Transformation Groups, Vol. 1, No. 3, 1996, pp. 249–258 © Birkhäuser Boston (1996)

TOUTE VARIÉTÉ MAGNIFIQUE EST SPHÉRIQUE

D. LUNA

Institut Fourier
Université de Grenoble I
B.P. 74 F-38 402
Saint Martin d'Hères, France
dluna@puccini.ujf-grenoble.fr

Abstract. Let G be a (connected) reductive group (over $\mathbf{C}$). An algebraic G-variety X is called "wonderful", if the following conditions are satisfied: X is (connected) smooth and complete; X contains r irreducible smooth G-invariant divisors having a non void transversal intersection; G has 2^r orbits in X. We show that wonderful varieties are necessarily spherical (i.e., they are almost homogeneous under any Borel subgroup of G).

Introduction

Soit G un groupe réductif connexe et soit X une G-variété algébrique (le corps de base étant $\mathbf{C}$). On dira que X est (une G-variété) magnifique de rang r, si elle vérifie les trois conditions suivantes:

(1) X est lisse, connexe et complète;
(2) l'opération de G dans X laisse stable r diviseurs irréductibles $D_1, \ldots, D_r$, qui sont lisses et dont l'intersection est non vide et transverse;
(3) si $x, x' \in X$ sont tels que $\{i, x \in D_i\} = \{i, x' \in D_i\}$, alors $G \cdot x = G \cdot x'$.

Si X est une G-variété magnifique, alors G a 2^r orbites dans X, dont une orbite ouverte (que nous noterons X°) et une seule orbite fermée (de codimension r).

Soit H un sous-groupe algébrique de G (non nécessairement connexe). On appellera complétion (resp. complétion magnifique) de G/H, toute G-variété complète (resp. magnifique) X, dans laquelle G a une orbite ouverte et dense X° isomorphe à G/H.

Les complétions magnifiques sont en un sens les complétions les plus simples qu'on puisse imaginer pour un espace homogène. En effet, utilisant un procédé de "désingularisation équivariante", on peut construire pour tout espace homogène G/H, des complétions $G/H \cong X^\circ \subset X$ vérifiant les

Received May 16, 1996, revised version received August 27, 1996. Accepted August 28, 1996.

conditions suivantes: X est lisse et $X \setminus X^\circ$ est une réunion de diviseurs lisses à "croisements normaux". Mais en général, l'intersection de ces diviseurs sera vide et/ou G aura une infinité d'orbites dans X.

Motivés par des problèmes de géométrie énumérative, De Concini et Procesi ont montré que, pour tout sous-groupe H qui est le normalisateur dans G d'un sous-groupe symétrique, G/H possède une complétion magnifique (en anglais "wonderful completion", voir [DeC–P]).

Ce résultat a ensuite été généralisé (et mieux compris) dans la théorie des variétés sphériques. Rappelons quelques notions de base de cette théorie (voir aussi [K1]).

Soit B un sous-groupe de Borel de G. Une G-variété algébrique X est appelée sphérique, si X est normale et si B a une orbite dense dans X. Un sous-groupe (algébrique) H de G est appelé sphérique si G/H est une (G-variété) sphérique. Enfin, une variété sphérique X est appelée toroïdale, si tout diviseur irréductible de X qui est stable par B et qui contient une orbite de G, est stable par G. Le rang d'une G-variété sphérique X est par définition l'entier $\min_{x\in X}(\operatorname{codim}_X B^u\cdot x)$, où B^u désigne le radical unipotent de B.

Pour qu'une variété sphérique X soit magnifique, il faut et il suffit que X soit lisse, complète, toroïdale et que G n'ait qu'une seule orbite fermée dans X; de plus le rang de X (en tant que variété magnifique) est alors aussi le rang de X comme variété sphérique.

Disons d'une G-variété sphérique X qu'elle est "presque magnifique", si X est complète, toroïdale, et si G n'a qu'une seule orbite fermée dans X. Si H est un sous-groupe sphérique de G, alors G/H possède une complétion presque magnifique si et seulement si $N_G(H)/H$ est fini, et cette complétion est alors unique à isomorphisme près ([BP]). Si de plus $N_G(H) = H$, alors "la" complétion presque magnifique de G/H est lisse, autrement dit est magnifique ([K2]). Les variétés magnifiques semblent devoir occuper une place centrale dans la théorie des variétés sphériques (voir par exemple [L2]).

Les variétés magnifiques de rang 1 sont connues depuis quelque temps déjà (voir [A] et [B1]). Plus récemment, les variétés (sphériques) magnifiques de rang 2 on été classifiées par B. Wasserman (voir [W]).

Le but de ce papier est de démontrer le

Théorème. *Toute variété magnifique est sphérique.*

Voici quelques commentaires concernant ce théorème.

1) Toute G-variété magnifique X est projective, et le radical de G opère trivialement dans X. Cela est vrai (et bien connu) plus généralement pour toute G-variété normale et complète dans laquelle G n'a qu'une seule orbite fermée.

2) Soit X une G-variété magnifique de rang r. Alors il découle aussitôt de la définition que $r \leq \dim X \leq \dim G$. Du théorème résultent les inégalités (non évidentes *a priori*) plus contraignantes: $r \leq$ rang semi-simple de G et $\dim X \leq \dim B$.

3) Il résulte du théorème (et de la théorie des variétés sphériques) qu'un espace homogène algébrique qui possède une complétion magnifique, n'en possède qu'une seule (à isomorphisme près).

4) Les hypothèses du théorème ne peuvent pas être relâchées, comme le montre les exemples suivants (pour plus de détails, voir l'article [M-J]) :

a) Soit X la SL_2-variété $\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2$ (SL_2 opérant dans les $\mathbf{P}_n (n \in \mathbf{N})$ au moyen de ses représentations irréductibles) ; cette SL_2-variété est projective, lisse, de dimension 3 (donc est non sphérique), contient quatre orbites et deux diviseurs lisses SL_2-stables qui se coupent en une orbite de dimension 1 (mais l'intersection de ces diviseurs n'est pas transverse).

b) On peut également construire des SL_2-variétés projectives lisses de dimension 3 (donc non sphériques), contenant $r \geq 3$ diviseurs lisses SL_2-stables, à croisements normaux et vérifiant la condition (3) des variétés magnifiques (mais l'intersection de ces diviseurs est vide).

Dans ce qui suit, pour prouver le théorème, on procédera en trois étapes:

— au §1 on montre d'abord qu'il suffit de considérer le cas du rang 2;

— puis au §2 on prouve que s'il existait une variété magnifique de rang 2 non sphérique, il existerait aussi une SL_2-variété magnifique de rang 2 et de dimension 3;

— enfin au §3 on montre que ces dernières n'existent pas.

1.

Soit G un groupe réductif connexe, et soit B un sous-groupe de Borel de G. Choisissons un tore maximal T de B. Désignons par $\Xi(T)$ le groupe des caractères de T. Le système de racines R de G est contenu dans $\Xi(T)$; désignons par S la base de R associée à B. Notons B_- le sous-groupe de Borel qui est opposé à B et qui contient T. Désignons par $\Xi_*(T)$ le groupe dual de $\Xi(T)$ (dont les éléments s'identifient aux morphismes de groupes algébriques $\lambda : \mathbf{C}^* \to T$).

1.1. Rappelons quelques faits bien connus de la théorie des groupes réductifs de transformations. Soit X une G-variété irréductible et normale, et soit Z une orbite complète de G dans X. Notons z l'unique point fixe de B_- dans Z. Désignons par P_- le sous-groupe d'isotropie de G en z, par P le sous-groupe parabolique qui est opposé à P_- et qui contient T, et posons $L = P \cap P_-$. Notons P^u le radical unipotent de P. Alors il existe des sous-variétés (localement fermées) W de X vérifiant les conditions suivantes: W est affine, stable par L, contient z, et le morphisme naturel $P^u \times W \to X$ est une immersion ouverte (voir [BLV]). Il s'ensuit en particulier que X est (G-)sphérique si et seulement si W est (L-)sphérique.

Supposons maintenant que la variété X est en outre complète et que G n'a qu'un nombre fini d'orbites dans X. Alors X^T (l'ensemble des points fixes de T dans X) est fini. Si $y \in X^T$ et si $\lambda \in \Xi_*(T)$, posons $X(\lambda, y) = \{x \in X,$ $\lim_{t\to 0} \lambda(t) \cdot x = y\}$. Supposons que λ vérifie $\langle \lambda, \alpha \rangle > 0$ quel que soit $\alpha \in S$, et que λ soit "en position suffisamment générale" pour que $\mathbf{C}^*$ opérant dans

X à travers λ, fixe les mêmes points que T. Alors les $X(\lambda, y)$, $y \in X^T$ forment une partition de X en sous-variétés localement fermées, stables par B (la "décomposition de Bialynicki–Birula", voir [BB]).

Si $z \in X^T$ est tel que $X(\lambda, z)$ est ouvert dans X, alors on voit facilement que B_- fixe z (et que par suite $Z = G \cdot z$ est une orbite complète de X). De plus, on vérifie alors sans peine que $P^u W = \{x \in X, \overline{B \cdot x} \supset Z\} = X(\lambda, z)$.

Si de plus z est un point lisse de X, alors W et $T_z W \cong T_z X / T_z Z$ sont des L-variétés isomorphes (voir [L1], p. 99).

Remarque. Pour toute orbite complète Z de G dans X, il n'existe pas nécessairement $z \in Z^T$ et $\lambda \in \Xi_*(T)$ tels que $X(\lambda, z)$ soit ouvert dans X, même si X est une G-variété sphérique et projective.

1.2. Ceci étant rappelé, abordons la preuve du théorème. Soit X une G-variété magnifique de rang r. Pour tout sous-ensemble E de $\{1, \ldots, r\}$, posons

$$X_E = \bigcap_{i \in \{1, \ldots, r\} \setminus E} D_i .$$

Vu la définition des variétés magnifiques, il est clair que X_E est (une G-variété) magnifique de rang card(E). En particulier, pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, $X_{\{i\}}$ est magnifique de rang 1. Notons $\gamma_i \in \Xi(T)$ le poids de T dans $T_z X_{\{i\}} / T_z Z$.

Les γ_i ne sont pas nuls: sinon T aurait une infinité de points fixes dans $X_{\{i\}}$, ce qui n'est pas possible, puisque G n'y a que deux orbites. Par conséquent, les $X_{\{i\}}$ sont sphériques. Cela implique que les γ_i $(i = 1, \ldots, r)$ sont des "racines sphériques" (notion qui joue un rôle important dans la théorie des variétés sphériques, voir [B2] et [L2]), a priori non nécessairement distinctes deux-à-deux.

Grâce à l'hypothèse de transversalité, le L-module $T_z X / T_z Z$ se décompose en somme directe des $T_z X_{\{i\}} / T_z Z$ $(i = 1, \ldots, r)$, d'où il suit que le sous-groupe dérivé de L opère trivialement dans $T_z X / T_z Z$. D'après ce qui a été rappelé ci-dessus, X est donc sphérique si et seulement si T a une orbite ouverte dans $T_z X / T_z Z$. Puisque T opère dans $T_z X / T_z Z$ au moyen des caractères γ_i, cette dernière condition est remplie si et seulement si les γ_i $(i = 1, \ldots, r)$ sont linéairement indépendants (dans $\Xi(T) \otimes \mathbf{R}$).

Soient $i, j \in \{1, \ldots, r\}$. La variété $X_{\{i,j\}}$ est magnifique de rang 2, et possède γ_i et γ_j comme "racines sphériques". Choisissons un produit scalaire sur $\Xi(T) \otimes \mathbf{R}$ invariant par le groupe de Weyl $N_G(T)/T$. Supposons théorème déjà démontré lorsque $r = 2$. Alors on sait que $\langle \gamma_i, \gamma_j \rangle \leq 0$ (ce résultat est dû à Brion [B2]; voir aussi [W]). On sait aussi (voir *loc. cit.*) que toute racine sphérique est ou bien une racine positive, ou bien la somme de deux racines positives ; par suite, il existe $\lambda \in \Xi(T) \otimes \mathbf{R}$ tel que $\langle \lambda, \gamma_i \rangle > 0$ $(i = 1, \ldots, r)$. D'un argument classique découle alors que les $\gamma_i (i = 1, \ldots, r)$ sont linéairement indépendants (voir par exemple [Bou], Chap. V, §3, n°5, Lemme 3).

2.

Il reste à démontrer le théorème pour les variétés magnifiques de rang 2.

2.1. Soit G un groupe algébrique, et soit X une G-variété algébrique. Soit T' un sous-groupe réductif de G. Notons $G' = C_G(T')^\circ$ la composante neutre du centralisateur de T' dans G. Le groupe G' opère dens $X^{T'}$ (l'ensemble des points fixes de T' dans X).

Le lemme suivant est bien connu (et se démontre par un argument d'espaces tangents facile):

Lemme 1. *Si $x \in X^{T'}$, alors l'orbite $G' \cdot x$ est ouverte et fermée dans $(G \cdot x)^{T'}$.* $\square$

2.2. Supposons maintenant G réductif connexe. Soit X une G-variété magnifique. Désignons par z l'unique point fixe de B_- dans X, et par $Z = G \cdot z$ l'unique orbite fermée de G dans X. Soit T' un sous-tore de T. Posons $G' = C_G(T')^\circ/T'$ et désignons par X' la composante connexe de $X^{T'}$ qui contient z. Le groupe G' est alors réductif connexe, et d'après le Lemme 1, X' est une G'-variété (lisse connexe complète) dans laquelle G' n'a qu'un nombre fini d'orbites; mais en général X' n'est pas une G'-variété magnifique (G' peut avoir plusieurs orbites fermées dans X'). Toutefois on a le résultat suivant:

Lemme 2. *Soit X une G-variété magnifique de rang 1 et de racine sphérique γ. Posons $T' = (ker\,\gamma)^\circ$. Soient G' et X' comme ci-dessus. Si X' est de dimension 2, alors X' est une G'-variété magnifique.*

Preuve. Les hypothèses du Lemme 2 impliquent que le groupe G' est semisimple de rang 1 et que $C_G(T')^\circ$ contient un groupe additif de G correspondant à une racine positive β de G proportionnelle à γ. Choisissons $\lambda \in \Xi_*(T)$ tel que $\langle\lambda, \beta\rangle > 0$. Alors on a aussi $\langle\lambda, \gamma\rangle > 0$, ce qui implique que $X'(\lambda, z)$ est ouvert dans X'.

Soit z' un point sur une orbite fermée de G' dans X', fixé par T. D'après le Lemme 1, z' se trouve sur Z. Par suite, il existe $w \in N_G(T)$ tel que $z' = w \cdot z$. Le poids de T dans $T_{z'}X/T_{z'}Z$ est donc égal à $w \cdot \gamma$. Puisque ce poids est aussi le poids de T dans $T_{z'}X'/T_{z'}(G' \cdot z')$, il s'annule sur T', donc $w \cdot \gamma = \pm\gamma$. Quitte à remplacer z' par $s_\beta \cdot z'$ (où s_β est un élément de $C_G(T')^\circ \cap (N_G(T) \setminus T)$), on peut supposer que $w \cdot \gamma = \gamma$. Comme β est proportionnelle à γ, on a alors aussi $w.\beta = \beta$. Par suite, les poids de T dans $T_{z'}X'$ sont β et γ, ce qui implique que $X'(\lambda, z')$ est ouvert dans X', d'où il suit que $z' = z$. Par conséquent, $G' \cdot z$ est l'unique orbite fermée de G' dans X', ce qui démontre de Lemme 2. $\square$

2.3. Revenons à la preuve du Théorème. Supposons que X est une variété magnifique de rang 2. Désignons par X_1 et X_2 les deux sous-G-variétés magnifiques de rang 1 de X, dont les racines sphériques sont γ_1 et γ_2. Il faut montrer que γ_1 et γ_2 ne sont pas proportionnels dans $\Xi(T) \otimes \mathbf{R}$.

Procédons par l'absurde. Supposons que γ_1 et γ_2 soient proportionnels et posons $T' = (\ker \gamma_1)^\circ = (\ker \gamma_2)^\circ$. Soient G' et X' comme ci-dessus. On a visiblement $2 \leq \dim X' \leq 3$.

La cas $\dim X' = 2$ n'est pas possible. En effet, dans ce cas:

ou bien G' serait de dimension 1 et ne pourrait avoir une orbite ouverte dans X';

ou bien G' serait un groupe semi-simple de dimension 3 et aurait deux orbites de dimension 1 dans $X' \cap X_1$ et $X' \cap X_2$ (forcément isomorphes à $\mathbf{P}_1$) qui se couperaient en z !

Reste à examiner le cas où X' est de dimension 3. Dans ce cas G' est semi-simple de dimension 3. Montrons d'abord que X' est alors une G'-variété magnifique de rang 2.

Notons X_1' et X_2' les composantes connexes de $(X_1)^{T'}$ et $(X_2)^{T'}$ contenant z. D'aprés le Lemme 2, X_1' et X_2' sont deux G'-variétés magnifiques (de rang 1). Il est clair que X_1' et X_2' se coupent (transversalement) en $G' \cdot z$. Il s'ensuit que $X_1' \cup X_2'$ est une composante connexe de $X' \setminus X'^\circ$ (où X'° désigne l'orbite ouverte de G' dans X').

Or, si Y est une SL_2-variété complète de dimension 3 quelconque dans laquelle SL_2 a une orbite dense Y°, alors on sait que $Y \setminus Y^\circ$ est toujours connexe. Cela résulte par exemple du fait que Y° est alors homéomorphe à $\mathbf{R}^3 \times \mathrm{SU}_2(\mathbf{C})/\Gamma$ (où Γ est un sous-groupe fini de $\mathrm{SU}_2(\mathbf{C})$), qui est "connexe à l'infini". Autre argument: on sait que l'ensemble des points fixes dans Y d'un sous-groupe additif de SL_2 est connexe, ...

Par conséquent, $X' \setminus X'^\circ = X_1' \cup X_2'$, d'où il suit bien que X' est une G'-variété magnifique.

3.

Pour terminer la preuve du Théorème, nous allons prouver en 3.3 qu'il n'existe pas de SL_2-variété magnifique de dimension 3 et de rang 2.

3.1. Commençons par un fait général. Soit G un groupe réductif connexe, et soit X une G-variété normale irréductible et complète, dans laquelle G a une orbite ouverte X°. Supposons X° isomorphe à G/H, où H est un sous-groupe (algébrique) de G. Par un procédé classique de "clôture intégrale", on peut alors construire un couple formé d'une G-variété normale irréductible complète X' et d'un G-morphisme fini $\rho : X' \to X$, tel que G a une orbite ouverte dans X' (notée X'°), isomorphe à G/H°. Ce "revêtement" (ramifié) est même "galoisien": le groupe fini $\Gamma = H/H^\circ$ se plonge dans $\mathrm{Aut}_G X'$, et ρ s'identifie au morphisme quotient $X' \to X'/\Gamma$.

Lemme 3. *Soient G et $\rho : X' \to X$ comme ci-dessus. Si G a un nombre fini d'orbites et une seule orbite fermée dans X, alors il en est de même pour les orbites de G dans X'.*

Preuve. Il est clair que G n'a qu'un nombre fini d'orbites dans X'. Soit $\lambda \in \Xi_*(T)$ tel que $\mathbf{C}^*$ opérant dans X' à travers λ ne laisse fixe qu'un nombre fini de points. Soit z' celui de ces points vérifiant que $X'(\lambda, z')$ est ouvert dans X'. On sait que l'orbite $G \cdot z'$ est *complète* (voir les rappels du §1). Le groupe Γ fixe visiblement z', donc fixe aussi l'orbite $G \cdot z'$. Puisqu'on suppose que G n'a qu'une seule orbite fermée dans X, le groupe Γ opère transitivement dans l'ensemble des orbites fermées de G dans X'. Par conséquent, $G \cdot z'$ est l'unique orbite fermée de G dans X'. □

3.2. Supposons maintenant que $G = \mathrm{SL}_2$, et soit X une SL_2-variété irréductible normale (de dimension 3) dans laquelle SL_2 a une orbite ouverte X° isomorphe à SL_2. Dans [LV] ont été étudiées (et classifiées) toutes ces variétés. En particulier, le résultat suivant s'y trouve démontré (voir [LV] §9):

Lemme 4. *Supposons X complète et que G n'ait qu'une seule orbite fermée Z dans X. Notons $Y_1, \dots, Y_r$ les composantes irréductibles de $X \setminus X^\circ$. Posons $U = \{x \in X,\ \overline{B \cdot x} \supset Z\}$. Alors $r \geq 3$ et l'ensemble $X^\circ \setminus U$ est composé de r orbites de B.*

Afin de faciliter la compréhension du lecteur, puisque l'article [LV] est assez long, et que le résultat ci-dessus y est démontré vers la fin après bien des préliminaires, nous allons esquisser ci-dessous une preuve du Lemme 4. Commençons par quelques rappels.

Pour toute variété algébrique (irréductible) Y, notons $\mathbf{C}[Y]$ son algèbre des fonction régulières et $\mathbf{C}(Y)$ son corps des fonctions rationnelles.

Soit X une SL_2-variété irréductible normale dans laquelle SL_2 a une orbite ouverte X° isomorphe à SL_2. Il existe alors dans $\mathbf{C}[X^\circ]$ un sous-espace vectoriel M de dimension 2 ayant les propriétés suivantes:

a) toute équation d'une orbite de B dans X° appartient à M, et inversement, tout $f \in M \setminus \{0\}$ est l'équation d'une orbite de B dans X°;

b) tout vecteur propre de B dans $\mathbf{C}(X^\circ)$ peut s'écrire comme produit d'éléments de $M \setminus \{0\}$ et de leurs inverses.

De b) résulte en particulier que toute valuation SL_2-invariante de $\mathbf{C}(X^\circ)$ est déterminée par sa restriction à M (voir [LV] p. 217).

Soit maintenant X une SL_2-variété irréductible normale contenant deux orbites seulement, une orbite ouverte X° isomorphe à SL_2 et une orbite Y (fermée de codimension 1) isomorphe à SL_2/T. Une telle variété est forcément lisse, et se trouve en fait isomorphe à un SL_2-fibré en droites audessus de SL_2/T (voir [LV] §5). Soit s_α un élément de $N_{\mathrm{SL}_2}(T) \setminus T$, et soit $\lambda \in \Xi_*(T)$ tel que $\langle \lambda, \alpha \rangle > 0$ (où α est la racine de SL_2 associée à B). Soit y celui des points fixes de T dans Y tel que $X(\lambda, y)$ est de dimension 2. Alors $X(\lambda, s_\alpha \cdot y) \cap X^\circ = \varnothing$ et $X(\lambda, y) \cap X^\circ$ est une orbite de B. Si $f \in M$ est l'équation de cette orbite, et si v est la valuation G-invariante de $\mathbf{C}(X^\circ)$ associée au diviseur Y de X, alors on a $v(f) = 1$ et $v(M \setminus \mathbf{C}f) = -1$.

Esquissons maintenant une preuve du Lemme 4. Soient X, X°, Z, $Y_1, \dots, Y_r$ et U comme dans le Lemme 4.

Puisque Z est l'unique orbite fermée de SL_2, dans Y_i, SL_2 a dans Y_i une orbite ouverte Y_i°, isomorphe à SL_2/T ou à $\mathrm{SL}_2/N_{\mathrm{SL}_2}(T)$. Le deuxiéme cas n'est pas possible : en effet, la variété $X^\circ \cup Y_i^\circ$ est normale et donc lisse ; si y est le point fixe de $N_{\mathrm{SL}_2}(T)$ dans Y_i°, l'opération de $N_{\mathrm{SL}_2}(T)$ dans T_yX/T_yY_i (qui est un espace vectoriel de dimension 1) serait triviale, ce qui contredit l'hypothése que SL_2 a une orbite ouverte dans X. Par suite les SL_2-variétés $X^\circ \cup Y_i^\circ$ sont du type de celles qu'on a considérées ci-dessus. Notons y_i celui des points fixes de T dans Y_i° tel que $X(\lambda, y_i) \cap X^\circ$ est une orbite de B. Soit $f_i \in M$ l'équation de cette orbite. Désignons par v_i la valuation SL_2-invariante de $\mathbf{C}(X^\circ)$ associée au diviseur Y_i dans X, et par $\mathcal{O}_{v_i}$ l'anneau de valuation de v_i dans $\mathbf{C}(X^\circ)$.

Si z est le point fixe de B_- dans Z, alors on a $U = X(\lambda, z)$ (voir les rappels du §1). De la décomposition de Bialynicki-Birula (voir *loc. cit.*) résulte immédiatement que les orbites de B dans $X^\circ \setminus U$ sont les $X(\lambda, y_i) \cap X^\circ$ $(i = 1, \ldots, r)$, d'où déjà la deuxième assertion du Lemme 4.

L'anneau $\mathbf{C}[U]$ est noethérien et intégralement clos. Vu que les valuations essentielles de cet anneau (de Krull) sont celles de $\mathbf{C}[X^\circ \cap U]$ et les v_i $(i = 1, \ldots, r)$, on a

$$\mathbf{C}[U] = \mathbf{C}[X^\circ]\,[f_1^{-1}, \ldots, f_r^{-1}] \cap \mathcal{O}_{v_1} \cap \ldots \cap \mathcal{O}_{v_r}.$$

Puisque $\mathrm{SL}_2 \cdot U = X$ et que X est complète, toute valuation SL_2-invariante de $\mathbf{C}(X^\circ)$ reste positive sur $\mathbf{C}[U]$. Supposons $r = 1$. Alors $\mathbf{C}[U] = \mathbf{C}[X^\circ][f_1^{-1}] \cap \mathcal{O}_{v_1}$ contient f_1. Mais il existe des valuations SL_2-invariantes v de $\mathbf{C}(X^\circ)$ telles que $v(f_1) = -1$, contradiction.

Puisque U est affine, il existe des $g \in \mathbf{C}[U]$ s'annulant sur $Y_1 \cup \cdots \cup Y_r$, autrement dit tels que $v_1(g) > 0, \ldots, v_r(g) > 0$. Pour des raisons générales (voir [LV] p. 217), il existe alors aussi des vecteurs propres de B dans $\mathbf{C}[U]$ vérifiant ces inégalités. Si $r = 2$, les seuls vecteurs propres de B dans $\mathbf{C}[U] = \mathbf{C}[X^\circ][f_1^{-1}, f_2^{-1}] \cap \mathcal{O}_{v_1} \cap \mathcal{O}_{v_2}$ sont visiblement ceux de la forme $\lambda(f_1 f_2)^n$ $(\lambda \in \mathbf{C}^*, n \in \mathbf{Z})$. Mais $v_1\big((f_1 f_2)^n\big) = v_2\big((f_1 f_2)^n\big) = 0$, contradiction.

Ceci termine la preuve du Lemme 4.

3.3. Revenons à la preuve du Théorème. Posons $G = \mathrm{SL}_2$, et supposons que X est une SL_2-variété magnifique de dimension 3 et de rang 2. Rappelons que X° (resp. Z) désigne l'orbite ouverte (resp. fermée) de SL_2 dans X.

Posons $U = \{x \in X, \overline{B \cdot x} \supset Z\}$. D'après les résultats rappelés au §1, l'hypothèse X magnifique implique que $U \cong \mathbf{C}^3$ et que $U \cap X^\circ \cong \mathbf{C} \times (\mathbf{C}^*)^2$. Il s'ensuit que $\pi_1(U \cap X^\circ) \cong \mathbf{Z}^2$.

Soient alors $\rho : X' \to X$ et Γ comme dans le Lemme 3 (Γ est ici un sous-groupe fini de $G = \mathrm{SL}_2$). Du Lemme 3 résulte alors que toutes les hypothèses du Lemme 4 sont remplies pour la SL_2-variété X'. Désignons par X'° (resp. Z') l'orbite ouverte (resp. fermée) de SL_2 dans X', et posons $U' = \{x \in X', \overline{B \cdot x} \supset Z'\}$.

Le Lemme 4 implique que le groupe $\pi_1(U \cap X^\circ)$ est non commutatif. En effet, $U' \cap X'^\circ) \to B \setminus (U' \cap X'^\circ) \cong \mathbf{P}_1 \setminus \{r \text{ points}\}$ est une fibration dont les fibres sont connexes, donc $\pi_1(U' \cap X'^\circ) \to \pi_1(\mathbf{P}_1 \setminus \{r \text{ points}\})$

est surjectif. Puisque $r \geq 3$, ce dernier groupe est non commutatif, d'où il suit que $\pi_1(U' \cap X'^{\circ})$ est également non commutatif. Comme Γ opère librement dans $U' \cap X'^{\circ}$, et que $U \cap X^{\circ}$ s'identifie au quotient $(U' \cap X'^{\circ})/\Gamma$, $\pi_1(U' \cap X'^{\circ})$ s'identifie à un sous-groupe de $\pi_1(U \cap X^{\circ})$. Par conséquent, ce dernier groupe est bien également non commutatif.

Cette contradiction termine la preuve du Théorème.

Remarque. Considérons l'opération de SL_2 (par multiplication à gauche) dans $\mathrm{M}(2, \mathbf{C})$ (l'espace vectoriel des matrices 2×2 à coefficients dans $\mathbf{C}$). Cette opération en induit une de SL_2 dans $\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}(\mathrm{M}(2, \mathbf{C}))$, avec une orbite dense dont le complémentaire est un diviseur irréductible lisse contenant une infinité d'orbites fermées isomorphes à $\mathbf{P}_1$. Aprés éclatement de l'une de ces orbites fermées, on obtient une SL_2-variété projective lisse de dimension 3, avec une orbite dense, dont le complémentaire est formé de deux diviseurs lisses qui se coupent transversalement en une orbite (fermée) de dimension 1 (mais SL_2 a alors une infinité d'orbites dans un des deux diviseurs).

References

[A] D. Akhiezer, *Equivariant completions of homogeneous algebraic varieties by homogeneous divisors*, Ann. Glob. Analysis and Geometry **1** (1983), 49–78.

[B–B] A. Bialynicki-Birula, *Some theorems on actions of algebraic groups*, Ann. of Math. **98** (1980), 480–497.

[B1] M. Brion, *On spherical varieties of rank one*, CMS Conf. Proceedings **10** (1989), 31–41.

[B2] ______, *Vers une généralisation des espaces symétriques*, J. Algebra **134** (1990), 115–143.

[BLV] M. Brion, D. Luna, and Th. Vust, *Espaces homogènes sphériques*, Inventiones Math. **84** (1986), 617–632.

[BP] M. Brion and F. Pauer, *Valuations des espaces homogènes sphériques*, Comment. Math. Helvetici **62** (1987), 265–285.

[Bou] N. Bourbaki, *Groupes et Algébres de Lie*, Hermann, Paris (1968).

[DeC–P] C. De Concini and C. Procesi, *Complete symmetric varieties*, Springer Lect. Notes in Math. **996** (1983), 1–44.

[K1] F. Knop, *The Luna–Vust theory of spherical embeddings*, Proceedings of the Hyderabad Conference on Algebraic Groups, Manoj Prakashan, Madras (1991), 225–249.

[K2] ______, *Automorphismes, root systems and compactifications of homogeneous varieties*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), no. 1, 153–174.

[L1] D. Luna, *Slices étales*, Bull. Soc. Math. France, Mémoire **33** (1973), 81–105.

[L2] ______, *Grosses cellules pour les variétés sphériques, à paraître dans Algebraic groups and related subjects, a volume in honor of*

R. W. Richardson (1996), Australian Math. Soc. Lecture Series, G. I. Lehrer et al. (eds.), Cambridge University Press.

[LV] D. Luna and Th. Vust, *Plongements d'espaces homogènes*, Comment. Math. Helvetici **58** (1983), 186–245.

[M–J] L. Moser–Jauslin, *Some almost homogeneous group actions on smooth complete rational surfaces*, L'Enseignement Mathématique **34** (1988), 313–332.

[W] B. Wasserman, *Wonderful varieties of rank* 2, *à paraître.*