

Hyperkomplexe und pseudo-analytische Funktionen

VON ADOLF KRISZTEN, Zürich

Einleitung

Die analytischen hyperkomplexen Funktionen stellen eine Verallgemeinerung der klassischen analytischen Funktionen dar. Entsprechend den verschiedenen Definitionsmöglichkeiten, die im klassischen Falle — aber nicht mehr in beliebigen Algebren — äquivalent sind, wird die Bezeichnung analytische hyperkomplexe Funktion von den einzelnen Autoren in ganz verschiedener Bedeutung verwendet. Es lassen sich dabei diese Autoren in zwei Gruppen einteilen, deren eine sich an *Scheffers* [17]¹⁾ anschließt, während die zweite Gruppe die gänzlich anders geartete Definition von *Fueter* [1] zugrunde legt. Es ist bemerkenswert, daß die Definition, die *Fueter* für den einfachsten Fall der Quaternionen gibt, ohne weiteres auch für beliebige Algebren verwendet werden kann. Die hyperkomplexen Funktionen der ersten Gruppe werden wir, wo eine Unterscheidung nötig ist, *S*-analytisch, die der zweiten Gruppe *F*-analytisch nennen.

Die Definition der *S*-analytischen Funktionen besteht nun darin, daß die hyperkomplexen Funktionen eine Ableitung besitzen sollen, die von der Richtung unabhängig ist. Es zeigt sich, daß dies im wesentlichen nur in kommutativen Algebren möglich ist, womit also diese erste Definition sehr rasch versagt. *Hausdorff* [16] hat diese Definition verallgemeinert, indem er nur noch verlangt, daß das Differential der hyperkomplexen Funktion eine lineare Funktion des Differentials der hyperkomplexen Variablen sein soll. So kann man sich in der Tat von der Bedingung der Kommutativität befreien; aber die Möglichkeiten zur Entwicklung einer allgemeinen Theorie scheinen recht klein zu sein, da zum Beispiel keine Integralsätze existieren. Wir werden uns hier nicht mit dieser *Hausdorff*-schen Definition befassen. Die *Scheffers*-sche Forderung der Existenz einer

¹⁾ Die Nummern in Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Schlusse der Arbeit.

Ableitung erweist sich als äquivalent mit derjenigen nach der Existenz einer Stammfunktion; oder, was dasselbe bedeutet, einem vom Wege unabhängigen Integral.

Die *Fuetersche* Definition verzichtet zum vorneherein auf die Existenz einer Ableitung und fordert statt dessen das Bestehen eines Integralsatzes für Integrale über Hyperflächen. Dies führt — wie auch im ersten Fall — auf ein System von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Damit ist auch umgekehrt die Möglichkeit gegeben, solche Systeme von Differentialgleichungen mit funktionentheoretischen Hilfsmitteln zu untersuchen [5, 7, 9, 10, 11]. Es zeigt sich, daß diese Definition in beliebigen Algebren sinnvoll ist und es können — wie wir zeigen werden — eine Reihe von Sätzen aufgestellt werden, die ganz unabhängig sind von der Struktur der zugrunde gelegten Algebra. Speziell findet man, daß für Flächen beliebiger Dimension Integralsätze aufgestellt werden können. Es sind dies Sätze, die teilweise bereits von *Fueter* und *Staub* [2, 13] für die Algebra der Quaternionen und gewisse Cliffordsche Algebren hergeleitet wurden.

Die Existenz von Integralsätzen legt es nahe, die Theorie der äußeren Differentialformen [26, 27, 28] zu verwenden. In der Tat zeigt es sich, daß diese Theorie es nicht nur ermöglicht, diese Sätze außerordentlich elegant herzuleiten, sondern auch erklärt, warum die beiden Verallgemeinerungen der klassischen Funktionentheorie offenbar a priori gleich berechtigt und gleich sinnvoll sind. Sei $w(z) = u + iv$ eine Funktion der komplexen Variablen $z = x + iy$, dann kann man die Bedingung, daß $w(z)$ analytisch sein soll, folgendermaßen formulieren: Das äußere Differential der Differentialform $\omega = w(z)dz$ muß verschwinden

$$d\omega = (i w_x - w_y)dx dy = i(w_x + i w_y)dx dy = 0 ,$$

also

$$w_x + i w_y = 0 .$$

Dies sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in komplexer Schreibweise. Versteht man unter der adjungierten Differentialform von $\alpha = a dx + b dy$ die Form $\alpha^* = -b dx + a dy$ und setzt man $\delta\alpha = (d\alpha^*)^*$, so erkennt man leicht, daß $\delta\omega = \delta(w dz) = 0$ auf dieselben Differentialgleichungen führt. *Die Bedingungen $d\omega = 0$ und $\delta\omega = 0$ sind für $\omega = w dz$ äquivalent* [25].

Geht man zu beliebigen Algebren über und versteht man unter ω die entsprechende Differentialform, so sind die beiden Gleichungen $d\omega = 0$ und $\delta\omega = 0$ nicht mehr äquivalent; die erste führt zu den *S*-analytischen, die zweite zu den *F*-analytischen Funktionen. Wir werden in einem

ersten Abschnitt einen kurzen Überblick über die verwendete Theorie der Differentialformen geben, während der zweite und dritte Abschnitt die Theorie der S - respektiv F -analytischen Funktionen enthält. In einem vierten Abschnitt untersuchen wir den Zusammenhang mit den harmonischen Differentialen und zeigen, daß die Definitionen der S - und der F -analytischen Funktionen nur in der Algebra der komplexen Zahlen äquivalent sind.

Der fünfte Abschnitt befaßt sich mit einer anderen Verallgemeinerung der analytischen Funktionen, den pseudo-analytischen Funktionen oder Σ -monogenen Funktionen, die speziell von *Bers* und *Gelbart* [20, 21, 22] untersucht wurden. Diese Verallgemeinerung besteht darin, daß die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen durch ein anderes System von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit *variablen* Koeffizienten ersetzt werden. Die übliche Schreibweise als komplexe Funktion ist rein formal und meines Erachtens mehr eine Komplizierung als eine Vereinfachung, da doch sämtliche — oft recht undurchsichtigen — Rechnungen in Komponenten ausgeführt werden müssen. Weiter entspricht die Metrik der komplexen Zahlen in keiner Weise der durch die Differentialgleichungen induzierten Metrik. Wir werden deshalb die ganze Theorie in Matrixschreibweise durchführen, die offenbar angebracht ist, da die vorher formalen Produkte in wirkliche Produkte von Matrizen übergehen. Weiter werden die Bedingungen angegeben, unter welchen man eine einfache Theorie erhält. Es ist dies entweder dann der Fall, wenn die Matrizen vertauschbar sind, oder wenn die Metrik orthogonal ist. Der erste Fall wurde von *Lukomskaja* [23], der zweite von *Bers* und *Gelbart* eingehend untersucht. Wir werden hier weniger versuchen, neue Resultate zu erzielen, als die bereits bekannten Sätze in eine einfachere und durchsichtigere Form zu bringen. Auch hier zeigt sich wieder die große Allgemeinheit und Vielseitigkeit der Methoden, die *Fueter* einführte.

1. Funktionen in Algebren, hyperkomplexe Differentiale

Wir wollen in diesem Abschnitt diejenigen Begriffe und Sätze zusammenstellen, die im folgenden ständig verwendet werden. Es sei \mathfrak{A} eine assoziative Algebra über dem Körper der reellen Zahlen mit Haupteinheit, die wir mit der Eins der reellen Zahlen identifizieren. Die Basiselemente von \mathfrak{A} seien $c_0 = 1, c_1, \dots, c_N$. Wir definieren weiter zwei Linearsysteme \mathfrak{Q}_z und \mathfrak{Q}_w in \mathfrak{A} , deren erstes immer die Haupteinheit enthalten möge. Durch geeignete Wahl der Basis kann man erreichen, daß

$\mathfrak{L}_z = (c_0, \dots, c_{n-1})$ und $\mathfrak{L}_w = (c_{h_1}, \dots, c_{h_m})$, wo $n \leq N + 1$ und $m \leq N + 1$. \mathfrak{L}_z und \mathfrak{L}_w können unter sich oder auch mit \mathfrak{A} identisch sein.

x_0, \dots, x_{n-1} seien n reelle Variable, die wir als Koordinaten im euklidischen R^n deuten. Diese Variablen fassen wir in \mathfrak{L}_z zu der einen hyperkomplexen Variablen

$$z = \sum_{h=0}^{n-1} c_h x_h$$

zusammen. Sind analog u_1, \dots, u_m m reelle Funktionen der Variablen x_0, \dots, x_{n-1} , so fassen wir diese in \mathfrak{L}_w zu der einen hyperkomplexen Funktion $w(z)$ der hyperkomplexen Variablen z zusammen als

$$w(z) = \sum_{k=1}^m c_{h_k} u_k .$$

Wir werden — ohne das immer zu erwähnen — stets voraussetzen, daß die Funktionen u_k genügend oft stetig partiell differenzierbar sind. Es sei weiter

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = w^{(i)} = \sum_{k=1}^m c_{h_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^m c_{h_k} u_k^{(i)} .$$

Unter dem Differential der Variablen z verstehen wir $dz = \sum_{h=0}^{n-1} c_h dx_h$.

Die Zusammenfassung der Funktionen u_k zur Funktion $w(z)$ ist vorläufig rein formal; sie wird erst sinnvoll, wenn wir die Funktionen speziell auswählen, was durch die Bedingung der Analytizität erreicht wird.

Um die analytischen hyperkomplexen Funktionen definieren zu können, werden wir die Theorie der Differentialformen verwenden. Wir halten uns ganz an die Arbeit von *de Rham* und *Bidal* [27], wobei sich natürlich große Vereinfachungen ergeben, da wir es nur mit euklidischen Räumen zu tun haben. Die Funktionen $A_{h_1, \dots, h_r}(x_0, \dots, x_{n-1})$ seien die Komponenten eines kovarianten antisymmetrischen Tensors; h_1, \dots, h_r seien r beliebige, verschiedene der Zahlen $0, \dots, n - 1$. Wir betrachten die Differentialform

$$\alpha = \sum A_{h_1, \dots, h_r} [dx_{h_1} \dots dx_{h_r}] ,$$

wobei die Summe über alle $\binom{n}{r}$ Kombinationen (h_1, \dots, h_r) erstreckt werden soll, und die Multiplikation der dx_i schief ist. Unter der adjungierten Differentialform α^* versteht man

$$\alpha^* = \sum A_{h_1, \dots, h_r} [dx_{h_1} \dots dx_{h_r}]^* ,$$

wo

$$[dx_{h_1} \dots dx_{h_r}]^* = [dx_{h_{r+1}} \dots dx_{h_n}]$$

definiert ist, wenn die Reihe $(h_1, \dots, h_r, h_{r+1}, \dots, h_n)$ eine gerade Permutation von $(0 \dots n - 1)$ bildet. Diese Definition ist äquivalent mit der folgenden :

$$[dx_{h_1} \dots dx_{h_r}] [dx_{h_1} \dots dx_{h_r}]^* = dh \ ;$$

dh bedeutet das Volumenelement $dx_0 \dots dx_{n-1}$ des Raumes. Es wird sich die Schreibweise

$$[dx_{h_1} \dots dx_{h_r}]^* = dX_{h_1 \dots h_r}$$

als praktisch erweisen, damit schreiben wir endgültig

$$\alpha^* = \Sigma A_{h_1, \dots, h_r} dX_{h_1 \dots h_r} \ .$$

Es gelten die folgenden Rechenregeln

$$\begin{aligned} dx_k dX_{h_1 \dots h_r} &= 0 & k \neq h_i \\ dx_{h_i} dX_{h_1 \dots h_r} &= (-1)^{r-i} dX_{h_1 \dots h_{i-1} h_{i+1} \dots h_r} & (i = 1, \dots, r) \ . \end{aligned}$$

Es werden hauptsächlich hyperkomplexe Differentiale der folgenden Form auftreten :

$$(dz)^* = \sum_{h=0}^{n-1} c_h dX_h = dZ$$

und allgemeiner

$$[dx_{h_1} \dots dx_{h_r} dz]^* = \sum_{k=0}^{n-1} c_k dX_{h_1 \dots h_r k} = dZ_{h_1 \dots h_r} \ .$$

Das äußere Differential einer Form α ist definiert als

$$d\alpha = \Sigma \frac{\partial A_{h_1, \dots, h_r}}{\partial x_k} [dx_k dx_{h_1} \dots dx_{h_r}] \ ,$$

entsprechend hat der Operator δ die folgende Bedeutung

$$\delta\alpha = (d\alpha^*)^* \ .$$

Während also der Operator d den Grad der Form um eins vergrößert, verkleinert δ diesen um eins. Da das äußere Differential eines äußeren Differentials verschwindet : $d(d\alpha) = 0$, so gilt auch $\delta(\delta\alpha) = 0$. Einer der wichtigsten Sätze der Theorie der Differentialformen, den wir zu verwenden haben, ist : Es sei H_{r+1} ein $(r+1)$ -dimensionales (genügend reguläres) Flächenstück, C seine r -dimensionale Berandung. Dann gilt die Formel von *Stokes*

$$\int_C \alpha = \int_{H_{r+1}} d\alpha \ ,$$

wo α die erwähnte Differentialform r -ten Grades bedeutet.

2. Die S -analytischen Funktionen

Definition. Sei die Differentialform ω gleich $dz w(z)$, wo

$$dz = \sum_{h=0}^{n-1} c_h dx_h, \quad w(z) = \sum_{i=1}^m c_{h_i} u_{h_i}$$

bedeutet. Wir nennen die hyperkomplexe Funktion $w(z)$ links-analytisch²⁾, falls das äußere Differential von ω verschwindet

$$d\omega = 0,$$

und rechts-analytisch, wenn

$$d(w dz) = 0$$

ist.

Es ist

$$d\omega = \sum_{h=0}^{n-1} [dx_h dz] w^{(h)} = \sum_{h < k} (c_k w^{(h)} - c_h w^{(k)}) [dx_h dx_k],$$

also muß

$$c_k w^{(h)} - c_h w^{(k)} = 0 \quad (h, k = 0, \dots, n-1) \quad (2,1)$$

sein. Da c_0 die Haupteinheit ist, gilt speziell

$$w^{(k)} = c_k w^{(0)}$$

und es ist

$$dw = dz w^{(0)}.$$

Die Bedingungen (2,1) schreiben sich nun als

$$(c_k c_h - c_h c_k) w^{(0)} = 0 \quad (h, k = 1, \dots, n-1).$$

Ist $w^{(0)}$ nicht Nullteiler zu allen Ausdrücken $c_k c_h - c_h c_k$, so muß \mathfrak{Q}_z kommutativ sein. Ward [18] hat in einem etwas andern Zusammenhang ein Beispiel gegeben, wo $w^{(0)}$ diese Bedingung erfüllt:

$$c_0 = 1, c_1 c_2 + c_2 c_1 = 0, c_1 c_2 = c_2, c_1^2 = 1, c_2^2 = 0.$$

$w^{(0)}$ muß die Bedingung

$$(c_1 c_2 - c_2 c_1) w^{(0)} = 2c_2 w^{(0)} = 0$$

erfüllen, und nimmt deshalb die Form

²⁾ Wir werden in diesem Abschnitt — wie auch im nächsten — statt S -analytisch respektiv F -analytisch immer nur analytisch schreiben, da nur eine der beiden Bezeichnungen auftritt.

$$w^{(0)} = u(1 - c_1) + v$$

an, wo u und v beliebige Funktionen von x_0, x_1, x_2 sind.

Lassen wir diesen Fall beiseite, so ergibt sich der

Satz: Die Bedingung für die Existenz von links- oder rechts-analytischen Funktionen in einer Algebra besteht im allgemeinen darin, daß das Linear-system \mathfrak{L}_z der Variablen z kommutativ ist. Die Differentialgleichungen, denen die Funktion $w(z)$ genügen muß, sind

$$w^{(k)} = c_k w^{(0)} \quad \text{respektiv} \quad w^{(k)} = w^{(0)} c_k \quad (k = 1, \dots, n - 1) .$$

Es existiert die linke respektiv rechte Ableitung $w^{(0)}$, da

$$dw = dz w^{(0)} \quad \text{respektiv} \quad dw = w^{(0)} dz$$

ist.

Daß unter diesen Bedingungen auch immer analytische Funktionen existieren, erkennt man daraus, daß für $\mathfrak{L}_w = \mathfrak{L}_z$ die Variable z stets links- und rechts-analytisch ist.

Aus dem Verschwinden von $d\omega = d(dzw)$, wo $w(z)$ links-analytisch ist; oder allgemeiner aus dem Verschwinden von

$$d(Vdzw) ,$$

wo $V(z)$ rechts- und $w(z)$ links-analytisch ist, folgt der

Integralsatz: Ist C eine geschlossene reguläre Kurve, die ganz im Analytizitätsbereich von $V(z)$ und $w(z)$ liegt, so ist

$$\int_c V(z) dz w(z) = 0 . \quad (2,2)$$

In den von uns betrachteten Algebren erweist sich also — wie bekannt — die Existenz einer Ableitung und die Existenz einer Stammfunktion

$$W(z) = \int_{z_0}^z dz w(z) \quad ^3)$$

als äquivalent. Die Stammfunktion einer links-analytischen Funktion ist selbst wieder links-analytisch, denn es gilt

$$dW = dz w(z) .$$

Das Integral (2,2) tritt bei *Degtereva* auf und wird von ihm Di-Integral genannt [14, 15].

³⁾ $W(z)$ liegt im allgemeinen nicht in \mathfrak{L}_w .

3. F -analytische Funktionen

Wir kommen nun zur Behandlung der zweiten Möglichkeit zur Definition von analytischen hyperkomplexen Funktionen.

Definition. Sei ω die Differentialform $dz \cdot w(z)$, wo dz das Differential der hyperkomplexen Variablen z aus \mathfrak{Q}_z und $w(z)$ eine hyperkomplexe Funktion aus \mathfrak{Q}_w bedeutet. Die Funktion $w(z)$ heißt in einem Punkte z des n -dimensionalen Raumes der x_0, \dots, x_{n-1} links-analytisch, falls dort

$$\delta\omega = (d\omega^*)^* = 0 \quad (3,1)$$

gilt. Entsprechend heißt $w(z)$ rechts-analytisch, wenn die Differentialform $w(z)dz$ die Bedingung

$$\delta(w(z)dz) = 0$$

erfüllt.

Es ist

$$\omega = \sum_{k=0}^{n-1} c_k dx_k w(z) , \quad \omega^* = \sum_{k=0}^{n-1} c_k dX_k w(z) = dZ w(z) ,$$

und also

$$d\omega^* = \sum_{h=0}^{n-1} dx_h dZ w^{(h)} = dh \sum_{h=0}^{n-1} c_h w^{(h)} .$$

Damit ergibt sich der

Satz: Die Funktion $w(z)$ ist in einem Punkte z des n -dimensionalen Raumes links-analytisch, wenn sie dort den Differentialgleichungen

$$\sum_{h=0}^{n-1} c_h w^{(h)} = 0 \quad (3,2)$$

genügt, und rechts-analytisch, falls

$$\sum_{h=0}^{n-1} w^{(h)} c_h = 0 \quad (3,2')$$

gilt. Die beiden Bedingungen sind im allgemeinen nicht äquivalent.

Eine Funktion heißt in einem Bereiche links-analytisch, wenn dies in jedem Punkte des Bereiches gilt. Diese zweite Definition führt genau zu der Funktionenklasse, die *Fueter* in seinen grundlegenden Arbeiten über analytische Quaternionenfunktionen untersucht hat, und es sind in (3,1) sämtliche anderen Definitionen enthalten [6, 8].

Beispiele:

1. Quaternionenfunktionen: $\mathfrak{Q}_z = \mathfrak{Q}_w$ gleich der Algebra der Quaternionen.

2. Diracsche Differentialgleichungen und andere Systeme von Differentialgleichungen. \mathfrak{A} vollständige Matrixalgebra der m -reihigen Matrizen. \mathfrak{L}_z : Linearsystem von Matrizen. \mathfrak{L}_w : Linearsystem der Spaltenmatrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Analytisch-reguläre Funktionen [12, 13]: \mathfrak{A} Cliffordsche Algebra

$$(i_0 = 1, i, i_1, \dots, i_{n-1}, i i_1, i_h i_k, \dots), \quad i^2 = -1, \quad i_k^2 = -1 \quad (k \neq 0), \\ i i_k = -i_k i, \quad i_h i_k = -i_k i_h \quad (h \neq k, \quad h, k = 1, 2, \dots, n-1).$$

$$\mathfrak{L}_z: \quad z = \sum_{k=1}^{n-1} z_k i_k, \quad z_k = x_{2k} + i x_{2k+1} \quad (3,3) \\ \mathfrak{L}_w: \quad w = \sum_{k=1}^{n-1} i_k w_k, \quad w_k = u_{2k} + i u_{2k+1}$$

Zu einer — speziell für den zweiten Integralsatz — wichtigen Verallgemeinerung führt die Betrachtung der Differentialform

$$\omega = V(z) dz w(z),$$

wo V und w hyperkomplexe Funktionen bedeuten. Die Bedingung $\delta\omega = 0$ ergibt

$$\left(\sum_{h=0}^{n-1} V^{(h)} c_h \right) w + V \left(\sum_{h=0}^{n-1} c_h w^{(h)} \right) = 0$$

und ist also erfüllt, wenn V rechts- und w links-analytisch ist. Sei λ eine beliebige hyperkomplexe Konstante aus \mathfrak{A} , so kann die Bedingung auch als

$$\left(\sum_{h=0}^{n-1} V^{(h)} c_h - V \lambda \right) w + V \left(\sum_{h=0}^{n-1} c_h w^{(h)} + \lambda w \right) = 0$$

geschrieben werden, was zu den Bedingungen

$$\sum_{h=0}^{n-1} V^{(h)} c_h - V \lambda = 0, \quad \sum_{h=0}^{n-1} c_h w^{(h)} + \lambda w = 0$$

führt. Derartige Funktionen wurden vom Verfasser [9, 10] untersucht und inhomogen-analytisch genannt.

Integralsätze: Es sollen hier die Integralsätze der *Fueterschen* Theorie [2] der Quaternionenfunktionen und gewisser Cliffordscher Funk-

tionen für beliebige assoziative Algebren hergeleitet werden. Der zweite Integralsatz bildet dabei eine Ausnahme, da er, als einziger, von der Struktur der zugrunde gelegten Algebra abhängt.

Die Regularitätsbedingung (3,1) oder allgemeiner die Bedingung $\delta(Vdzw) = 0$ erlaubt sofort die Aufstellung des Satzes :

Erster Integralsatz ⁴⁾. Sei H ein n -dimensionales Gebiet des z -Raumes, sein Rand R eine geschlossene orientierbare Hyperfläche mit stetigem Normalenfeld. Die Funktionen V und w seien in $H + R$ rechts- respektiv links-analytisch ⁵⁾. Dann ist

$$\int_R V(z) dZ w(z) = 0 ,$$

wenn man unter $dZ = (dz)^*$ versteht.

Setzt man $V(z)$ respektiv $w(z)$ gleich eins, so erhält man für links- respektiv rechts-analytische Funktionen den Integralsatz

$$\int_R dZ w(z) = 0 \quad \text{respektiv} \quad \int_R V(z) dZ = 0 .$$

Die Integralsätze, die im folgenden bewiesen werden, sind teilweise für gewisse Cliffordsche Algebren (3,3) hergeleitet worden. Wie *Staub* [13] gezeigt hat, lassen sich daraus leicht die Integralsätze von *Martinelli* [29] herleiten. Wir werden sehen, daß in beliebigen Algebren, und auch für inhomogen-analytische Funktionen, für Flächen beliebiger Dimension ein Integralsatz existiert.

Es sei H_{n-r} ($r = 1, \dots, n - 1$) ein im R^n gelegenes, endliches, orientierbares Flächenstück, das sich nirgends durchdringt und offen ist. Die Dimension von H_{n-r} sei $(n - r)$. H_{n-r} werde durch die geschlossene Fläche R der Dimension $n - (r + 1)$ berandet. Die zu betrachtenden Gebilde seien stückweise analytisch. $w(z)$ und $V(z)$ seien in einer n -dimensionalen Umgebung von H_{n-r} links- respektiv rechts-analytische Funktionen. $w(z)$ und $V(z)$ dürfen auch inhomogen-analytisch sein, das heißt den Gleichungen

$$\sum_{h=0}^{n-1} c_h w^{(h)} + \lambda w = 0 , \quad \sum_{h=0}^{n-1} V^{(h)} c_h - V \lambda = 0$$

genügen. Auf R betrachten wir die Differentialform

$$\begin{aligned} (\omega_{h_1 \dots h_r})^* &= V(z) [dx_{h_1} \dots dx_{h_r} dz]^* w(z) = V(z) \sum_{k=0}^n dX_{h_1 \dots h_r k} c_k w(z) \\ &= V(z) dZ_{h_1 \dots h_r} w(z) , \end{aligned}$$

⁴⁾ Der Satz bleibt auch richtig für inhomogen-analytische Funktionen.

⁵⁾ $V(z)$ liegt in einem beliebigen Linearsystem von \mathfrak{A} .

wo $h_1 \dots h_r$, r beliebige, verschiedene Zahlen der Reihe $0, 1, \dots, n-1$ bedeuten. Das äußere Differential dieser Form ist

$$\begin{aligned} d(\omega_{h_1 \dots h_r})^* &= \sum_{s=0}^{n-1} V^{(s)} [dx_s dZ_{h_1 \dots h_r}] w(z) + V(z) \sum_{s=0}^{n-1} [dx_s dZ_{h_1 \dots h_r}] w^{(s)} \\ &= \Sigma_1 + \Sigma_2 . \end{aligned}$$

Die Auswertung führen wir im Detail nur für Σ_1 durch :

$$\Sigma_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{s \neq h_1 \dots h_r} V^{(s)} c_k [dx_s dX_{h_1 \dots h_r k}] w(z) + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=1}^r V^{(h_i)} c_k [dx_{h_i} dX_{h_1 \dots h_r k}] w(z) .$$

Es ist

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{s \neq h_1 \dots h_r} V^{(s)} c_k [dx_s dX_{h_1 \dots h_r k}] = \sum_{s \neq h_1 \dots h_r} V^{(s)} c_s dX_{h_1 \dots h_r} ,$$

und aus der Regularitätsbedingung für $V(z)$ folgt

$$\begin{aligned} \sum_{s \neq h_1 \dots h_r} V^{(s)} c_s dX_{h_1 \dots h_r} &= - \sum_{i=1}^r V^{(h_i)} c_{h_i} dX_{h_1 \dots h_r} + V \lambda dX_{h_1 \dots h_r} \\ &= \sum_{i=1}^r V^{(h_i)} c_{h_i} (-1)^{r-i+1} dX_{h_1 \dots h_{i-1} h_{i+1} \dots h_r h_i} + V \lambda dX_{h_1 \dots h_r} . \end{aligned}$$

Der zweite Summand von Σ_1 ist bis auf den Faktor $w(z)$ gleich

$$\sum_{i=1}^r \sum_{k \neq h_1 \dots h_r} V^{(h_i)} c_k (-1)^{r-i+1} dX_{h_1 \dots h_{i-1} h_{i+1} \dots h_r k} ,$$

denn es ist

$$dx_{h_i} dX_{h_1 \dots h_r k} = (-1)^{r-i+1} dX_{h_1 \dots h_{i-1} h_{i+1} \dots h_r k} .$$

Damit ist die endgültige Form von Σ_1 gefunden :

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum_{i=1}^r V^{(h_i)} (-1)^{r-i+1} \sum_{k=0}^{n-1} c_k dX_{h_1 \dots h_{i-1} h_{i+1} \dots h_r k} w(z) + V \lambda dX_{h_1 \dots h_r} w(z) \\ &= \sum_{i=1}^r (-1)^{r-i+1} V^{(h_i)} dZ_{h_1 \dots h_{i-1} h_{i+1} \dots h_r} w(z) + V(z) \lambda dX_{h_1 \dots h_r} w(z) . \end{aligned}$$

Analog führt die Umformung von Σ_2 auf

$$\Sigma_2 = \sum_{i=1}^r (-1)^{r-i+1} V(z) dZ_{h_1 \dots h_{i-1} h_{i+1} \dots h_r} w^{(h_i)} - V(z) \lambda dX_{h_1 \dots h_r} w(z) ,$$

also gilt

$$d(\omega_{h_1 \dots h_r})^* = \sum_{i=1}^r (-1)^{r-i+1} \{V(z) dZ_{h_1 \dots h_{i-1} h_{i+1} \dots h_r} w(z)\}^{(h_i)} .$$

Daraus folgt der

Integralsatz. H_{n-r} sei ein ganz im Endlichen gelegenes, orientierbares, sich nirgends durchdringendes Flächenstück der Dimension $n - r$ ($r = 1, \dots, n - 1$), R sei seine $n - (r + 1)$ dimensionale, reguläre Berandung. $w(z)$ und $V(z)$ seien in einer n -dimensionalen Umgebung von H_{n-r} links- bzw. rechts-inhomogen-analytisch

$$\sum_{h=0}^{n-1} c_h w^{(h)} + \lambda w = 0 ,$$

$$\sum_{h=0}^{n-1} V^{(h)} c_h - V \lambda = 0 .$$

Dann gilt der folgende Integralsatz

$$\int_{\bar{R}} V dZ_{h_1 \dots h_r} w = \sum_{i=1}^r (-1)^{r-i+1} \int_{H_{n-r}} \{V(z) dZ_{h_1 \dots h_{i-1} h_{i+1} \dots h_r} w(z)\}^{(h_i)} ,$$

wo $h_1 \dots h_r$ r beliebige verschiedene Zahlen der Reihe $0, 1, \dots, n - 1$ bedeuten. Ist H_{n-r} speziell geschlossen, so gilt

$$\sum_{i=1}^r (-1)^{r-i+1} \int_{H_{n-r}} \{V(z) dZ_{h_1 \dots h_{i-1} h_{i+1} \dots h_r} w(z)\}^{(h_i)} = 0 .$$

Für $r = 1$ erhält man einen Integralsatz für geschlossene Hyperflächen H_{n-1}

$$\int_{H_{n-1}} \{V(z) dZ w(z)\}^{(h)} = 0 \quad (h = 0, \dots, n - 1) ,$$

wobei über das Verhalten von w und V im Innern von H_{n-1} nichts vorausgesetzt ist. Aus diesem Integralsatz für Quaternionenfunktionen respektiv spezielle Cliffordsche Funktionen (3,3) haben *Fueter* und *Frl. Schaad* [3, 4, 12] den *Hartogsschen Satz* hergeleitet.

4. Analytische Funktionen und harmonische Differentialformen

Eine Differentialform ω heißt nach *Hodge* [28] harmonisch, falls $d\omega = 0$ und $\delta\omega = 0$ gleichzeitig erfüllt sind. Nach *de Rham* [27] heißt eine Differentialform ω harmonisch, wenn

$$\Delta\omega = (-1)^{np} \delta d\omega + (-1)^{n+p} d \delta\omega = 0$$

ist, wo n die Dimension des Raumes, p den Grad der Form ω bedeutet. Diese beiden Definitionen sind in einem geschlossenen Raum äquivalent. Da der von uns zugrunde gelegte euklidische Raum offen ist, sind die beiden Definitionen im allgemeinen nicht äquivalent, und wir werden sie gesondert untersuchen. Der Einfachheit halber sei hier stets vorausgesetzt, daß $\Omega_z = \Omega_w$ ist.

a) Die Definition von *Hodge*. Die Differentialform $\omega = dzw$ soll gleichzeitig die Bedingung $d\omega = 0$ und $\delta\omega = 0$ erfüllen, das heißt die Funktion $w(z)$ soll gleichzeitig *S*- und *F*-analytisch sein. Da \mathcal{Q}_z kommutativ sein muß, sind die Funktionen immer beidseitig analytisch.

α) Nun soll w *S*-analytisch sein. In welchen Algebren ist w dann automatisch auch *F*-analytisch? Es gilt

$$w^{(k)} = c_k w^{(0)} ,$$

also

$$\delta\omega = \sum_{k=0}^{n-1} c_k w^{(k)} = \sum_{k=0}^{n-1} c_k^2 w^{(0)} .$$

Setzt man speziell die stets *S*-analytische Funktion $w = z$ ein, so findet man

$$\delta(dz z) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k^2 .$$

Satz. Die *S*-analytischen Funktionen sind dann und nur dann stets auch *F*-analytisch, wenn die Basiselemente des — kommutativen — Linear-systems \mathcal{Q}_z eine verschwindende Quadratsumme besitzen

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k^2 = 0 .$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so ist die Differentialform $\omega = dzw$, wo w analytisch ist, nach *Hodge* harmonisch.

β) w sei *F*-analytisch, eine notwendige Bedingung für die *S*-Analytizität besteht offenbar darin, daß \mathcal{Q}_z kommutativ ist. Die Funktion $w = x_h - c_h x_0$ ist stets *F*-analytisch; es ist

$$dw = -c_h dx_0 + dx_h .$$

Dies soll gleich

$$w^{(0)} dz = -c_h \sum_{k=0}^{n-1} c_k dx_k = - \sum_{k=0}^{n-1} c_h c_k dx_k$$

sein, damit w auch *S*-analytisch ist. Man erhält

$$\begin{aligned} -c_h^2 &= c_0 = 1 \\ c_h c_k &= 0 \quad (k \neq h; 0) . \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem muß für alle $h = 1, \dots, n-1$ erfüllt sein. Daraus folgt, daß $n = 2$ und das Linearsystem \mathcal{Q}_z mit der Algebra der komplexen Zahlen identisch ist.

Satz. Die F -analytischen Funktionen sind nur in der Algebra der gewöhnlichen komplexen Zahlen stets S -analytisch.

Hauptsatz. Nur in der Algebra der komplexen Zahlen sind die Bedingungen $d\omega = 0$ und $\delta\omega = 0$ äquivalent; das heißt nur in der klassischen Funktionentheorie besitzen die F -analytischen Funktionen eine Ableitung, und ist die Differentialform $\omega = dzw$, wo w F -analytisch ist, nach Hodge harmonisch.

b) Die Definition von de Rham: Es ist $p = 1$ und

$$\Delta\omega = d\delta\omega + (-1)^n \delta d\omega .$$

α) Es sei $w(z)$ S -analytisch, das heißt $d\omega = d(wdz) = 0$, und

$$\delta\omega = \sum_{k=0}^{n-1} c_k^2 w^{(0)}$$

dann ist

$$d\delta\omega = \sum_{k=0}^{n-1} c_k^2 dz w^{(00)} .$$

Setzt man $w = \frac{1}{2} z^2$, so ist $w^{(00)} = c_0$, und die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ω harmonisch ist lautet also wie im Falle α, α .

Satz. Damit die Differentialform $\omega = dzw$, wo w S -analytisch ist, harmonisch ist nach de Rham, muß

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k^2 = 0$$

sein. Die Definitionen von Hodge und de Rham sind für S -analytische Funktionen äquivalent.

β) E sei $w(z)$ F -analytisch, das heißt $\delta\omega = 0$:

$$d\omega = \sum_{h < k} (c_k w^{(h)} - c_h w^{(k)}) [dx_h dx_k]$$

$$(d\omega)^* = \sum_{h < k} (c_k w^{(h)} - c_h w^{(k)}) dX_{hk}$$

$$\begin{aligned} d(d\omega)^* &= \sum_S \sum_{h < k} (c_k w^{(h)} - c_h w^{(k)})^{(s)} [dx_s dX_{hk}] \\ &= \sum_{h < k} (c_k w^{(h)} - c_h w^{(k)})^{(k)} dX_h - \sum_{h < k} (c_k w^{(h)} - c_h w^{(k)})^{(h)} dX_k \\ &= \sum_{h \neq k} (c_k w^{(hk)} dX_h - c_h dX_h w^{(kk)}) \end{aligned}$$

Es ist

$$\sum_{h \neq k} c_k w^{(hk)} dX_h = \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{k \neq h} (c_k w^{(k)})^{(h)} dX_h = - \sum_{h=0}^{n-1} c_h w^{(hh)} dX_h ,$$

und somit

$$\delta(d\omega) = (-1)^n dz \Delta w .$$

Das ergibt

$$\Delta \omega = dz \Delta w^6) .$$

Satz. Die Differentialform $\omega = dz w$, wo w eine F -analytische Funktion bedeutet, ist dann und nur dann nach de Rham harmonisch, wenn die Funktion $w(z)$ der Differentialgleichung

$$\Delta w = 0$$

genügt, das heißt, wenn jede Komponente von w eine harmonische Funktion ist.

Wir werden nun diejenigen Algebren bestimmen, in denen diese Bedingung stets erfüllt ist. Die Funktionen

$$w_i = \frac{1}{2} (x_i - c_i x_0)^2 ,$$

$$w_{ik} = \frac{1}{2} [(x_i - c_i x_0)(x_k - c_k x_0) + (c_k - c_k x_0)(x_i - c_i x_0)] ,$$

wie überhaupt alle p -Funktionen [10] sind F -analytisch, und es ist

$$\Delta w_i = c_0 + c_i^2 , \quad \Delta w_{ik} = c_i c_k + c_k c_i \quad (i \neq k) .$$

Soll also für jede F -analytische Funktion w $\Delta w = 0$ gelten, so muß

$$c_i^2 = -c_0 , \quad c_i c_k + c_k c_i = 0 \quad (i, k = 1, \dots, n-1, \quad i \neq k)$$

sein. Es gilt somit der

Hauptsatz. Die zu den F -analytischen Funktionen gehörenden Differentialformen $\omega = dz w$ sind dann und nur dann harmonisch nach de Rham, wenn das Linearsystem \mathfrak{L}_z mit dem erzeugenden Linearsystem einer elliptischen Cliffordschen Algebra zusammenfällt, in diesem Falle sind die Funktionen immer beidseitig analytisch. Außer für die gewöhnlichen komplexen Zahlen sind die Definitionen von Hodge und de Rham für F -analytische Funktionen nicht äquivalent.

5. Pseudo-analytische Funktionen

Es wurden schon verschiedene Systeme von partiellen Differentialgleichungen mit funktionentheoretischen Hilfsmitteln untersucht. Wir werden zuerst einen kurzen Überblick über diejenigen Resultate geben,

⁶⁾ Vergleiche [27], S. 22.

die uns hauptsächlich beschäftigen. Es sei immer vorausgesetzt, daß die betrachteten Funktionen die nötigen Voraussetzungen bezüglich Eindeutigkeit, Differenzierbarkeit usw. erfüllen.

a) Sei $p(x, y)$ eine im betrachteten Bereich positive Funktion, dann heißt die Funktion $f(z) = u + iv$ der komplexen Variablen $z = x + iy$ pseudo-analytisch, falls

$$p u_x - v_y = 0, \quad v_x + p u_y = 0. \quad (5,1)$$

Solche Funktionen wurden von *Bergman* [19], *Polozij* [24] und *Bers* [22] untersucht. Für uns sind hier speziell die Resultate von *Polozij* wichtig: Sind u^* , v^* beliebige Funktionen von x und y ; $u + iv$ eine Lösung von (5,1), so gilt

$$\begin{aligned} & \int_S (u^* v - v^* u p) dx + (u^* u p + v^* v) dy \\ &= \iint_T \{u[(p u^*)_x + (p v^*)_y] + v[v_x^* - v_y^*]\} dx dy. \end{aligned}$$

T : Gebiet der z -Ebene, S : Rand von T . Aus diesem Integralsatz folgt nach einer längeren Rechnung die Darstellungsformel

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_S u d\tilde{\Omega}(z, \zeta) + i v d\Omega(z, \zeta),$$

wo der Punkt ζ im Innern von S liegt und Ω und $\tilde{\Omega}$ aus Fundamentallösungen der Gleichungen

$$\begin{aligned} L(u) &= (p u_x)_x + (p u_y)_y = 0 \\ \tilde{L}(u) &= \left(\frac{u_x}{p}\right)_x + \left(\frac{u_y}{p}\right)_y = 0 \end{aligned} \quad (5,2)$$

gebildete, komplexe Funktionen sind.

b) Eine zweite Klasse von Funktionen wurde hauptsächlich von *Bers* und *Gelbart* [20, 21] untersucht. Eine Funktion $f(z) = u + iv$ heißt Σ -monogen, wenn ihr Real- und Imaginärteil folgenden Differentialgleichungen genügen:

$$\sigma_1(x) u_x = \tau_1(y) v_y, \quad \sigma_2(x) u_y = -\tau_2(y) v_x.$$

$\sigma_1(x)$, $\sigma_2(x)$, $\tau_1(y)$, $\tau_2(y)$ werden als positiv vorausgesetzt. Genügen u und v dem Gleichungssystem

$$\frac{u_x}{\sigma_2} = v_y \tau_1; \quad \frac{u_y}{\sigma_1} = -v_x \tau_2, \quad (5,2')$$

so heißt die Funktion $f(z) = u + iv$ Σ' -monogen. Das Integral

$$\int_{z_0}^z f(z) d_{\Sigma} z = \int_{z_0}^z (u \sigma_2 dx - v \tau_2 dy) + i \int_{z_0}^z \left(\frac{v}{\sigma_1} dx + \frac{u}{\tau_1} dy \right) \quad (5,3)$$

ist vom Wege unabhängig, wenn $f(z)$ Σ -monogen ist. Es ist eine Σ' -monogene Funktion der oberen Grenze. Die Σ -Ableitung einer Σ -monogenen Funktion $f(z)$ ist definiert als

$$f^{(1)}(z) = \frac{d_{\Sigma} f}{d_{\Sigma} z} = \sigma_1 u_x - i \frac{v_x}{\sigma_2} = \tau_1 v_y - i \frac{u_y}{\tau_2}, \quad (5,4)$$

die Σ -Ableitung ist Σ' -monogen. Die entsprechenden Operationen sind auch für die Σ' -monogenen Funktionen definiert. Eine wichtige Klasse von Σ - respektiv Σ' -monogenen Funktionen sind die formalen Potenzfunktionen $a \cdot Z^{(n)}(z_0, z)$ (es handelt sich nicht um ein Produkt, sondern um ein einziges Symbol) respektiv $a \cdot \tilde{Z}^{(n)}(z_0, z)$. Diese sind durch die folgenden Rekursionsformeln definiert

$$\begin{aligned} a \cdot Z^{(0)} &= a \cdot \tilde{Z}^{(0)} = a \quad (a \text{ beliebige komplexe Zahl}), \\ a \cdot Z^{(n)}(z_0, z) &= n \int_{z_0}^z a \cdot \tilde{Z}^{(n-1)}(z_0, \zeta) d_{\Sigma} \zeta, \\ a \cdot \tilde{Z}^{(n)}(z_0, z) &= n \int_{z_0}^z a \cdot Z^{(n-1)}(z_0, \zeta) d_{\Sigma} \zeta. \end{aligned} \quad (5,5)$$

Jede Σ -monogene Funktion kann in eine konvergente Reihe nach den $a \cdot Z^{(n)}$ entwickelt werden.

c) *Lukomskaja* [23] betrachtet ein System von Differentialgleichungen der Form

$$\begin{aligned} c_1 u_x + e_1 v_x &= a_1 u_y + b_1 v_y, \\ c_2 u_x + e_2 v_x &= a_2 u_y + b_2 v_y. \end{aligned} \quad (5,6)$$

Er setzt voraus, daß

$$\frac{\partial c_i}{\partial x} = \frac{\partial a_i}{\partial y}, \quad \frac{\partial e_i}{\partial x} = \frac{\partial b_i}{\partial y}, \quad (5,7)$$

und daß gewisse Determinanten nicht verschwinden. Sind u und v Lösungen von (5,6), so heißt auch $f(z) = u + iv$ Lösung von (5,6) und es kann das folgende, vom Wege unabhängige Σ -Integral

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^z f(z) d_{\Sigma} z &= \int_{z_0}^z (a_2 u + b_2 v) dx + (c_2 u + e_2 v) dy \\ &+ i \int_{z_0}^z (a_1 u + b_1 v) dx + (c_1 u + e_1 v) dy \end{aligned} \quad (5,8)$$

definiert werden. Dieses Integral ist selbst wieder eine Lösung von (5,6), falls

$$\begin{aligned} e_2 a_1 &= b_2 c_1, & a_1(e_1 - c_2) &= c_1(b_1 - a_2), \\ b_2(e_1 - c_2) &= e_2(b_1 - a_2) \end{aligned} \quad (5,9)$$

gilt, was vorausgesetzt wird. Die Σ -Ableitung wird geschrieben als

$$f_{\Sigma}^{(1)}(z) = -\frac{b_1 u_x - b_2 v_x}{a_1 b_2 - a_2 b_1} + i \frac{a_1 u_x - a_2 v_x}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad (5,10)$$

und eine längere Rechnung zeigt, daß auch diese Funktion wieder Lösung von (5,6) ist. Die formalen Potenzfunktionen werden entsprechend, wie oben definiert

$$\begin{aligned} a \cdot Z^{(0)}(z_0, z) &= a \\ a \cdot Z^{(n)}(z_0, z) &= n \int_{z_0}^z a Z^{(n-1)}(z_0, z) d_{\Sigma} z. \end{aligned} \quad (5,5')$$

Nach dieser knappen Zusammenstellung der Resultate der einzelnen Autoren beabsichtigen wir zu zeigen, daß sich diese Theorie viel einfacher und übersichtlicher darstellen läßt, wenn man von der komplexen Schreibweise — die in keinem Zusammenhang steht mit der Metrik der betrachteten Differentialgleichung — zur Matrizenschreibweise übergeht. Es sei gegeben ein System von Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten $a_i(x, y)$ und $b_i(x, y)$; statt des Zahlenpaares (x, y) werden wir z schreiben:

$$\begin{aligned} a_1 u_x + a_2 v_x - (b_1 u_y + b_2 v_y) &= 0, \\ a_3 u_x + a_4 v_x - (b_3 u_y + b_4 v_y) &= 0. \end{aligned} \quad (5,11)$$

Wir führen die folgenden Matrizen ein

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}, \quad w(z) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix};$$

dann können die Gleichungen (5,11) geschrieben werden als

$$\left(A \frac{\partial}{\partial x} - B \frac{\partial}{\partial y} \right) w = 0.$$

Die Spaltenmatrix $w(z)$ werde auch Lösung von (5,11) genannt. Die zu dieser Gleichung gehörige Differentialform ist

$$\omega = (B dx + A dy) w(z);$$

ω ist eine Spaltenmatrix. Die Bedingung $d\omega = 0$ ergibt

$$\{(A_x - B_y)w + (A w_x - B w_y)\}[dx dy] = 0 ,$$

und ist daher mit (5,11) nur äquivalent, falls

$$A_x = B_y . \quad (5,12)$$

Diese Bedingung ist bei *Bers* und *Gelbart* erfüllt, wenn man unter A und B die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\tau_2 \\ \frac{1}{\tau_1} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_1} \end{pmatrix}$$

versteht, da die Funktionen τ nur von y , σ aber nur von x abhängen. *Lukomskaja* gibt diese Bedingungen in Komponentenschreibweise: (5,7); die Matrizen A und B sind in diesem Spezialfall natürlich

$$A = \begin{pmatrix} c_2 & e_2 \\ c_1 & e_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix} .$$

Aus $A_x = B_y$ folgt die Existenz einer Matrix Z , die die Eigenschaft hat: $Z_x = B$, $Z_y = A$, das heißt es ist das Differential

$$dZ = B dx + A dy$$

ein vollständiges Differential. Da also das äußere Differential von $\omega = dZ w(z)$ verschwindet, ist das Integral

$$\int dZ w(z)$$

unabhängig vom Weg. Dieses Integral fällt in den beiden Spezialfällen mit dem Σ -Integral (5,3) respektiv (5,8) zusammen, wie man durch Einsetzen leicht bestätigt. Die formalen Produkte $f(z)d_\Sigma z$ gehen in das übliche Produkt von zwei Matrizen über.

1. Integralsatz. *Ist $w(z)$ eine Lösung von (5,11) im Innern und auf dem regulären Rand C eines endlichen Bereiches, so gilt*

$$\int_C dZ w(z) = 0 ,$$

falls $dZ = B dx + A dy$ bedeutet, wo die Matrizen A und B die Bedingung $A_x = B_y$ erfüllen.

Man kann sich von der Voraussetzung $A_x = B_y$ in der folgenden Art befreien. Sei $M(z)$ eine beliebige zweireihige, quadratische Matrix, dann betrachte man die Differentialform

$$\omega = M dZ w ,$$

wo jetzt dZ nur noch eine Schreibweise ist und kein totales Differential mehr bedeutet: $dZ = B dx + A dy$. Es ist

$$d\omega = \{[(MA)_x - (MB)_y] w(z) + M(A w_x - B w_y)\} [dx dy] .$$

Soll $d\omega$ verschwinden, und ist $w(z)$ Lösung von (5,11), so muß

$$(MA)_x - (MB)_y = 0$$

sein ; wir finden das genaue Analogon der rechts-analytischen Funktionen. Spezialisiert man die Matrizen A und B auf

$$A = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p & 0 \end{pmatrix} , \quad (5.13)$$

so erhält man die Differentialgleichungen von *Polozij*. Seine Integralsätze sind die einfachsten Spezialfälle der hier herzuleitenden.

Satz. *Ist $w(z)$ Lösung von (5,11) und genügt die quadratische Matrix M der Differentialgleichung $(MA)_x - (MB)_y = 0$, so verschwindet das Integral*

$$\int_C M dZ w(z)$$

falls C eine reguläre geschlossene Kurve bedeutet, auf der und in deren Innern M und w die gestellten Bedingungen erfüllen.

Die Differentialgleichung (5,11) induziert eine Metrik, deren erste Fundamentalform wir berechnen wollen. Ist T eine beliebige zweireihige Matrix, so ist die adjungierte Matrix \bar{T} dadurch definiert, daß

$$T \bar{T} = \bar{T} T = |T| E ,$$

wo $|T|$ die Determinante von T und E die Einheitsmatrix bedeutet. Man erhält \bar{T} bekanntlich, indem man die Glieder der Hauptdiagonalen vertauscht und bei den beiden Gliedern der Gegendiagonalen das Vorzeichen wechselt. Ist $dZ = B dx + A dy$, so ist

$$d\bar{Z} = \bar{B} dx + \bar{A} dy .$$

Das Produkt der beiden ist die erste Fundamentalform unserer Metrik, multipliziert mit E

$$\begin{aligned} ds^2 \cdot E &= (B dx + A dy) (\bar{B} dx + \bar{A} dy) \\ &= B\bar{B} dx^2 + (A\bar{B} + B\bar{A}) dx dy + A\bar{A} dy^2 . \end{aligned}$$

Die Matrix $A\bar{B} + B\bar{A} = \bar{A}B + \bar{B}A$ ist immer ein Vielfaches von E

$$A\bar{B} + B\bar{A} = (a_1 b_4 - b_3 a_2 + a_4 b_1 - b_2 a_3) E .$$

Wir setzen für das folgende immer voraus, daß die Metrik — und daher auch das System (5,11) — elliptisch ist; es ist leicht zu sehen, welche Sätze auch für beliebige Systeme gültig bleiben. Wir schreiben zur Abkürzung

$$a_1 b_4 - b_3 a_2 = F_1 , \quad a_4 b_1 - b_2 a_3 = F_2$$

und also

$$ds^2 = |B| dx^2 + (F_1 + F_2) dx dy + |A| dy^2 .$$

Es sei nun

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix} ,$$

dann schreibt sich die Gleichung $(MA)_x - (MB)_y = 0$ als

$$\begin{pmatrix} (m_1 a_1 + m_2 a_3)_x - (m_1 b_1 + m_2 b_3)_y & (m_1 a_2 + m_2 a_4)_x - (m_1 b_2 + m_2 b_4)_y \\ (m_3 a_1 + m_4 a_3)_x - (m_3 b_1 + m_4 b_3)_y & (m_3 a_2 + m_4 a_4)_x + (m_3 b_2 + m_4 b_4)_y \end{pmatrix} = 0 .$$

Das Verschwinden der Glieder in der Gegendiagonalen ist äquivalent mit den folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} (m_1 a_2 + m_2 a_4) &= \varphi_y & (m_3 a_1 + m_4 a_3) &= \psi_y , \\ (m_1 b_2 + m_2 b_4) &= \varphi_x & (m_3 b_1 + m_4 b_3) &= \psi_x . \end{aligned}$$

Wir drücken die Größen m_i durch φ und ψ aus:

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{a_4 \varphi_x - b_4 \varphi_y}{N_1} , & m_2 &= \frac{-a_2 \varphi_x + b_2 \varphi_y}{N_1} \\ m_3 &= \frac{-a_3 \psi_x + b_3 \psi_y}{N_2} , & m_4 &= \frac{a_1 \psi_x - b_1 \psi_y}{N_2} \end{aligned} \quad (5,14)$$

wo $N_1 = a_4 b_2 - a_2 b_4$ und $N_2 = a_1 b_3 - a_3 b_1$. Wir setzen voraus, daß weder N_1 noch N_2 verschwindet. Damit auch die Glieder in der Hauptdiagonalen verschwinden, müssen φ und ψ den folgenden Gleichungen genügen

$$\begin{aligned} \left(\frac{|A| \varphi_x - F_1 \varphi_y}{N_1} \right)_x + \left(\frac{|B| \varphi_y - F_2 \varphi_x}{N_1} \right)_y &= 0 , \\ \left(\frac{|A| \psi_x - F_2 \psi_y}{N_2} \right)_x + \left(\frac{|B| \psi_y - F_1 \psi_x}{N_2} \right)_y &= 0 . \end{aligned} \quad (5,15)$$

Diese Gleichungen weisen eine große Ähnlichkeit mit der *Beltramischen* Gleichung unserer Metrik auf. Aus (5,14) erhält man sofort die allgemeine Form der Matrix M .

Satz. *Ist die Matrix M Lösung der Gleichung*

$$(MA)_x - (MB)_y = 0 ,$$

dann kann M in der Form

$$M = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix}_x \begin{pmatrix} \frac{a_4}{N_1} & -\frac{a_2}{N_1} \\ -\frac{a_3}{N_2} & \frac{a_1}{N_2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix}_y \begin{pmatrix} \frac{b_4}{N_1} & -\frac{b_2}{N_1} \\ -\frac{b_3}{N_2} & \frac{b_1}{N_2} \end{pmatrix}$$

geschrieben werden, wo φ und ψ Lösungen von (5,15) sind. Jede so erzeugte Matrix ist auch Lösung dieser Gleichung.

Um den zweiten Integralsatz zu erhalten, hat man offenbar als Funktionen φ und ψ entsprechend normierte Fundamentallösungen der Gleichungen (5,15) einzusetzen und erhält $w(z)$ als Funktion seiner Randwerte

$$w(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int M dZ w(z) .$$

Durch Spezialisieren auf die Matrizen (5,13) erhält man die Integraldarstellung von *Polozij*. Wir führen die Rechnung nur für diesen Fall explizit durch. Die Gleichungen (5,15) gehen in (5,2) über, es seien

$$\varphi(z, \zeta) = \varphi_1(z, \zeta) \log r + \varphi_2(z, \zeta)$$

$$\psi(z, \zeta) = \psi_1(z, \zeta) \log r + \psi_2(z, \zeta)$$

deren Fundamentallösungen und $r = |z - \zeta|$ (die Metrik ist hier euklidisch). Weiter sei die Normierungsbedingung

$$\varphi_1(\zeta, \zeta) = \frac{1}{p(\zeta)} , \quad \psi_1(\zeta, \zeta) = -p(\zeta) .$$

Es ist

$$M = \begin{pmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \frac{\psi_y}{p} & -\frac{\psi_x}{p} \end{pmatrix} .$$

Es sei ζ ein fester Punkt im Innern von C , wir umschließen diesen durch einen kleinen Kreis k . Auf k führen wir Polarkoordinaten ein.

Es ist

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_k M dZ w(z) = 2\pi w(\zeta) ,$$

damit ist für den Spezialfall die Formel explizit hergeleitet.

Jetzt kehren wir zur Betrachtung des 1. Integralsatzes zurück, und setzen von nun an immer voraus, daß $A_x = B_y$. Durch das vom Wege unabhängige Integral

$$\int_{z_0}^z dZ w = V(z)$$

wird eine Funktion $V(z)$ — als Spaltenmatrix — definiert, deren partiellen Ableitungen

$$V_x = B w , \quad V_y = A w$$

sind. $V(z)$ genügt der Differentialgleichung

$$\left(B^{-1} \frac{\partial}{\partial x} - A^{-1} \frac{\partial}{\partial y} \right) V = 0 .$$

Es stellt sich die Frage, wann $V(z)$ wieder Lösung von (5,11) ist. Dies ist offenbar nur dann der Fall, wenn eine Matrix T so existiert, daß

$$T \left(B^{-1} \frac{\partial}{\partial x} - A^{-1} \frac{\partial}{\partial y} \right) \equiv A \frac{\partial}{\partial x} - B \frac{\partial}{\partial y}$$

ist. Man erhält die Gleichungen

$$TB^{-1} = A , \quad TA^{-1} = B$$

und somit

$$T = AB = BA .$$

Satz. *Das Σ -Integral einer Lösung von (5,11) ist dann und nur dann wieder Lösung von (5,11), wenn die beiden Matrizen B und A vertauschbar sind*

$$AB = BA .$$

In Komponenten geschrieben ergibt diese Bedingung das Gleichungssystem (5,9) von *Lukomskaja*.

Wir kommen zur Definition der Σ -Ableitung. Zu diesem Zwecke betrachten wir den Ausdruck

$$\begin{aligned} (dZ)^{-1} dw &= \\ &= \frac{1}{(ds)^2} d\bar{Z} dw = \frac{1}{(ds)^2} \{ \bar{B} w_x dx^2 + (\bar{A} w_x + \bar{B} w_y) dx dy + \bar{A} w_y dy^2 \} , \end{aligned}$$

und behaupten, daß dieser richtungsunabhängig ist. Setzt man überall

$$w_y = B^{-1} A w_x = A B^{-1} w_x ,$$

so ergibt sich

$$(dZ)^{-1} dw = \frac{1}{(ds)^2} (\bar{B} dx^2 + (\bar{A} + B^{-1} A \bar{B}) dx dy + B^{-1} A \bar{A}) w_x = B^{-1} w_x .$$

In Komponenten ist dies identisch mit der Formel (5,10). Andere Umformungen ergeben

$$B^{-1} w_x = A^{-1} w_y = \frac{1}{2} (B^{-1} w_x + A^{-1} w_y) ,$$

was im klassischen Fall der Beziehung

$$\frac{d}{dz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

entspricht. Wir beweisen weiter, daß diese Ableitung einer Lösung von (5,11) wieder Lösung derselben Gleichung ist.

$$\left(A \frac{\partial}{\partial x} - B \frac{\partial}{\partial y} \right) B^{-1} w_x = A (B^{-1} w_x)_x - B (B^{-1} w_x)_y ,$$

da $A_x = B_y$ gilt, ist dies gleich

$$(A B^{-1} w_x)_x - (B B^{-1} w_x)_y = (A B^{-1} w_x)_x - w_{xy} = 0 ;$$

denn die Matrizen A und B sind vertauschbar und es ist $A w_x = B w_y$.

Satz. Für die Lösungen der Gleichung (5,11) existiert eine Σ -Ableitung, die richtungsunabhängig und selbst wieder Lösung von (5,11) ist

$$\frac{d_{\Sigma} w}{d_{\Sigma} z} = (dZ)^{-1} dw = B^{-1} w_x = A^{-1} w_y = \frac{1}{2} (B^{-1} w_x + A^{-1} w_y) .$$

Es ist bemerkenswert, daß auch im Falle von variablen Koeffizienten, die Bedingung für die Existenz einer Integralfunktion und einer Ableitung im wesentlichen die Vertauschbarkeit der beiden Matrizen A und B ist.

Auch die Definition der Potenzfunktion (5,5') wird durchsichtiger. Wir betrachten die quadratische Matrix

$$Z = \int_{z_0}^z (B dx + A dy) E ;$$

diese genügt offenbar der Differentialgleichung

$$AZ_x - BZ_y = 0 ,$$

ebenso wie alle Σ -Integrale von $Z = Z^{(1)}$

$$Z^{(n)} = n \int_{z_0}^z dZ Z^{(n-1)} \quad (n = 1, 2, \dots) ,$$

wobei wir unter $Z^{(0)}$ die Einheitsmatrix E verstehen. Es sei $a = \alpha + i\beta$, dann erhält man die formale Potenzfunktion $a \cdot Z^{(n)}(z_0, z)$ in Matrixschreibweise als

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} .$$

Auch hier geht das formale Produkt in ein Produkt von zwei Matrizen über.

Der zweite interessante Spezialfall der Differentialgleichung (5,11) ist nun der, wo

$$A\bar{B} + B\bar{A} = 0$$

ist, das heißt wo es sich um eine orthogonale Metrik handelt. Da die Matrizen bei *Bers* und *Gelbart* diese Bedingung erfüllen, sind ihre Funktionen in den von uns betrachteten enthalten. Die Differentialgleichung

$$B^{-1}V_x - A^{-1}V_y = 0$$

des Σ -Integrales

$$V(z) = \int dZ w(z)$$

geht nach Linksmultiplikation mit $\bar{A}B = -\bar{B}A$ über in

$$\left(\bar{A} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{B} \frac{\partial}{\partial y} \right) V(z) = 0 . \quad (5,16)$$

Eine Funktion, die dieser Differentialgleichung genügt, heißt im Spezialfall von *Bers* und *Gelbart* Σ' -monogen. Das ergibt den

Satz. *Das Σ -Integral einer Lösung von (5,11) ist Lösung von (5,16), wenn die Matrizen A und B die Bedingung*

$$A\bar{B} + B\bar{A} = 0$$

erfüllen.

Die zu (5,16) gehörige Differentialform ist

$$\omega' = (-\bar{B} dx + \bar{A} dy) V(z) .$$

Es gilt

$$d\omega' = \{(\bar{B}_y + \bar{A}_x)V + (\bar{A}V_x + \bar{B}V_y)\} [dx dy] ;$$

soll $d\omega' = 0$ eine Folge von (5,16) sein, so müssen die Matrizen A und B die Bedingung

$$\bar{B}_y + \bar{A}_x = 0 ,$$

oder, was dasselbe ist

$$B_y + A_x = 0 ,$$

erfüllen. Zusammen mit der Bedingung (5,12) ergibt sich

$$A_x \pm B_y = 0 ,$$

das heißt, die Matrix A darf nur von y , die Matrix B nur von x abhängig sein. Dies setzen wir im folgenden voraus, dann ist das Integral

$$w(z) = \int_{z_0}^z d\tilde{Z} V(z) ,$$

wo $V(z)$ Lösung von (5,16) und

$$d\tilde{Z} = -\bar{B}dx + \bar{A}dy$$

ist, vom Wege unabhängig und als Funktion der oberen Grenze Lösung von (5,11): Es ist

$$w_x = -\bar{B}V , \quad w_y = \bar{A}V$$

also

$$\bar{B}^{-1}w_x + \bar{A}^{-1}w_y = |B|^{-1}B w_x + |A|^{-1}A w_y = 0 .$$

Nach Multiplikation mit $|AB|$ erhält man

$$|A|B w_x + |B|A w_y = B\bar{A}A w_x + A\bar{B}B w_y = 0 ,$$

und, da $A\bar{B} = -B\bar{A}$

$$B\bar{A}(A w_x - B w_y) = 0 ,$$

was mit (5,11) äquivalent ist. In Komponenten geschrieben erhält man das Σ' -Integral von *Bers* und *Gelbart*.

Σ - und Σ' -Ableitung:

Satz. Der Quotient

$$(d\tilde{Z})^{-1}dw ,$$

wo $w(z)$ Lösung von (5,11) ist, ist unabhängig von der Richtung und fällt mit der Σ -Ableitung von w zusammen. Man erhält

$$(d\tilde{Z})^{-1}dw = \frac{d_\Sigma w}{d_\Sigma z} = -(\bar{B})^{-1}w_x = (\bar{A})^{-1}w_y = \frac{1}{2}(-\bar{B}^{-1}w_x + \bar{A}^{-1}w_y) .$$

Entsprechend sei $V(z)$ Lösung von (5,16), dann ist

$$(dZ)^{-1} dV = BV_x = AV_y = \frac{1}{2} (BV_x + AV_y) = \frac{d_{\Sigma'} V}{d_{\Sigma'} z} ,$$

also gleich der Σ' -Ableitung von $V(z)$.

Wir beweisen nur den ersten Teil des Satzes, da derjenige des zweiten Teiles analog ist. Es ist

$$\begin{aligned} (d\tilde{Z})^{-1} dw &= \frac{-B dx + A dy}{(ds)^2} dw \\ &= \frac{1}{(ds)^2} \{-B w_x dx^2 + (A w_x - B w_y) dx dy + A w_y dy^2\} . \end{aligned}$$

Der Koeffizient von $dx dy$ verschwindet wegen (5,11), und es gilt

$$A w_y = A B^{-1} A w_x .$$

Somit folgt

$$(d\tilde{Z})^{-1} dw = \frac{1}{(ds)^2} (B\bar{B} dx^2 - AB^{-1} A\bar{B} dy^2) (-\bar{B}^{-1} w_x) ,$$

was wegen $A\bar{B} = -B\bar{A}$ gleich

$$-\bar{B}^{-1} w_x$$

ist.

Da dZ und $d\tilde{Z}$ nach Voraussetzung vollständige Differentiale sind, kann man wieder die formalen Potenzfunktionen definieren als

$$Z^{(0)} = \tilde{Z}^{(0)} = E$$

$$Z^{(n)} = n \int_{z_0}^z d\tilde{Z} \tilde{Z}^{(n-1)}$$

$$\tilde{Z}^{(n)} = n \int_{z_0}^z dZ Z^{(n-1)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) ,$$

ist $a = \alpha + i\beta$ eine beliebige komplexe Zahl, so entsprechen den Funktionen (5,5) $a \cdot Z^{(n)}(z_0, z)$ respektiv $a \cdot \tilde{Z}^{(n)}(z_0, z)$ die Matrizen

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad \tilde{Z}^{(n)} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} .$$

Man kann die Differentialgleichung (5,11), falls

$$A\bar{B} + B\bar{A} = 0$$

ist, auf die folgende Normalform transformieren. Da

$$ds^2 = |B| dx^2 + |A| dy^2$$

ist, führe man die neuen Variablen

$$\xi = \int \sqrt{|B|} dx, \quad \eta = \int \sqrt{|A|} dy$$

ein; B hängt nur von x und A nur von y ab. Das ergibt

$$A \frac{\partial}{\partial x} - B \frac{\partial}{\partial y} \equiv A \sqrt{|B|} \frac{\partial}{\partial \xi} - B \sqrt{|A|} \frac{\partial}{\partial \eta},$$

das heißt die Differentialgleichung schreibt sich als

$$\left(A_1 \frac{\partial}{\partial \xi} - B_1 \frac{\partial}{\partial \eta} \right) w = 0,$$

wo

$$A_1 = \frac{A}{\sqrt{|A|}}, \quad B_1 = \frac{B}{\sqrt{|B|}}$$

bedeutet. Die Matrizen A_1 und B_1 haben die Eigenschaften

$$|A_1| = |B_1| = 1, \quad \bar{A}_1 = A_1^{-1}, \quad \bar{B}_1 = B_1^{-1}, \quad A_1 \bar{B}_1 + B_1 \bar{A}_1 = 0.$$

Die neue Metrik ist

$$ds^2 = (B_1 dx + A_1 dy)(\bar{B}_1 dx + \bar{A}_1 dy) = dx^2 + dy^2.$$

Im Falle der Matrizen von *Bers* und *Gelbart* ergibt sich

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\tau_1 \tau_2} \\ \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\sigma_1 \sigma_2}} \end{pmatrix}.$$

Damit ist bewiesen, daß die Σ -monogenen Funktionen ein Spezialfall der von *Polozij* behandelten Funktionen sind. Zu den gewöhnlichen analytischen Funktionen kommt man offenbar für

$$\tau_2 = \frac{1}{\tau_1}; \quad \sigma_2 = \frac{1}{\sigma_1}.$$

Wir stellen uns zum Schluß noch die Frage, zu welcher Differentialgleichung die zur Differentialform

$$\omega = (B dx + A dy) w$$

adjungierte Differentialform ω^* gehört. Da die Riemannsche Metrik

$$ds^2 = |B| dx^2 + 2F dx dy + |A| dy^2, \quad F = A\bar{B} + B\bar{A}$$

vorliegt, ist die zu $\alpha = b dx + a dy$ adjungierte Form definiert als

$$\alpha^* = b^* dx + a^* dy,$$

wo

$$b^* = \frac{Fb - |B|a}{\sqrt{|AB| - F^2}}, \quad a^* = \frac{|A|b - Fa}{\sqrt{|AB| - F^2}}.$$

Es ist somit

$$\begin{aligned} \omega^* &= \frac{1}{2\sqrt{|AB| - F^2}} \{[(A\bar{B} + B\bar{A})B - 2A\bar{B}B] dx + [(2B\bar{A}A - (B\bar{A} + A\bar{B})) dy]\} \\ &= \frac{B\bar{A} - A\bar{B}}{2\sqrt{|AB| - F^2}} (B dx + A dy). \end{aligned}$$

Satz. Die adjungierte Form ω^* ist bis auf einen Faktor mit ω identisch

$$\omega^* = \frac{B\bar{A} - A\bar{B}}{2\sqrt{|AB| - F^2}} \omega,$$

somit gehören die Differentialformen ω und ω^* zu derselben Differentialgleichung.

LITERATURVERZEICHNIS

F-analytische Funktionen:

- [1] *Rud. Fueter*, Über die analytische Darstellung der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen, Comment. Math. Helv. Bd. 7, p. 307.
- [2] —, Integralsätze für reguläre Funktionen einer Quaternionenvariablen, Comment. Math. Helv. Bd. 10, p. 306.
- [3] —, Über einen Hartogsschen Satz, Comment. Math. Helv. Bd. 12, p. 75.
- [4] —, Über einen Hartogsschen Satz in der Theorie der analytischen Funktionen von n komplexen Variablen, Comment. Math. Helv. Bd. 14, p. 394.
- [5] —, Die Funktionentheorie der Diracschen Differentialgleichungen, Comment. Math. Helv. Bd. 16, p. 19.
- [6] —, Über die Funktionentheorie in einer hyperkomplexen Algebra, Elemente der Math. Bd. 3, p. 89.
- [7] *E. Boreiß*, Hyperbolische Systeme von partiellen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, Comment. Math. Helv. Bd. 24, p. 291.
- [8] *H. G. Haefeli*, Hyperkomplexe Differentiale, Comment. Math. Helv. Bd. 20, p. 382.
- [9] *A. Kristzen*, Funktionentheorie und Randwertproblem der Diracschen Differentialgleichungen, Comment. Math. Helv. Bd. 20, p. 333.

- [10] —, Elliptische Systeme von partiellen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, *Comment. Math. Helv.* Bd. 23, p. 243.
- [11] *W. Nef*, Funktionentheorie einer Klasse von hyperbolischen und ultrahyperbolischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, *Comment. Math. Helv.* Bd. 17, p. 83.
- [12] *Frl. M. Schaad*, Über eine Klasse von rechtsregulären Funktionen mit $2n$ reellen Variablen, Dissertation Zürich 1944.
- [13] *A. Staub*, Integralsätze hyperkomplexer, regulärer Funktionen von $2n$ reellen Variablen, Dissertation Zürich 1946.

S-analytische Funktionen:

- [14] *M. Degtereva*, Elemente der Theorie der analytischen Funktionen im Zentrum linearer Algebren, *Ber. Akad. Wiss. UdSSR.* Bd. 60.
- [15] —, Zur Frage des Aufbaus der Theorie der analytischen Funktionen in linearen Algebren, *Ber. Akad. Wiss. UdSSR.* Bd. 61.
- [16] *F. Hausdorff*, Zur Theorie der Systeme komplexer Zahlen, *Ber. Sächs. Akad. Wiss.* Bd. 52, p. 43.
- [17] *G. Scheffers*, Verallgemeinerung der Grundlagen der gewöhnlichen komplexen Funktionen, *Ber. Sächs. Akad. Wiss.* Bd. 45, p. 828, Bd. 46, p. 120.
- [18] *J. A. Ward*, A theory of analytic functions in linear associative algebras, *Duke math. J.* Bd. 7, p. 233.

Σ -monogene und verwandte Funktionen:

- [19] *S. Bergman*, Functions satisfying certain partial differential equations of elliptic type and their representation, *Duke math. J.* Bd. 14, p. 349.
- [20] *L. Bers* und *A. Gelbart*, On a class of functions defined by partial differential equations, *Transactions A. M. S.* Bd. 56, p. 67.
- [21] —, On a class of differential equations in mechanics of continua, *Quarterly Applied Math.* Bd. 1, p. 168.
- [22] *L. Bers*, Partial differential equations and generalized analytic functions, *Proc. nat. Acad. Sci. USA.* Bd. 36, p. 130.
- [23] *M. A. Lukomskaja*, Über eine Verallgemeinerung einer Klasse analytischer Funktionen, *Doklady Akad. Nauk*, Bd. 73 (1950).
- [24] *G. N. Polozij*, Eine Verallgemeinerung der Cauchyschen Integralformel, *Mat. Sbornik* Bd. 24, p. 375.

Andere Gebiete:

- [25] *L. Ahlfors*, Open Riemann surfaces and extremal problems on compact subregions, *Comment. Math. Helv.* Bd. 24, p. 100.
- [26] *E. Cartan*, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Paris, Gauthiers-Villars 1928.
- [27] *G. de Rham* und *P. Bidal*, Les formes différentielles harmoniques, *Comment. Math. Helv.* Bd. 19, p. 1.
- [28] *W. V. D. Hodge*, *The theory and applications of harmonic integrals*, Cambridge Univ. Press. 1941.
- [29] *E. Martinelli*, Alcuni teoremi integrali per le funzioni analitiche di più variabili complesse, *Mem. della R. Accad. d'Italia* Bd. 9, p. 269.

(Eingegangen den 24. April 1951.)