ÜBER ANALYTISCHE FUNKTIONEN AUF TRANSZENDENTEN ZWEIBLÄTTRIGEN RIEMANNSCHEN FLÄCHEN MIT REELLEN VERZWEIGUNGSPUNKTEN.

Von

P. J. MYRBERG

in HELSINGFORS.

I. Einleitung.

1. Während die Theorie der algebraischen Funktionen und der Abelschen Integrale schon längst ein in den wichtigsten Teilen vollendetes Kapitel der Funktionentheorie bildet, hat man erst in der allerletzten Zeit die ersten erfolgreichen Versuche gemacht, die dort erreichten Resultate auf transzendente Riemannsche Flächen zu übertragen. Man hat dabei die Aufmerksamkeit zunächst auf die nullberandeten Flächen gerichtet, die als die nächste Verallgemeinerung der algebraischen Riemannschen Flächen angesehen werden können und für solche Flächen die Existenz von Integralfunktionen nachgewiesen, die ihr Analogon in den Abelschen Integralen haben. Während man schon bei den einfachsten Klassen solcher Integrale ziemlich grossen Schwierigkeiten begegnet, gilt dies in noch weit höherem Grade für die Konstruktion von eindeutigen Funktionen der Fläche vermittels Integralfunktionen, also die Überführung der

---

CARTAN, HENRI, *Sur les variétés définies par une relation entière* — Bulletin des sciences mathématiques, tome LV, 1931.

HORNICH, HANS, *Integrale erster Gattung auf speziellen transzendenten Riemannschen Flächen* — Monatshefte für Mathematik und Physik, 40 Band, 1933.

Beschränkte Integrale auf der Riemannschen Fläche von $\sqrt{\cos\frac{\pi z}{2}}$ — Ibidem, 42 Band, 1935.

Über transzendente Integrale erster Gattung — Ibidem, 47 Band, 1939.

NEVANLINNA, ROLF, *Quadratisch integrierbare Differentiale auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit* — Annales academiae scientiarum fennicae, series A I, Mathematica-Physica, 1, 1940.

MYRBERG, P. J., *Über transzendente hyperelliptische Integrale erster Gattung* — Annales academiae scientiarum fennicae, series A I, Mathematica-Physica, 14, 1943.

Abelschen und Riemann-Rochschen Sätze auf das Gebiet der transzendenten Funktionen, ein Problem, das unseres Wissens in der Literatur noch gar nicht behandelt worden ist. Man hat hier mit einem unerforschten Gebiet der Funktionentheorie zu tun, wo schon die Problemstellung erheblichen Schwierigkeiten begegnet. Es dürfte deshalb angebracht zu sein, das Problem zuerst bei speziellen Flächen in Angriff zu nehmen, um einen orientierenden Blick auf die hier herrschenden Verhältnisse gewinnen zu können.

2. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem denkbar einfachsten Fall, den zweiblättrigen Riemannschen Flächen F mit reellen Verzweigungspunkten, also Flächen, die als Verallgemeinerung der hyperelliptischen Flächen angesehen werden können. Der Einfachheit halber wird noch die unwesentliche Annahme gemacht, dass die Folge der Verzweigungspunkte

$$e_0,\ e_1,\ e_2,\ \ldots \tag{1, 1}$$

nur in einer, z. B. positiven Richtung unendlich ist. Auch werden die singulären Punkte der Integrale im Allgemeinen als reell angenommen.

Man kann die gegebene Riemannsche Fläche, und zwar in unendlich vielen Weisen, durch eine Gleichung der Form

$$y^2 = D(x) \tag{1, 2}$$

darstellen, wo die *Diskriminante* $D(x)$ eine ganze Funktion von x bezeichnet, welche die Punkte (1, 1) als einfache Nullpunkte hat. Der unendlich ferne Punkt, der als Häufungsstelle der Verzweigungspunkte ein singulärer Punkt höherer Art ist, wird nicht zur Fläche gerechnet. Jede auf der Fläche F meromorphe Funktion ist dann in der Form

$$f = \frac{A(x) + B(x)\,y(x)}{C(x)} \tag{1, 3}$$

darstellbar, wo die *Komponenten*

$$A(x),\ B(x),\ C(x) \tag{1, 4}$$

ganze Funktionen von x ohne gemeinsame Nullpunkte bezeichnen. Speziell gibt

$$g = A(x) + B(x)\,y(x) \tag{1, 5}$$

die ganzen Funktionen unserer Fläche F.

3. Der allgemeine Ausdruck für die Integrale der Fläche F lautet

$$\int \frac{A(x) + B(x)\,y(x)}{C(x)}\,dx. \tag{1, 6}$$

Damit das Integral (1, 6) auf F überall regulär sei, ist es offenbar notwendig und hinreichend, dass $C(x)$ keine von den Verzweigungspunkten verschiedene Nullstelle besitzt, dass ferner jede Nullstelle von $C(x)$ einfach ist und dass für jede derselben auch $A(x)$ verschwindet. Daraus ergibt sich für die Integrale erster Gattung der allgemeine Ausdruck

$$\int \frac{h(x)}{y(x)}\,dx + \Gamma(x), \tag{1, 7}$$

wo $h(x)$ und $\Gamma(x)$ ganze Funktionen von x sind.

Zu den Integralen erster Gattung gehören speziell sämtliche ganze Funktionen (1, 5) von F. Es gibt somit endliche Integrale mit lauter verschwindenden Perioden. Hieraus folgt, dass es zur Aufstellung von Integralen erster Gattung, die den Abelschen Integralen analog durch ihre Periodizitätseigenschaften charakterisiert werden, notwendig ist, den Integralbegriff in geeigneter Weise einzuschränken. Eine bemerkenswerte Klasse solcher Integrale hat man in der Tat in den reellen Integralen der Form

$$\int \frac{h(x)}{y(x)}\,dx, \tag{1, 8}$$

welche auf der kanonisch geschnittenen Fläche F dem imaginären Teile nach beschränkt sind. Unsere Integrale, die wir *Normalintegrale erster Gattung* nennen werden, können aus gewissen unendlich vielen einfachen Integralen linear zusammengesetzt werden, die den elementaren hyperelliptischen Integralen erster Gattung entsprechen, aus welchen sie auch durch Grenzübergang gewonnen werden können.

Man kann ferner in analoger Weise *Normalintegrale dritter Gattung* konstruieren, d. h. Integrale mit logarithmischen Singularitäten und den Residuen $+1$ bzw. -1, welche auf der kanonisch geschnittenen Fläche dem imaginären Teile nach beschränkt sind. Neben diesen Integralen werden wir, mit Rücksicht auf die Theorie der ganzen Funktionen, den Begriff des *singulären Normalintegrals dritter Gattung* einführen, deren sämtliche singuläre Punkte das Residuum $+1$ haben und welche denjenigen hyperelliptischen Integralen dritter Gattung entsprechen, deren logarithmische Singularitäten mit dem Residuum -1 im Unendlichen liegen. Die Integrale zweiter Gattung, die in unserer Arbeit keine Anwendung finden, werden hier bei Seite gelassen.

4. Den Hauptgegenstand unserer Untersuchungen bilden die eindeutigen meromorphen und ganzen Funktionen von F. Wir werden zeigen, dass unter den genannten Funktionen eine ausgezeichnete Klasse von Funktionen, die *Normalfunktionen*, definiert werden kann, welche in gewissem Sinne der Klasse der rationalen Funktionen einer hyperelliptischen Fläche entspricht. Unsere Normalfunktionen werden als solche meromorphe oder ganze Funktionen von F definiert, deren Logarithmus ein gewöhnliches bzw. singuläres Normalintegral dritter Gattung der Fläche ist. Die Nullstellen und Pole bzw. Nullstellen einer solchen Funktion sind durch ein System von transzendenten Gleichungen miteinander verbunden, die den bekannten Abelschen Relationen entsprechen.

5. Im letzten Teile werden schliesslich die allgemeinen reellen, nichtnormalen eindeutigen Funktionen von F einer Untersuchung unterzogen. Es wird zu diesem Zweck zuerst die Existenz von Integralen erster Gattung bewiesen, deren primi tive Perioden gegebene reelle oder komplexe Grössen sind. Hieraus ergibt sich leicht der allgemeine Ausdruck für eine auf F nichtverschwindende ganze Funktion und insbesondere für die *Einheitsfunktionen*, worunter wir ganze Funktionen

$$g_0 = A_0(x) + B_0(x)\, y(x)$$

verstehen, deren *Norm*

$$N g_0 = A_0^2(x) - B_0^2(x)\, D(x) \tag{1, 9}$$

gleich Eins ist. Die genannten Funktionen können auch als Produkt von endlich oder unendlich vielen *Grundeinheiten* dargestellt werden.

Es wird hierauf die Existenz einer einfachen, bis auf eine gewisse triviale Einheit bestimmten *Primfunktion* bewiesen, d. h. einer ganzen Funktion, die eine einzige einfache reelle Nullstelle besitzt. Vermittels der Primfunktion ist es möglich, für die allgemeinste ganze Funktion von F mit beliebig gegebenen reellen Nullstellen einen Ausdruck aufzustellen und zwar in der Form eines Produktes, das der Weierstrassischen Produktdarstellung der ganzen Funktionen entspricht. Hierdurch wird zugleich für die *allgemeine Pellsche Gleichung*

$$A^2(x) - B^2(x)\, D(x) = G(x) \tag{1, 10}$$

mit einer beliebig gegebenen ganzen Funktion $G(x)$ und der gegebenen Diskriminante $D(x)$ die allgemeine Lösung durch ganze Funktionen $A(x)$, $B(x)$ gegeben.

II. Die Normalintegrale erster Gattung.

Die Riemannsche Fläche F.

6. Wir denken uns die gegebene zweiblättrige, in den Punkten (1, 1) verzweigte Riemannsche Fläche F durch Grenzübergang

$$F = \lim_{p \to \infty} F_p$$

aus der geschlossenen Fläche F_p vom Geschlecht p mit den Verzweigungspunkten

$$e_0, e_1, e_2, \ldots, e_{2p-1} \tag{2, 1}$$

gewonnen. Die Fläche F selbst ist eine offene, nullberandete Fläche, für welche der unendlich ferne Punkt als Häufungspunkt der Verzweigungspunkte eine Singularität höherer Art ist, die zur Fläche nicht gerechnet wird.

Man kann die Fläche F_p als Riemannsche Fläche der durch die Gleichung

$$y^2 = R_p(x) \tag{2, 2}$$

definierten algebraischen Funktion $y_p(x)$ auffassen, wo $R_p(x)$ eine beliebige rationale Funktion von x bezeichnet, deren einfache Pole oder Nullstellen in den Punkten (2, 1) liegen. Es ist am einfachsten, für $R_p(x)$ das Polynom

$$D_p(x) = -\Pi_p(x) = -\prod_{\nu=0}^{2p-1} \left(1 - \frac{x}{e_\nu}\right) \tag{2, 3}$$

oder die gebrochene rationale Funktion

$$R_p(x) = -\prod_{\nu=0}^{p-1} \frac{1 - \dfrac{x}{e_{2\nu}}}{1 - \dfrac{x}{e_{2\nu+1}}} \tag{2, 4}$$

zu wählen. Dementsprechend kann F als Riemannsche Fläche einer durch eine transzendente Gleichung

$$y^2 = R(x) \tag{2, 5}$$

definierten Funktion $y(x)$ angesehen werden, wo $R(x)$ eine beliebige ganze oder meromorphe Funktion von x bezeichnet, deren Nullstellen bzw. Nullstellen und Pole einfach und in den Punkten $(1, 1)$ gelegen sind. Statt des Polynomes $\Pi_p(x)$ hat man hier eine ganze Funktion

$$\Pi(x) = \prod_{\nu=0}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{e_\nu}\right) e^{\gamma_\nu(x)}, \tag{2, 6}$$

welche im Falle der Konvergenz der Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{e_\nu}$$

durch die ganze Funktion

$$\Pi(x) = \prod_{\nu=0}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{e_\nu}\right)$$

ersetzt werden kann, wo die Polynome $\gamma_\nu(x)$ fehlen und welche aus $(2, 3)$ durch Grenzübergang $p \to \infty$ erhalten werden kann. Der Darstellung $(2, 4)$ von F_p entspricht hier die Darstellung

$$y^2 = -\prod_{\nu=0}^{\infty} \frac{1 - \dfrac{x}{e_{2\nu}}}{1 - \dfrac{x}{e_{2\nu+1}}}, \tag{2, 7}$$

wo rechts ein stets konvergenter Ausdruck vorkommt, der in jedem Falle aus $(2, 4)$ durch Grenzübergang $p \to \infty$ erhalten wird.

Wir werden im Folgenden die Darstellung $(2, 6)$ bevorzugen. Die ganze Funktion $D(x) = -\Pi(x)$, die bis auf einen Exponentialfaktor bestimmt ist, soll dabei die *Diskriminante der Fläche* F genannt werden.

7. Wir wollen jetzt auf F ein kanonisches Schnittsystem einführen, welches die Fläche F in eine einfach zusammenhängende Fläche F' verwandelt.

Wir denken uns zu diesem Zweck die beiden Blätter von F_p längs den Strecken

$$\bar{A}_\nu(e_{2\nu-1}, e_{2\nu}), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p-1) \tag{2, 8}$$

und den unendlichen Teil $(e_{2p-1} \infty e_0)$ der reellen Achse geschnitten und dann die beiden Blätter längs diesen Verzweigungsschnitten mit einander geheftet

Fig. 1. Durch Grenzübergang ergibt sich hieraus für die transzendente Fläche F das in Fig. 1 angegebene Schnittsystem, das aus der Gesamtheit der Strecken

$$A_\nu (e_{2\nu-1}, e_{2\nu}), \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2, 9}$$

besteht.

Wir ziehen nun um die Schnitte (2, 8) in dem oberen Blatte von F_p die Rückkehrschnitte

$$A_1, A_2, \ldots, A_p \tag{2, 10}$$

und hierauf die konjugierten Schnitte

$$B_1, B_2, \ldots, B_p, \tag{2, 10$'$}$$

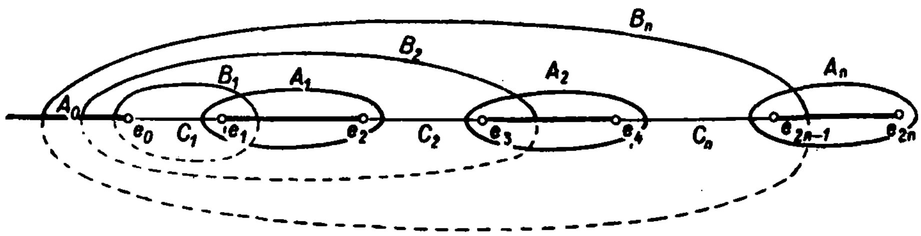

Fig. 1.

wo allgemein B_ν die beiden Ufer von A_ν mit einander verbindet. Wir denken uns dabei die Linien B_ν so gewählt, dass sie für $\nu \to \infty$ gegen den idealen Rand von F konvergieren. Dann kann aus (2, 10) und (2, 10)′ durch Grenzübergang $p \to \infty$ ein *kanonisches Schnittsystem* von F hergeleitet werden, welches F in eine einfach zusammenhängende Fläche F' verwandelt.

Neben den Rückkehrschnitten (A) und (B) werden im Folgenden auch die Rückkehrschnitte

$$C_\nu, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

betrachtet, welche die Punkte $(e_{2\nu-2}, e_{2\nu-1})$ umschliessen. Zwischen den Systemen (B) und (C) herrschen dabei die Relationen

$$B_n = C_1 + C_2 + \cdots + C_n, \qquad (n = 1, 2, \ldots, p). \tag{2, 11}$$

Die elementaren Normalintegrale erster Gattung.

8. Wir kehren wieder zur approximierenden algebraischen Fläche F_p vom Geschlecht p

(2, 12) $$y_p^2 = D_p(x)$$

zurück und wir bezeichnen allgemein mit

(2, 13) $$\varphi_n^{(p)} = u_n^{(p)} + i\,v_n^{(p)}$$

dasjenige Integral erster Gattung, welches für e_0 verschwindet und dessen A-Perioden gleich

(2, 14) $$\int\limits_{A_n} d\,\varphi_n^{(p)} = 2\,\pi\,i, \quad \int\limits_{A_\nu} d\,\varphi_n^{(p)} = 0, \quad (\nu \neq n)$$

sind. Man hat für $\varphi_n^{(p)}$ den Ausdruck

(2, 15) $$\varphi_n^{(p)} = \int \frac{h_n^{(p)}(x)}{y_p(x)}\,d\,x,$$

wo $h_n^{(p)}(x)$ ein reelles Polynom vom Grade $p - 1$ ist, welches in jedem Intervall (2, 8) genau einen Nullpunkt $\alpha_{n\nu}^{(p)}$ besitzt. Wir können somit schreiben

(2, 16) $$h_n^{(p)}(x) = c_n^{(p)} \prod_{\nu=1}^{p}{}' \left(1 - \frac{x}{\alpha_{n,\nu}^{(p)}}\right),$$

wo die reelle Konstante $c_n^{(p)}$ durch die erste Gleichung (2, 14) bestimmt wird. Aus dem Obigen folgt, dass die B-Perioden

(2, 17) $$\int\limits_{B_\nu} d\,\varphi_n^{(p)} = \tau_{n\nu}^{(p)}$$

von $\varphi_n^{(p)}$ reell sind.

Um das Verhalten des Integrals $\varphi_n^{(p)}$ auf F_p zu untersuchen, wollen wir etwas genauer die von demselben vermittelte konforme Abbildung studieren. Man kann sich dabei z. B. auf die obere Halbebene $\overline{F}$ des oberen Blattes von F_p beschränken, weil die Bilder der anderen Teile daraus durch einfache Spiegelungen erhalten werden können.

Aus dem Ausdruck (2, 15) geht unmittelbar hervor, dass $\overline{F}$ durch $\varphi_n^{(p)}$ auf einen Schlitzbereich $T_n^{(p)}$ abgebildet wird, welcher die Form eines Rektangels hat, dessen Seiten von den Geraden

(2, 18) $$u_n^{(p)} = 0, \; u_n^{(p)} = \frac{1}{2}\,\tau_{nn}^{(p)}, \; v_n^{(p)} = 0, \; v_n^{(p)} = \pi$$

gebildet werden und wo die Schlitze, die den Teilen

$$\bar{A}_1,\ \bar{A}_2,\ \ldots,\ \bar{A}_p \tag{2, 19}$$

der reellen Achse, von $\bar{A}_n$ abgesehen, entsprechen, der imaginären Achse parallel sind (Fig. 2). Hieraus geht hervor, dass $v_n^{(p)}$ auf $\bar{F}_p$ den Ungleichungen

$$0 \leqq v_n^{(p)} \leqq \pi \tag{2, 20}$$

genügt. Auf der kanonisch geschnittenen Fläche F_p' gelten somit die Ungleichungen

$$-\pi \leqq v_n^{(p)} \leqq \pi. \tag{2, 21}$$

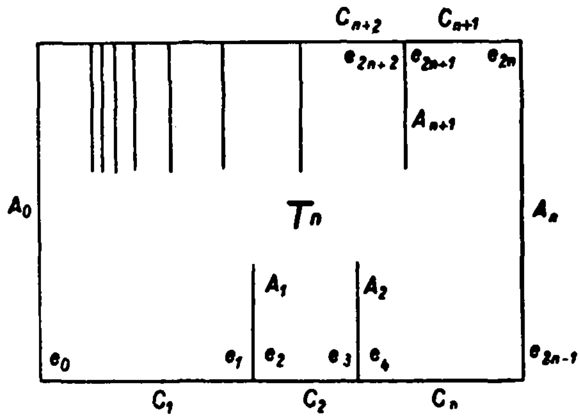

Fig. 2.

9. Wir betrachten nun die unendliche Folge

$$v_n^{(p)}, \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2, 22}$$

der Funktionen $v_n^{(p)}$ und behaupten, dass sie in jedem Bereich von F gleichmässig gegen eine harmonische Grenzfunktion konvergiert.

In der Tat sind die Funktionen (2, 22), wenigstens von einer gewissen Stelle ab, dort harmonisch und beschränkt gemäss (2, 21). Man kann somit aus jeder unendlichen Folge von (2, 22) eine unendliche Teilfolge

$$v_n^{(p_\lambda)} \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots)$$

auswählen derart, dass die harmonische Grenzfunktion

$$\lim_{\lambda \to \infty} v_n^{(p_\lambda)} = v_n \tag{2, 23}$$

existiert. Diese Grenzfunktion hat die A-Perioden

$$\int_{A_n} d v_n = 2\pi, \quad \int_{A_\nu} d v_n = 0, \quad (\nu \neq n), \tag{2, 24}$$

während sämtliche B-Perioden wegen der Realität von $\tau_{n\nu}^{(p)}$ gleich Null sind.

Sind nun v und $\bar{v}$ die für zwei Teilfolgen erhaltenen Grenzfunktionen, so ist die Differenz $v - \bar{v}$ eine auf F eindeutige und beschränkte harmonische Funktion und somit konstant, weil es sich hier um eine nullberandete Fläche handelt. Wegen $v(e_0) = \bar{v}(e_0)$ ist die Konstante gleich Null. Die Existenz einer von der Teilfolge unabhängigen Grenzfunktion

$$v = \lim_{p \to \infty} v_n^{(p)} \tag{2, 25}$$

ist damit bewiesen.

Es sei nun u_n die konjugierte, für e_0 verschwindende harmonische Funktion. Man hat nach dem Obigen

$$u_n = \lim_{p \to \infty} u_n^{(p)}$$

und ferner

$$\varphi_n = \lim_{p \to \infty} \varphi_n^{(p)}, \tag{2, 26}$$

wo φ das durch

$$\varphi_n = u_n + i v_n = \lim_{p \to \infty} \int \frac{h_n^{(p)}(x)}{y_p(x)} d x \tag{2, 27}$$

definierte Integral von F bezeichnet. Die Konvergenz findet dabei in jedem endlichen Teilbereich von F gleichmässig statt.

10. Wir besitzen in φ_n ein endliches Integral von F mit den folgenden Eigenschaften:

1. Die Perioden von φ_n sind

$$\int_{A_n} d\varphi_n = 2\pi i, \quad \int_{A_\nu} d\varphi_n = 0, \quad (\nu \neq n), \quad \int_{B_\lambda} d\varphi_n = \tau_{n\lambda} = \lim_{p \to \infty} \tau_{n\lambda}^{(p)}. \tag{2, 28}$$

2. Der imaginäre Teil von φ_n ist auf F' beschränkt gemäss

$$|\operatorname{Im} \varphi_n| \leqq \pi, \tag{2, 29}$$

Man hat nach dem Obigen für das Integral φ_n den Ausdruck

(2, 30)
$$\varphi_n = \int \frac{h_n(x)}{y(x)}\, dx,$$

wo $h_n(x)$ die durch

(2, 31)
$$h_n(x) = c_n \prod_{\nu \neq n} \left(1 - \frac{x}{\alpha_{n\nu}}\right) e^{\frac{1}{2}(\gamma_{2\nu-1} + \gamma_{2\nu})}$$

dargestellte reelle ganze Funktion von x bezeichnet, die als Nullstellen die Grenzpunkte

$$\alpha_{\nu n} = \lim_{p \to \infty} \alpha_{\nu n}^{(p)}$$

besitzt und wo

$$c_n = \lim_{p \to \infty} c_n^{(p)}.$$

Wir haben somit ein unendliches System von linear unabhängigen endlichen Integralen

(2, 32)
$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$$

der Fläche F erhalten, die wir die *elementaren Normalintegrale erster Gattung* nennen. Das unendliche Schema ihrer Perioden

$$\left\| \begin{matrix} 2\pi i, & 0, & 0, & \ldots & \tau_{11}, & \tau_{12}, & \tau_{13}, & \ldots \\ 0, & 2\pi i, & 0, & \ldots & \tau_{21}, & \tau_{22}, & \tau_{23}, & \ldots \\ 0, & 0, & 2\pi i, & \ldots & \tau_{31}, & \tau_{32}, & \tau_{33}, & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \right\|$$

ist in bezug auf die B-Perioden $\tau_{\mu\nu}$ symmetrisch:

$$\tau_{\mu\nu} = \tau_{\nu\mu}.$$

Diese Perioden genügen ferner den Ungleichungen

$$\tau_{\mu\nu}^2 < \tau_{\mu\mu}\tau_{\nu\nu}.$$

Die allgemeinen Normalintegrale erster Gattung.

11. Wie schon in der Einleitung erwähnt wurde, ist die Klasse der auf F regulären Integrale zu allgemein, um für dieselben eine der Theorie der hyperelliptischen Integrale erster Gattung analoge Theorie entwickeln zu können. Indem wir uns im Folgenden auf *reelle Integrale* beschränken, d. h. Integrale mit reellen Komponenten, bei denen der Integrand somit für reelle Werte von x und y reelle Werte annimmt, wollen wir durch folgende Definition eine Klasse von endlichen

Integralen einführen, welche die Gesamtheit der elementaren Normalintegrale erster Gattung enthält:

Definition: *Unter einem Normalintegral erster Gattung von F soll ein reelles endliches Integral*

$$\varphi = u + i v$$

verstanden werden, dessen imaginärer Teil v auf F' beschränkt ist:

$$|v| \leqq M < \infty. \tag{2, 33}$$

Es seien

$$2\pi i c_n = \int_{A_n} d\varphi \tag{2, 34}$$

die rein imaginären A-Perioden von φ. Wir bilden die Reihe

$$\bar{\varphi} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n \tag{2, 35}$$

und behaupten, dass diese Reihe konvergiert und ferner, dass ihre Summe gleich φ ist.

Wir betrachten zum Beweis die aus den imaginären Teilen der approximierenden hyperelliptischen Integrale

$$\varphi_n^{(p)} = u_n^{(p)} + i v_n^{(p)} \tag{2, 36}$$

gebildete endliche Summe

$$V_m^{(p)} = \sum_{n=1}^{m} c_n v_n^{(p)}. \tag{2, 37}$$

Diese Summe definiert eine in der Halbebene $\bar{F}$ nebst dem Rande harmonische Funktion, welche ihr Maximum somit auf der reellen Achse erreicht. Dies findet offenbar in einem Punkt eines C-Intervalles statt, weil $d\varphi_n^{(p)}$ auf den A-Intervallen rein imaginär ist. Nun ist auf C_μ

$$v_n^{(p)} = \pi \text{ für } n < \mu \text{ und } v_n^{(p)} = 0 \text{ für } n \geqq \mu.$$

Anderseits sind die Summen

$$\sum_{\nu=1}^{q} c_\nu = \frac{1}{\pi} \int_{e_1}^{e_{2q}} d v \tag{2, 38}$$

wegen (2, 33) gleichmässig beschränkt:

$$\left|\sum_{\nu=1}^{q} c_\nu\right| \leqq \frac{1}{\pi} M.$$

Somit gilt von m und p unabhängig auf $\bar{F}$

$$|V_m^{(p)}| \leqq \frac{1}{\pi} M.$$

12. Wir führen nun in (2, 37) den ersten Grenzübergang $p \to \infty$ bei festgehaltenem m aus, wodurch die Ungleichung

$$\left|\sum_{n=1}^{m} c_n v_n\right| \leqq \frac{1}{\pi} M$$

erhalten wird. Durch den neuen Grenzübergang $m \to \infty$ wird aus der unendlichen Folge der auf $\bar{F}$ gleichmässig beschränkten harmonischen Funktionen

$$V_m = \sum_{n=1}^{m} c_n v_n$$

eine Grenzfunktion V erhalten, die offenbar von der Teilfolge unabhängig ist und somit eine Darstellung durch die konvergente Reihe

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n$$

gestattet. Hieraus und aus $u_n(e_0) = 0$ folgt aber die gleichmässige Konvergenz der Reihe (2, 35). Ihre Summe $\bar{\varphi}$ definiert ein endliches Integral von F mit den A-Perioden $2\pi i c_n$, welches mit φ identisch sein muss. In der Tat ist der imaginäre Teil von $\bar{\varphi}$ auf $\bar{F}$ beschränkt und somit die Differenz der imaginären Teile der Integrale φ und $\bar{\varphi}$ eine auf F beschränkte harmonische Funktion mit verschwindenden Perioden und somit identisch gleich Null. Unsere Behauptung ist damit bewiesen.

Umgekehrt definiert die Reihe (2, 35) bei beschränkten Summen (2, 38) ein Normalintegral erster Gattung. Wir haben somit den

Satz. *Die Normalintegrale erster Gattung sind identisch mit denjenigen reellen Integralen, die durch die elementaren Normalintegrale erster Gattung durch eine konvergente Reihe*

(2, 39)
$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$$

mit beschränkten Koeffizientensummen

$$\sum_{n=1}^{q} c_n$$

darstellbar sind.

Nach dem Obigen hat man für φ den Ausdruck

(2, 40)
$$\varphi = \int \frac{h(x)}{y(x)} dx,$$

wo $h(x)$ die durch die konvergente Reihe

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n h_n(x)$$

dargestellte ganze Funktion von x bezeichnet.

III. Die Normalintegrale dritter Gattung.

13. Es seien

(3, 1)
$$a(x = a,\ y = y(a)) \text{ und } b(x = b,\ y = y(b))$$

zunächst zwei beliebige endliche von den Verzweigungspunkten verschiedene Punkte der algebraischen Riemannschen Fläche F_p. Bekanntlich gibt es ein völlig bestimmtes Integral $\chi_{ab}^{(p)}$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. Das Integral $\chi_{ab}^{(p)}$ ist auf F_p regulär, von den Punkten (3, 1) abgesehen, wo es logarithmische Singularitäten mit den Residuen -1 bzw. $+1$ besitzt und es verschwindet in einem gegebenen Punkt x_0 von F_p.

2. Die A-Perioden von $\chi_{ab}^{(p)}$ sind gleich Null:

(3, 2)
$$\int_{A_\nu} d\chi_{ab}^{(p)} = 0.$$

Die B-Perioden des so definierten Integrals haben den Ausdruck

(3, 3)
$$\int_{B_\nu} d\chi_{ab}^{(p)} = \varphi_\nu^{(p)}(b) - \varphi_\nu^{(p)}(a).$$

Wir nehmen nun insbesondere an, dass die beiden Parameter a und b reellen Punkten von F_p entsprechen, d. h. dass neben den x-Werten a und b auch die y-Werte $y(a)$ und $y(b)$ reell sind. Die Punkte $x = a$ und $x = b$ gehören dann zu den $\bar{C}$-Intervallen.

Um einen expliziten Ausdruck für $\chi_{ab}^{(p)}$ zu gewinnen, betrachten wir das Integral

$$\psi_{ab}^{(p)} = \frac{1}{2}\int\left[\frac{y_p(x) + y_p(b)}{x - b} - \frac{y_p(x) + y_p(a)}{x - a}\right]\frac{dx}{y_p(x)}, \tag{3, 4}$$

welches in den gegebenen Punkten (3, 1) logarithmische Singularitäten mit den gegebenen Residuen hat. Die Differenz

$$\chi_{ab}^{(p)} - \psi_{ab}^{(p)} = I$$

ist dann ein Integral erster Gattung und somit in der Form

$$I = \int \frac{h_{p-1}(x)}{y_p(x)}\,dx$$

darstellbar, wo $h_{p-1}(x)$ ein Polynom vom Grade $p - 1$ ist. Man hat somit

$$\chi_{ab}^{(p)} = \psi_{ab}^{(p)} + I$$

oder auch

$$\chi_{ab}^{(p)} = \frac{1}{2}\log\frac{1 - \dfrac{x}{b}}{1 - \dfrac{x}{a}} + \bar{\chi}_{ab}^{(p)}, \tag{3, 5}$$

wo wir

$$\bar{\chi}_{ab}^{(p)} = \frac{1}{2}\int\frac{G_{p+1}(x)}{(x-a)(x-b)}\,\frac{dx}{y_p(x)} \tag{3, 5$'$}$$

gesetzt haben. Hier ist

$$G_{p+1}(x) = (x - a)\,y_p(b) - (x - b)\,y_p(a) + 2\,(x - a)(x - b)\,h_{p-1}(x) \tag{3, 6}$$

ein Polynom vom Grade $p + 1$.

Nun sind die A-Perioden von I wegen (3, 2) gleich denjenigen von $-\psi_{ab}^{(p)}$ und somit rein imaginär. Hieraus folgt, dass $h_{p-1}(x)$ ein reelles Polynom ist. Aus (3, 6) geht dann hervor, dass auch $G_{p+1}(x)$ ein reelles Polynom ist. Weil

$$\int_{A_\nu} d\,\bar{\chi}_{ab}^{(p)} = 0, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, p)$$

hat $G_{p+1}(x)$ in jedem Intervalle

$$\bar{A}_\nu, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, p)$$

genau eine Nullstelle. Hieraus ergibt sich leicht, dass die Halbebene $\bar{F}$ durch $\bar{\chi}_{ab}^{(p)}$ auf einen unendlichen Schlitzbereich konform abgebildet wird, welcher von den Geraden $v = 0$, $v = \frac{\pi}{2}$, und gewissen zwischen denselben liegenden, der imaginären Achse parallelen Schlitzen begrenzt wird.

14. Aus dem Obigen geht hervor, dass der imaginäre Teil $\bar{v}_{ab}^{(p)}$ von $\bar{\chi}_{ab}^{(p)}$ auf der reellen Achse zwischen den Punkten a und b den Ungleichungen

$$0 \leqq \bar{v}_{ab}^{(p)} \leqq \frac{1}{2}\pi \tag{3, 7}$$

genügt, während derselbe ausserhalb des Intervalles (a, b) verschwindet. Es gelten somit in der Halbebene $\bar{F}$ die Ungleichungen (3, 7). Weil nur der imaginäre Teil von

$$\frac{1}{2}\log\frac{1-\frac{x}{b}}{1-\frac{x}{a}}$$

dort den nämlichen Ungleichungen genügt, hat man auf $\bar{F}$ für den imaginären Teil $v_{ab}^{(p)}$ von $\chi_{ab}^{(p)}$ die Ungleichungen

$$0 \leqq v_{ab}^{(p)} \leqq \pi.$$

Hieraus folgt, dass $v_{ab}^{(p)}$ auf der kanonisch geschnittenen Fläche F_p' den Ungleichungen

$$|v_{ab}^{(p)}| \leqq \pi \tag{3, 8}$$

genügt.

Weil (3, 8) von p unabhängig gilt, kann man hier wie in N:o 9 den Grenzübergang $p \to \infty$ machen, wodurch ein Integral

$$\chi_{ab} = \lim_{p\to\infty} \chi_{ab}^{(p)}$$

der Fläche F mit den folgenden Eigenschaften erhalten wird:

1. Das Integral χ_{ab} ist auf F regulär, von den Punkten a und b abgesehen, wo es logarithmische Singularitäten mit den Residuen -1 bzw. $+1$ besitzt und es verschwindet für x_0.

2. Der imaginäre Teil von χ_{ab} ist auf F' beschränkt:

$$|\operatorname{Im} \chi_{ab}| \leqq \pi. \tag{3, 9}$$

3. Die A-Perioden von χ_{ab} sind gleich Null:

$$\int_{A_\nu} d\chi_{ab} = 0, \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots) \tag{3, 10}$$

4. Die B-Perioden von χ_{ab} sind gleich

$$\int_{B_\nu} d\chi_{ab} = \varphi_\nu(b) - \varphi_\nu(a), \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots). \tag{3, 11}$$

Durch die obigen Eigenschaften ist das Integral χ_{ab}, das wir ein *elementares Normalintegral dritter Gattung* nennen, völlig bestimmt. Man hat dabei statt 3, 11) nur die Realität der B-Perioden anzunehmen.

Die allgemeinen Normalintegrale dritter Gattung.

15. Es sei nun

$$a_\nu(x = a_\nu,\ y = y(a_\nu)),\ b_\nu(x = b_\nu,\ y = y(b_\nu)) \tag{3, 12}$$

eine endliche oder unendliche Menge von reellen Punktpaaren, deren x-Koordinaten bei unendlicher Anzahl der Punkte gegen $+\infty$ konvergieren. Wir nehmen an, dass die Punkte (3, 12) *regulär verteilt* sind, womit wir Folgendes verstehen:

1. Die Punkte eines und desselben Paares a_ν, b_ν sollen einem und demselben $\bar{C}$-Intervall angehören.

2. Jedes Intervall $\bar{C}_\mu$ soll nur eine beschränkte Anzahl N_μ Punktpaare (3, 12) enthalten:

$$N_\mu \leqq N < \infty. \tag{3, 13}$$

Wir beweisen nun den

Satz. *Die Reihe*

$$\chi' = \sum_{\nu=1}^{\infty} \chi_{a_\nu b_\nu} \tag{3, 14}$$

ist bei jeder Menge regulär verteilter Punkte gleichmässig konvergent.

Wir betrachten zum Beweis die endliche Summe

$$\chi_m^{(p)} = \sum_{\nu=1}^{m} \chi_{a_\nu b_\nu}^{(p)}$$

der zugehörigen approximierenden hyperelliptischen Integrale dritter Gattung von F_p. Der imaginäre Teil $V_m^{(p)}$ von $\chi_m^{(p)}$ ist eine auf $\bar{F}$ harmonische Funktion, die ihr Maximum auf der reellen Achse, und zwar offenbar in einem zu einem Intervall $\bar{C}_\mu$ gehörigen Punkt P_μ erreicht. Nach dem Obigen ist aber im Punkte P_μ

$$V_m^{(p)} = N'_\mu \pi,$$

wo N'_μ die Anzahl derjenigen Intervalle (a_i, b_i) bezeichnet, welche den genannten Punkt enthalten. Weil nun wegen unserer Annahme $N'_\mu \leqq N_\mu \leqq N$, so gilt somit auf $\bar{F}$ die Ungleichung

$$|V_m^{(p)}| \leqq N\pi \tag{3, 15}$$

und zwar unabhängig von den Werten von m und p.

Nun geht

$$V_m^{(p)} = \sum_{\nu=1}^{m} v_{a_\nu b_\nu}^{(p)}$$

durch den ersten Grenzübergang $p \to \infty$ in die harmonische Funktion

$$V_m = \sum_{\nu=1}^{m} v_{a_\nu b_\nu} \tag{3, 16}$$

über, die nach (3, 15) auf $\bar{F}$ beschränkt ist:

$$|V_m| \leqq N\pi.$$

Aus der gleichmässigen Beschränktheit der Funktionen (3, 16) auf $\bar{F}$ kann die Existenz der Grenzfunktion

$$\lim_{m \to \infty} V_m = V'$$

zuerst für eine Teilfolge, dann aber für die Folge selbst wie in N:o 10 geschlossen werden. Die gleichmässige Konvergenz der Reihe

$$V' = \sum_{\nu=1}^{\infty} v_{a_\nu b_\nu}$$

ist damit bewiesen. Wegen $u_{a_\nu b_\nu}(x_0) = 0$ kann hieraus die Konvergenz der Reihe (3, 14) gefolgert werden. Die Summe dieser Reihe definiert ein reelles Integral der Fläche F mit den folgenden Eigenschaften:

1. Das Integral χ' ist regulär auf F, von den Punkten (3, 12) abgesehen, wo es logarithmische Singularitäten mit den Residuen -1 bzw. $+1$ besitzt und es verschwindet für x_0.

2. Der imaginäre Teil von χ' ist auf F' beschränkt:

$$|\operatorname{Im} \chi'| \leqq N\pi.$$

3. Die A-Perioden von χ' sind gleich Null:

$$\int_{A_\nu} d\chi' = 0, \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

4. Die B-Perioden von χ' sind gleich

$$\int_{B_\nu} d\chi' = \sum_i (\varphi_\nu(b_i) - \varphi_\nu(a_i)), \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots). \tag{3, 17}$$

16. Indem wir den Begriff des Normalintegrals noch etwas verallgemeinern stellen wir die folgende Definition auf:

Definition. *Ein auf F definiertes reelles Integral χ soll ein allgemeines Normalintegral dritter Gattung heissen, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. Das Integral χ ist auf F regulär, von einer Menge regulär verteilter Punkte (3, 12) abgesehen, wo es logarithmische Singularitäten mit den Residuen -1 bzw. $+1$ besitzt und es verschwindet für x_0.

2. Der imaginäre Teil V von χ ist auf F' beschränkt:

$$|V| \leqq M < \infty. \tag{3, 18}$$

Es seien nun

$$\int_{A_\nu} d\chi = 2\pi i c_\nu, \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

die rein imaginären Perioden von χ. Weil

$$\int_{e_0}^{e_{2n}} dV = \pi \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu,$$

so ist wegen (3, 18) von n unabhängig

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\right| \leqq \frac{M}{\pi}.$$

Mithin ist die Reihe

$$\varphi = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu \tag{3, 19}$$

konvergent und ihre Summe definiert ein Normalintegral erster Gattung mit den A_ν-Perioden $2\pi i c_\nu$. Die Differenz $\chi - \varphi = \chi'$ ist aber dann ein Normalintegral erster Gattung mit verschwindenden A-Perioden und somit identisch gleich Null, weil es für x_0 verschwindet. Mithin ist

$$\chi = \chi' + \varphi. \tag{3, 20}$$

Es gilt somit der

Satz. *Jedes allgemeine Normalintegral dritter Gattung ist in der Form* (3, 20) *darstellbar.*

Aus (3, 17) und (2, 28) erhält man für die B-Perioden des Integrals χ den Ausdruck

$$\int_{B_\nu} d\chi = \sum_i (\varphi_\nu(b_i) - \varphi_\nu(a_i)) + \sum_i c_i \tau_{i\nu}. \tag{3, 21}$$

Die singulären Normalintegrale dritter Gattung.

17. Wir werden im Folgenden, im Hinblick auf die späteren Anwendungen, ein Integral einführen, welches einen einzigen logarithmischen singulären Punkt mit dem Residuum $+1$ besitzt. Es handelt sich hier um ein Integral, welches auch durch Grenzübergang aus einem hyperelliptischen Integral dritter Gattung hergeleitet werden kann, bei dem der zweite singuläre Punkt im Unendlichen liegt.

Um ein solches Integral zu konstruieren, gehen wir von dem elementaren Normalintegral dritter Gattung χ_{ea} aus, für welches der erste singuläre Punkt mit einem Verzweigungspunkt e der Fläche F zusammenfällt. Aus (3, 5) ergibt sich dafür der Ausdruck

$$\chi_{ea} = \frac{1}{2} \log \frac{1 - \frac{x}{a}}{1 - \frac{x}{e}} + \frac{1}{2} \int \left(\frac{y(a)}{x-a} + 2\, h(x) \right) \frac{d\,x}{y(x)}, \tag{3, 22}$$

wo $h(x)$ eine reelle ganze Funktion bezeichnet. Das aus χ_{ea} abgeleitete Integral

$$\chi_a = \chi_{ea} + \frac{1}{2} \log \left(1 - \frac{x}{e}\right) \tag{3, 23}$$

hat dann die erforderten Eigenschaften. Um χ_a eindeutig zu fixieren, wollen wir als Punkt e den zu a nächsten Verzweigungspunkt e_{2n} links von a wählen. Die primitiven Perioden des so definierten *singulären* elementaren Normalintegrals dritter Gattung sind

$$\int\limits_{A_n} d\,\chi_a = \pi\, i, \quad \int\limits_{A_\nu} d\,\chi_a = 0 \text{ für } \nu \neq n, \quad \int\limits_{B_\lambda} d\,\chi_a = \varphi_\lambda(a) - \varphi_\lambda(e_{2n}). \tag{3, 24}$$

Es ist χ_a ein auf F' dem imaginären Betrag nach beschränktes Integral, welche durch ihre obigen Eigenschaften völlig bestimmt ist.

18. Offenbar ist die Differenz zweier singulären Integrale ein gewöhnliches elementares Integral dritter Gattung. Speziell ist

$$\chi_a - \chi_b = \chi_{ba},$$

wenn die Punkte a und b einem und demselben $\bar{C}$-Intervall angehören.

Die aus (3, 23) abgeleitete Funktion

$$\omega_a = e^{\chi_a} \tag{3, 25}$$

ist eine auf F überall reguläre Funktion mit dem einzigen Nullpunkt a, die den Periodenwegen A_λ und B_λ gegenüber sich multiplikativ gemäss

$$\omega_a(A_n) = -\,\omega_a, \quad \omega_a(A_\nu) = \omega_a \text{ für } \nu \neq n, \quad \omega_a(B_\lambda) = e^{\varphi_\lambda(a) - \varphi_\lambda(e_{2n})}\, \omega_a \tag{3, 26}$$

verhält. Wir werden ω_a eine *multiplikative Primfunktion* nennen.

Um allgemeinere Integrale der betreffenden Art zu bekommen, gehen wir von einer beliebigen endlichen oder unendlichen Folge reeller Punkte

$$(a): \qquad a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

aus, deren x-Koordinaten gegen $+\infty$ konvergieren und von denen wir noch annehmen, dass jedes Intervall C nur eine beschränkte Anzahl N_ν solcher Punkte enthält: $N_\nu \leqq N < \infty$. Nach N:o 15 ist dann die Reihe

$$\sum_i \chi_{e_{i'} a_i},$$

wo allgemein $e_{i'}$ den links von a_i nächsten Verzweigungspunkt bezeichnet, gleichmässig konvergent. Dasselbe gilt auch betreffs der Reihe

$$\sum_i \chi_{a_i}$$

vorausgesetzt, dass

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{e_\nu} < \infty.$$

Im allgemeinen Falle soll das *allgemeine singuläre Integral dritter Gattung* durch die Reihe

$$\sum (\chi_{a_i} + \gamma_{i'}(x)) \tag{3, 27}$$

definiert werden, wo allgemein $\gamma_{i'}(x)$ das zum Verzweigungspunkt $e_{i'}$ gehörige im Ausdruck (2, 6) auftretende Polynom bezeichnet. Das so definierte Integral ist durch ihre singulären Punkte und A-Perioden bis auf eine ganze Funktion (1, 5) von F bestimmt.

IV. Die eindeutigen Normalfunktionen.

19. Der allgemeine Ausdruck für eine auf F meromorphe Funktion lautet

$$f = \frac{A(x) + B(x)\, y(x)}{C(x)}, \tag{4, 1}$$

wo die Komponenten

$$A(x),\ B(x),\ C(x) \tag{4, 2}$$

ganze Funktionen von x ohne gemeinsame Nullstellen bezeichnen.

Der Zähler

$$g = A(x) + B(x)\, y(x) \tag{4, 3}$$

von f ist eine ganze Funktion von F. Als *Norm* von g wird die durch

$$N g = A^2(x) - B^2(x)\, D(x) \tag{4, 4}$$

definierte ganze Funktion von x verstanden werden. Eine wichtige Eigenschaft der Norm wird durch den Multiplikationssatz

$$N g_1 g_2 = N g_1 \cdot N g_2 \tag{4, 5}$$

ausgedrückt, dessen Gültigkeit ohne Weiteres einzusehen ist.

Wir werden im Folgenden annehmen, dass die Funktion f reell ist, d. h. dass die Koeffizienten der Komponenten reell sind. Ferner wird angenommen, dass die Nullstellen und Pole von f reell sind, d. h. dass die x-Koordinaten der genannten Punkte den C-Intervallen angehören.

Es gibt unter solchen f-Funktionen eine bemerkenswerte Klasse von Funktionen, im Folgenden *Normalfunktionen* genannt, welche als eine Verallgemeinerung der zu einer algebraischen Riemannschen Fläche gehörigen rationalen Funktionen angesehen werden können.

Definition. *Eine reelle meromorphe Funktion f soll eine Normalfunktion heissen, wenn* $\log f$ *ein Normalintegral dritter Gattung ist, d. h. wenn das Argument von f auf der kanonisch geschnittenen Fläche F' beschränkt ist.*

Bevor wir die Existenz von Normalfunktionen nachweisen, wollen wir einige ihrer Eigenschaften hervorheben.

20. Es seien

$$a_\nu, \; b_\nu, \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots) \tag{4, 6}$$

die paarweise konjugierten reellen Pole und Nullstellen von f. Weil sämtliche Perioden von $\log f$ die Form $2\pi i k$ besitzen, wo k ganze Zahlen sind, gelten nach (3, 21) die Gleichungen

$$\sum (\varphi_\nu(b_i) - \varphi_\nu(a_i)) = \sum m_i \tau_{i\nu} + 2\pi i k_\nu, \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots) \tag{4, 7}$$

Nach diesen Gleichungen, die den Abelschen Relationen in der Theorie der algebraischen Funktionen entsprechen, besteht zwischen den Polen und Nullstellen einer Normalfunktion ein Zusammenhang, das wir kurz durch die Kongruenzen

$$(a) \equiv (b) \tag{4, 7$'$}$$

ausdrücken, welche die Perioden den elementaren Normalintegrale erster Gattung als Moduln haben.

Wir nehmen im Folgenden der Einfachheit halber an, dass über keinen Punkt der x-Ebene mehr als ein Pol oder eine Nullstelle von f gelegen ist. Offenbar sind dann die Punkte (4, 6) identisch mit den Nullstellen der Norm Ng.

21. Wir werden nun die Existenz von Normalfunktionen nachweisen, indem wir solche Funktionen aus gewissen zu den approximierenden algebraischen Flächen F_p gehörigen rationalen Funktionen durch Grenzübergang herleiten werden.

Wir denken uns zu diesem Zweck die Nullstellen

$$(a): \qquad a_1, a_2, a_3, \ldots$$

der ganzen Funktion $C(x)$, über denen die Pole von f liegen sollen, ferner die Nullstellen

$$\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \ldots$$

der B-Komponente gegeben. Es werde dabei angenommen, dass die Anzahl N_ν der Punkte (a) in den Intervallen $\bar{C}_\nu$ beschränkt ist:

$$N_\nu \leqq N < \infty$$

und ferner, dass es zwischen zwei a-Punkten genau einen $\varkappa$-Punkt vorhanden ist.

Wir bilden nun die zur Fläche F_p:

$$(4, 8) \qquad y_p^2 = D_{2p+2}(x)$$

gehörige rationale Funktion

$$(4, 9) \qquad f_p = \frac{A_n(x) + B_q(x)\, y_p(x)}{C_n(x)}$$

mit den ganzen rationalen Komponenten

$$A_n(x),\ B_q(x),\ C_n(x),$$

deren Gradzahlen der Bedingung

$$(4, 10) \qquad n = p + q + 1$$

genügen. Wir schreiben

$$(4, 11) \qquad B_q(x) = \prod_{\mu=1}^{q}\left(1 - \frac{x}{\varkappa_\mu}\right), \quad C_n(x) = \prod_{\nu=1}^{n}\left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right)$$

und wir wählen ferner das Polynom $A_n(x)$ gemäss den Bedingungen

$$(4, 12) \qquad A_n(a_i) - B_q(a_i)\, y_p(a_i) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

wodurch es bis auf eine multiplikative Konstante A bestimmt wird. Die so erhaltene rationale Funktion von F_p hat dann über jeden der Punkte

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n \tag{4, 13}$$

einen Pol.

Wir betrachten nun die Norm

$$N g_n = A_n^2(x) - B_q^2(x)\, D_{2p+2}(x) = \Delta_{2n}(x) \tag{4, 14}$$

der im Zähler von f_p auftretenden ganzen Funktion von F. Es ist $\Delta_{2n}(x)$ eine reelle ganze rationale Funktion von x vom Grade $2n$, für welche die Ungleichungen

$$\Delta_{2n}(e_i) > 0, \quad \Delta_{2n}(\varkappa_\mu) > 0 \tag{4, 15}$$

gelten. Hieraus folgt, dass es in jedem durch die $\varkappa$-Punkte bestimmten Teilintervall von $\bar{C}_\nu$ neben a_i noch einen und offenbar nur einen Nullpunkt $b_i^{(p)}$ von $\Delta_{2n}(x)$ gibt. Die Punkte

$$b_i^{(p)}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4, 13$'$}$$

deren Lage von dem bei $A_n(x)$ noch vorhandenen Parameter A abhängig ist, sind Nullstellen unserer Funktion f_p.

22. Weil der Ausdruck (4, 9) bei gegebenen a-Punkten insgesamt von $n - q - 1 = p$ Parametern abhängt, werden p von den Nullstellen durch die Pole und die übrigen $n - p$ Nullstellen bestimmt. Die Abhängigkeit zwischen den Polen und Nullstellen wird durch die Abelschen Kongruenzen

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\varphi_\nu^{(p)}(b_i^{(p)}) - \varphi_\nu^{(p)}(a_i)\right) \equiv 0, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p) \tag{4, 16}$$

dargestellt. Wenn man betreffs der Lage der $\varkappa$-Punkte die obige Annahme macht, ist die Variabilität der b-Punkte auf gewisse Intervalle um die $\varkappa$-Punkte eingeschränkt.

Wir behaupten nun, dass im vorliegenden Falle die Kongruenzen (4, 16) sich auf die Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\varphi_\nu^{(p)}(b_i^{(p)}) - \varphi_\nu^{(p)}(a_i)\right) = 0 \tag{4, 16$'$}$$

reduzieren.

Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass allgemein $a_i < b_i$, weil man andernfalls die Funktion f_p mit der Funktion

$$\frac{x - a_i}{x - b_i}$$

multiplizieren könnte, wobei der betreffende Pol und Nullpunkt mit einander vertauscht werden, und zugleich die beiden Punkte in das andere Blatt übergehen. Dabei bleibt aber der Wert der Summe (4, 16) offenbar ungeändert.

Es sei zuerst $B(x) = 1$, d. h. es seien keine $\varkappa$-Punkte vorhanden. Wir lassen die a-Punkte gegen die links stehenden a-Punkte variieren, wodurch f_p an der Grenze in die Funktion

$$A + \sqrt{-\frac{\pi_2}{\pi_1}} \tag{4, 17}$$

übergeht, wo

$$\pi_1 = \prod_{\nu=1}^{p}\left(1 - \frac{x}{e_{2\nu-1}}\right), \quad \pi_2 = \prod_{\nu=0}^{p-1}\left(1 - \frac{x}{e_{2\nu}}\right).$$

Wird noch b_1 gegen den rechts stehenden Verzweigungspunkt konvergieren, wobei $A \to 0$, so ergibt sich schliesslich eine Funktion, für welche $b_\nu^{(p)} = e_{2\nu-1}$ und somit

$$\sum_{i=1}^{p}(\varphi_\nu^{(p)}(b_i) - \varphi_\nu^{(p)}(a_i)) = \sum_{i=1}^{p}\int_{\bar{C}_i} d\,\varphi_\nu^{(p)} = 0.$$

Weil die Summe (4, 16) dabei stetig variiert, muss sie beständig Null sein, wie behauptet wurde.

23. Wir betrachten nachher den allgemeinen Fall, wo $\varkappa$-Punkte vorhanden sind. Es sei z. B. $\varkappa_1$ der von links gerechnet erste $\varkappa$-Punkt eines Intervalles $\bar{C}_n$. Wenn $\varkappa_1$ gegen den linken Endpunkt e_{2n-2} des genannten Intervalles konvergiert, konvergieren die im Teilintervalle $(e_{2n-2}, \varkappa_1)$ liegenden Punkte a und b gegen den nämlichen Grenzpunkt. An der Grenze kann man den Ausdruck von f_p mit $x - e_{2n-2}$ verkürzen, wobei das entsprechende Glied von (4, 16) in Null übergeht. Indem man in dieser Weise sämtliche $\varkappa$-Punkte der Reihe nach eliminiert, gelangt man schliesslich zum Fall $B(x) \equiv 1$. Es ist somit allgemein gezeigt worden, dass die Kongruenzen (4, 16) sich im vorliegenden Falle auf die Gleichungen (4, 16)' reduzieren.

Wir betrachten jetzt das durch

$$\chi_n^{(p)} = \sum_{i=1}^{n} \chi_{a_i b_i}^{(p)} \tag{4, 18}$$

definierte Normalintegral dritter Gattung mit den singulären Punkten (4, 13) und (4, 13)'. Weil sämtliche A- und B-Perioden von $\chi_n^{(p)}$ verschwinden, ist

$$\bar{f}_p = e^{\chi_n^{(p)}} \tag{4, 19}$$

eindeutig auf F. Weil ferner die Nullpunkte und Pole von $\bar{f}_p$ mit denjenigen von f_p zusammenfallen, muss der Quotient $\bar{f}_p : f_p$ sich auf eine Konstante reduzieren. Es ist mithin, nach Multiplikation mit einer geeigneten Konstanten,

$$f = e^{\chi_n^{(p)}}. \tag{4, 20}$$

Nun sind die Integrale

$$\chi_n^{(p)} \tag{4, 21}$$

in der Halbebene $\ddot{F}$ dem imaginären Teil nach beschränkt:

$$|\mathrm{Im}\ \chi_n^{(p)}| \leqq N\pi,$$

woraus folgt, dass man aus jeder unendlichen Folge der Funktionen (4, 21) eine unendliche Teilfolge auswählen kann derart, dass die Funktionen für dieselbe auf $\bar{F}$ gleichmässig gegen eine Grenzfunktion

$$\chi = \lim_{\lambda \to \infty} \chi_{n_\lambda}^{(p_\lambda)}$$

konvergieren, welche ein durch die Reihe (3, 14) darstellbares Normalintegral dritter Gattung mit den singulären Punkten

$$a_i,\ b_i = \lim_{\lambda \to \infty} b_i^{(p_\lambda)}, \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots) \tag{4, 22}$$

ist. Dann ist aber

$$f = e^{\chi}$$

eine meromorphe Normalfunktion, welche ihre Nullstellen und Pole in den Punkten (4, 22) besitzt.

24. Es sei

$$f = \frac{A(x) + B(x)\, y(x)}{C(x)} \tag{4, 23}$$

die explizite Darstellung von f vermittels ihrer Komponenten, welche bis auf eine Exponentialfunktion bestimmt sind. Als C-Komponente kann dann eine beliebige ganze Funktion

$$C(x) = \prod \left(1 - \frac{x}{a_i}\right) e^{\alpha_i(x)}$$

mit den Nullstellen (a) gewählt werden. Wegen

$$\frac{B(x)\,y(x)}{C(x)} = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{B_{q_\lambda}(x)\,y_{p_\lambda}(x)}{C_{n_\lambda}(x)}$$

wird für die B-Komponente von f der Ausdruck

$$B(x) = \prod_\mu \left(1 - \frac{x}{x_\mu}\right) e^{\beta_\mu(x)}$$

erhalten, wo die Polynome $\beta_\mu(x)$ gemäss den Bedingungen

$$\sum_{\mu=1}^{q_\lambda} \beta_\mu(x) + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{2p_\lambda+2} \gamma_\nu(x) = \sum_{i=1}^{n_\lambda} \alpha_i(x)$$

zu wählen sind. Zu bemerken ist, dass $B(x)$ von der Wahl der Teilfolge unabhängig ist. Dies kann dagegen betreffs der A-Komponente im Allgemeinen nicht behauptet werden. Es ist nämlich wenigstens a priori möglich, dass für eine zweite Teilfolge eine von f verschiedene Normalfunktion

$$\bar{f} = \frac{\bar{A}(x) + B(x)\,y(x)}{C(x)}$$

gewonnen wird. Daraus, dass die Funktionen f und $\bar{f}$ über den Punkten (a) nur in einem Blatte Pole besitzen, geht hervor, dass die Differenz

$$f - \bar{f} = \frac{A(x) - \bar{A}(x)}{C(x)} = \Gamma(x)$$

für jede Nullstelle von $C(x)$ endlich bleiben muss, woraus folgt, dass $\Gamma(x)$ sich auf eine ganze Funktion von x reduziert. Die den verschiedenen Teilfolgen entsprechenden Normalfunktionen f können somit vermittels einer unter ihnen $\bar{f}$ in der Form

$$f = \bar{f} + \Gamma(x)$$

dargestellt werden.

25. Es fragt sich jetzt, wann $\Gamma(x)$ sich auf eine Konstante reduziert. Ohne auf diese Frage hier näher eingehen zu können, bemerken wir Folgendes.

Es gibt Flächen, bei denen die Funktionen f auf gewissen geschlossenen, von der Funktion unabhängigen Kurven (Doppelkreisen), welche gegen den idealen Rand von F konvergieren, gleichmässig beschränkt sind. In solchen Fällen muss auch die ganze Funktion auf den genannten Kurven gleichmässig beschränkt sein, woraus folgt, dass sie sich auf eine Konstante reduziert. Wenigstens in solchen Fällen ist somit die Normalfunktion f durch ihre Pole und $\varkappa$-Punkte bis auf eine additive Konstante bestimmt.

Wir bemerken zum Abschluss, dass *die Klasse der Normalfunktionen in bezug auf Multiplikation und Division invariant ist,* indem mit f_1 und f_2 auch

$$f_1 \cdot f_2 \text{ und } f_1 : f_2$$

und allgemeiner mit

$$f_1; f_2, \ldots, f_n$$

auch

$$f_1^{\varrho_1} f_2^{\varrho_2} \ldots f_n^{\varrho_n}$$

bei beliebigen ganzen Zahlen ϱ_ν Normalfunktionen sind.

V. Die ganzen Normalfunktionen.

26. Der allgemeine Ausdruck für eine ganze Funktion von F lautet

$$g = A(x) + B(x)\, y(x), \tag{5, 1}$$

wo $A(x)$ und $B(x)$ ganze Funktionen von x sind. Wir werden im Folgenden nur solche ganze Funktionen betrachten, deren Komponenten reell sind und welche lauter reelle Nullstellen besitzen. Die Norm

$$Ng = A^2(x) - B^2(x)\, D(x) \tag{5, 2}$$

von g ist dann eine reelle ganze Funktion von x, deren Nullstellen mit den x-Koordinaten der Nullpunkte von g identisch sind.

Wir wollen nun unter den genannten Funktionen eine spezielle Klasse gemäss der folgenden Definition einführen:

Definition. *Die reelle ganze Funktion g soll eine Normalfunktion heissen, wenn* log g *ein singuläres Normalintegral dritter Gattung ist.*

Es gibt wegen (4, 15) in jedem Intervall $\bar{C}_\nu$ eine gerade Anzahl N_ν Nullpunkte von g, wobei

$$N_\nu \leqq N < \infty.$$

Wir denken uns die einem und demselben $\bar{C}$-Intervall gehörigen Nullpunkte paarweise

$$a_i,\; a_i' \tag{5, 3}$$

vereinigt.

Nach dem allgemeinen Ausdruck (3, 27) des singulären Integrals dritter Gattung kann man schreiben

$$\log g = \sum \left(\chi_{e_{i'} a_i} + \chi_{e_{i'} a'_i} + \log\left(1 - \frac{x}{e_{i'}}\right) + \gamma_{i'}(x)\right). \tag{5, 4}$$

Wegen der leicht zu verifizierenden Relationen

$$\chi_{e a} - \chi_{e a'} = \chi_{a' a}$$

und

$$\chi_{e a} + \chi_{e \bar{a}} = \log\left(1 - \frac{x}{a}\right) - \log\left(1 - \frac{x}{e}\right),$$

wo a und $\bar{a}$ die über den Punkt $x = a$ liegenden Punkte von F bezeichnen, kann der Ausdruck von $\log g$ auch in der Form

$$\log g = \sum \left(\chi_{\bar{a}'_i a_i} + \log\left(1 - \frac{x}{a_i}\right) + \gamma_{i'}(x)\right)$$

geschrieben werden. Man hat somit

$$\log g = \log f + \log C(x),$$

wo f die meromorphe Normalfunktion

$$f = \prod_i e^{\chi_{a'_i a_i}}$$

und $C(x)$ die ganze Funktion

$$C(x) = \prod_i \left(1 - \frac{x}{a_i}\right) e^{\gamma_{i'}(x)} \tag{5, 5}$$

von x bezeichnet. Mithin ist $g = f\, C(x)$. Umgekehrt gibt der Ausdruck

$$f = \frac{g}{C(x)}, \tag{5, 6}$$

wo g eine ganze Normalfunktion und $C(x)$ die durch (5, 5) definierte ganze Funktion von x bezeichnet, eine meromorphe Normalfunktion von F. Wegen $(4, 7)'$ und (5, 6) hat man für die ganzen Normalfunktionen den

Satz. *Die Nullpunkte einer ganzen Normalfunktion genügen den Abelschen Kongruenzen*

$$(a) \equiv (\bar{a}'). \tag{5, 7}$$

Ferner kann die ganze Normalfunktion g vermittels der multiplikativen Primfunk-

tion ω_a in der Form

$$g = \prod_{i=1}^{\infty} \omega_{a_i} e^{\gamma_i'(x)} \tag{5, 8}$$

dargestellt werden, wo a_i die Gesamtheit der Nullstellen von g zu durchlaufen hat.

VI. Die allgemeinen ganzen Funktionen.

Die allgemeinen Integrale erster Gattung.

27. Wir haben in unseren bisherigen Untersuchungen eindeutige Funktionen und Integrale behandelt, die wir Normalfunktionen bzw. Normalintegrale genannt haben und deren Theorie eine Analogie mit der Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale besitzt. Im Folgenden soll nun von der Forderung der Normalität abgesehen werden, wodurch man zu einer Erweiterung der Theorie der allgemeinen ganzen Funktionen gelangt.

Wir beginnen mit den Integralen erster Gattung der Form (1, 8), wo $h(x)$ eine ganze Funktion von x bezeichnet und wir wollen für solche Integrale das folgende Problem aufstellen:

Problem. *Es soll ein Integral erster Gattung*

$$I = \int \frac{h(x)}{y(x)} dx \tag{6, 1}$$

konstruiert werden, dessen primitive Perioden

$$\int_{A_\nu} dI = 2\pi i \varrho_\nu, \quad \int_{C_\nu} dI = 2\pi i \bar{\varrho}_\nu \tag{6, 2}$$

vorgeschriebene reelle oder komplexe Werte besitzen.

Wir werden unsere Aufgabe in der Weise lösen, dass wir zuerst ein Integral erster Gattung konstruieren, für welches die genannten Perioden verschwinden, von einer derselben abgesehen, die gleich $2\pi i$ ist. Es ist dann leicht, aus endlich oder unendlich vielen solchen Integralen durch Summierung ein den allgemeinen Bedingungen (6, 2) genügendes Integral zu bilden.

28. Es seien zuerst die Perioden (6, 2) gleich

$$\varrho_n = 2\pi i, \quad \varrho_\nu = 0 \text{ für } \nu \neq n, \quad \bar{\varrho}_\lambda = 0, \qquad (\lambda, \nu = 1, 2, 3, \ldots). \tag{6, 3}$$

Um ein Integral der gesuchten Art zu finden, gehen wir von dem Integral

$$(6,4) \qquad I_n^{(p)} = \int \frac{h_n^{(p)}(x)}{\bar{y}_p(x)}\, dx$$

aus, wo $\bar{y}_p(x)$ die durch

$$\bar{y}_p^2(x) = -\prod_{\nu=0}^{2p-1} \left(1 - \frac{x}{e_\nu}\right) e^{-\gamma_\nu(x)}$$

definierte, im allgemeinen transzendente Funktion und $h_n^{(p)}(x)$ ein Polynom vom Grade $2p-1$ bezeichnet, dessen Koeffizienten aus den Gleichungen

$$(6,5) \qquad \int\limits_{A_n} d\, I_n^{(p)} = 2\pi i \varrho_n, \quad \int\limits_{A_\nu} d\, I_n^{(p)} = 0 \text{ für } \nu \neq n, \quad \int\limits_{C_\lambda} d\, I_n^{(p)} = 0,$$

$$(\nu, \lambda = 1, 2, \ldots, p)$$

bestimmt werden. Offenbar hat das so eindeutig bestimmte reelle Polynom $h_n^{(p)}(x)$ genau einen Nullpunkt

$$(6,6) \qquad \alpha_{n,\nu}^{(p)} \text{ bzw. } \beta_{n,\nu}^{(p)}$$

in jedem Intervall

$$\bar{A}_\nu (\nu \neq n) \text{ und } \bar{C}_\lambda, \qquad (\nu, \lambda = 1, 2, \ldots, p).$$

Wir können somit schreiben

$$(6,7) \qquad h_n^{(p)} = c_n^{(p)} \prod_{\nu=1}^{p}{}' \left(1 - \frac{x}{\alpha_{n,\nu}^{(p)}}\right) \prod_{\nu=1}^{p} \left(1 - \frac{x}{\beta_{n,\nu}^{(p)}}\right),$$

wo $c_n^{(p)}$ eine Konstante bezeichnet.

Es sei nun

$$p_1, p_2, p_3, \ldots$$

eine unendliche Folge der Indizes p_i, für welche die Grenzwerte

$$\lim_{i \to \infty} \alpha_{n,\nu}^{(p_i)} = \alpha_{n,\nu}, \quad \lim_{i \to \infty} \beta_{n,\nu}^{(p_i)} = \beta_{n,\nu}$$

existieren. Aus dem Ausdruck

$$(6,8) \qquad \frac{h_n^{(p)}(x)}{\bar{y}_p(x)} = c_n^{(p)} \frac{\prod_{\nu=1}^{p}{}' \left(1 - \frac{x}{\alpha_{n,\nu}^{(p)}}\right) e^{\frac{1}{2}\gamma_\nu(x)} \prod_{\nu=1}^{p} \left(1 - \frac{x}{\beta_{n,\nu}^{(p)}}\right) e^{\frac{1}{2}\gamma_\nu(x)}}{\sqrt{\prod_{\nu=0}^{2p-1} \left(1 - \frac{x}{e_\nu}\right) e^{\gamma_\nu(x)}}}$$

des Integranden von (6, 4) geht hervor, dass $I_n^{(p_i)}$ für $i \to \infty$ gegen das Integral erster Gattung

(6, 9) $$I_n = \int \frac{h_n(x)}{y(x)} dx$$

konvergiert, wo $e_n = \lim\limits_{i \to \infty} e_n^{(p_i)}$ und $h_n(x)$ die ganze Funktion

$$h_n(x) = \prod_{\nu \neq n} \left(1 - \frac{x}{\alpha_{n,\nu}}\right) e^{\frac{1}{2}\gamma_\nu(x)} \prod \left(1 - \frac{x}{\beta_{n,\nu}}\right) e^{\frac{1}{2}\gamma_\nu(x)}$$

bezeichnet. Wir haben in I_n ein Integral, das den speziellen Bedingungen (6, 3 genügt. In gleicher Weise wird ein Integral $\bar{I}_n$ gefunden, das den Bedingungen

$$\bar{\varrho}_n = 2\pi i, \quad \bar{\varrho}_\nu = 0 \text{ für } \nu \neq n, \quad \varrho_\lambda = 0 \qquad (\nu, \lambda = 1, 2, 3, \ldots)$$

entspricht.

29. Um das allgemeine Problem zu lösen, betrachten wir die aus I_n gebildete Funktion

(6, 10) $$I_n(x, y) = \frac{1}{y(x)} \int_{e_0}^{x} \frac{h_n(x)}{y(x)} dx.$$

Wegen des Verschwindens der Perioden

$$A_\nu, \quad C_{\nu+1}, \qquad (\nu < n)$$

ist $I_n(x, y)$ für $|x| < e_{2n-1}$ eindeutig auf F und wegen

$$I_n(x, -y) = I_n(x, y)$$

sogar in der x-Ebene. Weil ferner die Funktion $I_n(x, y)$ für

$$x = e_\lambda, \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, 2n - 1)$$

verschwindet, hat dieselbe in diesen Verzweigungspunkten die Entwicklung

$$I_n(x, y) = \frac{1}{y(x)} \int_{e_\lambda}^{x} \frac{\tau_0 + \tau_1(x - e_\lambda) + \cdots}{\sqrt{x - e_\lambda}} dx,$$

woraus hervorgeht, dass $I_n(x, y)$ in den genannten Punkten regulär ist. Wir können somit z. B. für

(6, 11) $$|x| < \frac{e_{2n-1}}{2}$$

schreiben

$$I_n(x, y) = \Gamma_n(x) + \varepsilon_n(x),$$

von $\Gamma_n(x)$ ein Polynom und $\varepsilon_n(x)$ eine dort reguläre Funktion von x bezeichnet, die der Ungleichung

$$|\varrho_n \varepsilon_n(x)| < \varepsilon_n$$

genügt, wo die positive Konstante ε_n das allgemeine Glied einer konvergenten Reihe bezeichnet. Hieraus folgt aber, dass die Reihe

(6, 12) $$\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n (I_n(x, y) - y\, \Gamma_n(x))$$

auf der ganzen Fläche F konvergiert. Ihre Summe definiert ein Integral erster Gattung mit den A-Perioden $2\pi i \varrho_n$, während alle C-Perioden verschwinden.

Durch Vertauschung der Rolle der A- und C-Perioden bekommt man den Ausdruck

(6, 12)′ $$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\varrho}_n (\bar{I}_n(x, y) - y\, \bar{\Gamma}_n(x))$$

für ein Integral erster Gattung mit verschwindenden A-Perioden, dessen C-Perioden gleich $2\pi i \bar{\varrho}_n$ sind.

Schliesslich gibt die Summe

(6, 13) $$I = \sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n (I_n(x, y) - y\, \Gamma_n(x)) + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\varrho}_n (\bar{I}_n(x, y) - y\, \bar{\Gamma}_n(x))$$

der beiden Integrale ein Integral erster Gattung mit den ursprünglich gegebenen Perioden (6, 2).

Der allgemeine Ausdruck für solche Integrale lautet

$$I + \alpha(x) + \beta(x)\, y(x),$$

wo $\alpha(x)$ und $\beta(x)$ beliebige ganze Funktionen von x bezeichnen.

Die Einheitsfunktionen und die spezielle Pellsche Gleichung.

30. Es sei

(6, 14) $$g = A(x) + B(x)\, y(x)$$

eine ganze Funktion mit beliebigen Komponenten $A(x)$ und $B(x)$. Die x-Koordinaten der Nullstellen von g sind identisch mit den Nullstellen der Norm

$$Ng = A^2(x) - B^2(x)\,D(x). \tag{6, 15}$$

Damit g auf der ganzen Fläche F von Null verschieden bleibe, ist notwendig und hinreichend, dass die Norm Ng den Ausdruck

$$Ng = e^{\Gamma(x)}$$

besitzt, wo $\Gamma(x)$ eine ganze Funktion von x bezeichnet.

Die ganze nichtverschwindende Funktion

$$g_0 = g\,e^{-\frac{\Gamma(x)}{2}}$$

hat dann die Norm Eins:

$$Ng_0 = 1.$$

Wir nennen g_0 eine *Einheitsfunktion.* Eine solche Funktion hat man in der Funktion

$$e^{\beta(x)\,y(x)}, \tag{6, 16}$$

deren Komponenten gleich

$$A(x) = \cosh\,(\beta(x)\,y(x)), \quad B(x) = \frac{1}{y(x)}\sinh\,(\beta(x)\,y(x))$$

sind. Die Funktion (6, 16), welche die einzige Einheitsfunktion mit einem auf F eindeutigen Logarithmus ist, nennen wir eine *triviale Einheitsfunktion.*

31. Um einen Ausdruck für die Einheitsfunktionen zu gewinnen, bemerken wir, dass die ganze Funktion g von F offenbar dann und nur dann eine Einheitsfunktion ist, wenn $\log g$ ein Integral erster Gattung

$$\log g = \int \frac{h(x)}{y(x)}\,dx \tag{6, 17}$$

ist, dessen Perioden die Form $2\pi i n$ mit ganzem n besitzen.

Es seien nun

$$2\pi i n_\nu, \quad 2\pi i \bar{n}_\nu$$

die A_ν- bzw. C_ν-Perioden von $\log g$. Nach (6, 13) hat man dann für $\log g$ den Ausdruck

$$\log g = \sum_{\nu=1}^{\infty} n_\nu\,(I_\nu(x, y) - y\,\Gamma_\nu(x)) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \bar{n}_\nu\,(\bar{I}_\nu(x, y) - y\,\bar{\Gamma}_\nu(x)).$$

Hieraus ergibt sich für g die Produktdarstellung

$$(6,18) \qquad g = \prod_{\nu=1}^{\infty} g_\nu^{n_\nu} e^{-n_\nu y \Gamma_\nu(x)} \prod_{\nu=1}^{\infty} \bar{g}_\nu^{\bar{n}_\nu} e^{-\bar{n}_\nu y \bar{\Gamma}_\nu(x)}$$

vermittels der speziellen Einheitsfunktionen

$$(6,19) \qquad g_\nu = e^{I_\nu(x,y)}, \quad \bar{g}_\nu = e^{\bar{I}_\nu(x,y)}.$$

Diese Einheitsfunktionen sind durch ihre logarithmischen Perioden, von denen nur

$$\int_{A_\nu} d \log g_\nu = 2\pi i, \quad \int_{C_\nu} d \log \bar{g}_\nu = 2\pi i$$

von Null verschieden sind, bis auf eine triviale Einheit bestimmt. Wir werden (6, 19) *Grundeinheiten* von F nennen.

Durch Aufstellung von (6, 18) haben wir zugleich für *die spezielle Pellsche Gleichung*

$$(6,20) \qquad A^2(x) - B^2(x) D(x) = 1$$

die allgemeine Lösung $A(x)$, $B(x)$ vermittels der aus den Grundeinheiten

$$A_\nu(x) + B_\nu(x)\, y(x) = g_\nu e^{-y \Gamma_\nu(x)}, \quad \bar{A}_\nu(x) + \bar{B}_\nu(x)\, y(x) = \bar{g}_\nu e^{-y \bar{\Gamma}_\nu(x)}$$

abgeleiteten *Grundlösungen* $A_\nu(x)$, $B_\nu(x)$; $\bar{A}_\nu(x)$, $\bar{B}_\nu(x)$ implizit in der Form

$$(6,21) \quad A(x) + B(x)\, y(x) = \prod_{\nu=1}^{\infty} (A_\nu(x) + B_\nu(x)\, y(x))^{n_\nu} \prod_{\nu=1}^{\infty} (\bar{A}_\nu(x) + \bar{B}_\nu(x)\, y(x))^{\bar{n}_\nu}$$

gegeben.

Die eindeutigen Primfunktionen.

32. Es soll jetzt eine ganze Funktion konstruiert werden, welche eine einzige gegebene reelle Nullstelle a besitzt.

Wir gehen zu diesem Zweck von dem elementaren singulären Integral dritter Gattung χ_a mit den Perioden (3, 24) aus, welches in a einen logarithmischen singulären Punkt mit dem Residuum $+1$ besitzt. Es sei nun I_a ein Integral erster Gattung mit den nämlichen A- und C-Perioden. Dann ist

$$\chi_a - I_a = \bar{\chi}_a$$

ein singuläres Integral dritter Gattung mit verschwindenden A- und C-Perioden. Mithin ist

$$e^{\bar{\chi}_a} = \bar{\tau}_a$$

eine auf F eindeutige, ganze Funktion mit der einzigen Nullstelle a.

Nach dem Obigen hat die Norm von $\bar{\tau}_a$ den Ausdruck

$$N\bar{\tau}_a = \left(1 - \frac{x}{a}\right) e^{\Gamma_a(x)},$$

wo $\Gamma_a(x)$ eine ganze Funktion von x ist. Hieraus ergibt sich für die Norm der ganzen, im Punkte a verschwindenden Funktion

$$\tau_a = \bar{\tau}_a\, e^{-\frac{\Gamma_a(x)}{2}} \tag{6, 22}$$

der Ausdruck

$$N\tau_a = 1 - \frac{x}{a}.$$

Die so erhaltene, bis auf eine triviale Einheit bestimmte Funktion soll eine *Primfunktion* heissen.

Produktdarstellung der ganzen Funktionen vermittels Primfunktionen.

33. Es soll hier der folgende Satz bewiesen, welcher dem bekannten Weierstrasschen Produktsatz der ganzen Funktionen entspricht:

Satz. *Es ist möglich eine ganze Funktion zu konstruieren, die in einer beliebig gegebenen endlichen oder unendlichen Menge reeller Punkte*

$$(a): \qquad a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

verschwindet und sonst von Null verschieden ist.

Wir betrachten zu diesem Zweck die aus der Primfunktion

$$\tau_{a_\nu} = A_\nu(x) + B_\nu(x)\, y(x),$$

wo a_ν einen Punkt des Intervalles $\bar{C}_n$ bezeichnet, abgeleitete Funktion

$$f_{a_\nu}(x, y) = \frac{1}{y} \log \frac{\tau_{a_\nu}}{\sqrt{N\tau_{a_\nu}}}. \tag{6, 23}$$

Weil sämtliche Perioden

$$A_\mu,\ C_\mu \qquad (\mu < n)$$

von $\log \tau_{a_\nu}$ verschwinden, ist $f_{a_\nu}(x, y)$ auf F für

$$(6,24) \qquad |x| < \frac{1}{2} e_{2n-2}$$

eindeutig. Wegen

$$f_{a_\nu}(x, -y) = f_{a_\nu}(x, y)$$

ist f_{a_ν} sogar eine eindeutige Funktion von x im Bereich (6, 24). Ferner ergibt sich aus der Entwicklung

$$f_{a_\nu}(x, y) = \frac{1}{y} \log \sqrt{\frac{A_\nu + B_\nu y}{A_\nu - B_\nu y}}$$

der Funktion f_{a_ν} in den Punkten e_ν $(\nu \leqq 2n-2)$, dass sie dort regulär ist. Man kann somit z. B. für

$$|x| < \frac{1}{4} e_{2n-2}$$

schreiben

$$f_{a_\nu}(x, y) = \lambda_\nu(x) + \varepsilon_\nu(x),$$

wo $\lambda_\nu(x)$ ein Polynom und $\varepsilon_\nu(x)$ eine im Bereiche (6, 24) reguläre Funktion ist, die der Ungleichung

$$|\varepsilon_\nu(x)| < \varepsilon_\nu$$

genügt, wo die positive Konstante ε_ν das allgemeine Glied einer konvergenten Reihe bezeichnet. Aus dem Obigen folgt, dass die Reihe

$$\sum (f_{a_\nu}(x, y) - \lambda_\nu(x)),$$

wenigstens nach Auslassen von endlich vielen Gliedern, in jedem endlichen Bereich der Fläche F gleichmässig konvergiert. Daraus folgt aber die gleichmässige Konvergenz des Produktes

$$\prod_\nu \frac{\tau_{a_\nu}}{\sqrt{N \tau_{a_\nu}}} e^{-\lambda_\nu(x) y(x)}$$

und somit auch des Produktes

$$(6,25) \qquad \prod_\nu \tau_{a_\nu} e^{\alpha_\nu(x) - \lambda_\nu(x) y(x)},$$

wenn die Polynome $\alpha_\nu(x)$ so gewählt werden, dass das Produkt

$$\prod_{\nu} \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) e^{2\alpha_\nu(x)}$$

konvergiert.

Wir besitzen in (6, 25) eine ganze Funktion mit den gegebenen Nullstellen (a). Die Faktoren sind mit konvergenzerzeugenden Faktoren behaftete Primfunktionen. Der allgemeine Ausdruck für eine Funktion der betreffenden Art wird aus (6, 25) durch Multiplikation mit einer willkürlichen ganzen nichtverschwindenden Funktion erhalten.

Die allgemeine Pellsche Gleichung.

34. Wir verstehen mit *einer allgemeinen Pellschen Gleichung* die Gleichung

$$A^2(x) - B^2(x)\, D(x) = G(x), \tag{6, 26}$$

wo $G(x)$ eine beliebige ganze Funktion mit den reellen, zu den Intervallen C gehörigen Nullstellen (a) bezeichnet. Es handelt sich um die Bestimmung der allgemeinen Lösung von (6, 26) durch ganze Funktionen $A(x)$, $B(x)$ bei gegebener Diskriminante $D(x)$, welche eine ganze Funktion mit den Nullstellen e_ν ist.

Wir betrachten zu diesem Zweck eine ganze Funktion

$$\bar{g} = \bar{A}(x) + \bar{B}(x)\, y(x)$$

von F mit den Nullstellen (a), welche durch (6, 25) darstellbar ist. Die Norm

$$N\bar{g} = \bar{A}^2(x) - \bar{B}^2(x)\, D(x) = \bar{G}(x)$$

von $\bar{g}$ ist dann eine ganze Funktion von x mit den Nullstellen (a). Mithin ist

$$G(x) = \bar{G}(x)\, e^{\Gamma(x)},$$

wo $\Gamma(x)$ eine ganze Funktion von x ist. Hieraus folgt aber, dass die ganzen Funktionen

$$A_1(x) = \bar{A}(x)\, e^{\frac{1}{2}\Gamma(x)}, \quad B_1(x) = \bar{B}(x)\, e^{\frac{1}{2}\Gamma(x)}$$

eine partikuläre Lösung der Gleichung (6, 26) bilden.

Es sei nun $A(x)$, $B(x)$ eine beliebige Lösung von (6, 26). Dann ist

$$g = A(x) + B(x)\, y(x)$$

eine ganze Funktion mit der Norm $G(x)$ und den Nullstellen (a). Der Quotient $g : g_1$, wo

$$g_1 = A_1(x) + B_1(x)\, y(x),$$

ist dann eine nichtverschwindende ganze Funktion von F mit der Norm 1, also eine Einheitsfunktion. Umgekehrt hat man in den Komponenten jeder ganzen Funktion von F der Form $g_1 g_0$, wo g_0 eine beliebige Einheitsfunktion bezeichnet, eine Lösung von (6, 26). Wir haben somit den

Satz. *Die allgemeine Lösung der allgemeinen Pellschen Gleichung*

$$A^2(x) - B^2(x)\,D(x) = G(x)$$

ist in der Form

$$A(x) = A_0(x)\,A_1(x) + B_0(x)\,B_1(x)\,D(x)$$
$$B(x) = B_0(x)\,A_1(x) + A_0(x)\,B_1(x)$$

darstellbar, wo $A_1(x)$, $B_1(x)$ *eine beliebige partikuläre Lösung derselben und* $A_0(x)$, $B_0(x)$ *die allgemeine Lösung der speziellen Pellschen Gleichung*

$$A^2(x) - B^2(x)\,D(x) = 1$$

bezeichnet.