow \tilde{V}, \quad s_q(\exp_q(X)) = \exp_q(-X),$$

est un difféomorphisme *symplectique* pour la structure relevée.

**EXEMPLES.** a) Les surfaces de genre  $\geq 1$ : en effet, (S1) est vérifiée avec une courbure constante, et les  $s_q$  sont des isométries, donc conservent l'aire.

b) Plus généralement, les variétés kahlériennes compactes dont le revêtement universel est un espace symétrique hermitien de type non compact.

**THEOREME 2.** *Soit  $(V, \omega)$  une variété symplectique symétrique à courbure négative ou nulle, et soit  $(\varphi_t)$  une isotopie hamiltonienne. Alors le nombre des points fixes de  $\varphi_1$  est minoré par  $c(V)$ , et par  $\tilde{c}_g(V)$  si ces points sont non dégénérés.*

**COROLLAIRE.** *La conjecture d'Arnold est vraie pour les surfaces de genre  $\geq 1$ .*

Une preuve géométrique de ce corollaire a été proposée en 1978 par I. M. Eliachberg [E]. En 1983, le célèbre théorème de C. C. Conley et E. Zehnder [CoZ] prouve la conjecture d'Arnold pour le tore  $T^{2n}$  muni de sa structure standard, en résolvant le problème variationnel associé. Leur méthode a été étendue par A. Floer ([F]) et l'auteur ([S1]) à certaines variétés de courbure négative ou nulle, incluant les surfaces de genre  $\geq 1$ , et par A. Weinstein [W2] au cas où  $V$  est quelconque mais  $(\varphi_t)$  est  $C^0$ -petite; le minorant est  $CL(V) + 1$ , et  $SB(V)$  génériquement. La même méthode est utilisée dans [H]. Enfin, signalons que M. Gromov [Gr2] obtient des résultats sur les problèmes 1 et 2 par une méthode totalement différente: par exemple, si dans le problème 1 on a  $[\omega] | \pi_2(V, L) = 0$ , alors  $\varphi_1(L) \cap L$  n'est pas vide, pourvu que  $V$  satisfasse à certaines conditions très souvent vérifiées dans la pratique.

Nous déduisons le théorème 2 du théorème 1 en prouvant que le revêtement de  $V \times V$  associé à la diagonale est symplectiquement isomorphe à  $T^*V$  (proposition 2.1); je remercie Michèle Audin pour avoir attiré mon attention sur la théorie des feuilletages lagrangiens, qui permet d'en donner une preuve très simple.

Je remercie aussi le rapporteur de [S2] pour avoir suggéré l'existence d'une preuve directe de la proposition 1.2, et François Laudenbach pour les simplifications qu'il y a apportées.

**ADDENDUM.** *Informations données par le rapporteur:*

1) K. Sekigawa et L. Vanhecke (prépublication) ont prouvé que toute variété presque hermitienne où les symétries géodésiques locales préservent la forme de Kähler est nécessairement une variété kahlérienne localement symétrique. Donc les variétés satisfaisant aux hypothèses du théorème 2 sont celles de l'exemple b).

2) L'idée de la proposition 2.1 semble remonter à Weinstein: en tous cas, sa version locale est un cas particulier de la description du voisinage d'une variété lagrangienne quelconque, (cf. [W1]), et J. P. Jacob ([Geom. Dedic. 10 (1981), 223–259]) lui attribue l'idée d'utiliser le milieu de deux points pour le prouver quand les symétries géodésiques sont symplectiques.

### 1.1. Préliminaires. Définitions et notations

Dans cette partie on considère le fibré cotangent  $T^*M$  d'une variété fermée; un point de  $T^*M$  est noté  $(q, p)$ ,  $q \in M$ ,  $p \in T_q^*M$ . Il est muni de la forme de Liouville  $\lambda_M = p \cdot dq$  et de la forme symplectique  $\omega_M = -d\lambda_M$ . On choisit sur  $M$  une métrique riemannienne auxiliaire  $\mu$ , ce qui définit des connexions sur  $TM$  et  $T^*M$ .

A) Pour  $R > 0$ , on note  $G_R$  le groupe des difféomorphismes  $\{\varphi = \varphi_t, \text{ où } (\varphi_t)\}$  est une isotopie hamiltonienne de  $T^*M$  définie par  $(H_t)$  à support dans  $\{\|p\| \leq R\}$ .

**ACTION.** Soit  $\varphi = \varphi_t$  un élément de  $G_R$ , on définit de façon classique une fonction  $A$  sur  $T^*M$ , à support dans  $\{\|p\| \leq R\}$ :

$$A(q, p) = \int_0^1 (p_t \cdot dq_t - H_t dt),$$

l'intégrale étant prise le long de la trajectoire  $(q_t, p_t) = \varphi_t(q, p)$ . Sa différentielle est donnée par

$$dA = \varphi^* \lambda - \lambda = p_1 \cdot dq_1 - p \cdot dq, \quad (q_1, p_1) = \varphi_1(q, p). \quad (1.1.1)$$

Donc  $A$  ne dépend que de  $\varphi_1$  et la dépendance est continue pour les topologies  $C^1$ .

B) Considérons ensuite un fibré vectoriel  $E$  sur  $M$  et une fonction  $S$  définie sur un ouvert de  $E$ .

1) Un point  $e = (q, v)$  de  $E$  est *critique le long de la fibre* si la différentielle  $dS_e$  est dans l'image de  $\pi_e^*: T_1^*M \hookrightarrow T_e^*E$ , où  $\pi$  est la projection de  $E$  sur  $M$ . L'ensemble de ces points est noté  $\Sigma_S$ .

2) On dit que  $S$  est une phase (ou fonction) génératrice si  $dS$  est transverse à  $\pi^*T^*M$ : alors  $\Sigma_S$  est une sous-variété de dimension égale à celle de  $M$ , et l'on définit

$$i_S: \Sigma_S \rightarrow T^*M, \quad i_S(e) = \pi_e^{*-1}(dF_e).$$

D'après [W2] p. 26,  $i_S$  est une immersion lagrangienne, que l'on dit être *engendrée par  $S$* ; cette définition s'étend au cas d'une immersion  $i = i_S \circ \psi$ , où  $\psi$  est un difféomorphisme.

3) Si de plus  $S$  est définie sur  $E$  tout entier et coïncide hors d'un compact avec une forme quadratique non dégénérée, on dit que  $S$  est une phase quadratique. Enfin, si de plus  $E$  est un fibré trivial  $M \times \mathbb{R}^k$  et si la forme quadratique ne

dépend que de la seconde composante, on dit que  $S$  est une *phase quadratique spéciale*.

**EXEMPLE.** La section nulle  $M \subset T^*M$  est engendrée par la phase quadratique spéciale  $S = 0$  sur  $M$ .

**AFFIRMATION.** Si une immersion est engendrée par une phase quadratique, elle l'est aussi par une phase quadratique spéciale. La preuve de cette affirmation est laissée en exercice au lecteur: elle découle aisément de l'existence d'un fibre  $E'$  tel que  $E \oplus E'$  soit trivial.

**PROPRIETE.** Les points critiques d'une phase génératrice  $S$  sont en bijection avec les points de  $\Sigma_S$  où  $\lambda_S$  rencontre la section nulle, les points de Morse correspondant aux intersections transverses. Donc, si  $S$  est une phase quadratique, on a:

$$\#i_S^{-1}(M) \geq \bar{c}(M), \quad \#i_S^{-1}(M) \geq \bar{c}_g(M) \text{ si } i_S \text{ est transverse à } M. \quad (1.1.2)$$

## 1.2. Enoncé du résultat clé

**PROPOSITION.** Soit  $(\varphi_t)$  une isotopie hamiltonienne de  $T^*M$ . Si l'immersion lagrangienne  $i$  dans  $T^*M$  est engendrée par une phase quadratique, alors  $\varphi_1 \circ i$  l'est aussi.

Cette proposition entraîne le théorème 1 car  $M \subset T^*M$  est engendrée par une phase quadratique: donc  $\varphi_1(M)$  aussi, et il suffit d'appliquer (1.1.2).

La démonstration de la proposition repose sur le lemme 1.5, lui-même basé sur la construction suivante, inspirée par [Ch2].

## 1.3. Action avec un saut horizontal

Considérons le fibré  $TM \oplus T^*M$ ; ses éléments seront notés  $(q, x, p)$ , où  $q \in M$ ,  $x \in T_qM$  et  $p \in T_q^*M$ . Il est muni d'une forme quadratique non dégénérée  $S_0(q, x, p) = p \cdot x$ .

Fixons  $R > 0$ , et soit  $\varphi \in G_R$ , d'action  $A$ .

Supposons d'abord que  $M$  est le tore  $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ , d'où  $TM = M \times \mathbb{R}^n$ ,  $T^*M = M \times (\mathbb{R}^n)^*$ . On définit alors  $A_+(q, x, p) = A(q + x, p)$ , d'où, d'après (1.1.1),

$$dA_+ = -p \cdot dq - p \cdot dx + p' \cdot dq', \quad (q', p') = \varphi(q + x, p).$$

Posons  $F = S_0 + A_+$ . Comme  $dS_0 = p \cdot dx + x \cdot dp$ , il vient

$$dF = -p \cdot dq + x \cdot dp + p' \cdot dq'.$$

Dans le cas général, on cherche une formule analogue avec

$$A_+(q, x, p) = A(q_+, p_+), \quad q_+ = \exp_q(x), p_+ \in T_{q_+}^*M, \\ (q', p') = \varphi(q_+, p_+).$$

La connexion permet de donner un sens à  $Dx$ ,  $Dp$ , et l'on a  $d(p \cdot x) = p \cdot Dx + x \cdot Dp$ ; elle permet aussi d'écrire, en posant  $E(q, x) = \exp_q(x)$ ,

$$dq_+ = DE/\partial q \cdot dq + \partial E/\partial x \cdot Dx,$$

d'où

$$dA_+ = [{}'(DE/\partial q)(p_+)] \cdot dq - [{}'(\partial E/\partial x)(p_+)] \cdot Dx + p' \cdot dq'.$$

Soit  $r$  le rayon d'injectivité; alors si  $\|x\| < r$ ,  $\partial E/\partial x$  est inversible. Si l'on pose:

$$p_+ = ({}'(\partial E/\partial x))^{-1}(p), \\ y = {}'(DE/\partial q)(p_+) \in T_q^*M,$$

on obtient la formule cherchée pour  $F = S_0 + A_+$ :

$$dF = -y \cdot dq + x \cdot Dp + p' \cdot dq', \quad \|x\| < r. \tag{1.3.1}$$

**PROPRIÉTÉS.** a) Si  $\|p\|$  est assez grand, alors  $q' = \exp_q(x)$ .

b) Si  $x = 0$ , alors  $y = p$ .

Ensuite, on choisit  $\rho: \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$  telle que  $\rho(t) = 1$  si  $t \leq 1$ ,  $\rho(t) = 0$  si  $t \geq 2$ , et l'on pose

$$S(q, x, p) = p \cdot x + \rho(4 \|x\|/r)A_+(q, x, p) \quad \text{si } \|x\| \leq r/2, \\ = p \cdot x \quad \text{si } \|x\| > r/2.$$

Il est clair que  $S$  est lisse et coïncide avec  $S_0$  hors d'un compact. De plus, si  $\|x\| \leq r/4$ , alors  $S$  coïncide avec  $F$ .

**1.4. LEMME** *Si  $\varphi$  est assez  $C^1$ -proche de l'identité de  $G_R$ , les propriétés suivantes sont vérifiées.*

a) *Si  $\|x\| \leq r/2$ , alors les variables  $(q, p, q')$  sont indépendantes, c'est-à-dire*

que l'égalité

$$\alpha \cdot dq + v \cdot Dp + \alpha' \cdot dq' = 0, \quad \alpha \in T_q^*M, \quad v \in T_qM, \quad \alpha' \in T_{q'}^*M,$$

entraîne  $\alpha = 0$ ,  $v = 0$  et  $\alpha' = 0$ .

b) Si  $\|x\| \leq r/2$ , alors  $|d(q, q') - \|x\|| \leq r/32$ .

c) Si  $x \neq 0$ , alors  $(q, x, p)$  n'est pas critique le long de la fibre pour  $S$ .

*Démonstration.* a) Si  $\varphi = id$ , on a  $q' = \exp_q(x) = E(q, x)$ , donc a) est vérifiée puisque  $\partial E/\partial x$  est inversible. Comme on a aussi  $q' = \exp_q(x)$  si  $\|p\| > R$ , par compacité la propriété a) est ouverte pour la topologie  $C^1$  sur les applications  $q'$ : d'où le résultat puisque la dépendance de  $q'$  envers  $\varphi$  est continue pour les topologies  $C^1$ .

b) C'est évident puisque  $q' = \pi \circ \varphi(\exp_q(x), p_+)$ :  $C^0$ -proche suffit.

c) Si  $\varphi = id$ , on a  $S = S_0$  donc c) est vérifiée. Supposant a) vérifiée, on peut se restreindre au compact  $\{r/4 \leq \|x\| \leq r/2, \|p\| \leq R\}$ : d'où le résultat puisque  $S$  dépend continûment de  $\varphi$  pour les topologies  $C^1$ .

Pour la suite, notons  $U_R$  un  $C^1$ -voisinage de l'identité dans  $G_R$  où les propriétés du lemme 1.4 sont vérifiées.

**1.5. LEMME.** Soit  $\varphi \in U_R$ : si l'immersion lagrangienne  $i$  dans  $T^*M$  est engendrée par une phase quadratique, alors  $\varphi^{-1} \circ i$  l'est aussi.

*Démonstration.* On peut supposer  $i = i_s$ , où  $s$  est une phase quadratique spéciale, définie sur  $E = M \times \mathbb{R}^k$  et vérifiant  $s(q, v) = Q(v)$  hors d'un compact.

Nous allons montrer que  $\varphi^{-1} \circ i_s$  est engendrée par une phase  $s'$  sur  $TM \oplus T^*M \oplus E$  coïncidant avec  $-S_0 \oplus Q$  hors d'un compact.

Posons d'abord

$$G(q, x, p, v) = -S(q, x, p) + s(q', v), \quad \|x\| < r/4. \quad (1.5.1)$$

Notons que le premier argument de  $s$  est le  $q'$  défini en 1.3. De la formule (1.3.1) on déduit

$$dG = y \cdot dq - x \cdot Dp + (\partial/\partial q')(s(q', v)) - p' \cdot dq' + \partial s/\partial v(q', v) \cdot dv.$$

Cherchons les points critiques le long des fibres: comme  $(q, p, q', v)$  sont des variables indépendantes, un tel point est caractérisé par

$$x = 0, \quad p' = (\partial/\partial q')(s(q, v)), \quad \partial s/\partial v(q', v) = 0. \quad (1.5.2)$$

Or, si  $x = 0$ , on a  $(q', p') = \varphi(q, p)$ ; donc ceci équivaut à

$$x = 0, \quad (q', v) \in \Sigma_s, \quad (q, p) = \varphi^{-1} \circ i_s(q', v).$$

On en déduit aisément l'indépendance linéaire en un tel point des différentielles  $Dx$ ,  $D(p' - \partial s / \partial q')$ ,  $d(\partial s / \partial v)$ : donc les équations (1.5.2) sont de rang maximal et  $(q, 0, p, v) \mapsto (q', v)$  définit un difféomorphisme  $\psi$  de  $\Sigma_G$  sur  $\Sigma_s$ . De plus, comme  $y = p$ , on vérifie  $i_G = \varphi^{-1} \circ i_s \circ \psi$ : donc  $\varphi^{-1} \circ i_s$  est engendrée par  $G$ .

Ensuite, soient  $K$  et  $L$  assez grands pour que ( $\|p\| \geq K \Rightarrow q' = \exp_q(x)$  et  $S(q, x, p) = p \cdot x$ ), et ( $\|v\| \geq L \Rightarrow s(q, v) = Q(v)$ ). Choisisant  $\rho: \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$  telle que  $\rho(t) = 1$  si  $t \leq 1$ ,  $\rho(t) = 0$  si  $t \geq 2$ , on pose

$$\begin{aligned} s'(q, x, p, v') &= -S(q, x, p) + Q(v) + [\rho(16d(q, q')/r)\rho(\|p\|/K) \\ &\quad \times (s(q', v) - Q(v))] \quad \text{si } \|x\| \leq r/4 \text{ et } \|v\| \leq L, \\ &= -S(q, x, p) + Q(v) \quad \text{si } \|x\| > r/4 \text{ et } \|v\| \leq L, \\ &= -p \cdot x + Q(v) + \rho(\|v\|/L) \\ &\quad \times (p \cdot x - S(q, x, p)) \quad \text{si } \|v\| > L. \end{aligned}$$

COMMENTAIRE. La formule naturelle pour rendre  $s'$  quadratique hors d'un compact utilise  $\rho(\|x\|/C)$  plutôt que  $\rho(d(q, q')/C)$ ; mais il se présente alors des difficultés pour vérifier qu'il n'y a pas de points parasites dans  $\Sigma_s$ .

Il est clair que  $s'$  coïncide avec  $-S_0 \oplus Q$  hors d'un compact. De plus en utilisant ( $\|d(q, q') - \|x\|\| \leq r/32$ ), on vérifie que  $s'$  est lisse et coïncide avec  $G$  sur  $B = \{\|x\| \leq r/32, \|p\| \leq K \text{ et } \|v\| \leq L\}$ . Enfin,  $\Sigma_G$  est contenu dans  $B$  donc, pour prouver le lemme, il suffit de voir que pour  $K$  et  $L$  assez grands  $\Sigma_s'$  est aussi contenu dans  $B$ .

1) Si  $\|x\| \leq r/4$  et  $\|v\| \leq L$ , alors, en dérivant à  $(q, q', v)$  constant, on a

$$\|\partial s' / \partial p\| \geq \|x\| - \sup_t |\rho'(t)| \cdot \sup(q, v) |s(q, v) - Q(v)| / K.$$

Donc, si  $K$  est assez grand, cela ne peut s'annuler que si  $\|x\| \leq r/32$ . Si  $\|p\| \leq K$ , on est dans  $B$ ; sinon on a

$$s'(q, x, p, v) = -p \cdot x + Q(v) + \rho(\|p\|/K)(s(E(q, x), v) - Q(v)),$$

d'où, en dérivant à  $(q, p, v)$  constant,

$$\begin{aligned} \|\partial s' / \partial x\| &\geq \|p\| - \|\partial s / \partial q\| \cdot \|\partial E / \partial x\| \\ &\geq K - C(\mu) \sup(q, v) \|(\partial / \partial q)(s(q, v))\|, \end{aligned}$$

donc  $\partial s' / \partial x \neq 0$  pour  $K$  assez grand.

2) Si  $\|x\| > r/4$  et  $\|v\| \leq L$ , alors à  $(q, v)$  constant on a

$$\partial s' / \partial(x, p) = -\partial S / \partial(x, p) \neq 0.$$

3) Si  $\|v\| > L$ , alors à  $(q, x, p)$  constant on a

$$\|\partial s' / \partial v\| \geq \|\partial Q / \partial v\| - \sup_t |\rho'(t)| \cdot \sup_{TM \oplus T^*M} |S - S_0|,$$

donc  $\partial s' / \partial v \neq 0$  pour  $L$  assez grand: ceci achève la preuve de  $\Sigma_v \subset B$ , donc du lemme 1.5.

### 1.6. Démonstration de la proposition 1.2.

Soit  $R$  assez grand pour que  $\bigcup_i \varphi_i(i(L))$  soit contenu dans  $\{\|p\| < R\}$ : alors on peut supposer que  $(\varphi_i)$  est un chemin dans  $G_R$ . Fixons un entier  $N \geq 1$  et posons

$$\psi_k = \varphi_{k/N} \circ \varphi_{(k-1)/N}^{-1}, \quad k = 1, \dots, N.$$

Si  $N$  est assez grand, tous les  $\psi_k^{-1}$  seront dans  $U_R$ , donc le lemme 1.4 implique que  $\psi_k \circ \dots \circ \psi_1 \circ i$  est engendrée par une phase quadratique pour  $k = 1, \dots, N$ : d'où le résultat puisque  $\psi_N \circ \dots \circ \psi_1 = \varphi_1$ .

**1.7. Remarque.** En introduisant un paramètre  $t \in [0, 1]$  dans les constructions précédentes, et en passant à un fibré trivial comme dans l'affirmation de 1.1, on peut préciser la proposition 1.2 de la façon suivante.

**PROPOSITION.** Soit  $(\varphi_t)$  une isotopie hamiltonienne de  $T^*M$ , et soit  $i$  une immersion engendrée par la phase quadratique spéciale  $s$  définie sur  $M \times \mathbb{R}^k$ . Alors pour  $N$  assez grand, il existe un chemin  $(S_t, 0 \leq t \leq 1)$  de fonctions définies sur  $M \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{2N}$ , avec les propriétés suivantes:

- $S_0(q, v, w) = s(q, v) + Q(w)$ , où  $Q$  est une forme quadratique sur  $\mathbb{R}^{2N}$  de signature  $(N, N)$ ;
- $S_t = S_0$  hors d'un compact;
- $S_t$  est une phase génératrice pour  $\varphi_t \circ i$ .

**2.** Dans cette partie,  $(V, \omega)$  est une variété symplectique symétrique à courbure négative ou nulle. On note  $\overline{V \times V}$  le revêtement de  $V \times V$  associé à la diagonale: il est aussi défini comme le quotient de  $\tilde{V} \times \tilde{V}$  pour l'action diagonale de  $\pi_1 V$ . On munit  $\overline{V \times V}$  de la métrique somme et de la forme symplectique  $\omega \oplus (-\omega)$ , d'où sur  $\overline{V \times V}$  une métrique et une forme symplectique notée  $\Omega$ . On note  $s: V \rightarrow \overline{V \times V}$  le plongement relevé du plongement diagonal: il est clairement lagrangien.

**2.1. PROPOSITION.** *Le plongement  $s$  se prolonge en un difféomorphisme symplectique  $\chi$  de  $(T^*V, \omega_V)$  sur  $(\overline{V \times V}, \Omega)$ .*

**Preuve du théorème 2 modulo la proposition 2.1.**

L'isotopie  $(id \times \varphi_t)$  de  $V \times V$  se relève de façon unique en une isotopie  $(\psi_t)$  de  $\overline{V \times V}$ , d'où l'on déduit une isotopie hamiltonienne de  $T^*V$ ,  $(\Phi_t) = (\chi^{-1} \circ \psi_t \circ \chi)$ . Il y a alors une bijection entre  $\Phi_1(V) \cap V$  et  $\Psi_1(s(V)) \cap s(V)$ , puis entre cet ensemble et l'ensemble des points fixes  $q$  de  $\varphi_1$  tels que le lacet  $(\varphi_t(q), 0 \leq t \leq 1)$  soit homotope à zéro; de plus, les intersections transverses correspondent aux points fixes non dégénérés. On en déduit  $\#Fix(\varphi_1) \geq (\Phi_1(V) \cap V)$ , et il suffit alors d'appliquer le Théorème 1.

*Démonstration de la proposition 2.1.* Comme deux points de  $\overline{V \times V}$  sont joints par une géodésique unique, on peut définir leur milieu, ce qui donne une application  $\tilde{\rho}$  de  $\overline{V \times V}$  sur  $\overline{V}$ . Cette application passe au quotient et définit une submersion  $\rho$  de  $\overline{V \times V}$  sur  $V$ . Soit  $q \in V$ , et  $\tilde{q} \in \overline{V}$  un relevé; alors la fibre  $F_{\tilde{q}} = \tilde{\rho}^{-1}(\tilde{q})$  est l'image de  $\overline{V}$  par le plongement  $id \times s_{\tilde{q}}$ , et le passage au quotient induit un difféomorphisme de  $F_{\tilde{q}}$  sur  $F_q = \rho^{-1}(q)$ . De plus, la propriété (S2) dit que  $F_{\tilde{q}}$  est lagrangienne, donc aussi  $F_q$ . On peut donc appliquer au feuilletage correspondant la théorie de J. Duistermaat [Du] (voir aussi [GuS], p. 352–355) généralisant les variables action-angle; nous suivrons la version donnée par T. Delzant [De] dans sa thèse (p. 22–26).

Soit  $v$  dans  $T_q^*V$  et soit  $e$  dans  $F_q$ ; alors  $\rho_e^*(v) \in T_e^*(\overline{V \times V})$  est orthogonal à  $T_e F_q$ , donc, comme  $F_q$  est lagrangienne, le vecteur  $X \in T_e(V \times V)$  défini par  $i_X \Omega = \rho_e^*(v)$  est tangent à  $F_q$ . On définit ainsi un champ de vecteurs  $\hat{v}$  sur  $F_q$ , partout non nul puisque  $\rho$  est une submersion. Si  $v$  est la valeur en  $q$  d'une 1-forme  $\alpha$  sur  $M$ , alors  $\hat{v}$  est la restriction d'un champ  $X_\alpha$  tangent aux fibres; si  $\alpha = df$ , il s'agit du champ hamiltonien de  $-f \circ \rho$ .

**PROPRIÉTÉS.** a) Si  $v_1$  et  $v_2$  sont dans  $T_q^*$ , alors  $\hat{v}_1$  et  $\hat{v}_2$  commutent.

*Démonstration.* On peut trouver des fonctions  $f_1, f_2$  telles que  $v_i = (df_i)_q$ ; donc  $\hat{v}_1$  est la restriction d'un champ hamiltonien tangent aux fibres  $X_i$ . Alors  $[X_1, X_2]$  est le champ hamiltonien associé à la fonction  $\Omega(X_2, X_1)$ , donc est nul puisque ces fibres sont lagrangiennes, et a fortiori  $[\hat{v}_1, \hat{v}_2] = 0$ .

b) Pour tout  $e$  dans  $F_q$ , on a  $\|\hat{v}(e)\| \leq (1/\sqrt{2}) \|v\|$ .

*Démonstration.* La propriété (\*), jointe à l'antisymétrie de  $\omega$  et au fait que  $J^2 = -id$ , entraîne que  $J$  est une isométrie, donc

$$\|\hat{v}(e)\| = \|\rho_e^*(v)\| \leq \|\rho_{e*}\| \cdot \|v\| = \|\rho_{e*}\| \cdot \|v\|,$$

et la convexité de la fonction distance sur  $\tilde{V} \times \tilde{V}$  (cf. [Gr1] p. 118) entraîne que, pour  $(X, Y)$  dans  $T_{\tilde{e}}(\tilde{V} \times \tilde{V})$ , on a

$$\|\rho_{\tilde{e}*}(X, Y)\| \leq (1/2)(\|X\| + \|Y\|) \leq (1/\sqrt{2})(\|X\|^2 + \|Y\|^2)^{1/2}.$$

Donc le champ  $\hat{v}$  est *intégrable*, et d'après a) on définit une action localement libre de  $T_q^*V$  sur  $F_q$  en posant

$$v \cdot e = (\exp \hat{v})(e), \quad v \in T_q^*V, \quad e \in F_q.$$

Comme de plus  $F_q$  est difféomorphe à  $T_qV$ , elle est clairement transitive et libre: pour tout  $e$  dans  $F_q$ , l'application  $v \mapsto v \cdot e$  est une bijection de  $T_q^*V$  sur  $F_q$ .

Soit  $\alpha$  une 1-forme sur  $M$ . D'après b), le champ  $X_\alpha$  est intégrable, donc définit un flot  $(\varphi_{t,\alpha})$  tangent aux fibres; on note  $\varphi_\alpha = \varphi_{1,\alpha}$ .

**PROPRIÉTÉ.** On a  $\varphi_\alpha^*\Omega = \Omega + \rho^* d\alpha$ .

*Démonstration.* Par une méthode classique, on calcule

$$(d/dt)(\varphi_{t,\alpha}^*\Omega) = \varphi_{t,\alpha}^*(L_{X_\alpha}\Omega) = \varphi_{t,\alpha}^* d(\varphi^*\alpha),$$

et ceci vaut  $\rho^* d\alpha$  puisque  $\rho \circ \varphi_{t,\alpha} = \rho$ .

On définit alors l'application  $\chi$  de  $T^*V$  dans  $(\overline{V \times V})$ :

$$\chi(v) = -v \cdot s(q), \quad v \in T_q^*V.$$

Elle préserve les fibres et est un difféomorphisme sur chaque fibre, donc est un difféomorphisme global. Il ne reste plus qu'à prouver  $\chi^*\Omega = \omega_V$ :

D'abord, si  $\alpha$  est une 1-forme sur  $M$ , c'est-à-dire une section de  $T^*M$ , la définition de  $\chi$  entraîne  $\chi \circ \alpha = \varphi_\alpha \circ s$ , d'où

$$\alpha^*\chi^*\Omega = -s^*\varphi_\alpha^*\Omega = -s^*(\Omega + \rho^* d\alpha).$$

Comme  $s$  est lagrangienne, on a  $s^*\Omega = 0$ ; de plus  $\rho \circ s = id$ , d'où

$$\alpha^*\chi^*\Omega = -d\alpha = \alpha^*\omega_V.$$

La dernière égalité résulte de  $\omega_V = -d\lambda_V$  et  $\alpha^*\lambda_V = \alpha$ , où  $\lambda_V$  est la 1-forme de Liouville.

Ainsi la 2-forme  $\chi^*\Omega - \omega_V$  a une restriction nulle sur chaque sous-espace horizontal de  $T_\alpha(T^*V)$ ; comme  $\dim V \geq 2$ , ceci implique qu'elle est nulle, ce qui achève la preuve de la proposition 2.1 et donc du théorème 2.

## REFERENCES

- [A1] V. I. ARNOLD, Commentaire sur le "théorème de géométrie" de Poincaré Oeuvres choisies d'Henri Poincaré, vol. II (en russe), p. 987-989, Nauka, Moscou (1972).  
 [A2] V. I. ARNOLD, Fixed points of symplectic diffeomorphisms, Mathematical developments

arising from Hilbert's problems, Proc. Symp. Pure Math. XXVIII, p. 66, Amer. Math. Soc., Providence (1976).

- [Ch1] M. Chaperon, Quelques questions de géométrie symplectique, Séminaire Bourbaki 1982/3, n° 610, Astérisque 105–106, 231–249 (1983).
- [Ch2] M. CHAPERON, *Une idée de "géodésiques brisées" pour les systèmes hamiltoniens*, C.R. Acad. Sci. Paris t. 298, Serie I (1984), 293–296.
- [Ch3] M. CHAPERON, An elementary proof of the Conley–Zehnder theorem in symplectic geometry, Dynamical systems and bifurcations (Groningen 1984), p. 1–8, Springer Lect. Notes Math. 1125 (1985).
- [ChZ] M. CHAPERON et E. ZEHNDER, Quelques résultats globaux en géométrie symplectique, Séminaire sud-rhodanien de géométrie III, Travaux en cours, p. 51–121, Hermann, Paris (1984).
- [CoZ] C. C. CONLEY and E. ZEHNDER, *The Birkhoff–Lewis fixed point theorem and a conjecture of V. I. Arnold*, Invent. Math. 73 (1983), 33–49.
- [De] T. DELZANT, Variables action-angle non commutatives. . . , Thèse de Doctorat, Université Paris VI (1986).
- [Du] J. DUISTERMAAT, *On global action angle coordinates*, Comm. Pure and Appl. Math. 33 (1980), 687–706.
- [E] I. M. ELIACHBERG, Estimation du nombre de points fixes des applications préservant l'aire (en russe), Université de Syktyvkar (1978).
- [F] A. FLOER, *Proof of the Arnold conjecture for surfaces and generalizations to certain Kähler manifolds*, Duke Math. J. 51 (1986), 1–32.
- [Gr1] M. GROMOV, Structures métriques pour les variétés riemanniennes (rédigé par J. Lafontaine et P. Pansu), CEDIC-Nathan, Paris (1981).
- [Gr2] M. GROMOV, *Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. 82 (1985), 307–347.
- [GuS] V. GUILLEMIN and S. STERNBERG, Symplectic techniques in physics, Cambridge Univ. Press (1984).
- [H] H. HOFER, *Lagrangian embeddings and critical point theory*, Ann. de l'Institut Henri Poincaré, Analyse non linéaire, vol. 2, n° 6 (1985), 407–462.
- [LS] F. LAUDENBACH et J.-C. SIKORAV, *Persistence d'intersection avec la section nulle. . .*, Invent. Math. 82 (1985), 349–357.
- [S1] J.-C. SIKORAV, *Points fixes d'une application symplectique homologue à l'identité*, J. Diff. Geom. 22 (1985), 49–79.
- [S2] J.-C. SIKORAV, *Sur les immersions lagrangiennes dans un fibré cotangent. . .*, C.R. Acad. Sci. Paris, t.302, série I, n° 3 (1986), 119–122.
- [W1] A. WEINSTEIN, *Symplectic manifolds and their lagrangian submanifolds*, Adv. in Math. 6 (1971), 329–349.
- [W2] A. Weinstein, Lectures on symplectic manifolds, C.B.M.S. Reg. Conf. Ser. Math. 29, Amer. Math. Soc., Providence (1977).
- [W3] A. WEINSTEIN,  *$C^0$ -perturbation theorems for symplectic fixed points and lagrangian intersections*, Séminaire sud-rhodanien de géométrie III, Travaux en cours, p. 140–144, Hermann, Paris (1984).
- [W4] A. WEINSTEIN, Symplectic geometry and the calculus of variations, Marston Morse Memorial Lecture, IAS Princeton (1985) (à paraître).

IA 1169 du C.N.R.S.

"Topologie différentielle"

Université Paris-Sud

Mathématique, Bâtiment 425

F-91405 ORSAY cedex

FRANCE

Reçu le 6 février 1986