THÉORIE DE FERMETURE ET LE PROBLÈME DE REPRÉSENTATION APPROCHÉE DES FONCTIONS CONTINUES À L'AIDE DE POLYNOMES DE TCHEBYCHEF.

PAR

W. STEKLOFF,

Vice-président de l'Académie des Sciences de l'URSS (Russie)

à LENINGRAD.

1. Soit

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x), \ldots \tag{1}$$

une suite de fonctions, définies dans un certain intervalle (a, b) et satisfaisant aux conditions

$$\int_a^b p(x)\varphi_k^2(x)\,dx = 1, \quad \int_a^b p(x)\varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx = 0, \quad \text{si } m \neq n, \tag{2}$$

$p(x)$ étant une fonction donnée non négative dans (a, b).

Les conditions (2) étant remplies, nous dirons que la suite (1) est *une suite orthogonale et normale par rapport à la fonction caractéristique* $p(x)$.

2. Soit $f(x)$ une fonction quelconque appartenant à une famille de fonctions, définie par telles ou telles conditions.

Supposons que pour toute fonction $f(x)$, appartenant à la famille considérée, ait lieu l'équation

$$\int_a^b p(x)f^2(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^2, \quad A_k = \int_a^b p(x)f(x)\varphi_k(x)\,dx. \tag{3}$$

J'appelle cette équation »*l'équation de fermeture*» et la suite (1), assujettie à cette condition (3), *suite fermée par rapport aux fonctions de la famille considérée.*

Si l'équation de fermeture subsiste pour toute fonction $f(x)$, assujettie à la seule restriction d'être intégrable dans l'intervalle donné, je dis que, dans ce cas, *la suite* (1) *est absolument fermée.*

La condition de fermeture d'une suite quelconque de fonctions $\varphi_k(x)$ ($k=0, 1, 2, \ldots$), orthogonales et normales, peut être présentée sous la forme suivante:

On sait que *la série du second membre de l'équation* (3) *est toujours convergente, quelle que soit la fonction $f(x)$ intégrable dans (a, b).* Posons, en général,

$$R_n(f) = \int_a^b p(x) f^2(x)\, dx - \sum_{k=0}^{n} A_k^2 > 0. \tag{4}$$

Si

$$R_n(f) < \varepsilon \quad \text{pour} \quad n \geqq n_0, \tag{5}$$

où ε est un nombre positif donné à l'avance, n_0 est un entier suffisamment grand, la suite $\varphi_k(x)$ ($k=0, 1, 2, \ldots$) est fermée par rapport à la famille de fonctions $f(x)$ vérifiant l'inégalité (5).

Si cette inégalité a lieu pour toute fonction $f(x)$, assujettie à la seule condition d'être intégrable dans l'intervalle donné, la suite considérée est absolument fermée.

3. Nous allons employer dans ce qui va suivre les notations suivantes:

La somme

$$\sum_{k=0}^{n} A_k \varphi_k(x)$$

nous la désignerons par $S_n(f)$, la différence

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} A_k \varphi_k(x)$$

par $\varrho_n(f)$.

Si la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \varphi_k(x)$$

converge uniformément dans l'intervalle donné et sa somme est égale à $f(x)$, on aura

$$\varrho_n(f) = \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k \varphi_k(x)$$

et

$$\lim_{n=\infty} \varrho_n(f) = 0.$$

L'intégrale

$$\int_a^b p(x) \varrho_n^2(f) dx$$

nous la désignerons par

$$R_n(f).$$

Elle reste toujours positive et décroît, lorsque n croît indéfiniment, quelle que soit la fonction $f(x)$, intégrable dans l'intervalle donné, et quelle que soit la suite (1), orthogonale et normale. Si la suite de fonctions $\varphi_k(x)$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) est absolument fermée, on a

(6) $$R_n(f) = \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k^2$$

et

$$\lim_{n=\infty} R_n(f) = 0$$

pour toute fonction intégrable dans l'intervalle donné.

4. Soient maintenant $f(x)$ et $\varphi(x)$ deux fonctions quelconques.

Posons

(7) $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k \varphi_k(x) + \varrho_n(f), \quad A_k = \int_a^b p(x) f(x) \varphi_k(x) dx,$$

(8) $$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} B_k \varphi_k(x) + \varrho_n(\varphi), \quad B_k = \int_a^b p(x) \varphi(x) \varphi_k(x) dx.$$

On a, en tenant compte de (2),

$$\int_a^b p(x)\varrho_n(f)\varphi_k(x)\,dx = 0, \quad \int_a^b p(x)\varrho_n(\varphi)\varphi_k(x)\,dx = 0 \tag{9}$$

pour toutes les valeurs de k à partir de $k=0$ jusqu'à $k=n$.

Les égalités (7) et (8) donnent

$$\varrho_n(f) = f(x) - \varphi(x) + \varrho_n(\varphi) - \sum_{k=0}^{n} (A_k - B_k)\varphi_k(x).$$

On en tire, en tenant compte de (9),

$$R_n(f) = \int_a^b p(x)[f(x) - \varphi(x)]\varrho_n(f)\,dx + \int_a^b p(x)\varrho_n(\varphi)\varrho_n(f)\,dx$$

et puis, moyennant l'inégalité de Schwarz-Bouniakowsky

$$\sqrt{R_n(f)} \leqq \sqrt{R_n(\varphi)} + \sqrt{\int_a^b p(x)[f(x) - \varphi(x)]^2\,dx}, \tag{10}$$

l'inégalité ayant lieu, quelles que soient les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$. Nous ferons l'usage de cette inégalité plus loin.

5. Supposons maintenant que la suite (1) de fonctions $\varphi_k(x)$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ soit absolument fermée, que la fonction $f(x)$ soit continue dans l'intervalle (a, b) et telle que la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k\varphi_k(x)$$

converge uniformément.

Soit (α, β) un intervalle pris arbitrairement à l'intérieur de l'intervalle (a, b).

L'équation (7) donne

$$\int_\alpha^\beta p(x)[f(x) - S_n(f)]^2\,dx = \int_\alpha^\beta p(x)\varrho_n^2(f)\,dx.$$

Or

$$\int_{\alpha}^{\beta} p(x)\varrho_n^2(f)\,dx < Q\left(\int_{\alpha}^{\beta} p(x)\varrho_n^2(f)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} < Q\sqrt{R_n(f)},$$

$$Q^2 = \int_a^b p(x)dx.$$

De cette inégalité on tire, en tenant compte de (5) (n° 2)

$$\int_{\alpha}^{\beta} p(x)\varrho_n^2(f)dx < \varepsilon' \quad \text{pour } n \geqq n_0, \tag{11}$$

l'inégalité ayant lieu pour toutes les valeurs de α et β prises arbitrairement à l'intérieur de (a, b).

En remarquant que, d'après les hypothèses faites, $\varrho_n(f)$ est une fonction continue dans (a, b), on tire de (11)

$$\varrho_n^2(f) < \varepsilon'' \qquad \text{pour } n \text{ assez grand,}$$

ε'' étant un nombre positif donné à l'avance, c'est-à-dire

$$\lim_{n=\infty} \varrho_n(f) = 0$$

pour toute valeur de x appartenant à l'intervalle donné. On obtient de la sorte ce théorème:

Toutes les fois que la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k\varphi_k(x), \quad A_k = \int_a^b p(x)f(x)\varphi_k(x)dx,$$

$f(x)$ étant une fonction continue, $\varphi_k(x)$ ($k=0, 1, 2, \ldots$) une suite absolument fermée, converge uniformément dans l'intervalle donné (a, b), sa somme est égale à $f(x)$.

6. Considérons maintenant, pour plus de simplicité, l'intervalle $(-1, +1)$ et une fonction $f(x)$, continue dans cet intervalle avec ses dérivées des deux premiers ordres.

Tout ce que nous allons dire pour l'intervalle $(-1, +1)$ s'étend sans aucune difficulté au cas général d'un intervalle quelconque (a, b). Remplaçons la variable x par la nouvelle variable φ en faisant

$$x = \cos\varphi,$$

φ étant compris entre 0 et π, et posons, pour simplifier l'écriture,

$$f(\cos\varphi) = \Phi(\varphi).$$

Formons la somme

$$S_n(\Phi) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos k\varphi,$$

où

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Phi(\psi)\,d\psi, \quad a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \Phi(\psi)\cos k\psi\,d\psi \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Nous avons ici un cas particulier de la suite (1), où

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad \varphi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos kx$$

et la variable x est remplacée par φ.

Il est évident que cette suite est orthogonale et normale dans l'intervalle $(0, \pi)$ par rapport à la fonction caractéristique $p(\varphi) = 1$. Si l'on suppose que

$$\Phi(\psi) = \Phi(\varphi),$$

on aura

$$S_n(\Phi) = \frac{\Phi(\varphi)}{\pi}.$$

On peut donc écrire

$$\Phi(\varphi) - S_n(\Phi) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\Phi(\varphi) - \Phi(\psi)]\left(1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos k\varphi\cos k\psi\right)d\psi. \tag{12}$$

Moyennant l'égalité élémentaire

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos k\varphi\cos k\psi = \frac{\cos n\varphi\cos(n+1)\psi - \cos(n+1)\varphi\cos n\psi}{\cos\varphi - \cos\psi}$$

on tire de (12)

$$\Phi(\varphi) - S_n(\Phi) = b_{n+1} \cos n\varphi - b_n \cos (n+1)\varphi, \tag{13}$$

où l'on a posé, en général,

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi F(\varphi, \psi) \cos k\psi \, d\psi,$$

$$F(\varphi, \psi) = \frac{\Phi(\varphi) - \Phi(\psi)}{\cos\varphi - \cos\psi}.$$

L'intégration par parties nous donne

$$b_k = -\frac{1}{\pi k} \int_0^\pi \frac{\partial F(\varphi, \psi)}{\partial \psi} \sin k\psi \, d\psi,$$

d'où

$$|b_k| < \frac{1}{\pi k} \int_0^\pi \left| \frac{\partial F(\varphi, \psi)}{\partial \psi} \right| d\psi.$$

Remplaçons maintenant $\cos\varphi$ par x et $\cos\psi$ par y. On obtient

$$|b_k| < \frac{1}{\pi k} \int_{-1}^{+1} \left| \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right| dy,$$

$$F(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

Désignons par M_2 le maximum du module de $f''(x)$ dans l'intervalle $(-1, +1)$. Il est aisé de voir que

$$\left| \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right| < \frac{M_2}{2}.$$

On a donc

$$|b_k| < \frac{M_2}{\pi} \frac{1}{k}.$$

Moyennant cette inégalité on tire de (13)

$$|\Phi(\varphi) - S_n(\Phi)| < 2\frac{M_2}{\pi}\frac{1}{n},$$

ou, en remplaçant $\cos\varphi$ par x,

$$|f(x) - P_n(x)| < \frac{2M_2}{\pi}\frac{1}{n}, \tag{14}$$

où $P_n(x)$ désigne le polynome de degré n de la forme

$$(14_1)\qquad \begin{gathered} P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} T_k(x) \int_{-1}^{+1} f(x)\, T_k(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \\ T_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad T_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos k \arccos x. \end{gathered}$$

Les polynomes $T_k(x)$ ne diffèrent que d'un facteur constant des polynomes de Tchebychef s'écartant le moins possible de zéro dans l'intervalle $(-1, +1)$.

L'inégalité (14), dont nous avons exposé une démonstration tout à fait élémentaire, nous servira comme le point de départ de nos recherches qui vont suivre.

7. Soit $\varphi(x)$ une fonction assujettie à la seule condition d'être continue dans l'intervalle $(-1, +1)$.

Introduisons une fonction auxiliaire de la forme

$$f(x) = \frac{1}{h^2} \int_x^{x+h} d\xi \int_\xi^{\xi+h} \varphi(z)\, dz, \tag{15}$$

où h est un nombre positif arbitraire.

Nous avons ici un cas particulier des fonctions définies par cette formule générale

$$f(x) = \frac{1}{h_1 h_2 \ldots h_m} \int_x^{x+h_1} dx_1 \int_{x_1}^{x_1+h_2} dx_2 \ldots \int_{x_{m-1}}^{x_{m-1}+h_m} \varphi(z)\, dz, \tag{16}$$

h_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ étant des nombres positifs arbitraires.

Ces fonctions auxiliaires sont susceptibles de diverses applications à la solution de plusieurs problèmes d'Analyse et de Mécanique. J'ai introduit une telle fonction pour la première fois dans mon Mémoire »Sur la théorie de fermeture des systèmes de fonctions orthogonales etc.», publié en 1911 dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de St.-Pétersbourg (Vol. XXX, n° 4).

Les applications variées des fonctions dont il s'agit ont été indiquées ensuite dans mes travaux ultérieurs ainsi que dans les recherches récentes de M. N. Günther.

Choisissons, dans (15), le nombre h de façon qu'on ait

$$(17) \qquad |\varphi(x+\delta)-\varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour } \delta \leqq 2h,$$

ce qui est toujours possible, $\varphi(x)$ étant une fonction continue. En remarquant que

$$f(x)-\varphi(x) = \frac{1}{h^2}\int_x^{x+h} d\xi \int_\xi^{\xi+h} \Big(\varphi(z)-\varphi(x)\Big)\, dz,$$

on en tire, en tenant compte de (17),

$$(18) \qquad |f(x)-\varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

l'inégalité ayant lieu pour toute valeur de x dans l'intervalle $(-1, +1)$. La fonction $f(x)$, définie par la formule (15), admet la dérivée seconde

$$f''(x) = \frac{1}{h^2}[\varphi(x+2h)-2\varphi(x+h)+\varphi(x)].$$

On en tire, en ayant égard à (17),

$$|f''(x)| < 2\frac{\varepsilon}{h^2}.$$

8. Appliquons maintenant l'inégalité (14) à la fonction (15). On peut poser dans le cas considéré

$$M_2 = 2\frac{\varepsilon}{h^2}$$

et l'inégalité (14) devient

$$(19) \qquad |f(x)-P_n(x)| < \frac{4}{\pi}\frac{\varepsilon}{h^2 n}.$$

Appliquons ensuite l'inégalité (10) [n° 4] à la même fonction $f(x)$ et supposons que

$$\varphi(x) = P_n(x).$$

On trouve, en remplaçant dans (10) l'entier n par m,

$$\sqrt{R_m(f)} < \sqrt{R_m(P_n)} + \frac{4Q}{\pi}\frac{\varepsilon}{h^2 n}, \tag{20}$$

où l'on a posé

$$Q^2 = \int_{-1}^{+1} p(x)dx.$$

L'inégalité (20) subsiste pour toute suite de fonctions $\varphi_k(x)$ orthogonales, normales et intégrables dans l'intervalle $(-1, +1)$.

Remplaçons, enfin, dans (10) $f(x)$ par $\varphi(x)$ et inversement.

On trouve, en tenant compte de (18),

$$\sqrt{R_m(\varphi)} < \sqrt{R_m(f)} + \frac{Q}{2}\varepsilon.$$

Cette inégalité et celle de (20) conduisent à la suivante

$$\sqrt{R_m(\varphi)} < \sqrt{R_m(P_n)} + \frac{4Q}{\pi}\frac{\varepsilon}{h^2 n} + \frac{Q}{2}\varepsilon. \tag{21}$$

9. Dans cette inégalité les nombres m, n et ε sont des nombres arbitraires et ne dépendent pas les uns des autres; quant à h, il ne dépend que de ε (ou inversement).

Quels que soient les entiers m et n, on peut toujours donner à l'avance le nombre positif ε et choisir ensuite le nombre h de façon que l'inégalité (17) soit satisfaite.

Posons, pour plus de simplicité,

$$\frac{Q}{2}\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{3}.$$

Les nombre ε (ou, ce qui revient au même, ε') et h étant ainsi fixés, choisissons l'entier n_0 de façon qu'on ait

$$n_0 h^2 > \frac{8}{\pi}.$$

On aura alors

$$\frac{4Q}{\pi h^2 n}\varepsilon = \frac{8}{3\pi h^2 n}\varepsilon' < \frac{\varepsilon'}{3}$$

pour toutes les valeurs de n plus grandes que n_0.

L'inégalité (21) s'écrira alors

$$\sqrt{R_m(\varphi)} < \sqrt{R_m(P_n)} + \frac{2\varepsilon'}{3}, \tag{22}$$

où m est un entier qui reste arbitraire et tout à fait indépendant des nombres ε', h et n.

Supposons maintenant que la suite de fonctions $\varphi_k(x)$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$, que nous considérons ici, soit fermée par rapport à tout polynome en x. Dans cette hypothèse on peut écrire, en tenant compte de (5) (n° 2),

$$\sqrt{R_m(P_n)} < \frac{\varepsilon'}{3} \quad \text{pour} \quad m \geqq m_0,$$

m_0 étant un entier assez grand, convenablement choisi.

L'inégalité (22) devient alors

$$\sqrt{R_m(\varphi)} < \varepsilon' \quad \text{pour} \quad m \geqq m_0$$

et démontre le théorème suivant:

Si une suite quelconque de fonctions $\varphi_k(x)$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ orthogonales (et normales) par rapport à une fonction caractéristique $p(x)$, non négative dans l'intervalle donné, est fermée pour tout polynome en x, cette suite est nécessairement fermée pour toute fonction, assujettie à la seule condition d'être continue dans l'intervalle considéré.

10. Ce théorème important a été établi pour la première fois dans mon Mémoire »Sur la théorie de fermeture etc.», cité plus haut (n° 7) par une méthode tout à fait différente, beaucoup plus compliquée et même laissant quelque chose à désirer au point de vue de la rigueur de la démonstration.

La démonstration que nous venons d'exposer est tout à fait rigoureuse et si simple qu'elle ne laisse presque rien à désirer. Rappelons maintenant le théorème suivant, établi dans le Mémoire que nous venons de citer:

Si une suite quelconque de fonctions $\varphi_k(x)$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$, *orthogonales (et normales), est fermée pour toute fonction, continue dans l'intervalle donné, elle est nécessairement absolument fermée.*

Rapprochant ce théorème et celui du n° précédent, on en obtient encore le suivant:

Si une suite quelconque de fonctions $\varphi_k(x)$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$, *orthogonales (et normales), est fermée pour tout polynome en* x, *elle est nécessairement absolument fermée.*

De ce théorème découle immédiatement ce théorème important:

Toute suite de polynomes de Tchebychef $\varphi_k(x)$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$, *quelle que soit sa fonction caractéristique* $p(x)$, *non négative et intégrable dans l'intervalle donné, est absolument fermée.*

11. Avant d'aller plus loin revenons, à un moment, aux inégalités (18) et (19) du n° 8.

On en tire

$$|\varphi(x)-P_n(x)| < \frac{4}{\pi}\frac{\varepsilon}{h^2 n}+\frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

Dans cette inégalité l'entier n ne dépend ni de h, ni de ε.

Le nombre positif ε étant donné à l'avance et le nombre h étant choisi d'une manière convenable, prenons pour n_0 un entier satisfaisant à la condition

$$h^2 n > \frac{8}{\pi}\cdot$$

On aura alors

$$|\varphi(x)-P_n(x)| < \varepsilon,$$

l'inégalité ayant lieu pour toute fonction $\varphi(x)$ assujettie à la seule condition d'être continue dans l'intervalle donné.

Cette inégalité démontre, évidemment, *le théorème classique de Weierstrass sur la représentation approchée des fonctions continues à l'aide des polynomes.*

Le polynome $P_n(x)$ qui figure dans cette inégalité se détermine par les formules (14_1) du n° 6, où il faut entendre sous la fonction $f(x)$ une fonction, définie par l'équation (15) du n° 7.

On obtient de la sorte, en passant, l'une des plus simples démonstrations du théorème fondamental dans la théorie des fonctions d'une variable réelle.

12. Soit maintenant $\varphi_k(x)$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ une suite quelconque de fonctions orthogonales (et normales) absolument fermée dans un intervalle (a, b),

soit $\varphi(x)$ une fonction, assujettie à la seule condition d'être intégrable dans cet intervalle.

Posons, comme au n° 3,

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k \varphi_k(x) + \varrho_n(\varphi), \quad A_k = \int_a^b p(x)\varphi(x)\varphi_k(x)dx.$$

On en tire en intégrant

$$\Phi(x, h) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} \varphi(z)dz = \sum_{k=0}^{n} A_k \Phi_k(x, h) + \varrho_n, \tag{23}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} \Phi_k(x, h) &= \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} \varphi_k(z)dz, \\ \varrho_n &= \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} \varrho_n(\varphi)dz, \end{aligned} \tag{24}$$

h désignant un nombre positif arbitraire.

Arrêtons nous au cas où la fonction caractéristique $p(x)$ ne s'annule pas dans l'intervalle (a, b) et désignons par p_0 et p_1 le minimum et le maximum de $p(x)$ dans l'intervalle considéré.

On a

$$\left|\int_{x-h}^{x+h} \varrho_n(\varphi)\,dz\right| = \left|\int_{x-h}^{x+h} \frac{p(z)}{p(z)}\varrho_n(\varphi)\,dz\right| < \frac{1}{p_0}\int_{x-h}^{x+h} p(z)\,|\,\varrho_n(\varphi)\,|\,dz.$$

Or,

$$\int_{x-h}^{x+h} p(z)\,|\,\varrho_n(\varphi)\,|\,dz < \left(\int_{x-h}^{x+h} p(z)\,dz\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{x-h}^{x+h} p(z)\varrho_n^2(\varphi)\,dz\right)^{\frac{1}{2}} <$$

$$< \sqrt{p_1}\sqrt{2h}\left(\int_a^b p(z)\varrho_n^2(\varphi)dz\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2hp_1}\sqrt{R_n(\varphi)}.$$

Moyennant ces inégalités, on tire de (24)

$$|\varrho_n| < \frac{\sqrt{p_1}}{p_0 \sqrt{2h}} \sqrt{R_n(\varphi)}.$$

Faisons l'hypothèse que l'expression

$$\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} \varphi(z)\, dz$$

tend vers une limite bien déterminée $\Phi(x)$, lorsque h tend vers zéro.

Dans ce cas on peut toujours choisir le nombre positif h de façon qu'on ait

$$|\Phi(x) - \Phi(x, h)| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{25}$$

ε étant un nombre positif donné à l'avance.

Or, quel que soit le nombre h, fixé de la manière indiquée, on peut choisir l'entier $n = n_0$ si grand, qu'on ait

$$|\varrho_n| < \frac{\sqrt{p_1}}{p_0 \sqrt{2h}} \sqrt{R_n(\varphi)} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour} \quad n \geqq n_0,$$

ou, en vertu de (23),

$$\left| \Phi(x, h) - \sum_{k=0}^{n} A_k \Phi_k(x, h) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour} \quad n \geqq n_0.$$

Cette inégalité et celle de (25) conduisent à la suivante:

$$\left| \Phi(x) - \sum_{k=0}^{n} A_k \Phi_k(x, h) \right| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad n \geqq n_0, \tag{26}$$

h étant un nombre fixe, défini par la condition (25).

On arrive ainsi à ce théorème général:

A tout point x d'un intervalle donné (a, b), où l'intégrale

$$\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} \varphi(z)\, dz,$$

$\varphi(x)$ étant une fonction intégrable, tend vers une limite bien déterminée $\Phi(x)$ pour $h=0$, cette limite peut être représentée approximativement, avec l'approximation donnée à l'avance ε, par la somme de n termes

$$\sum_{k=0}^{n} A_k \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} \varphi_k(z)\,dz, \quad A_k = \int_a^b p(z)\varphi(z)\varphi_k(z)\,dz,$$

où $\varphi_k(x)$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ est une suite quelconque absolument fermée de fonctions orthogonales (et normales) par rapport à la fonction caractéristique $p(x)$, assujettie à la seule restriction de ne pas s'annuler dans l'intervalle donné.

13. Remarquons que *tous les systèmes de fonctions orthogonales qui se rencontrent aujourd'hui dans l'Analyse sont absolument fermés,* comme il est aisé de s'assurer à l'aide des théorèmes de la théorie de fermeture, établis plus haut.

Le théorème précédent permet donc de faire un bon choix pour construire, pour toute fonction $\varphi(x)$ assujettie aux conditions de ce théorème, telle ou telle expression approchée, plus ou moins simple et commode dans chaque cas particulier.

Le cas le plus intéressant correspond à l'hypothèse que $\varphi(x)$ reste continue dans l'intervalle donné.

L'inégalité (26) devient alors

$$\left|\varphi(x) - \sum_{k=0}^{n} A_k \Phi_k(x, h)\right| < \varepsilon \tag{27}$$

et subsiste pour tous les points de l'intervalle (a, b).

Si nous supposons que $\varphi_k(x)$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ soient les polynomes de Tchebychef, nous obtiendrons une nouvelle série de polynomes fournissant les expressions approchées de toute fonction continue avec l'approximation donnée à l'avance ε.

14. À titre d'exemple je m'arrêterai seulement à deux cas les plus simples.

Appliquons l'inégalité (27) à la suite de fonctions

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad \varphi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos kx.$$

Il est aisé de s'assurer de ce que nous avons dit au n° 6 et d'après le dernier théorème du n° 10 que *les fonctions considérées forment une suite absolument fermée dans l'intervalle* $(0, \pi)$.

Or, dans le cas considéré,

$$\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}\varphi_k(x)\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin kh}{kh}\cos kx$$

et l'inégalité (27) devient

$$\left|\varphi(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin kh}{kh}a_k\cos kx\right|<\varepsilon \tag{28}$$

pour h assez petit et n assez grand, convenablement choisis.

Rappelons que dans cette inégalité

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\varphi(x)\,dx,\quad a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\varphi(x)\cos kx\,dx. \tag{29}$$

On obtient ainsi l'un des plus simples moyens d'approximation des fonctions continues à l'aide de sommes trigonométriques.

Il est aisé d'établir encore, par la même méthode, une autre inégalité analogue, à savoir:

$$\left|\varphi(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kh}{kh}b_k\sin kx\right|<\varepsilon, \tag{30}$$

où

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\varphi(x)\sin kx\,dx.$$

15. Appliquons l'inégalité (28) à la fonction

$$\varphi(x)=f(\cos x)$$

et changeons ensuite la variable en faisant $\cos x=t$.

On aura

$$\varphi_0(\arccos t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}},\quad \varphi_k(\arccos t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos k\arccos t.$$

Les fonctions $\varphi_k(x)$ se changent de la sorte en polynomes $T_k(t)$ de Tchebychef correspondant à l'intervalle $(-1,+1)$ et à la fonction caractéristique

$$p(t)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}},$$

et les coefficients a_k deviennent

$$a_0=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-1}^{+1}f(x)\,T_0(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}A_0,$$

$$a_k=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-1}^{+1}f(x)\,T_k(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}A_k.$$

L'inégalité (28) se transforme en la suivante:

$$\left|f(t)-\sum_{k=0}^{n}A_k\frac{\sin kh}{kh}\,T_k(t)\right|<\varepsilon.$$

Le polynome d'approximation

$$P_n(t)=\sum_{k=0}^{n}A_k\frac{\sin kh}{kh}\,T_k(t)$$

est remarquable par sa simplicité extrème.

On pourrait transformer de la même manière l'inégalité (30), mais nous n'insistons pas sur ce point.

16. Considérons maintenant une fonction $f(x)$, non seulement continue, mais satisfaisant encore, dans l'intervalle donné (a, b), à la condition de Cauchy

$$|f(x')-f(x)|<\lambda\,|x'-x|, \tag{31}$$

x' et x étant deux points quelconques de l'intervalle (a, b), λ étant un nombre fixe.

Il est presqu'évident que *toute fonction, vérifiant cette inégalité, est une fonction à variation bornée.*

On a, en effet, en vertu de (31), pour tout intervalle (α, β) de la longueur l, pris arbitrairement à l'intérieur de l'intervalle donné (a, b),

$$\Sigma\,|f(x_k)-f(x_{k-1})|<\lambda l,$$

x_k désignant les valeurs successives de x dans l'intervalle (α, β).

Cette inégalité montre, en outre, que la fonction $f(x)$ est *absolument continue*, comme on dit aujourd'hui.

D'après le théorème de M. Lebesgue, établi ensuite d'une manière tout à fait rigoureuse par M. Vitali, chaque fonction $f(x)$, satisfaisant aux conditions indiquées, peut être représentée sous la forme

$$f(x)=\int_a^x f_1(z)\,dz+A, \tag{32}$$

où A est une constante, $f_1(z)$ est une fonction, assujettie à la seule condition d'être intégrable dans (a, b).

D'autre part, il est évident que de l'équation (32) résulte immédiatement l'inégalité (31).

Les conditions (31) *et* (32) *sont donc équivalentes.*

17. Soit maintenant $\Phi(\varphi)$ une fonction de la variable φ satisfaisant dans l'intervalle $(0, \pi)$ à la condition (32)

$$\Phi(\varphi)=\int_0^\varphi \Phi_1(\psi)\,d\psi+A, \tag{33}$$

$\Phi_1(\psi)$ étant une fonction intégrable dans $(0, \pi)$.

Posons

$$\Phi(\varphi)=\sum_{k=0}^{n} a_k \cos k\varphi+\varrho_n(\Phi),$$

a_k étant des constantes définies par les équations (29).

La condition (33) étant remplie, on peut appliquer à l'intégrale a_k (29), d'après le théorème de M. Liapounoff, l'intégration par parties, ce qui nous donne

$$a_k=-\frac{2}{\pi k}\int_0^\pi \Phi_1(\psi)\sin k\psi\,d\psi=\frac{b_k}{k}.$$

On a donc

$$|a_k\cos k\varphi|<\frac{|b_k|}{k}<\frac{1}{2}\left(b_k^2+\frac{1}{k^2}\right).$$

Or, la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

converge, la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k^2 \tag{34}$$

est de même convergente quelle que soit la fonction $\Phi_1(\psi)$, car $\sin k\psi$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ est une suite orthogonale.

Il s'ensuit que *la série*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos k\varphi \tag{35}$$

converge absolument et uniformément.

En se rappelant que la suite de fonctions $\cos k\varphi$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ est une suite absolument fermée, on en conclut, moyennant le théorème du n° 5, que *la somme de la série* (35) *est égale à* $\Phi(\varphi)$.

On peut donc écrire

$$\varrho_n(\Phi) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \cos k\varphi = \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \frac{\cos k\varphi}{k}.$$

Or, d'après un lemme de Cauchy,

$$\varrho_n^2(\Phi) \leqq \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\cos^2 k\varphi}{k^2} < \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k^2.$$

La série (34) étant convergente, on peut toujours trouver un entier n_0 si grand qu'on ait

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k^2 < \varepsilon^2 \quad \text{pour} \quad n \geqq n_0,$$

ε étant un nombre positif donné à l'avance.

On aura alors

$$\left| \Phi(\varphi) - \sum_{k=0}^{n} a_k \cos k\varphi \right| = |\varrho_n(\Phi)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \quad \text{pour} \quad n \geqq n_0. \tag{36}$$

On arrive à ce théorème:

Toute fonction $\Phi(\varphi)$ *satisfaisant à la condition de Cauchy se développe, dans l'intervalle* $(0, \pi)$, *en série absolument et uniformément convergente de la forme*

$$\Phi(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos k\varphi.$$

La somme des n premiers termes

$$S_n(\Phi) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos k\varphi$$

fournit une expression approchée de la fonction $\Phi(\varphi)$ *avec une erreur moindre que* $\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$, ε *étant une quantité positive, qui tend vers zéro, lorsque n croît indéfiniment.*

18. Appliquons le théorème énoncé à la fonction

$$\Phi(\varphi) = f(\cos\varphi) = f(x)$$

supposant que $f(x)$ satisfasse à la condition de Cauchy dans l'intervalle $(-1, +1)$.

Il est presqu'évident que la fonction $\Phi(\varphi)$ satisfait à la même condition dans l'intervalle $(0, \pi)$, de sorte que le théorème précédent s'applique à $\Phi(\varphi)$.

L'inégalité (36) devient

$$\left| f(\cos\varphi) - \sum_{k=0}^{n} a_k \cos k\varphi \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \quad \text{pour} \quad n \geqq n_0,$$

où

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\cos\psi)\, d\psi, \quad a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\cos\psi)\cos k\psi\, d\psi.$$

Remplaçant maintenant la variable φ par la nouvelle variable x

$$\cos\varphi = x$$

et répétant textuellement les raisonnements du n° 15, on transforme l'inégalité précédente en la suivante

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} A_k T_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \quad \text{pour} \quad n \geqq n_0,$$

les notations restant les mêmes qu'au n° 15.

On peut donc énoncer ce théorème:

Toute fonction $f(x)$ satisfaisant à la condition de Cauchy dans l'intervalle $(-1, +1)$ se développe dans cet intervalle en série absolument et uniformément convergente de la forme

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k T_k(x),$$

$T_k(x)$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ étant les polynomes de Tchebychef s'écartant le moins possible de zéro dans l'intervalle considéré.

Le polynome de degré n

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k T_k(x)$$

fournit une expression approchée de la fonction $f(x)$ avec une erreur absolue moindre que $\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$, ε étant une quantité positive tendant vers zéro pour $n=\infty$.

Les théorèmes que nous venons d'établir nous serons nécessaires pour les recherches qui vont suivre.

Je m'ai permis d'exposer leur démonstration comme un exemple des simplifications considérables que peut fournir l'application de la théorie de fermeture à la solution de divers problèmes qui font l'objet de ce Mémoire.

19. Désignons maintenant par $\omega(h)$ une fonction positive de l'argument positif h, jouissant des propriétés suivantes:

$\omega(h)$ décroît en même temps que h de façon que

$$\omega(h) < \varepsilon \quad \text{pour} \quad h < \delta,$$

ε étant un nombre positif donné à l'avance, δ un nombre positif suffisamment petit choisi d'une manière convenable.

Considérons une fonction $f(x)$ satisfaisant dans un intervalle donné à l'équation

$$f(x+h) - f(x) = \omega(h)\,\Theta(x, h). \tag{37}$$

Nous allons supposer, pour plus de simplicité, que l'intervalle donné soit égal à $(0, \pi)$.

Quant à la fonction $\Theta(x, h)$, nous faisons l'hypothèse *qu'elle est une fonction non seulement bornée, mais encore à variation bornée dans l'intervalle* $(0, \pi)$ *et telle que sa variation totale, dont nous désignerons la valeur maximale par* $T(h)$, *ne surpasse jamais une certaine limite fixe* N *ne dépendant pas du nombre* h, c'est-à-dire

$$T(h) < N.$$

D'autre part on a, d'après l'hypothèse faite,

$$|\Theta(x, h)| < M,$$

M étant un autre nombre fixe ne dépendant ni de x, ni de h.

En entendant par μ le plus grand des nombres M et N, on peut écrire

$$|\Theta(x, h)| < \mu, \quad T(h) < \mu. \tag{38}$$

20. Si l'on fait, en particulier, $\omega(h) = h$, on retombe au cas des fonctions satisfaisant à la condition de Cauchy, ou, ce qui revient au même, à l'équation (32) (n° 16).

Il est aisé de comprendre que dans le cas considéré la première des inégalités (38) sera satisfaite et que la fonction $\Theta(x, h)$ est non seulement bornée, mais encore à variation bornée pour toute valeur donnée de h, différente de zéro, car, comme nous avons vu au n° 16, $f(x)$ et, par suite $f(x+h)$ et la différence

$$f(x+h) - f(x)$$

est une fonction à variation bornée.

Mais la variation totale de $\Theta(x, h)$ dépend de h et rien n'empêche pas de supposer que $T(h)$ puisse croître au delà de toute limite, lorsque h tend vers zéro, si nous nous bornerons par l'hypothèse que dans l'équation

$$f(x) = \int_0^x \varphi(z)\,dz + A, \tag{39}$$

$\varphi(z)$ est assujettie à la seule restriction d'être intégrable dans $(0, \pi)$.

Mais il suffit d'imposer à $\varphi(z)$ une seule restriction complémentaire, à savoir qu'elle soit non seulement intégrable, mais encore à variation bornée, pour s'assurer que, dans cette hypothèse, la seconde des inégalités (38) sera satisfaite.

On trouve, en effet, en tenant compte de (37) [pour $\omega(h)=h$],

$$\Theta(x, h)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{h}\int_0^h \varphi(t+x)\,dt.$$

Donnant à x une suite de valeurs croissantes

$$0, x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x$$

on trouve, pour tout intervalle $(0, x)$ $[0 \leqq x \leqq \pi]$

$$\Sigma \left| \Theta(x_k, h)-\Theta(x_{k-1}, h) \right| < \frac{1}{h}\int_0^h \Sigma \left| \varphi(t+x_k)-\varphi(t+x_{k-1}) \right| dt.$$

Or, la somme sous le signe de l'intégrale ne surpasse jamais la variation totale de la fonction $\varphi(x)$ dans l'intervalle $(0, \pi+h)$ qu'on peut toujours supposer ne surpassant pas un nombre fixe N ne dépendant pas de h, en tenant compte de l'hypothèse faite plus haut au sujet de la fonction $\varphi(x)$.

Donc, la seconde des inégalités (38) est, en effet, satisfaite dans le cas considéré.

Nous avons ici une classe de fonctions contenant comme un cas particulier les fonctions admettant, dans un certain intervalle, la dérivée à variation bornée.

L'approximation de telles fonctions à l'aide des polynomes a été étudiée par M. de la Vallée-Poussin dans le Mémoire »Sur la convergence des formules d'interpolation entre ordonnées équidistantes» (Bulletin de l'Académie des Sciences de Belgique, Avril 1908, pp. 405—410).

Comme un autre exemple des fonctions satisfaisant aux conditions (38) du n° précédent, nous pouvons indiquer une famille de fonctions vérifiant l'inégalité

$$\frac{\left| f(x+2h)-2f(x+h)+f(x) \right|}{h^2} < N,$$

N étant un nombre fixe ne dépendant ni de x, ni de h.

21. Signalons encore ces deux cas particuliers

$$\omega(h)=h^{\alpha}, \quad 0<\alpha<1, \quad \omega(h)=\frac{1}{|\log h|}.$$

Dans le premier cas on retombe aux fonctions satisfaisant à la condition de Lipschitz

$$f(x+h)-f(x)=h^{\alpha}\Theta(x,h),$$
$$|\Theta(x,h)|<\lambda,$$

dans le second à une classe de fonctions, analogues à celles de U. Dini, vérifiant l'équation

$$f(x+h)-f(x)=\frac{\Theta(x,h)}{|\log h|}, \quad |\Theta(x,h)|<\lambda.$$

Or, dans le cas général, la fonction $\Theta(x, h)$ est assujettie à la seule condition d'être bornée dans l'intervalle donné.

Dans l'hypothèse que nous avons admise, nous introduisons une restriction complémentaire, à savoir que $\Theta(x, h)$ satisfait à la seconde des inégalités (38).

L'étude du problème d'approximation des fonctions appartenant à la classe, définie au n° 19, fera l'objet des considérations qui vont suivre.

La méthode sera toujours la même, fondée sur la théorie de fermeture et l'emploi des fonctions auxiliaires du n° 7.

22. Envisageons la fonction auxiliaire

$$\psi(x)=\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(z)\,dz, \tag{40}$$

où $f(z)$ est une fonction satisfaisant aux conditions générales du n° 19.

Cette fonction admet la dérivée [voir l'équation (37)]

$$\psi'(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\omega(h)}{h}\Theta(x,h), \tag{41}$$

$\Theta(x, h)$ étant la fonction satisfaisant aux inégalités (38).

Considérons la série trigonométrique

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k' \cos kx,$$

où

$$a_0'=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\psi(x)\,dx, \quad a_k'=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\psi(x)\cos kx\,dx.$$

Appliquons au cas considéré le théorème du n° 17, ce qui est évidemment possible, car la fonction $\psi(x)$ admet une dérivée et à fortiori satisfait à la condition de Cauchy.

On obtient

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k' \cos kx + \varrho_n(\psi), \tag{42}$$

où

$$\varrho_n(\psi) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k' \cos kx.$$

Or, en intégrant par parties et en tenant compte de (41), on trouve

$$a_k' = -\frac{2\omega(h)}{\pi h k} \int_0^{\pi} \Theta(x, h) \sin kx\,dx = \frac{2\omega(h)}{\pi h k} b_k, \tag{43}$$

où l'on a posé

$$b_k = -\int_0^{\pi} \Theta(x, h) \sin kx\,dx. \tag{44}$$

On peut donc écrire

$$\varrho_n(\psi) = \frac{2\omega(h)}{\pi h} \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \frac{\cos kx}{k}. \tag{45}$$

23. Désignons maintenant par

$$P(x, h) \quad \text{et} \quad N(x, h)$$

les variations, positive et négative, de la fonction $\Theta(x, h)$ dans l'intervalle $(0, x)$.

On peut écrire

$$\Theta(x, h) - \Theta(0, h) = P(x, h) - N(x, h). \tag{46}$$

Écrivons l'intégrale b_k (44) sous la forme

$$-b_k = \int_0^{\pi} [\Theta(x, h) - \Theta(0, h)] \sin kx\,dx + \int_0^{\pi} \Theta(0, h) \sin kx\,dx,$$

ou, en vertu de (46),

$$-b_k = \int_0^\pi P(x, h) \sin kx dx - \int_0^\pi N(x, h) \sin kx dx + \frac{1-(-1)^k}{k} \Theta(0, h).$$

En se rappelant que les fonctions $P(x, h)$ et $N(x, h)$ sont positives et non décroissantes de leur nature, on trouve à l'aide du théorème de la moyenne (O. Bonnet) et en tenant compte de (46)

$$(47) \qquad -b_k = \frac{1}{k}\{\Theta(0, h) + (-1)^{k+1}\Theta(\pi, h) + [P(\pi, h) - P(0, h)] \cos k\xi - \\ - [N(\pi, h) - N(0, h)] \cos k\xi'\},$$

ξ et ξ' désignant deux valeurs de x, comprises entre 0 et π.

Il est évident que

$$|[P(\pi, h) - P(0, h)] \cos k\xi| < P(\pi, h),$$
$$|[N(\pi, h) - N(0, h)] \cos k\xi'| < N(\pi, h).$$

En remarquant que, en vertu de (38),

$$P(\pi, h) + N(\pi, h) = T(h) < \mu,$$

on tire de (47)

$$|b_k| < \frac{3\mu}{k}$$

et, en vertu de (45),

$$|\varrho_n(\psi)| < \frac{6\mu}{\pi} \frac{\omega(h)}{h} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|\cos kx|}{k^2} <$$
$$< \frac{6\mu}{\pi} \frac{\omega(h)}{hn}.$$

On a donc, en ayant égard à (42),

$$(48) \qquad \left|\psi(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k' \cos kx\right| < \frac{6\mu}{\pi} \frac{\omega(h)}{hn}.$$

D'autre part, l'équation

$$f(x) - \psi(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h}\Big(f(z) - f(x)\Big)\,dz$$

nous donne, en vertu de (37),

$$|f(x) - \psi(x)| < \mu\,\omega(h).$$

Cette inégalité et celle de (48) conduisent à la suivante:

$$(49) \qquad \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k' \cos kx\right| < \mu\,\omega(h)\left(\frac{6}{\pi h n} + 1\right).$$

On arrive ainsi à ce théorème:

Toute fonction satisfaisant à la condition

$$f(x+h) - f(x) = \omega(h)\,\Theta(x, h), \qquad h > 0,$$

où $\omega(h)$ est une fonction décroissante de h et s'annulant pour $h=0$, $\Theta(x, h)$ est une fonction bornée et à variation bornée, dont la variation totale ne surpasse pas un nombre fixe μ ne dépendant pas de h, se représente, dans l'intervalle $(0, \pi)$, approximativement par la somme trigonométrique

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k' \cos kx,$$

$$a_0' = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\psi(z)\,dz, \quad a_k' = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\psi(z)\cos kz\,dz,$$

$$\psi(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(z)\,dz,$$

h étant un nombre positif arbitraire, avec une erreur absolue moindre que

$$\varepsilon = \mu\,\omega(h)\left(\frac{6}{\pi h n} + 1\right).$$

24. Faisons, en particulier, comme au n° 21,

$$\omega(h) = \frac{1}{|\log h|}$$

et posons

$$h = \frac{1}{n} \cdot$$

On trouve

$$\varepsilon = \frac{\mu}{\log n}\left(\frac{6}{\pi} + 1\right) < \mu \frac{2{,}91}{\log n} \cdot$$

Supposons ensuite que

$$\omega(h) = h^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1.$$

On aura

$$\varepsilon = \mu\left(\frac{6}{\pi h^{1-\alpha} n} + h^\alpha\right) < \mu \frac{2{,}91}{n^\alpha} \cdot$$

Le cas de

$$\omega(h) = h$$

mérite une attention particulière.

Dans ce cas

$$\varepsilon = \mu\left(\frac{6}{\pi n} + h\right).$$

L'expression de ε consiste de deux termes, dont l'un ne dépend pas de h, l'autre ne dépend pas de n.

Faisant tendre h vers zéro et en passant à la limite, on trouve

$$\varepsilon = \mu \frac{6}{\pi n} \cdot$$

D'autre part, on peut écrire dans le cas considéré

$$\lim_{h=0} a_0' = a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx,$$

$$\lim_{h=0} a_k' = a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos kx\,dx$$

et pour chaque valeur donnée de n

$$\lim_{h=0} \sum_{k=0}^{n} a_k' \cos kx = \sum_{k=0}^{n} \cos kx \lim_{h=0} a_k' = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx.$$

L'inégalité (49) devient alors

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx\right| < \mu \frac{6}{\pi} \frac{1}{n}$$

et démontre le théorème suivant:

Toute fonction $f(x)$ satisfaisant à la condition

$$f(x+h) - f(x) = h\Theta(x, h), \qquad h > 0$$

où $\Theta(x, h)$ est une fonction bornée et à variation bornée dont la variation totale dans l'intervalle $(0, \pi)$ ne surpasse pas un nombre fixe μ ne dépendant pas de h, se développe dans l'intervalle considéré en série trigonométrique de Fourier, uniformément convergente,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx,$$

et la somme des n premiers termes de cette série

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx$$

fournit une expression approchée de la fonction $f(x)$ avec une erreur absolue moindre que

$$\varepsilon = \mu \frac{6}{\pi} \frac{1}{n}.$$

C'est la seconde partie de ce théorème, sur laquelle je crois utile d'attirer une attention particulière.

25. Soit maintenant $f(t)$ une fonction de t satisfaisant dans l'intervalle $(-1, +1)$ aux conditions du n° 19.

Introduisons maintenant la fonction auxiliaire de la forme

$$\psi(x) = \frac{1}{h} \int_{\cos x}^{\cos x + h} f(z)\, dz, \tag{50}$$

qui admet la dérivée

$$\psi'(x) = -\frac{1}{h} \{f(\cos x + h) - f(\cos x)\} \sin x.$$

En se rappelant que, dans l'intervalle $(-1, +1)$,

(51) $$f(t+h) - f(t) = \omega(h)\Theta(t, h),$$

on s'assure que $\psi'(x)$ peut être représentée sous la forme

$$\psi'(x) = -\frac{\omega(h)}{h}\Theta(\cos x, h)\sin x = \frac{\omega(h)}{h}\Theta_1(x, h),$$

$$\Theta_1(x, h) = -\Theta(\cos x, h)\sin x.$$

Désignons par $T_1(h)$ la variation totale de $\Theta_1(x, h)$ dans l'intervalle $(0, \pi)$ et, comme précédemment, par $T(h)$ la variation totale de $\Theta(t, h)$ dans l'intervalle $(-1, +1)$, ou, ce qui revient au même, la variation totale de $\Theta(\cos x, h)$ dans l'intervalle $(0, \pi)$.

Désignant par $x_k > x_{k-1}$ deux valeurs de x comprises entre 0 et π, on trouve

$$|\Theta_1(x_k, h) - \Theta_1(x_{k-1}, h)| < |\Theta(\cos x_k, h) - \Theta(\cos x_{k-1}, h)| + \\ + |\Theta(\cos x_{k-1}, h)||x_k - x_{k-1}|.$$

En appliquant cette inégalité à une suite de valeurs de x

$$0, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots, \pi,$$

on trouve, en tenant compte de (38) [n° 19],

$$\sum|\Theta_1(x_k, h) - \Theta_1(x_{k-1}, h)| < \sum|\Theta(\cos x_k, h) - \Theta(\cos x_{k-1}, h)| + \mu\pi < \\ < T(h) + \mu\pi < \mu(\pi + 1).$$

Il s'ensuit que

(52) $$T_1(h) < \mu(\pi + 1).$$

26. Appliquons maintenant le théorème du n° 17 à la fonction $\psi(x)$, définie par la formule (50).

On a, comme au n° 22,

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k' \cos kx + \varrho_n(\psi),$$

$$\varrho_n(\psi) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k' \cos kx, \quad a_k' = -\frac{2\omega(h)}{\pi h k} b_k.$$

Répétant presque textuellement les raisonnements du n° 22 et en remarquant que, dans le cas considéré, $\Theta_1(x, h)$ s'annule aux extrémités de l'intervalle $(0, \pi)$, on obtient

$$-b_k = \int_0^\pi \Theta_1(x, h) \sin kx\,dx = \frac{1}{k}\{[P_1(\pi, h) - P_1(0, h)] \cos k\xi - [N_1(\pi, h) - N_1(0, h)] \cos k\xi'\},$$

où $P_1(x, h)$ et $N_1(x_1, h)$ désignent les variations, positive et négative, de $\Theta_1(x, h)$ dans l'intervalle $(0, x)$.

Il s'ensuit que, en vertu de (52),

$$|b_k| < \frac{\mu}{k}(\pi + 1).$$

Donc

$$|\varrho_n(\psi)| < 2\mu \frac{\omega(h)}{h} \frac{\pi + 1}{\pi} \frac{1}{n},$$

c'est-à-dire

$$\left|\psi(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k' \cos kx\right| < 2\mu \frac{\omega(h)}{h} \frac{\pi + 1}{\pi} \frac{1}{n}.$$

D'autre part,

$$\psi(x) - f(\cos x) = \frac{1}{h} \int_{\cos x}^{\cos x + h} [f(z) - f(\cos x)]\,dz =$$

$$= \frac{1}{h} \int_0^h [f(\cos x + t) - f(\cos x)]\,dt$$

ou, en vertu de (51),

$$\psi(x) - f(\cos x) = \frac{1}{h} \int_0^h \omega(t)\,\Theta(\cos x, t)\,dt.$$

On en conclut que

$$|\psi(x) - f(\cos x)| < \mu\,\omega(h).$$

Les deux dernières inégalités fournissent

$$\left|f(\cos x) - \sum_{k=0}^{n} a_k' \cos kx\right| < \mu\,\omega(h)\left(\frac{2(\pi + 1)}{\pi h n} + 1\right).$$

27. Introduisons maintenant une nouvelle variable t en posant $\cos x = t$ et remplaçons ensuite t par x.

L'inégalité précédente se changera en suivante

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} A_k' \, T_k(x) \right| < \mu \omega(h) \left(\frac{2(\pi + 1)}{\pi h n} + 1 \right),$$

où

$$A_0' = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} dx \int_{\cos x}^{\cos x + h} f(z) dz, \quad A_k' = \frac{\sqrt{2}}{h\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} dx \cos kx \int_{\cos x}^{\cos x + h} f(z) dz,$$

$T_k(x)$ étant les polynomes de Tchebychef.

On obtient ainsi ce théorème, analogue à celui du n° 23:

Toute fonction $f(x)$, satisfaisant dans l'intervalle $(-1, +1)$ aux conditions du n° 19, peut être représentée, dans cet intervalle, par le polynome $P_n(x)$ de degré n

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k' \, T_k(x),$$

$$A_0' = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} dx \int_{\cos x}^{\cos x + h} f(z) dz, \quad A_k' = \frac{\sqrt{2}}{h\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} dx \cos kx \int_{\cos x}^{\cos x + h} f(z) dz,$$

$T_k(x)$ étant les polynomes de Tchebychef, avec une erreur absolue moindre que

$$\varepsilon = \mu \omega(h) \left(\frac{2(\pi + 1)}{\pi h n} + 1 \right).$$

Croyant inutile d'entrer en détails, arrêtons nous seulement au cas le plus simple et le plus intéressant de

$$\omega(h) = h.$$

Faisant, comme au n° 24, h tendre vers zéro et en passant à la limite, on trouve

$$A_k' = A_k = \int_{-1}^{+1} f(x) \, T_k(x) \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

et

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k \, T_k(x). \tag{53}$$

Le théorème précédent s'énoncera, dans le cas considéré, comme il suit:

Toute fonction $f(x)$ satisfaisant dans l'intervalle $(-1, +1)$ *à la condition*

$$f(x+h)-f(x)=h\,\Theta(x,h),$$

où $\Theta(x,h)$ est une fonction bornée et à variation bornée dont la variation totale ne surpasse pas un nombre fixe μ indépendant de h, se développe, dans l'intervalle considéré, en série uniformément convergente procédant suivant les polynomes $T_k(x)$ de Tchebychef.

Le polynome (53) *de degré n fournit pour toute fonction $f(x)$, assujettie aux conditions indiquées, une expression approchée avec une erreur absolue moindre que*

$$\varepsilon=\mu\frac{2{,}64}{n}\cdot$$

28. Dans mon Mémoire »Quelques applications nouvelles de la théorie de fermeture etc.», inséré dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg en 1914 (Vol. XXXII, n° 4), j'ai établi la proposition suivante:

»*L'ordre de la meilleure approximation que puisse fournir un polynome de degré n pour une fonction satisfaisant à la condition de Cauchy est précisément égal à* $\frac{1}{n}$.»

En d'autres termes, *il est impossible de construire un polynome quelconque de degré donné n qui puisse fournir, pour une fonction susceptible de la forme*

$$f(x)=\int_a^x\varphi(z)\,dz+A,$$

$\varphi(z)$ étant une fonction intégrable dans l'intervalle donné, une approximation d'ordre plus élevé que $\frac{1}{n}\cdot$

Cette proposition reste vraie même dans le cas, où l'on suppose que $\varphi(z)$ soit une fonction à variation bornée.

En se rappelant tout ce que nous avons dit au n° 20 et rapprochant ce théorème et celui du n° précédent, on arrive à cette conclusion importante:

Le polynome de degré n, formé suivant la loi des Fourier des n premiers polynomes $T_k(x)$ $(k=0, 1, 2, \ldots, n)$ de Tchebychef, fournit pour toute fonction, assujettie *aux conditions du théorème du n° précédent, une approximation dont l'ordre est égal à celui de la meilleure approximation possible.*

La même remarque s'applique évidemment à la somme trigonométrique

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx$$

qui figure dans le théorème du n° 24.

29. Les recherches précédentes ont une connexion intime avec plusieurs autres problèmes importants de l'Analyse, comme, par exemple, problème du calcul approché des intégrales définies, problème des moments, problème d'interpolation et plusieurs autres.

La même méthode, dont nous nous sommes servie dans ce Mémoire, fondée sur la théorie de fermeture et l'emploi des fonctions auxiliaires de la forme (16) [n° 7] peut fournir des moyens fort simples pour résoudre plusieurs questions qui se rattachent aux problèmes que nous venons de signaler. J'ai déjà indiqué plusieurs résultats de cette espèce dans mes travaux, publiés dans les éditions de l'Académie des Sciences de Russie au cours des dix dernières années (jusqu'à 1925). [Voir aussi ma Note »Sopra la theoria delle quadrature dette mecaniche», Roma, Rendic. dei Lincei, Vol. XXXII, ser. 5°, fasc. 7°, 1923].

Les dimensions de ce Mémoire ne nous permettent pas de toucher même légèrement les résultats principaux que nous pouvons déduire de cette manière, et je me bornerai seulement par une courte remarque relative à l'interpolation par la méthode de Tchebychef.

Il a posé le problème d'interpolation sur un point de vue tout à fait nouveau, à savoir:

On connaît les valeurs de la fonction $f(x)$ pour $n+1$ valeurs de la variable $x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ et l'on suppose que la fonction $f(x)$ puisse être représentée par le polynome

$$a + bx + cx^2 + \cdots + hx^m,$$

m étant un entier ne surpassant pas n.

Il s'agit de déterminer les coefficients $a, b, c, \ldots, h$ en les assujettissant à ne laisser aux erreurs des valeurs

$$f(x_0),\ f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_n)$$

que la moindre influence possible sur une valeur quelconque de $f(x)$ de la fonction à interpoler.

Moyennant la théorie des fractions continues, il a trouvé ce polynome d'interpolation

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{m} A_k \psi_k(x), \tag{54}$$

$$A_k = \frac{\sum_{s=0}^{n} p(x_s)\psi_k(x_s) f(x_s)}{\sum_{s=0}^{n} p(x_s)\psi_k^2(x_s)}, \tag{55}$$

$p(x)$ étant une fonction positive dans l'intervalle donné, $\psi_k(x)$ étant des polynomes, définis par les conditions

$$\sum_{s=0}^{n} p(x_s)\psi_k(x_s)x^l = 0, \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots, k-1). \tag{56}$$

Tchebychef a indiqué lui-même un avantage essentiel de sa méthode. Dans les procédés ordinaires il faut refaire chaque fois le calcul de toutes les valeurs données, lorsque l'approximation atteinte est insuffisante, tandis que dans la méthode de Tchebychef tous les calculs déjà faits se conservent sans changement en passant d'une approximation à une autre de l'ordre plus élevé (dès que le degré m reste inférieur au nombre n).

D'autre part, l'erreur moyenne quadratique, dans la formule de Tchebychef va toujours en décroissant, lorsque le degré m du polynome s'augmente. En suivant une voie, analogue à celle dont nous nous sommes servie plus haut, nous pouvons maintenant démontrer que *cette erreur quadratique tend vers zéro, lorsque m croît indéfiniment* (et, par suite, n), ce qui est une propriété remarquable appartenant exclusivement à la formule d'interpolation de Tchebychef.

30. On sait que les formules d'interpolation le plus souvent employées, comme, par exemple, celle de Lagrange, ne convergent pas, en général, vers la fonction à interpoler, lorsque le degré de polynome croît indéfiniment. Quant à *la formule de Tchebychef* nous pouvons montrer, au contraire, *qu'elle est convergente au moins pour la famille très étendue de fonctions satisfaisant à la condition de Cauchy.*

Il importe de remarquer que, dans la méthode de Tchebychef, le problème d'interpolation est intimement lié avec le problème du développement des fonctions en série de polynomes portant aujourd'hui son nom.

Les polynomes que nous avons désignés plus haut par $\varphi_k(x)$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ représentent un cas limite des polynomes $\psi_k(x)$, définis par les équations (56), pour $n=\infty$.

Moyennant la théorie de fermeture, j'ai établi dans ma Note »Sur le développement des fonctions continues en séries de polynomes de Tchebychef« (Bulletin de l'Acad. des Sciences de Russie, p. 249, Janvier 1921) le théorème suivant:

Toute fonction satisfaisant, dans l'intervalle donné, à la condition de Cauchy se développe, dans cet intervalle, en série uniformément convergente procédant suivant les polynomes $\varphi_k(x)$ de Tchebychef correspondant à la fonction caractéristique positive et assujettie à une seule condition de satisfaire à la condition de Cauchy.

La somme des n premiers termes de ce développement fournit une expression approchée de la fonction à développer avec une erreur absolue moindre que $\lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, λ étant une constante qui figure dans l'inégalité de Cauchy, σ une constante numérique ne dépendant ni de λ, ni de n.

En se basant sur ce théorème et sur ce que nous avons dit au début de ce n° au sujet des polynomes $\psi_k(x)$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$, on peut démontrer cet autre propriété remarquable de la formule d'interpolation de Tchebychef:

Le polynome d'interpolation de Tchebychef $P_m(x)$ (54) converge, lorsque son degré m croît indéfiniment, vers la fonction à interpoler, pourvu que cette fonction satisfasse à la condition de Cauchy dans l'intervalle donné.

31. Nous pouvons aller encore plus loin et montrer, faisant l'usage d'une fonction auxiliaire (n° 7), qu'*une modification légère du polynome de Tchebychef conduit à un polynome analogue qui peut fournir, pour toute fonction continue, une expression approchée avec une approximation donnée à l'avance ε.*

Soit ε un nombre positif donné à l'avance; choisissons un nombre positif h de façon qu'on ait

$$\left| f(x) - \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(z)\, dz \right| < \varepsilon.$$

Le nombre h étant fixé, formons $n+1$ intervalles

$$(x_k - h,\ x_k + h) \qquad (k=0, 1, 2, \ldots, n).$$

Partageons chacun des intervalles $(x_k-h,\, x_k)$ et $(x_k,\, x_k+h)$ en p intervalles composants, en désignant par $\xi_s^{(k)}$ $(s=1, 2, \ldots, 2p-2)$ les points de la division.

Formons le polynome

$$(57)\qquad P_m(x)=\sum_{j=0}^{m}\frac{\frac{1}{2p}\sum_{k=0}^{n}\left\{p(x_k)\,\psi_j(x_k)\sum_{i=1}^{2p}f(\xi_i^{(k)})\right\}}{\sum_{k=0}^{n}p(x_k)\,\psi_j^2(x_k)}\,\psi_j(x).$$

Les nombres ε et h étant fixé de la façon indiquée plus haut, on peut ensuite choisir l'entier m si grand et puis le nombre $n>m$ et p encore si grands qu'on ait

$$|f(x)-P_m(x)|<\varepsilon,$$

quelle que soit la fonction $f(x)$, continue dans l'intervalle donné.

On peut considérer le polynome (57) comme un polynome d'interpolation qui fournit une expression approchée de toute fonction, continue dans l'intervalle donné, lorsqu'on connaît les valeurs de cette fonction aux points

$$(x_k,\, \xi_i^{(k)}),\quad \begin{pmatrix} k=0, 1, 2, \ldots, n \\ i=1, 2, 3, \ldots, 2p-2 \end{pmatrix}$$

convenablement choisis dans cet intervalle.

Je me permets de me borner par ces remarques sommaires sans reproduire la démonstration détaillée des théorèmes énoncés, ce qui peut faire l'objet d'un Mémoire particulier.

Leningrad, le 11 Avril 1926.