Ark. Mat., **34** (1996), 65–72

Anneaux locaux à type de module borné

François Couchot

0. Introduction

Si A est un anneau commutatif unitaire et M un A-module de type fini, on désigne par $\mu(M)$ le nombre minimal de générateurs de M. On dit que A est un anneau à type de module borné, (on notera dans la suite t.m.b.-anneau) si tout module de type fini est somme directe finie de modules indécomposables et si pour tout module indécomposable M, $\mu(M)$ est borné.

On sait que si A est un t.m.b.-anneau alors pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$, $A_{\mathfrak{m}}$ est un t.m.b.-anneau.

D'après Warfield [9] un t.m.b.-anneau local est unisériel, c'est-à-dire que l'ensemble de ses idéaux est totalement ordonné pour l'inclusion.

Enfin d'après [2] D. T. Gill et [4] J. P. Lafon, on sait qu'un anneau unisériel A est presque maximal si et seulement si tout A-module de type fini est somme directe de modules monogènes.

Dès lors, il est tout à fait légitime de se poser la question suivante :

Est-ce que tout t.m.b.-anneau unisériel est nécessairement presque maximal ?

Il y a eu deux publications récentes sur ce sujet :

– La première de Paolo Zanardo [10] dans laquelle l'auteur montre que tout anneau de valuation (unisériel et intègre) discret (pour tout idéal premier $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}^2\neq\mathcal{P}$) qui est un t.m.b.-anneau, est presque maximal.

– La seconde de Peter Vãmos [7] dans laquelle l'auteur montre que tout anneau de valuation d'égale caractéristique 0 qui est un t.m.b.-anneau, est presque maximal.

L'objet de ce travail est d'apporter une amélioration sensible à ces résultats.

On considère A un anneau unisériel (non nécessairement intègre) d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de type fini. Alors A est un t.m.b.-anneau si et seulement si A est presque maximal. On s'inspire du travail de P. Zanardo [10] et on montre que si A n'est pas presque maximal, alors pour tout entier n, on peut construire un A-module M indécomposable avec $\mu(M)=n+1$ et de dimension de Goldie n.

1. Anneaux unisériels tels que tout élément non inversible est diviseur de 0

On sait d'après le lemme 3 de [2] que les deux conditions suivantes sont équivalentes pour un anneau unisériel A :

(1) tout élément non inversible est diviseur de 0.

(2) $\forall a \in A$ on a $(0:(0:a)) = Aa$.

Proposition 1.1. *Soit A un anneau unisériel vérifiant les conditions* (1) *et* (2) *et d'idéal maximal* $\mathfrak{m}$. *Alors on a :*

(i) *si I est un idéal de A tel que $I \neq (0:(0:I))$ il existe $a \in A$ tel que $Aa = (0:(0:I))$ et $I = \mathfrak{m}a$,*

(ii) *si $\mathfrak{m}$ est non fidèle alors pour tout idéal I on a $I = (0:(0:I))$,*

(iii) *A est un anneau auto-fp-injectif, c'est-à-dire que pour tout A-module P de présentation finie on a $\mathrm{Ext}^1_A(P, A) = 0$,*

(iv) *A est un anneau auto-injectif si et seulement si il est presque maximal* (*maximal*).

Démonstration.

(i) Voir [3, proposition 1.3].

(ii) D'après (i) il suffit de montrer que $\forall a \in \mathfrak{m}, (0:a) \neq (0:\mathfrak{m}a)$. Soit As l'idéal minimal de A. Alors $\exists b \in \mathfrak{m}$ tel que $s = ab$. Alors $b \notin (0:a)$ et $b \in (0:\mathfrak{m}a)$.

(iii) et (iv) Voir [3, théorème 2.3].

Lemme 1.2. *Soient A un anneau unisériel, N un A-module, $x \in M$, $a \in A$ tel que $ax \neq 0$. Alors $a(0:ax) = (0:x)$.*

Démonstration. L'inclusion $a.(0:ax) \subset (0:x)$ est évidente. Soit $b \in (0:x)$. Puisque $ax \neq 0$, $b \in Aa$ et $b = ca$. Alors $cax = bx = 0$ et donc $c \in (0:ax)$.

Proposition 1.3. *Soit A un anneau unisériel tel que $(0:\mathfrak{m}) \neq 0$. On suppose A non-auto-injectif. Soient $E = E_A(A)$ et $e \in E \setminus A$. Alors :*

(i) *$(A:e)$ n'est pas un idéal de type fini.*

(ii) *On a $(0:e) = 0$ ou $(0:1-e) = 0$.*

(iii) *Si $(0:e) = 0$, $u\colon (A:e) \to A$ défini par $u(a) = ae$ $\forall a \in (A:e)$, est un automorphisme de $(A:e)$ qui ne se prolonge pas à un automorphisme de A.*

(iv) *Si $(0:e) = 0$ alors on a $(0:(A:e)) = \{a \in A \mid e \notin A + aE\} = B(e)$* (*si on reprend les notations de* [10]).

Démonstration.

(i) Si $(A:e) = Ab$, alors $be \in A$ et $be \in (0:(0:b)) = Ab$ donc $\exists c \in A$ tel que $be = bc$. Soit $f\colon A + Ae \to A$ défini par $f(a + de) = a + dc$. Alors f est bien défini car si $a + de = 0$, $d \in (A:e) = Ab$. On a donc $de = dc$ et par conséquent $a + dc = 0$.

Puisque $f|_A=1_A$ on obtient que A est facteur direct de $A+Ae$; c'est impossible.

(ii) Soit $a\in(0:(1-e))$. On a $a=ae$. Si $a\neq 0$ alors $ae\neq 0$ et $(0:a)=(0:ae)$. D'après le lemme 1.2, $(0:e)=a(0:ae)=a(0:a)=\{0\}$.

(iii) Si $a\in(A:e)$, on a $ae\in(0:(0:a))=Aa$ et donc $ae=ae_a$ où $e_a\in A$. On a $(0:e_a)=a(0:ae_a)=a(0:ae)=(0:e)=0$. Donc e_a est un élément inversible de A et u est bien un automorphisme de $(A:e)$. Si u se prolonge, $\exists e'\in A$ (inversible) tel que $\forall a\in (A:e)$ $ae=ae'$. Par conséquent $(A:e)\subset(0:(e-e'))$. D'autre part, on a $(A:(e-e'))=(A:e)$. On en déduit que $A\cap A(e-e')=\{0\}$, ce qui est impossible.

(iv) Soit $a\notin(0:(A:e))$. On a donc $(0:a)\subsetneq(A:e)$ d'après la proposition 1.1, (ii). Donc $\exists b\in(A:e)\setminus(0:a)$. D'après la proposition 1.1, (iii) il existe $e'\in A$ tel que $\forall c\in Ab$ $ce=ce'$. Par conséquent $(0:a)\subset(0:e-e')$. Puisque E est un module injectif, $\{x\in E\,|\,(0:a)\subset(0:x)\}=aE$. Donc $e=e'+ay$, $y\in E$ et $e\in A+aE$. Réciproquement soit $a\notin\{b\in A\,|\,e\notin A+bE\}$. Alors $e=e'+ay$, $e'\in A$, $y\in E$. Pour tout $b\in(0:a)$ on a $be=be'$. D'après (iii) on ne peut pas avoir $(A:e)\subset(0:a)$. Donc $(0:a)\subsetneq(A:e)$ et par conséquent $(0:(A:e))\subsetneq Aa$.

2. Le résultat principal

Nous allons d'abord énoncer et démontrer quelques lemmes nécessaires pour démontrer le résultat principal.

Lemme 2.1. *Soient A un anneau unisériel d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, et I un idéal de A. Alors :*

(i) *si $I\neq\bigcap_{a\notin I}Aa$, $\exists b\in A$ tel que $I=\mathfrak{m}b$ et $Ab=\bigcap_{a\notin I}Aa$,*

(ii) *si $c=ab$, $c\neq 0$ on a $(Ac:Ab)=Aa$,*

(iii) *si $I\neq\mathfrak{m}b$, on a $\forall c\neq 0$, $c\in I$, $I=\bigcap_{b\in(Ac:I)}(Ac:Ab)$.*

Démonstration.

(i) Soit $b\in\left(\bigcap_{a\notin I}Aa\right)\setminus I$. Puisque $b\notin I$, $I\subsetneq Ab$ et donc $\bigcap_{a\notin I}Aa=Ab$. Si $I\neq\mathfrak{m}b$, $\exists c\notin I$ tel que $Ac\subsetneq\left(\bigcap_{a\notin I}Aa\right)$. C'est impossible et donc $I=\mathfrak{m}b$.

(ii) Il est évident que $Aa\subset(Ac:Ab)$. Soit $d\in(Ac:Ab)$. Si $a\in Ad$, alors $a=vd$ où $v\in A$. D'où $c=vdb$. Puisque $d\in(Ac:Ab)$, $db\in Ac$ et donc $db=mc$. On a l'égalité $c(1-vm)=0$; puisque $c\neq 0$, $vm\notin\mathfrak{m}$ et v est inversible. Donc $Ad=Aa$.

(iii) Si $a\notin I$, alors $c\in Aa$ et $c=ab$. On a donc $Aa=(Ac:Ab)$. Puisque $I\subset Aa$, on a $bI\subset bAa=Ac$ et par conséquent $b\in(Ac:I)$. D'autre part si $b\in(Ac:I)$ on a $bI\subset Ac$ et donc $I\subset(Ac:Ab)$. En utilisant (i) on en déduit que $I=\bigcap_{b\in(Ac:I)}(Ac:Ab)$.

Lemme 2.2. *Soient A un anneau unisériel d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et a, b, c, 3 éléments de A :*

(i) *Si $A(a+b)\subsetneq Aa\cup Ab$ alors $Aa=Ab$.*

(ii) *Si* $ab=ac\neq 0$, *alors* $Ab=Ac$.

Démonstration.

(i) Si $Ab\subset Aa$, $a+b=a(1+v)$. On a nécessairement que $(1+v)\in\mathfrak{m}$ et donc v est inversible.

(ii) Si $Ab\subset Ac$, $b=vc$ et donc $ac(1-v)=0$. Puisque $ac\neq 0$, $(1-v)\in\mathfrak{m}$ et donc v est inversible.

Lemme 2.3. *Soient A un anneau unisériel dont l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ est de type fini engendré par p. Soit I un idéal de A qui n'est pas de type fini. Alors :*

(i) *Pour tout entier m on a $I=p^mI$ et $(I:p^m)=I$.*

(ii) *Si $a\in I$ tel que $p^ma\neq 0$, alors $(Aa:I)=(Ap^ma:I)$.*

Démonstration.

(i) Soit $a\in I$. Puisque I n'est pas de type fini $\exists b\in I\setminus Aa$. On a donc $a=pcb$, où $c\in A$ et donc $I=pI$. On en déduit facilement que $\forall m\in\mathbf{N}$, $I=p^mI$.

L'inclusion $I\subset(I:p^m)$ est évidente. Si $p^ma=0$, alors $a\in(0:p^m)$ qui est un idéal de longueur finie m, donc inclus dans I qui n'est pas de type fini. Si $p^ma\neq 0$ et si $p^ma\in I$, puisque $I=p^mI$, on a $p^ma=p^mb$ avec $b\in I$. D'après le lemme 2.2 (ii), $Aa=Ab$ et $a\in I$.

(ii) L'inclusion $(Ap^ma:I)\subset(Aa:I)$ est évidente. Si $b\in(Aa:I)$, alors $bI\subset Aa$ et donc $bp^mI\subset Ap^ma$. Puisque $p^mI=I$, $b\in(Ap^ma:I)$.

Lemme 2.4. *Soit A un anneau unisériel d'idéal maximal $\mathfrak{m}=pA$ tel que $(0:p)\neq\{0\}$. On suppose A non maximal. Soient $E=E_A(A)$ et $e\in E\setminus A$, $(0:e)=0$, $I=(0:(A:e))$, $a\in I$, $a\neq 0$ et $J=(Aa:I)$. Alors :*

(i) *$\forall b\in J$, $\exists e_b\in A$, inversible tel que $(e-e_b)\in(Aa:b)E$.*

(ii) *$IE=\bigcap_{b\in J}(Aa:b)E$.*

(iii) *Soient $c,d\in A$ tels que $c+de\in IE$. Alors $\forall m\geq 1$ entier, $c\in Ap^m$ et $d\in Ap^m$.*

Démonstration.

(i) Si $(0:p)=As$ (idéal minimal de A), $\forall b\in A$, $\exists c\in A$ tel que $s=bc$ et d'après le lemme 1.2 on a $(0:b)=pcA$. D'après la proposition 1.2, $(A:e)$ n'est pas de type fini et donc d'après la proposition 1.1, I ne l'est pas non plus. Si $b\in J$, alors si $b\in Aa$, $(Aa:b)=A$ et tout élément inversible de A convient. Si $b\notin Aa$, alors $a=bc$ et $(Aa:b)=Ac$ d'après le lemme 2.1 (ii). Puisque $bI\subset Aa$, on a $I\subsetneq Ac$. On a alors $(0:c)\subsetneq(A:e)$ et donc $\exists e_b$ élément inversible de A tel que $\forall d\in(0:c)$ $de=de_b$. Donc $(e-e_b)\in cE=(Aa:b)E$.

(ii) D'après le lemme 2.1, c'est équivalent de montrer que $IE=\bigcap_{c\notin I}cE$. L'inclusion $IE\subset\bigcap_{c\notin I}cE$ est évidente. Si $x\in\bigcap_{c\notin I}cE$, on a que $\forall c\notin I$, $(0:c)\subset(0:x)$. On peut supposer $x\neq 0$. Donc $\exists a\in A$ tel que $ax\in A$, $ax\neq 0$. Comme $ax\in(0:a)$, $\exists d\in A$ tel que $ax=ad$. Donc $(0:x)=a(0:ax)=a(0:ad)=(0:d)$. Si $d\notin I$, $\exists c\in\mathfrak{m}d\setminus I$ et on a

$(0{:}x)=(0{:}d)\subsetneq(0{:}c)$; c'est impossible. Donc $d\in I$ et puisque E est injectif, on a $x\in dE\subset IE$.

(iii) C'est évident si $c\in I$ et $d\in I$. Supposons que $c\notin I$ et montrons d'abord que $Ac=Ad$. Si $d=mc$ avec $m\in\mathfrak{m}$ alors $c+de=c(1+me)$. On a alors que $(0{:}c+de)=(0{:}c)\subsetneq(0{:}I)$; on en déduit donc que $c+de\notin IE$. On ferait de même si $Ad\subset Ac$. Donc $Ac=Ad$. Supposons qu'il existe un entier k tel que $c\notin Ap^k$ et $d\notin Ap^k$. Alors $\exists j\leq k$ tel que $Ac=Ad=Ap^j$. On a alors $c+de=p^j(c'+d'e)$ où c' et d' sont des éléments inversibles de A. On a $c+de\in IE$ entraîne que $(c'+d'e)\in(I{:}p^j)E=IE$ d'après le lemme 2.3 (i). On peut écrire que $e\in A+IE$, ce qui est impossible d'après la proposition 1.3 (iv). Donc $\forall m$ entier ≥ 1, $c\in Ap^m$ et $d\in Ap^m$.

Rappelons ici quelques résultats sur la structure des modules de type fini sur un anneau unisériel ; on peut trouver ces résultats dans [6] et [1, chapitre 9].

Proposition 2.5. *Soit M un A-module de type fini sur un anneau unisériel A tel que $\mu(M)=n$. Alors :*

(i) *$\exists$ une suite de composition $0=M_0\subsetneq M_1\ldots\subsetneq M_n=M$, où les M_k, $1\leq k\leq n$, sont des sous-modules purs de M et M_k/M_{k-1} est un module monogène.*

(ii) *Deux suites de composition de M, admettent des modules quotients isomorphes, après éventuellement permutation des indices.*

(iii) *Tout module M de type fini admet un sous-module de base B, c'est-à-dire que B est une somme directe finie de modules monogènes et B est un sous-module pur et essentiel de M. On note $g(M)=\mu(B)$ la dimension de Goldie de M.*

(iv) *On a toujours $g(M)\leq\mu(M)$. Et $g(M)=\mu(M)$ si et seulement si M est une somme directe de modules monogènes.*

Proposition 2.6. *Soit A un anneau unisériel d'idéal maximal $\mathfrak{m}=pA$. Si A n'est pas presque maximal alors pour tout entier n, il existe un A-module M indécomposable tel que $g(M)=n$ et $\mu(M)=n+1$.*

Démonstration. Soit $a\in A$ tel que A/aA ne soit pas maximal. Quitte à remplacer A par A/aA, on peut supposer que $(0{:}p)\neq 0$. Puisque A n'est pas maximal, si $E=E_A(A)$, il existe $e\in E\setminus A$ qu'on peut choisir tel que $(0{:}e)=0$ d'après la proposition 1.3 (ii). Pour $n=1$, le sous-module de E, $A+Ae$ convient. Dans la suite, nous allons supposer $n\geq 2$ et reprendre la construction de P. Zanardo dans [10]. Soient $I=(0{:}(A{:}e))$ et $a\in I$ tel que $p^{2(n-1)}a\neq 0$. C'est possible car I n'est pas de type fini et d'après le lemme 2.3 (i). On pose $\mathfrak{a}_1=Aa$, $\mathfrak{a}_2=p^2\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_n=p^{2(n-1)}\mathfrak{a}_1$ et $J=(\mathfrak{a}_1{:}I)$. D'après le lemme 2.3 (ii) on a $\forall k$, $1\leq k\leq n$, $J=(\mathfrak{a}_k{:}I)$. Dans E on considère les éléments suivants : $e_1=e$, $e_2=1+pe,\ldots,e_n=1+p^{n-1}e$. Alors $\forall k$, $1\leq k\leq n$, on a $(A{:}1+p^{k-1}e)=(A{:}p^{k-1}e)=((A{:}e){:}p^{k-1})=(A{:}e)$ d'après le lemme 2.3 (i). On en déduit que $\forall k$, $1\leq k\leq n$, on a $B(e_k)=I$ (proposition 1.3 (iv)).

Soit M le A-module engendré par $x_0, x_1, \dots, x_n$ tel que :
- $\forall k$, $1 \leq k \leq n$, $(0{:}x_k)=\mathfrak{a}_k$,
- $(0{:}x_0)=\mathfrak{a}_n$,
- $\forall b \in J$, $bx_0=b(\sum_{k=1}^n e_k^b x_k)$ où les e_k^b sont des unités de A telles que $(e_k - e_k^b) \in (\mathfrak{a}_k{:}b)$ d'après le lemme 2.4 (i).

Alors on a le lemme suivant :

Lemme 2.7.
(i) *Le système de relations qui définit M est compatible.*
(ii) *On a $\langle x_1, x_2, \dots, x_n\rangle = \bigoplus_{i=1}^n Ax_i$ et donc $g(M) \geq n$.*
(iii) $\mathrm{ann}(x_0 + \langle x_1, \dots, x_n\rangle) = J$.
(iv) $\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ *est un sous-module pur de M.*
(v) $\{J, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n\}$ *sont les annulateurs des modules quotients monogènes dans toute suite de composition de M.*

Ce lemme 2.7 est pratiquement identique au lemme 3 de [10] et se démontre de la même façon.

Comme dans [10] on va supposer que M est décomposable et montrer que c'est impossible. Nous allons suivre la même démarche.

Tout d'abord, en utilisant la proposition 2.5 (iv), on montre que si M est décomposable, M contient un facteur direct monogène, voir [10, lemme 2]. On peut écrire $M = Ay_0 \oplus \langle y_1, y_2, \dots, y_n\rangle$ où $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ est un système générateur minimal de M. Posons $\forall i$, $0 \leq i \leq n$, $y_i = \sum_{j=0}^n a_{ij} x_j$, où $a_{ij} \in A$, $\forall i$, $\forall j$, $0 \leq i, j \leq n$. Alors la matrice $T = (a_{ij})_{0 \leq i,j \leq n}$ est inversible et $\det T \in U(A) = A \setminus \mathfrak{m}$. D'après l'unicité des suites de composition, $(0{:}y_0) \in \{J, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n\}$.

Etape 1. On a $(0{:}y_0) \neq J$.

Sinon $\forall b \in J$, on a $0 = by_0 = b(\sum_{j=0}^n a_{0j} x_j)$ et donc $b(\sum_{j=1}^n (a_{0j} + a_{00} e_j^b) x_j) = 0$. D'après le lemme 2.7, $b(a_{0j} + a_{00} e_j^b) \in \mathfrak{a}_j = (0{:}x_j)$. Puisque $(e_j - e_j^b) \in (\mathfrak{a}_j{:}b)E$, on a $b(a_{0j} + a_{00} e_j) \in \mathfrak{a}_j E$ et donc $(a_{0j} + a_{00} e_j) \in IE$ d'après le lemme 2.4 (ii). D'après le lemme 2.4 (iii), $a_{0j} \in \mathfrak{m}$ et $a_{00} \in \mathfrak{m}$. Donc si $(0{:}y_0) = J$, on en déduit que $\forall j$, $0 \leq j \leq n$, a_{0j} non inversible ; c'est en contradiction avec T inversible.

Etape 2. Soient $c_0, c_1, \dots, c_n$ les coefficients de la première colonne de T^{-1}. Alors $c_i \mathfrak{a}_i \subset (0{:}y_0)$, $\forall i$, $1 \leq i \leq n$.

De l'égalité $\underline{x} = T^{-1} \underline{y}$ on en déduit que $\forall i$, $1 \leq i \leq n$, $x_i - c_i y_0 \in \langle y_1, y_2, \dots, y_n\rangle$. Puisque $\mathfrak{a}_i = (0{:}x_i)$ et que $Ay_0 \cap \langle y_1, \dots, y_n\rangle = \{0\}$, on a $c_i \mathfrak{a}_i \subset (0{:}y_0)$.

Etape 3. On a $-c_0 + \sum_{i=1}^n c_i e_i \in IE$.

Soit $b \in J$ et soit $\underline{d} = (d_i^b)$ le vecteur ligne $\underline{d} = b(-1, e_1^b, \dots, e_n^b)T^{-1}$. Alors nous avons

$$\underline{d}.\underline{y} = b(-1, e_1^b, \dots, e_n^b)\underline{x} = b\left(-x_0 + \sum_{i=1}^{n} e_i^b x_i\right) = 0.$$

Donc $d_0^b y_0 \in \langle y_1, \dots, y_n \rangle$ et par conséquent $d_0^b y_0 = 0$. Nous obtenons que $d_0^b = b\big(-c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i e_i^b\big) \in (0{:}y_0)$. Puisque $(0{:}y_0) \subset \mathfrak{a}_1$ (1ère étape), et comme $(e_i - e_i^b) \in (\mathfrak{a}_i{:}b)E \subset (\mathfrak{a}_1{:}b)E$ $\forall b \in J$, nous obtenons que $-c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \in \bigcap_{b\in J} (\mathfrak{a}_1{:}b)E = IE$ (lemme 2.4 (ii)).

Etape 4. $\exists m$, $2 \leq m \leq n$, qu'on peut choisir minimal tel que $c_m \in U(A)$.

Puisque $\forall i$, $2 \leq i \leq n$, $e_i = 1 + p^{i-1}e$, on a $-c_0 + c_1 e + \sum_{i=2}^{n} c_i(1 + p^{i-1}e) \in IE$, soit $(-c_0 + \sum_{i=2}^{n} c_i) + (c_1 + \sum_{i=2}^{n} c_i p^{i-1})e = c + de \in IE$. D'après le lemme 2.4 (iii), on a $c \in p^k A$ et $d \in p^k A$, $\forall k \geq 1$. Puisque $d \in Ap$, on a donc $c_1 \in Ap$. Puisque $c \in Ap$, et $\{c_0, c_1, c_2, \dots, c_n\} \cap U(A) \neq \emptyset$, c_0 ne peut pas être le seul élément inversible ; donc $\exists m \in \{2, \dots, n\}$ tel que c_m soit inversible.

Etape 5. Soit m comme dans l'étape 4. Alors $(0{:}y_0) = \mathfrak{a}_k$ avec $1 \leq k < m$.

Puisque $c \in Ap^j$ et $d \in Ap^j$, $\forall j \geq 1$, on a donc $Ad \subsetneq Ac_m p^{m-1}$. D'autre part $\forall j > m$, $Ac_j p^{j-1} \subsetneq Ac_m p^{m-1}$. D'après le lemme 2.2 (i) $\exists h$, $1 \leq h < m$, tel que $Ac_h p^{h-1} = Ac_m p^{m-1} = Ap^{m-1}$. D'après le lemme 2.2 (ii) on a $Ac_h = Ap^{m-h}$. On en déduit que :

$$(0 : y_0) \supset c_h \mathfrak{a}_h = p^{m-h}\mathfrak{a}_h = p^{m-h}.p^{2(h-1)}\mathfrak{a}_1 = p^{m+h-2}\mathfrak{a}_1 \not\supseteq p^{2(m-1)}\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_m$$

et donc nécessairement $(0{:}y_0) \in \{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_{m-1}\}$, c'est-à-dire que $(0{:}y_0) = \mathfrak{a}_k$ pour un entier $k < m$.

On peut enfin obtenir la contradiction. Soit $t \in \mathfrak{a}_k \setminus \mathfrak{a}_{k+1}$. Alors nous avons :

$$0 = ty_0 = ta_{00}x_0 + \sum_{j=k+1}^{n} ta_{0j}x_j.$$

D'où $t \sum_{j=k+1}^{n} (a_{0j} + a_{00}e_j^t)x_j = 0$. On a donc $t(a_{0j} + a_{00}e_j^t)x_j = 0$ et

$$(a_{0j} + a_{00}e_j^t) \in (\mathfrak{a}_j : t) \subset Ap, \quad \forall j \geq k+1.$$

Puisque $c_1, \dots, c_{m-1} \in Ap$, et $m > k$ on a

$$1 = a_{00}c_0 + \sum_{i=1}^{n} a_{0i}c_i \equiv a_{00}c_0 + \sum_{i=m}^{n} a_{0i}c_i \mod Ap.$$

Puisque $-c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \in IE \subset pE$ (étape 3), on a

$$1 \equiv \sum_{i=m}^{n} c_i(a_{0i} + a_{00}e_i) \equiv \sum_{i=m}^{n} c_i(a_{0i} + a_{00}e_i^t) \equiv 0 \mod pE.$$

D'où la contradiction.

Comme corollaire de cette proposition, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème. *Soit A un anneau unisériel dont l'idéal maximal est de type fini. Alors A est un t.m.b.-anneau si et seulement si A est presque maximal.*

Bibliographie

1. Fuchs, L. et Salce, L., *Modules over Valuation Domains,* Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **97**, Marcel Dekker, New York, 1985.
2. Gill, D. T., Almost valuation rings, *J. London Math. Soc.* **4** (1971), 140–146.
3. Klatt, G. B. and Levy L. S., Pre-self injectives rings, *Trans. Amer. Math. Soc.* **137** (1969), 407–419.
4. Lafon, J. P., Anneaux locaux commutatifs sur lesquels tout module de type fini est somme directe de modules monogènes, *J. Algebra* **17** (1971), 571–591.
5. Midgarden, B. and Wiegand, S., Commutative rings of bounded module type, *Comm. Algebra* **9** (1981), 1001–1025.
6. Salce, L. and Zanardo, P., Finitely generated modules over valuation rings, *Comm. Algebra* **12** (1984), 1795–1812.
7. Vãmos, P., Decomposition problems for modules over valuation domains, *J. London Math. Soc.* **41** (1990), 10–26.
8. Warfield, R. B. J., Purity and algebraic compactness for modules, *Pacific J. Math.* **28** (1969), 699–719.
9. Warfield, R. B. J., Decomposability of finitely presented modules, *Proc. Amer. Math. Soc.* **25** (1970), 167–172.
10. Zanardo, P., Valuation domains of bounded module type, *Arch. Math.* **53** (1989), 11–19.

Reçu le 22 décembre 1992

François Couchot
Département de Mathématiques
Université de Caen
Esplanade de la Paix
F-14032 Caen Cedex
France