STUDIA LOGICA
Tom IX — 1960

WITOLD A. POGORZELSKI, JERZY SŁUPECKI

PODSTAWOWE WŁASNOŚCI SYSTEMÓW DEDUKCYJNYCH OPARTYCH NA NIEKLASYCZNYCH LOGIKACH. CZ. I.[1]

Spośród prac Alfreda TARSKIEGO omawiających podstawowe własności systemów dedukcyjnych najogólniejsze wyniki zawiera artykuł (8). Teoria zbudowana w tym artykule dotyczy dowolnych systemów dedukcyjnych, zarówno logicznych jak i opartych na dowolnej logice. Teorię tę nazywać będziemy teorią **T**.

Terminami pierwotnymi teorii **T** są: zbiór S wszystkich zdań pewnego języka oraz funkcja Cn przyporządkowująca każdemu podzbiorowi X zbioru S zbiór wszystkich zdań wynikających ze zdań zbioru X na podstawie dowolnych lecz ustalonych reguł inferencyjnych. W celu prostszego zanotowania aksjomatów teorii **T** umawiamy się, że zmienne $x, y, z...$ przebiegają zbiór S, zmienne X, Y, $Z, \ldots$ przebiegają rodzinę wszystkich podzbiorów tego zbioru. Przyjmujemy, że zmiennych obu tych typów jest przeliczalnie wiele. Symbolem $PskX$ oznaczamy rodzinę wszystkich skończonych podzbiorów zbioru X.

Podajemy aksjomaty teorii **T** z nieistotnymi zmianami:

A1. $\overline{\overline{S}} \leqslant \aleph_0$

A2. $X \subset CnX \subset S$

A3. $CnCnX = CnX$

A4. $X \subset Y \rightarrow CnX \subset CnY$

A5. $x \varepsilon CnX \rightarrow \sum_{Y \varepsilon PskX} x \varepsilon CnY$

Układ ten uzupełnia Tarski w artykule (9) dodatkowymi aksjomatami. Teoria oparta na wzbogaconej aksjomatyce (będziemy ją nazywać teorią **T***) dotyczy już nie wszystkich systemów dedukcyjnych, lecz tylko systemów opartych na dwuwartościowym implikacyjno-negacyjnym rachunku zdań.

Terminami pierwotnymi teorii **T*** są, poza terminem S i Cn, terminy c i n. Wyrażenie cxy jest nazwą implikacji o poprzedniku x i następniku y, wyrażenie nx jest nazwą negacji zdania x.

[1] Część wyników zawartych w tej pracy referowana była na posiedzeniu Zakładu Logiki P. A. N. w dniu 28. 11. 1958 r.

Aksjomaty dodatkowe teorii **T*** podajemy znów z drobnymi zmianami:

A6*. $cxy, nx \varepsilon S$

A7*. $cxy \varepsilon CnX \equiv y \varepsilon Cn(X + \{x\})$

A8*. $Cn\{x, nx\} = S$

A9*. $Cn\{x\}. Cn\{nx\} = Cn\Lambda$

Przyporządkujmy wzajemnie jednoznacznie zmiennym rachunku zdań zmienne $x, y, z \ldots$. Zakładamy, że wyrażeniom α i β implikacyjno-negacyjnego rachunku zdań zostały przyporządkowane wyrażenia φ i ψ teorii **T***. Implikacji o poprzedniku α i następniku β przyporządkowujemy wyrażenie $c\varphi\psi$, negacji wyrażenia α — wyrażenie $n\varphi$. Jeśli wyrażeniu α implikacyjno-negacyjnego rachunku zdań zostało przyporządkowane w podany wyżej sposób wyrażenie φ, to zdanie zbioru S oznaczone przez φ nazywać będziemy S-podstawieniem wyrażenia α. Tak więc np. wyrażenia cxx i $cxcyx$ oznaczają odpowiednio S-podstawienia wyrażeń $p \rightarrow p$ i $p \rightarrow (q \rightarrow p)$.

W artykule (9) stwierdza Tarski, że następujące zdania zbioru S

$$ccxyccyzcxz, \quad ccnxxx, \quad cxcnxy,$$

będące S-podstawieniami trzech aksjomatów dwuwartościowego rachunku zdań są elementami zbioru $Cn\Lambda$ (zbiór ten nazywa Tarski zbiorem wszystkich tez logicznych). Zauważmy dalej, że z A7* i A2—A4 wynika łatwo, że jeśli zdania cxy i x są elementami zbioru $Cn\Lambda$, to również y jest elementem tego zbioru. Prawdziwe jest więc twierdzenie: S-podstawienie dowolnej tezy dwuwartościowego implikacyjno-negacyjnego rachunku zdań jest elementem zbioru $Cn\Lambda$.

Twierdzenie to można uzupełnić w następujący sposób:

Jeśli wyrażenie

$$\alpha \varepsilon Cn\Lambda$$

jest tezą teorii **T***, to α oznacza S-podstawienie tezy dwuwartościowego implikacyjno-negacyjnego rachunku zdań.

Twierdzenie to nie występuje w pracach Tarskiego.

Aby wykazać, że dla żadnego φ oznaczającego dowolne S-podstawienie wyrażenia rachunku zdań nie będącego tezą nie zachodzi wzór $\varphi \varepsilon Cn\Lambda$ posłużymy się następującą interpretacją:

Zbiór S utożsamiamy ze zbiorem $\{0,1\}$, funkcję Cn określamy wzorem

$$CnX = \begin{cases} \{0,1\}, & \text{gdy } 0 \varepsilon X \\ \{1\}, & \text{gdy } 0 \bar{\varepsilon} X, \end{cases}$$

o funkcjach cxy i nx zakładamy, że przyjmują wartości zgodne z dwuwartościową matrycą implikacji i negacji. Spełnione są więc równości:

$$c00 = c01 = c11 = n0 = 1$$

$$c10 = n1 = 0$$

Łatwo sprawdzić, że interpretacja ta spełnia aksjomaty A1—A5 i A6*—A9*, nie spełnia zaś żadnego wyrażenia postaci

$$\varphi \in Cn\Lambda,$$

w którym φ oznacza dowolne S-podstawienie wyrażenia rachunku zdań nie będącego tezą.

W dalszej części tego artykułu zajmiemy się zagadnieniem w jaki sposób należy zmodyfikować aksjomaty A6*—A9*, aby otrzymać twierdzenia analogiczne do podanych wyżej, w których jednak byłaby mowa nie o dwuwartościowym implikacyjno-negacyjnym rachunku zdań, lecz o rachunkach nieklasycznych lub fragmentarycznych.

W celu dokładniejszego sformułowania tego zagadnienia podajemy definicję:

Układ aksjomatów, którymi uzupełniamy aksjomaty A1—A5, jest adekwatny dla danego rachunku zdań wtedy i tylko wtedy, gdy:

a) dowolne S-podstawienie tezy tego rachunku jest elementem zbioru $Cn\Lambda$,

b) jeśli wyrażenie

$$\alpha \in Cn\Lambda$$

jest konsekwencją przyjętego układu aksjomatów, to α oznacza S-podstawienie tezy tego rachunku.[2]

Tak więc adekwatnym układem aksjomatów dla dwuwartościowego implikacyjno-negacyjnego rachunku zdań jest układ A6*—A9*.

Przyjmujemy, że wyrażenia

$$kxy,\ axy,\ exy$$

są odpowiednio nazwami koniunkcji, alternatywy i równoważności zbudowanych ze zdań x i y. Przyjmujemy też, że 0 jest nazwą falsum tzn. ustalonego zdania fałszywego.

Adekwatny układ aksjomatów dla logiki pozytywnej otrzymujemy skreślając w A6* warunek, że $nx \in S$, spośród zaś aksjomatów A7*—A9* pozostawiając tylko A7*. Uzupełniając adekwatny układ aksjomatów dla logiki pozytywnej następującym wyrażeniem, analogicznym do A9*,

1. $Cn\{x\}.\,Cn\{cxy\} = Cn\Lambda$

otrzymujemy adekwatny układ aksjomatów dla dwuwartościowego implikacyjnego rachunku zdań. Wzbogacając z kolei ten układ wyrażeniem

2. $Cn\{0\} = S$

i zastępując w A6* warunek $nx \in S$ warunkiem $0 \in S$ otrzymujemy adekwatny układ aksjomatów dla dwuwartościowego rachunku zdań o terminach pierwotnych implikacji i falsum[3]. Aksjomat 2 jest analogiczny do A8*.

---

[2] Zmiany w układzie terminów pierwotnych rachunku zdań powodują — oczywiście — zmiany w pojęciu S-podstawienia wyrażeń tego rachunku. Zmiany te są całkowicie widoczne, nie będziemy więc ich omawiać.

[3] System ten omówiony jest w pracy (1).

Do istotniejszych wyników tej pracy należy twierdzenie następujące:

Adekwatnym układem aksjomatów dla logiki intuicjonistycznej jest układ następujący:

A6^0. $cxy, nx, kxy, axy \in S$

A7^0. $cxy \in CnX \equiv y \in Cn(X + \{x\})$

A8^0. $nx \in CnX \equiv Cn(X + \{x\}) = S$

A9^0. $kxy \in CnX \equiv x, y \in CnX$

A10^0. $Cn\,\{x\} . Cn\,\{y\} = Cn\,\{axy\}$

Dowód, że podstawienia wszystkich aksjomatów logiki intuicjonistycznej[4] są elementami zbioru $Cn\Lambda$ nie sprawia trudności. Widoczne jest też, że jeśli cxy i x są elementami zbioru $Cn\Lambda$, to również y jest elementem tego zbioru. Podamy jeszcze skrótowy dowód, że spełniony jest również warunek (b) definicji adekwatnego układu aksjomatów. Tak jak w dowodzie poprzednim posłużymy się pewną interpretacją. Dogodna tu będzie interpretacja następująca: niech S będzie zbiorem wszystkich wyrażeń sensownych logiki intuicjonistycznej; oznaczmy przez L zbiór wszystkich tez tej logiki, przez X^* najmniejszy zbiór zawierający X i zawarty w S, zamknięty ze względu na operację budowania koniunkcji. Funkcję Cn określamy w następujący sposób:

$$CnX = L + \underset{y}{E} \underset{x \in X^*}{\Sigma}\; cxy \in L$$

Niech x i y będą dowolnymi wyrażeniami sensownymi logiki intuicjonistycznej. Wyrażenia cxy, kxy, axy, nx interpretujemy odpowiednio jako nazwy implikacji, koniunkcji i alternatywy wyrażeń x i y oraz negacji wyrażenia x. Łatwo sprawdzić, że interpretacja ta spełnia aksjomaty A1—A5 i A6^0—A10^0, nie spełnia zaś żadnego wyrażenia o postaci $\varphi \in Cn\Lambda$, w którym φ nie oznacza S-podstawienia tezy logiki intuicjonistycznej. Dowody wszystkich dalszych twierdzeń dotyczących adekwatnych układów aksjomatów są analogiczne do dowodów podanych.

Uzupełniając układ A6^0, A7^0, A9^0, wyrażeniem

3. a) $ny \in Cn\,(X + \{x\}) \rightarrow nx \in Cn\,(X + \{y\})$

   b) $x \in CnX \vee y \in CnX \rightarrow axy \in CnX$

   c) $axy,\ cxz,\ cyz \in CnX \rightarrow z \in CnX$

otrzymujemy adekwatny układ aksjomatów dla rachunku minimalnego JOHANNSONA.

Rachunkiem zawierającym logikę intuicjonistyczną i jednocześnie zawartym w logice dwuwartościowej, różnym od obu tych logik jest rachunek, którego terminy pierwotne określone są przez matryce:

$\rightarrow$	0	2	1
0	1	1	1
2	1	1	1
*1	0	2	1

	0	2	1
0	0	0	0
2	0	2	2
*1	0	2	1

$\vee$	0	2	1
0	0	2	1
2	2	2	1
*1	1	1	1

$\sim$	
0	1
2	0
*1	0

[4] Prosty układ aksjomatów logiki intuicjonistycznej podany jest w pracy (5).

Adekwatny układ aksjomatów dla tego rachunku otrzymujemy dopełniając układ A6⁰—A10⁰, wyrażeniem

4. $Cn\{x\} \cdot Cn\{ny\} \cdot Cn\{cxy\} = Cn\Lambda$

Zauważmy jeszcze, że dołączając do A6⁰—A10⁰, formułę

5. $Cn\{x\} \cdot Cn\{cxnx\} = Cn\Lambda$

otrzymujemy adekwatny układ aksjomatów dla dwuwartościowego rachunku zdań, którego terminami pierwotnymi są implikacja, negacja, koniunkcja i alternatywa. Aksjomat 5 jest analogiczny do A9*, nie może jednak w układzie A6*—A9* zastąpić tego aksjomatu.

Omówimy z kolei zagadnienia związane z logiką modalną. Aksjomaty systemu równoważnego systemowi S5 Lewisa, którego terminami pierwotnymi są ścisła implikacja, negacja i koniunkcja, jedynymi zaś regułami — reguła odrywania i podstawiania, mają następującą postać:[5]

I. $q \prec (p \prec p)$
II. $\{[(p \prec q) \prec r] \prec (p \prec q)\} \prec (p \prec q)$
III. $(p \prec q) \prec [(q \prec r) \prec (p \prec r)]$
IV. $p \cdot q \prec p$
V. $p \cdot q \prec q$
VI. $(p \prec q) \prec [(p \prec r) \prec (p \prec q \cdot r)]$
VII. $(p \prec q) \prec (\sim q \prec \sim p)$
VIII. $p \prec \sim\sim p$
IX. $\sim\sim p \prec p$
X. $p \cdot \sim (p \cdot \sim q) \prec q$

Dla oznaczenia ścisłej implikacji zachowujemy symbol, którym oznaczaliśmy implikacje różnych innych systemów logicznych. Wprowadzimy też definicję:

$\mathrm{D1^L}.\ x \in S^* \equiv \sum_{y,z} x = cyz$

Do istotniejszych wyników tej pracy zaliczymy twierdzenie następujące:

Adekwatny układ aksjomatów dla określonego wyżej systemu, równoważnego systemowi S5 Lewisa, ma postać:

$\mathrm{A6^L}.\ cxy, kxy, nx \in S$

$\mathrm{A7^L}$a. $cxy \in CnX \rightarrow y \in Cn(X + \{x\})$

b. $X \subset S^* \rightarrow [y \in Cn(X + \{x\}) \rightarrow cxy \in CnX]$

$\mathrm{A8^L}.\ Cn\{x, nx\} = S$

[5] Aksjomaty te zostały podane po raz pierwszy w pracy (3). Cytujemy je, gdyż artykuł (3) jest mało dostępny.

A9^L. $x \in S^* \to Cn\{x\} \cdot Cn\{cxy\} = Cn\Lambda$

A10^L. $kxy \in CnX \equiv x, y \in CnX$

A11^L. $Cn(X + \{nx\}) = S \to x \in CnX$

A7^{L}a,b są odpowiednikami A7*, podobnie A9^L jest odpowiednikiem A9*. A8^L i A10^L są identyczne z A8* i A9^0. A11^L ma budowę analogiczną do implikacji, której poprzednikiem jest wyraz stojący w A8° po prawej stronie znaku równoważności, następnikiem zaś wyraz stojący po stronie lewej.

Omówimy jeszcze inny system[6] równoważny systemowi S5 Lewisa. Terminami pierwotnymi tego systemu są dwuwartościowa implikacja i negacja oraz funktor konieczności. Jedynymi regułami tego systemu, tak jak systemu poprzednio omówionego, są reguły odrywania i podstawiania.

Przyjmujemy, że nazwą wyrażenia zbudowanego z funktora konieczności i zdania x jest wyrażenie lx. Wprowadzamy też definicję analogiczną do definicji D1^L:

D1^{L_1}. $x \in S_1^* \equiv \sum_y (x = ly \wedge x = nly)$

Adekwatny układ aksjomatów dla rozważanego systemu otrzymujemy uzupełniając układ A6*—A9* aksjomatem

6. $X \subset S_1^* \to (lx \in CnX \equiv x \in CnX)$

i jednocześnie dodając do A6* warunek, że $lx \in S$.

Adekwatny układ aksjomatów dla trójwartościowej logiki ŁUKASIEWICZA o terminach pierwotnych implikacji i negacji ma postać:

A6^3. $cxy, nx \in S$

A7^{3}a. $x \bar{\in} X \to [cxy \in CnX \to y \in Cn(X + \{x\})]$

b. $y \in Cn(X + \{x\}) \to cxy \in CnX$

A8^3. $nx \bar{\in} X \to [nx \in Cn(X + \{x\}) \to y \in Cn(X + \{x\})]$

A9^3. $Cn\{x\} \cdot Cn\{cxnx\} = Cn\Lambda$

A7^{3}a,b są odpowiednikami A7*. A8^3 ma budowę analogiczną do wyrażenia 3a, należącego do adekwatnego układu aksjomatów dla logiki minimalnej. A9^3 jest identyczny z wyrażeniem 5, które dołączone do aksjomatów A6^0—A10^0 daje jeden z możliwych adekwatnych układów aksjomatów dla dwuwartościowego rachunku zdań.

Dołączając do terminów implikacji i negacji trzeci termin pierwotny T, będący funktorem jednoargumentowym i mającym tę własność, że wyrażenie Tp dla każdej wartości argumentu p przyjmuje wartość różną od prawdy i fałszu, otrzymujemy tzw. pełną logikę trójwartościową[7], a więc logikę, której terminy pierwotne pozwalają zdefiniować każdy funktor określony trójwartościową matrycą. Przyj-

[6] Por. system przedstawiony w pracy (2).

[7] Por. pracę (6).

mujemy, że tx jest nazwą wyrażenia zbudowanego z funktora T i zdania x. Adekwatny układ aksjomatów dla pełnej logiki trójwartościowej[8] otrzymujemy uzupełniając układ $A6^3$—$A9^3$ aksjomatem

$A10^3$. $tx \in CnX \equiv ntx \in CnX$

i jednocześnie dodając do $A6^3$ warunek, że $tx \in S$.

Jednym z najprostszych systemów logicznych jest dwuwartościowy rachunek zdań, którego jedynym terminem pierwotnym jest funktor równoważności[9]. Równie prostym jest adekwatny układ aksjomatów dla tego systemu:

$A6^R$. $exy \in S$

$A7^R$. $exy \in CnX \equiv (x \in CnX \equiv y \in CnX)$

Ostatni układ aksjomatów, który podajemy, jest układem adekwatnym dla dwuwartościowego rachunku zdań, którego terminami pierwotnymi są równoważność, koniunkcja i falsum[10]. Układ ten składa się z aksjomatów $A7^R$, $A9^0$, 2 oraz

7. $Cn\,\Lambda \neq S$

Oczywiste jest, że jednocześnie przyjmujemy, iż exy, kxy i 0 są elementami zbioru S.

Własności systemów dedukcyjnych zmieniają się oczywiście w zależności od tego, na jakim rachunku zdań systemy te są oparte. W części II tej pracy podane będą wyniki badań, dotyczące tych zmian. W szczególności podane będzie, które z twierdzeń pracy (9) Tarskiego pozostaną prawdziwe dla systemów opartych na nieklasycznych logikach. Widoczne jest, że badania te musiały być poprzedzone badaniami nad adekwatnymi układami aksjomatów dla różnych systemów logicznych[11].

Allatum est die 12 Januarii 1959

Bibliografia

(1) A. CHURCH: *Introduction to Mathematical Logic*, Part I, „Annals of mathematics studies", No 13, Princeton, 1944.

(2) K. GÖDEL: *Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls*. Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, IV (1933).

---

[8] Aksjomatykę tego rachunku stanowi układ aksjomatów WAJSBERGA-SŁUPECKIEGO, por. (6).

[9] System ten przedstawiony jest w pracy (4).

[10] Rachunek ten zbudowany jest w pracy (7).

[11] Ze względu na to, że zawarte w tej pracy wyniki pierwszego z jej autorów wejdą jako część do jego pracy doktorskiej, wymienimy je szczegółowo: są nimi adekwatne układy aksjomatów dla rachunku implikacyjnego, dla systemu S5 LEWISA o terminach pierwotnych implikacji, koniunkcji i negacji, oraz dla logiki trójwartościowej, poza tym uwagi o uzupełnieniu aksjomatyki adekwatnej dla logiki intuicjonistycznej aksjomatami 4 i 5.

(3) E. I. LEMMON, C. A. MEREDITH, D. MEREDITH, A. N. PRIOR, I. THOMAS: *Calculi of pure strict implication*, Philosophy Department, Canterbury University College, Christchurch, New Zealand, 1957.

(4) S. LEŚNIEWSKI : *Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik*, „Fundamenta Mathematicae", 14 (1929).

(5) J. ŁUKASIEWICZ : *Die Logik und das Grundlagenproblem*, Entretiens de Zürich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques, 8—9 Decembre 1938, Zürich.

(6) J. SŁUPECKI: *Der volle dreiwertige Aussagenkalkül*, Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, XXIX, 1936 cl. III.

(7) J. SŁUPECKI: *Über die Regeln des Aussagenkalküls*, „Studia Logica", tom I, 1953.

(8) A. TARSKI: *Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften*, „Monatshefte für Mathematik und Physik", XXXVII Band, Leipzig, 1930.

(9) A. TARSKI: *Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik*, Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, vol. 23, 1930, cl. III.

В. А. Погожельский, Г. Слупецкий

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ДЕДУКТИВНЫХ СИСТЕМ, ОСНОВАННЫХ НА НЕКЛАССИЧЕСКИХ ЛОГИКАХ. Ч. I.

(Резюме)

В статье разрабатывается теория, которой дал начало Тарский в статьях *Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften* („Monatshefte für Mathematik und Physik" XXVIII Band) и *Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik* (Comptes rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, vol. 23, 1930, cl. III.).

Первичными понятиями теории систем, построенной Тарским в первой из этих работ, является: множество S всех осмысленных выражений некоторого языка и функция Cn, ставящая в соответствие любому подмножеству X множества S множество всех выражений инферентно вытекающих из X.

Мы предполагаем, что:
буквы $x, y, z, \ldots$ обозначают элементы множества S,
буквы $X, Y, Z, \ldots$ обозначают элементы множества всех подмножеств S,
символ $Psk\,X$ обозначает семью всех конечных подмножеств множества X.

Пользуясь этим соглашением, мы можем записать аксиомы теории Тарского в следующей форме (отличающейся от оригинала в нескольких несущественных подробностях):

A1. $\overline{\overline{S}} \leqslant \aleph_0$

A2. $X \subset CnX \subset S$

A3. $CnCnX = CnX$

A4. $X \subset Y \rightarrow CnX \subset CnY$

A5. $x \in CnX \rightarrow \sum_{Y} (Y \in PskX \cdot x \in CnY)$

Во второй упомянутой работе Тарского вышеизложенная аксиоматика дополняется следующими аксиомами (снова приводимыми с несущественными изменениями):

A6*. $cxy, nx \in S$

A7*. $cxy \in CnX \equiv y \in Cn(X + \{x\})$

A8*. $Cn\{x, nx\} = S$

A9*. $Cn\{x\}.Cn\{nx\} = Cn\,\Lambda$

Символ cxy обозначает в этих аксиомах импликацию с антецедентом x и консеквентом y, символ nx — отрицание выражения x.

Тарский дает также теорему, что любая подстановка тезиса двузначного исчисления предложений, принадлежащая к множеству S, является элементом множества $Cn\Lambda$; Тарский отождествляет это множество с множеством подстановок логических тезисов.

Истинна также обратная теорема:

Если выражение $\alpha \in Cn\,\Lambda$ является тезисом теории Тарского, то α является подстановкой тезиса двузначного исчисления предложений.

Эта теорема не фигурирует в работах Тарского. Обе приведенные теоремы можно соединить в одну:

(T) Выражение $\alpha \in Cn\Lambda$ является тезисом, опирающимся на аксиомы A1—A5 и A6*—A9* тогда, и только тогда, когда α является подстановкой тезиса двузначного исчисления предложений.

Возникает проблема: как следует видоизменить аксиомы A6*—A9*, чтобы они вместе с аксиомами A1—A5 позволили обосновать теоремы аналогичные теореме *(T)*, в которых, однако, говорилось бы не о двузначном исчислении предложений, а о неклассических или фрагментарных исчисленнях. Системы аксиом, удовлетворяющие этому условию, мы будем называть адэкватными для данного исчисления предложений.

В этой статье мы предлагаем адэкватные системы аксиом между прочим для двузначных исчислений: импликативного, основанного на эквиваленции и основанного на импликации и фальсуме, затем — для интуиционистского, минимального, для модальных исчислений Льюиса S5, наконец — для полного трехзначного исчисления Лукасевича.

Самыми важными результатами работы мы считаем адэкватные системы аксиом для интуиционистского исчисления и исчисления S5 Льюиса, основанного на терминах строгой импликации, конъюнкции и отрицания. Адэкватная система аксиом для интуиционистского исчисления выглядят следующим образом:

A6⁰. $cxy, kxy, axy, nx \in S$

A7⁰. $cxy \in CnX \equiv y \in Cn(X + \{x\})$

A8⁰. $nx \in CnX \equiv Cn(X + \{x\}) = S$

A9⁰. $kxy \in CnX \equiv x, y \in CnX$

A10⁰. $Cn\{x\} \cdot Cn\{y\} = Cn\{axy\}$

Адэкватная система аксиом для исчисления S5 Льюиса состоит из следующих тезисов:

A6^{L}. $cxy, kxy, nx \in S$

A7^{L}a. $cxy \in CnX \rightarrow y \in Cn(X + \{x\})$

b. $X \subset S^{*} \rightarrow [y \in Cn(X + \{x\}) \rightarrow cxy \in CnX]$

A8^{L}. $Cn\{x, nx\} = S$

A9^{L}. $x \in S^{\star} \rightarrow Cn\{x\} \cdot Cn\{cxy\} = Cn\,\Lambda$

A10^{L}. $kxy \in CnX \equiv x, y \in CnX$

A11^{L}. $Cn(X + \{nx\}) = S \rightarrow x \in CnX$

Фигурирующий в этих аксиомах символ $S^{\star}$ определяется следующим образом:

D1^{L}. $x \in S^{\star} \equiv \sum_{y,z} x = cyz$

Во второй части работы будут даны теоремы, вытекающие из изложенных групп аксиом, а также будут исследоваться связи между системами, основанными на этих группах аксиом.

W. A. POGORZELSKI, J. SŁUPECKI

BASIC PROPERTIES OF DEDUCTIVE SYSTEMS BASED ON NONCLASSICAL LOGICS. PART I.

(Summary)

The present article is a development of the theory initiated by Tarski in his articles *Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften* („Monatshefte für Mathematik und Physik", XXXVII Band) and *Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik* (Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, vol. 23, 1930, cl. III).

The primitive terms of the theory constructed by Tarski in the first of the mentioned articles are: the set S of all meaningful formulae of a language and the function Cn establishing correspondence between an arbitrary subset X which belongs to S and the set of all formulae derivable from X.

Elements of S are denoted by the letters $x, y, z \ldots$, while the subsets of S by the letters $X, Y, Z \ldots$; by $Psk\ X$ we denote the family of all finite subsets of the set X.

On the basis of the above conventions we may formulate the axioms of Tarski's theory as follows (the formulation being slightly different from the original one):

A1. $\overline{\overline{S}} \leqslant \aleph_0$

A2. $X \subset CnX \subset S$

A3. $CnCnX = CnX$

A4. $X \subset Y \rightarrow CnX \subset CnY$

A5. $x \in CnX \rightarrow \sum\limits_{Y} (Y \in PskY \cdot x \in CnY)$

The other of the mentioned articles of Tarski adds to the previous set the following axioms (again the formulation differs slightly from the original one):

A6*. $cxy, nx \in S$

A7*. $cxy \in CnX \equiv y \in Cn(X + \{x\})$

A8*. $Cn\{x, nx\} = S$

A9*. $Cn\{x\} \cdot Cn\{nx\} = Cn\Lambda$

In those axioms implication with x as antecedent and y as consequent is denoted by cxy; the negation of x is denoted by nx.

Moreover, Tarski gives a lemma stating that any formula belonging to S and resulting by substitution from a theorem of the two-valued propositional calculus is an element of the set $Cn\Lambda$ which is identified by Tarski with the set of substitutions of logical formulae.

The converse also holds:

"if $\alpha \varepsilon Cn\Lambda$ is a valid formula of Tarski's theory, then α is a substitution of a valid formula of the two-valued propositional calculus."

This lemma does not appear in Tarski's articles. Both lemmas may be formulated as one:

(T): $\alpha \varepsilon Cn\Lambda$ is a valid formula of the theory based on axioms A1 – A5 and A6*–A9* if and only if α is obtained by substitution from a valid formula of the two-valued propositional calculus.

The problem may be raised: How should axioms A6*–A9* be modified so that it be possible to derive from them in conjunction with A1–A5 formulae analogous to (T), referring, however, not to two-valued propositional calculus but to nonclassical or fragmentary calculi. The set of axioms satisfying this condition will be termed adequate for a given propositional calculus.

The present paper gives adequate sets of axioms for the two-valued calculi: based on implication; based on equivalence; based on implication and *falsum*; intuitionistic calculus, minimal calculus, for the modal Lewis calculus S5 and for the full three-valued calculus of Łukasiewicz.

As the most important results of the present paper we would mention the adequate sets of axioms for the intuitionist calculus and for the Lewis calculus S5 based on strict implication, conjunction and negation.

The adequate set of axioms for the intuitionist calculus is as follows:

A6^0. $cxy, kxy, axy, nx \varepsilon S$

A7^0. $cxy \varepsilon CnX \equiv y \varepsilon Cn(X + \{x\})$

A8^0. $nx \varepsilon CnX \equiv Cn(X + \{x\}) = S$

A9^0. $kxy \varepsilon CnX \equiv x, y \varepsilon CnX$

A10^0. $Cn\{x\}. Cn\{y\} = Cn\{axy\}$

The adequate set for the Lewis calculus S5 consists of the following axioms:

A6^L. $cxy, kxy, nx \varepsilon S$

A7^{L}a. $cxy \varepsilon CnX \rightarrow y \varepsilon Cn(X + \{x\})$

b. $X \subset S^\star \rightarrow [y \varepsilon Cn(X + \{x\}) \rightarrow cxy \varepsilon CnX]$

A8^L. $Cn\{x, nx\} = S$

A9^L. $x \varepsilon S^\star \rightarrow Cn\{x\} \cdot Cn\{cxy\} = Cn\Lambda$

A10^L. $kxy \varepsilon CnX \equiv x, y \varepsilon CnX$

A11^L. $Cn(X + \{nx\}) = S \rightarrow x \varepsilon CnX$

The symbol $S^\star$ occurring in these axioms is defined as follows:

D1^{L}. $x \,\mathrm{e}\, S^\star \equiv \sum_{y,z} x = cyz$

In the continuation of the present article (in Part II) we intend to give formulae resulting from the presented sets of axioms and to discuss relations between systems based on these axioms.