BAER, R.
Math. Annalen, Bd. 133, S. 256—270 (1957)

Engelsche Elemente Noetherscher Gruppen

Von
REINHOLD BAER in Frankfurt

Sind x und y Elemente einer Gruppe G, so wollen wir ihren Kommutator $x \circ y = x^{-1} y^{-1} x y$ nennen. Die iterierten Kommutatoren $x^{(i)} \circ y$ werden dann induktiv durch die Formeln

$$x^{(0)} \circ y = y\,, \quad x^{(i+1)} \circ y = x \circ [x^{(i)} \circ y]$$

definiert.

Definition L: *Das Element a der Gruppe G heiße links-engelsch, wenn für jedes x aus G die* 1 *in der Folge $a^{(i)} \circ x$ vorkommt.*

Definition R: *Das Element a der Gruppe G heiße rechts-engelsch, wenn für jedes x aus G die* 1 *in der Folge $x^{(i)} \circ a$ vorkommt.*

Es ist klar, daß ein $\begin{Bmatrix}\text{links}\\ \text{rechts}\end{Bmatrix}$-engelsches Element a aus G auch ein $\begin{Bmatrix}\text{links}\\ \text{rechts}\end{Bmatrix}$-engelsches Element einer jeden a enthaltenden Untergruppe von G ist und daß Epimorphismen derartige Elemente auf gleichartige Elemente abbilden.

Zur Erläuterung dieser Begriffe möge folgende Bemerkung dienen. Ein Gruppenelement t induziert die eindeutige Abbildung $x \to t \circ x$ von G in sich; und die i-te Potenz dieser Abbildung bildet das Element x auf $t^{(i)} \circ x$ ab. Die von links-engelschen Elementen induzierten Abbildungen sind also in einem ganz bestimmten Sinne nilpotent; die entsprechende Deutung der rechts-engelschen Elemente ist naheliegend, wenn auch nicht ganz so anschaulich.

Zum Aussprechen unserer Resultate müssen wir an solche Begriffe wie „absteigende Zentrenkette" und „endliche Klasse" erinnern. Sind A und B Teilmengen der Gruppe G, so sei unter $A \circ B$ die von allen Kommutatoren $a \circ b$ mit a in A und b in B erzeugte Untergruppe von G verstanden. Ist N ein Normalteiler der Gruppe G, so sei die absteigende Kette der Normalteiler $G^{(i)} \circ N$ von G induktiv durch die Formeln

$$G^{(0)} \circ N = N, \quad G^{(i+1)} \circ N = G \circ [G^{(i)} \circ N]$$

erklärt. Der Normalteiler N *ist von endlicher Klasse in* G, wenn die 1 in der Reihe der $G^{(i)} \circ N$ vorkommt. Dies ist äquivalent mit der Bedingung: N ist in einem (endlich indizierten) Glied der aufsteigenden Zentrenreihe von G enthalten. Anstatt zu sagen, daß G von endlicher Klasse in G ist, sagen wir kürzer, daß G von endlicher Klasse ist.

Die Klasse der zu a in G konjugierten Elemente werde mit a^G bezeichnet, so daß $\{a^G\}$ der kleinste a enthaltende Normalteiler von G ist.

Schließlich sei noch daran erinnert, daß eine Gruppe *Noethersch* heißt, wenn alle ihre Untergruppen endlich erzeugbar sind; diese Eigenschaft ist äquivalent mit dem Obergruppensatz und der Maximalbedingung. Wir werden im folgenden meist Gruppenelemente a betrachten, die einen Noetherschen Normalteiler $\{a^G\}$ aufspannen.

Satz L: *Ist* $\{a^G\}$ *Noethersch, so ist* a *dann und nur dann links-engelsch in* G, *wenn* $\{a^G\}$ *von endlicher Klasse ist.*

Satz R: *Ist* $\{a^G\}$ *Noethersch, so ist* a *dann und nur dann rechts-engelsch in* G, *wenn* $\{a^G\}$ *von endlicher Klasse in* G *ist.*

Ehe wir an den Beweis dieser Hauptresultate herantreten, sei noch auf einige einfache und interessante Folgerungen hingewiesen.

Bekanntlich ist das Produkt zweier Normalteiler endlicher Klasse ebenfalls ein Normalteiler endlicher Klasse; siehe etwa Baer [4], S. 406, Lemma 4. Ist also G eine Noethersche Gruppe, so ist auch *das Produkt* $F(G)$ *aller Normalteiler endlicher Klasse* eine charakteristische Untergruppe endlicher Klasse, die im Falle endlicher Gruppen natürlich mit der Fittingschen Untergruppe übereinstimmt. — Sind A und B Normalteiler der Gruppe G, so ist $G\circ(AB) = (G\circ A)\,(G\circ B)$, woraus durch eine naheliegende Induktion auch $G^{(i)}\circ(AB) = (G^{(i)}\circ A)\,(G^{(i)}\circ B)$ folgt. Sind also die Normalteiler A und B von endlicher Klasse in G, so ist auch ihr Produkt von endlicher Klasse in G. Ist insbesondere G eine Noethersche Gruppe, so ist also *das Produkt* $H(G)$ *aller Normalteiler, die von endlicher Klasse in* G *sind*, eine charakteristische Untergruppe, die von endlicher Klasse in G ist und die offenbar mit dem Endglied der aufsteigenden Zentrenkette von G übereinstimmt, im Falle endlicher Gruppen also grade das Hyperzentrum ist. Offenbar wird $H(G) \leqq F(G)$.

Unter Benutzung dieser Begriffsbildungen erhält man nun aus den Sätzen L und R sofort die folgenden Resultate, die zwar prägnanter, aber auch schwächer als diese Sätze sind.

Satz L′: *Ist* G *eine Noethersche Gruppe, so ist* $F(G)$ *genau die Gesamtheit der links-engelschen Elemente aus* G.

Satz R′: *Ist* G *eine Noethersche Gruppe, so ist* $H(G)$ *genau die Gesamtheit der rechts-engelschen Elemente aus* G.

Weiter ergibt sich aus den Sätzen L und R sofort die folgende wichtige Tatsache.

Folgerung N: *Ist* $\{a^G\}$ *Noethersch und* a *rechts-engelsch, so ist* a *auch links-engelsch.*

Es scheint eine offene Frage zu sein, ob rechts-engelsche Elemente stets auch links-engelsch sind; siehe in diesem Zusammenhang Folgerung A unten. — Folgerung N legt es nahe, Elemente, die links- oder rechts-engelsch sind, kurz als *engelsch* zu bezeichnen.

Satz N: *Eine Noethersche Gruppe ist dann und nur dann von endlicher Klasse, wenn sie von ihren engelschen Elementen erzeugt wird.*

Dies folgt mühelos aus Satz L′ und Folgerung N, wenn man sich nur daran erinnert, daß $F(G)$ für Noethersches G von endlicher Klasse ist.

Aus Satz N folgt auch die — freilich viel schwächere — Aussage, daß eine Noethersche Gruppe dann und nur dann von endlicher Klasse ist, wenn jedes ihrer Elementepaare eine Untergruppe endlicher Klasse erzeugt.

Es ist eine offene Frage, ob es möglich ist, in Satz L und R die Voraussetzung, daß $\{a^G\}$ Noethersch ist, durch die schwächere Annahme zu ersetzen, daß $\{a^G\}$ endlich erzeugbar sei. Gleichwertig hiermit ist die Frage, ob endlich erzeugbare, von ihren engelschen Elementen erzeugte Gruppen von endlicher Klasse sind. Satz A unten wie auch die Überlegungen des Abschnittes G liefern Resultate, die in diese Richtung deuten.

Zusatz: *Die Gesamtheit der engelschen Elemente endlicher Ordnung in einer Noetherschen Gruppe ist eine endliche, nilpotente, charakteristische Untergruppe.*

Dies folgt sofort aus Satz L' und Folgerung N, wenn man sich nur daran erinnert, daß die Elemente endlicher Ordnung in einer Noetherschen Gruppe endlicher Klasse eine endliche und nilpotente Gruppe bilden; siehe etwa BAER [3], S. 300, Satz D.

Was für Gruppen gilt, die von engelschen Elementen erzeugt werden, gilt a fortiori von Gruppen, deren sämtliche Elemente engelsch sind, so daß unsere Sätze mancherlei bekannte Resultate als Spezialfälle enthalten. — Ob im allgemeinen die Gesamtheit der engelschen Elemente einer Gruppe eine Untergruppe ist, ist freilich auch noch eine offene Frage.

Satz L und Satz N hat SCHENKMANN für den Spezialfall endlicher auflösbarer Gruppen bewiesen. Ebenso hat SCHENKMANN den obigen Zusatz für endliche Gruppen bewiesen.

Das Hinreichen der in Satz L und R ausgesprochenen Bedingungen folgt ohne weiteres aus den fraglichen Definitionen. Der Beweis der Notwendigkeit dieser Bedingungen wird in mehreren Schritten ausgeführt werden, weitgehend durch Zurückführen allgemeiner Situationen auf speziellere.

A. In diesem Abschnitt wollen wir die Lage engelscher Elemente in auflösbaren Gruppen erörtern. Es sei daran erinnert, daß wir unter einer *auflösbaren Gruppe* (in Verallgemeinerung bekannter Begriffsbildungen) stets eine Gruppe verstehen, deren von eins verschiedene homomorphe Bilder immer von eins verschiedene abelsche Normalteiler besitzen; für eine Diskussion dieses Begriffs sei auf BAER [4], S. 420 verwiesen. Insbesondere sei daran erinnert, daß eine Noethersche Gruppe dann und nur dann auflösbar ist, wenn eine ihrer Ableitungen gleich 1 ist.

Folgerung A: *Ist $\{a^G\}$ auflösbar und a rechts-engelsch, so ist a auch links-engelsch.*

Beweis: Wäre dies nicht wahr, so gäbe es ein Element x in G derart, daß die 1 nicht in der Folge der $a^{(i)} \circ x$ mit positivem i vorkommt. Aus dem Maximumprinzip der Mengenlehre erschließen wir dann zunächst die Existenz eines maximalen Normalteilers K von $\{a^G\}$, der keines der Elemente $a^{(i)} \circ x$ enthält; und wir erinnern daran, daß jedes $a^{(i)} \circ x$ in dem a enthaltenden Normalteiler $\{a^G\}$ von G liegt. Es folgt insbesondere, daß $H = \{a^G\}/K$ ein von 1 verschiedenes homomorphes Bild der auflösbaren Gruppe $\{a^G\}$ ist. Es existiert also ein abelscher Normalteiler $A \neq 1$ von H. Wir setzen $a^* = Ka$;

und wir erschließen aus $A \neq 1$ und der Maximalität von K die Existenz einer positiven ganzen Zahl k derart, daß $y = K(a^{(k)} \circ x)$ in A liegt.

Ist s ein Element aus A, so liegen s und $a^{*-1} s a^*$ beide in dem abelschen Normalteiler A von H. Also wird

$$(a^* s^{-1}) \circ a^* = s a^{*-1} a^{*-1} a^* s^{-1} a^* = s a^{*-1} s^{-1} a^* = a^{*-1} s^{-1} a^* s = a^* \circ s\,.$$

Ist t ein weiteres Element aus A, so liegen s, t und $a^{*-1} t a^*$ sämtlich in dem abelschen Normalteiler A von H. Also wird

$$(a^* s^{-1}) \circ t = s a^{*-1} t^{-1} a^* s^{-1} t = a^{*-1} t^{-1} a^* t = a^* \circ t\,.$$

Hieraus ergibt sich durch eine naheliegende Induktion, daß

$$(a^* s^{-1})^{(i)} \circ a^* = a^{*(i)} \circ s$$

für jedes positive i und *jedes* s aus A gilt.

Mit a ist auch a^* rechts-engelsch. Also gibt es eine positive ganze Zahl h derart, daß $(a^* y^{-1})^{(h)} \circ a^* = 1$ ist. Da y in A liegt, so folgt nun, daß

$$K\,[a^{(k+h)} \circ x] = K\,[a^{(h)} \circ (a^{(k)} \circ x)] = a^{*(h)} \circ y = (a^* y^{-1})^{(h)} \circ a^* = 1$$

ist und daß also $a^{(k+h)} \circ x$ zu K gehört im Widerspruch zu unserer Wahl von K. Aus diesem Widerspruch ergibt sich dann, daß a links-engelsch ist, q.e d.

Satz A: *Endlich erzeugbare, von ihren engelschen Elementen erzeugte, auflösbare Gruppen sind von endlicher Klasse und also Noethersch.*

Bemerkung: Dieser Satz A ist ein Gegenstück zu dem in der Einleitung genannten Satz N. Er enthält als Spezialfall ein Resultat von K. W. Gruenberg, S. 378, Theorem 1.

Es wird bequem sein, dem Beweis von Satz A einen Beweis des folgenden auch an sich interessanten Resultats vorauszuschicken.

Hilfssatz 1: *Ist $N \neq 1$ ein Normalteiler der Gruppe G, die von ihren links-engelschen Elementen erzeugt wird, ist weiter die von G in N induzierte Automorphismengruppe Noethersch und von endlicher Klasse, so ist $N \cap Z(G) \neq 1$.*

Hier wie stets sei unter $Z(G)$ das *Zentrum* der Gruppe G verstanden.

Beweis: Es sei K der Zentralisator von N in G. Dann ist K ebenfalls ein Normalteiler von G und G/K ist im wesentlichen mit der von G in dem Normalteiler N induzierten Automorphismengruppe identisch. Hieraus und aus unserer Voraussetzung folgt dann, daß G/K Noethersch und von endlicher Klasse ist. Ist $K = G$, so ist $1 < N \leqq Z(G)$, ein Fall, den wir im folgenden ausschließen können.

Ist U eine Untergruppe von G, so sei $L(U)$ die Gesamtheit der in U enthaltenen links-engelschen Elemente aus G. Wir betrachten nun eine Untergruppe U von G, die den folgenden Bedingungen genügt:

$$K \leqq U < G \quad \text{und} \quad U = K\,\{L(U)\}\,.$$

Da G/K Noethersch und von endlicher Klasse ist, so existiert eine endliche Kette von Untergruppen $U(i)$ mit folgenden Eigenschaften:

$U = U(O)$, $U(i)$ ist ein Normalteiler von $U(i+1)$, $U(k) = G$.

Da $U < G$ und $G = \{L(G)\}$ ist, so gibt es eine ganze Zahl j derart, daß

$$L[U(j)] = L(U) < L[U(j+1)]$$

ist. Es sei e ein Element aus $L[U(j+1)]$, das nicht in $L[U(j)]$ liegt. Da e dem Normalisator von $U(j)$ angehört, und da links-engelsche Elemente durch Automorphismen wieder auf links-engelsche Elemente abgebildet werden, so gilt:

$$\begin{aligned} e^{-1}Ue = e^{-1}K\{L(U)\}e = Ke^{-1}\{L[U(j)]\}e = K\{L[e^{-1}U(j)e]\} \\ = K\{L[U(j)]\} = K\{L(U)\} = U; \end{aligned}$$

und damit haben wir die Existenz eines links-engelschen Elementes e dargetan, das zwar dem Normalisator von U, aber nicht U selbst angehört.

Durch wiederholte Anwendung des eben erzielten Resultats konstruiert man nun eine endliche Kette von Untergruppen $K(i)$ mit folgenden Eigenschaften:

$K = K(0)$, $K(i)$ ist (echter) Normalteiler von $K(i+1)$, $K(m) = G$;
$K(i) = K\{L[K(i)]\}$;
$K(i+1) = K(i)\{e(i)\}$ für geeignetes links-engelsches $e(i)$.

(Daß diese Kette wirklich nach endlich vielen Schritten in G endet, folgt natürlich daraus, daß G/K Noethersch ist.)

Wir bilden weiter den Durchschnitt $H(i)$ von N mit dem Zentralisator von $K(i)$. Da die $K(i)$ eine aufsteigende Kette von Untergruppen bilden, so bilden die $H(i)$ eine absteigende Kette von Untergruppen. Da $K = K(0)$ der Zentralisator von N ist, so ist $H(0) = N$; und aus $G = K(m)$ folgern wir $H(m) = N \cap Z(G)$.

Nach Voraussetzung ist $H(0) = N \neq 1$. Wir können also die Induktionsannahme $H(i) \neq 1$ machen. Da $K(i)$ ein Normalteiler von $K(i+1)$ ist und da N ein Normalteiler von G ist, so liegt $K(i+1)$ im Normalisator von $H(i)$. Ist x irgendein von 1 verschiedenes Element aus $H(i)$, so liegen alle Elemente der Folge $e(i)^{(j)} \circ x$ in $H(i)$. Da $e(i)$ ein links-engelsches Element ist, so ist die 1 in der Folge $e(i)^{(j)} \circ x$ enthalten. Da schließlich $e(i)^{(0)} \circ x = x \neq 1$ ist, so existiert eine ganze Zahl r derart, daß $t = e(i)^{(r)} \circ x \neq 1$ ist, während $e(i) \circ t = e(i)^{(r+1)} \circ x = 1$ ist. Also ist t ein von 1 verschiedenes Element aus $H(i)$, das nicht nur mit jedem Element aus $K(i)$, sondern auch mit $e(i)$, und also mit jedem Element aus $K(i)\{e(i)\} = K(i+1)$ vertauschbar ist. Also gehört $t \neq 1$ zu $H(i+1)$. Damit haben wir durch vollständige Induktion gezeigt, daß alle $H(i) \neq 1$ sind. Insbesondere ist $N \cap Z(G) = H(m) \neq 1$, q.e.d.

Hilfssatz 2: *Ist die endlich erzeugbare Gruppe G nicht von endlicher Klasse, so gibt es unter den Normalteilern X von G, deren Faktorgruppe nicht von endlicher Klasse ist, einen maximalen.*

Ein Beweis dieses Resultats findet sich bei Baer [4], S. 410, Lemma 4.

Beweis *von Satz A:* Es sei G eine endlich erzeugbare auflösbare Gruppe, die von ihren engelschen Elementen erzeugt wird. Aus Folgerung A ergibt sich, daß G sogar von seinen links-engelschen Elementen erzeugt wird.

Wäre G nicht Noethersch und von endlicher Klasse, so wäre G nicht von endlicher Klasse, da ja, wie schon bemerkt, endlich erzeugbare Gruppen endlicher Klasse stets Noethersch sind. Aus Hilfssatz 2 folgt dann die Existenz eines Normalteilers M von G derart, daß G/M nicht von endlicher Klasse ist, während jedes echte homomorphe Bild von G/M von endlicher Klasse und also auch Noethersch ist.

Da G auflösbar ist, so existiert ein abelscher Normalteiler $A/M \neq 1$ von G/M. Der Zentralisator B/M von A/M in G/M enthält natürlich den abelschen Normalteiler A/M. Als echtes homomorphes Bild von G/M ist also G/B Noethersch und von endlicher Klasse. Wir bemerken weiter, daß G/B im wesentlichen mit der Gruppe der von G/M in A/M induzierten Automorphismen identisch ist. Schließlich sei darauf hingewiesen, daß G/M mit G endlich erzeugbar ist und von seinen links-engelschen Elementen erzeugt wird. Damit ist die Anwendbarkeit von Hilfssatz 1 dargetan. Hieraus folgt insbesondere, daß $Z(G/M) \neq 1$ ist. Als echtes homomorphes Bild von G/M ist aber $(G/M)/Z(G/M)$ von endlicher Klasse, so daß auch G/M von endlicher Klasse ist. Dies widerspricht unserer Wahl von M; und aus diesem Widerspruch folgt, daß G Noethersch und von endlicher Klasse ist, q.e.d.

B. Beweis der Tatsache, daß ein Element aus einer endlichen Gruppe dem Hyperzentrum dieser Gruppe angehört, wenn es rechts-engelsch ist und einen auflösbaren Normalteiler aufspannt. Wäre dies nicht wahr, so gäbe es eine Gruppe G kleinster endlicher Ordnung mit folgenden Eigenschaften:

(B. 1) Es gibt ein rechts-engelsches Element a in G, das nicht im Hyperzentrum von G liegt, obwohl $\{a^G\}$ auflösbar ist.

Aus der Minimalität von G folgt sofort die folgende Tatsache:

(B. 2) Ist $X \neq 1$ ein Normalteiler von G, so liegt Xa im Hyperzentrum von G/X.

Angenommen, $X \neq 1$ sei ein $X \cap \{a^G\} = 1$ erfüllender Normalteiler von G. Dann folgt aus (B. 2), daß $X\{a^G\}/X$ im Hyperzentrum von G/X liegt; und dies ist gleichwertig damit, daß

$$G^{(i)} \circ \{a^G\} \leqq X$$

für hinreichend großes i gilt. Da aber $\{a^G\}$ ein Normalteiler von G ist, so ist dann sogar

$$G^{(i)} \circ \{a^G\} \leqq X \cap \{a^G\} = 1\,;$$

und daraus würde also folgen, daß a im Hyperzentrum von G liegt. Dies widerspricht (B. 1); und damit haben wir folgendes bewiesen:

(B. 3) Ist $X \neq 1$ ein Normalteiler von G, so ist $X \cap \{a^G\} \neq 1$.

Aus (B. 3) folgt insbesondere, daß $\{a^G\}$ jeden minimalen Normalteiler von G enthält. Sind nun A und B zwei verschiedene minimale Normalteiler von G, so ist $A \cap B = 1$. Aus (B. 2) folgern wir wieder, daß $\{a^G\}/A$ im Hyperzentrum von G/A und $\{a^G\}/B$ im Hyperzentrum von G/B liegt. Dann gibt es aber eine positive Zahl j derart, daß

$$G^{(j)} \circ \{a^G\} \leqq A \cap B = 1$$

ist; und hieraus folgt wieder, daß a im Hyperzentrum von G liegt. Aus diesem Widerspruch mit (B. 1) ergibt sich dann, daß

(B. 4) es einen und nur einen minimalen Normalteiler M von G gibt.

Aus (B. 3) schließen wir, daß M in $\{a^G\}$ liegt. Aus (B. 1) folgt die Auflösbarkeit des minimalen Normalteilers M von G; und hieraus ergibt sich weiter die folgende Tatsache:

(B. 5) M ist eine elementare abelsche p-Gruppe und $M \leqq \{a^G\}$.

Als nächstes wollen wir zeigen, daß $G = \{a^G\}$ ist. Wäre dies nicht wahr, so wäre $A = \{a^G\}$ eine von ihren rechts-engelschen Elementen erzeugte auflösbare Gruppe, deren Ordnung kleiner als die von G wäre. Aus der Minimalität von G würde dann folgen, daß A sein eigenes Hyperzentrum ist, daß also A nilpotent ist. Als nilpotente Gruppe ist dann A das direkte Produkt einer p-Gruppe und einer Gruppe B, deren Ordnung zu p teilerfremd ist. Da B alle Elemente aus A enthält, deren Ordnung zu p teilerfremd ist, so ist B eine charakteristische Untergruppe des Normalteilers A und also selbst ein Normalteiler von G. Aus (B. 5) folgt $M \cap B = 1$. Da aber M nach (B. 4) in jedem von 1 verschiedenen Normalteiler von G enthalten ist, so wird $B = 1$, so daß A eine p-Gruppe ist. Eine p-Gruppe liegt aber bekanntlich dann und nur dann im Hyperzentrum, wenn ihre Elemente mit allen Elementen von zu p teilerfremder Ordnung vertauschbar sind; siehe etwa BAER [1], S. 38, Theorem 1. Folglich gibt es ein Element g von zu p teilerfremder Ordnung in G, das nicht mit allen Elementen aus A vertauschbar ist. Dann ist g auch nicht mit allen Elementen aus dem Erzeugendensystem a^G von A vertauschbar; und wir können o. B. d. A. annehmen, daß a und g nicht vertauschbar sind, daß also $g \circ a \neq 1$ ist.

Wäre nun $\{A, g\} \neq G$, so wäre a ein rechts-engelsches Element aus der Gruppe $\{A, g\}$, deren Ordnung kleiner wäre als die von G. Aus der Minimalität von G folgt dann, daß a im Hyperzentrum von $\{A, g\}$ liegt. Da die Ordnungen von a und g teilerfremd sind, so würde daraus die Vertauschbarkeit von a und g folgen, eine Unmöglichkeit. Folglich ist $G = \{A, g\} = A\{g\}$.

Aus (B. 2) folgt, daß A/M Teil des Hyperzentrums von G/M ist; und aus (B. 1) folgt, daß A nicht im Hyperzentrum von G liegt. Also liegt insbesondere M nicht im Zentrum von G. Da das Zentrum der p-Gruppe A eine von 1 verschiedene charakteristische Untergruppe von A und also ein von 1 verschiedener Normalteiler von G ist, so liegt M nach (B. 4) im Zentrum von A. Folglich liegt A im Zentralisator von M. Aus $G = A\{g\}$ folgt nun, daß ein Element aus M dann und nur dann im Zentrum von G liegt, wenn es mit g vertauschbar ist. Läge aber ein von 1 verschiedenes Element aus M im Zentrum von G, so wäre der minimale Normalteiler M im Zentrum von G enthalten, eine von uns bereits ausgeschlossene Möglichkeit. Damit haben wir gezeigt, daß g mit keinem von 1 verschiedenen Element aus M vertauschbar ist.

Wir haben früher darauf hingewiesen, daß A/M im Hyperzentrum von G/M liegt, so daß also jedes Element aus der p-Gruppe A/M mit jedem Element von zu p teilerfremder Ordnung vertauschbar ist (siehe wieder BAER [1], S. 38, Theorem 1). Also sind insbesondere Ma und Mg miteinander vertauschbar, so daß das Element $g \circ a \neq 1$ in M liegt. Dann liegen natürlich auch alle Elemente $g^{(i)} \circ a$ in M. Haben wir bereits gezeigt, daß $g^{(j)} \circ a \neq 1$ ist, so erinnern wir uns daran, daß g mit keinem von 1 verschiedenen Element aus M vertauschbar ist. Also ist auch $g^{(j+1)} \circ a = g \circ [g^{(j)} \circ a] \neq 1$; und wir haben gezeigt, daß die 1 in der Folge der $g^{(i)} \circ a$ nicht vorkommt. Dies widerspricht aber der Tatsache, daß a ein rechts-engelsches Element ist. Aus diesem Widerspruch folgt

(B. 6) $G = \{a^G\}$.

Wegen (B. 1) ist $G = \{a^G\}$ eine von ihren engelschen Elementen erzeugte, auflösbare, endliche Gruppe. Eine solche Gruppe ist aber nach dem ad **A** bewiesenen Satz A nilpotent, so daß a im Widerspruch zu (B. 1) im Hyperzentrum von G liegt. Dieser Widerspruch zeigt dann die Gültigkeit des folgenden, im Anfang dieses Abschnitts B angekündigten Spezialfalls von Satz R:

Ist a ein rechts-engelsches Element aus der endlichen Gruppe G und $\{a^G\}$ auflösbar, so liegt a im Hyperzentrum von G.

C. Aus Baer [2], S. 93, Satz 4 und S. 90, Satz 3 folgt mühelos die Gültigkeit der folgenden Tatsache:

(C. 1) Der endliche Normalteiler N der Gruppe G ist dann und nur dann von endlicher Klasse in G, wenn $\{x, g\}$ für jedes x aus N und jedes g aus G eine Gruppe endlicher Klasse ist.

Es sei nun a ein rechts-engelsches Element aus G und $\{a^G\}$ ein endlicher auflösbarer Normalteiler von G. Ist dann g irgendein Element aus G, so induziert g in dem endlichen Normalteiler $A = \{a^G\}$ einen Automorphismus endlicher positiver Ordnung n. Dann liegt g^n im Zentrum von $B = \{A, g\}$, so daß $B/Z(B)$ sicher eine endliche Gruppe ist. Ist u irgendein zu a in G konjugiertes Element (also ein Element aus a^G), so ist $Z(B)u$ ein rechts-engelsches Element der endlichen Gruppe $B/Z(B)$, das in dem auflösbaren Normalteiler $Z(B)A/Z(B)$ von $B/Z(B)$ enthalten ist. (Daß B selbst auflösbar ist, sei im Vorbeigehen erwähnt.) Aus dem Resultat des Abschnittes **B** folgt nun, daß $Z(B)u$ im Hyperzentrum von $B/Z(B)$ liegt. Also liegt $Z(B)A/Z(B)$ im Hyperzentrum der endlichen Gruppe $B/Z(B)$. Da mit B/A auch $[B/Z(B)]/[Z(B)A/Z(B)]$ zyklisch ist, so ist damit die Nilpotenz der endlichen Gruppe $B/Z(B)$ dargetan. Also ist $B/Z(B)$ eine Gruppe endlicher Klasse; und dies ergibt natürlich, daß B selbst eine Gruppe endlicher Klasse ist.

Ist x ein Element aus $\{a^G\}$ und g ein Element aus G, so ist $\{x, g\}$ als Untergruppe von $\{a^G, g\}$ eine Gruppe endlicher Klasse. Anwendung von (C. 1) ergibt, daß $\{a^G\}$ von endlicher Klasse in G ist. Damit haben wir folgendes gezeigt:

Spannt das rechts-engelsche Element a in G einen endlichen und auflösbaren Normalteiler $\{a^G\}$ von G auf, so ist $\{a^G\}$ von endlicher Klasse in G.

D. Durch Spezialisieren von Baer [3], S. 325, Hauptsatz 3 erhält man leicht das folgende Resultat:

(D. 1) Der auflösbare und Noethersche Normalteiler N der Gruppe G ist dann und nur dann von endlicher Klasse in G, wenn für jeden in N enthaltenen Normalteiler X mit endlicher Faktorgruppe N/X der Normalteiler N/X von endlicher Klasse in G/X ist.

Es sei nun a ein rechts-engelsches Element der Gruppe G derart, daß der von a aufgespannte Normalteiler $N = \{a^G\}$ von G auflösbar und Noethersch ist. Ist X ein in N enthaltener Normalteiler von G, dessen Faktorgruppe N/X endlich ist, so ist N/X ein auflösbarer und endlicher Normalteiler von G, der von den zu Xa konjugierten Elementen erzeugt wird. Xa ist rechts-engelsch in G/X. Aus dem Resultat des Abschnitts **C** folgt dann, daß N/X

von endlicher Klasse in G/X ist. Wir wenden den Satz (D. 1) an und sehen, daß $N = \{a^G\}$ selbst von endlicher Klasse in G ist.

E. Beweis *von Satz* N: Sei also G eine von ihren engelschen Elementen erzeugte Noethersche Gruppe. Wäre G nicht von endlicher Klasse, so gäbe es einen maximalen Normalteiler W, dessen Faktorgruppe $H = G/W$ nicht von endlicher Klasse ist. Diese Gruppe H hat dann offenbar die folgenden Eigenschaften:

(E. 1) H wird von seinen engelschen Elementen erzeugt.

(E. 2) H ist Noethersch.

(E. 3) Jedes echte homomorphe Bild von H ist von endlicher Klasse, während H selbst nicht von endlicher Klasse ist.

Wäre der Normalteiler $X \neq 1$ von H auflösbar, so wäre die Noethersche Gruppe eine Erweiterung der auflösbaren Gruppe X durch die nach (E. 3) ebenfalls auflösbare Gruppe H/X. Also wäre H selbst auflösbar. Aus (E. 1), (E. 2) und Satz A folgte dann aber, daß die auflösbare Gruppe H von endlicher Klasse ist. Dies widerspricht (E. 3). Also gilt:

(E. 4) 1 ist der einzige auflösbare Normalteiler von H.

Ist U eine Untergruppe von H, so sei $E(U)$ die Gesamtheit der in U enthaltenen engelschen Elemente aus H; es genügt also nicht für ein Element aus $E(U)$, daß es engelsch in U sei. Ist die Untergruppe U von H eine Gruppe endlicher Klasse und $U = \{E(U)\}$, so wollen wir U als E-Untergruppe von H bezeichnen. Natürlich ist 1 eine E-Untergruppe von H. Da H eine Noethersche Gruppe ist, die von ihren engelschen Elementen erzeugt wird, ohne von endlicher Klasse zu sein, so liegt jedes engelsche Element aus H in einer maximalen E-Untergruppe von H; und es folgt aus (E. 4), daß von 1 verschiedene E-Untergruppen, insbesondere also alle maximalen E-Untergruppen von H, sicher nicht Normalteiler von H sind.

(E. 5) Sind X und Y zwei verschiedene E-Untergruppen von H und ist $X < Y$, so enthält der Normalisator von X ein nicht in X enthaltenes Element aus $E(Y)$.

Um dies einzusehen, erinnern wir zunächst daran, daß Y eine Gruppe endlicher Klasse ist und daß jede Untergruppe einer Gruppe endlicher Klasse von ihrem Normalisator verschieden ist. Da weiter Y als Untergruppe von H Noethersch ist, so gibt es also eine endliche Untergruppenkette K_i mit folgenden Eigenschaften:

$$X = K_0,\ K_i \text{ ist ein Normalteiler von } K_{i+1},\ K_n = Y\,.$$

Aus $\{E(X)\} = X < Y = \{E(Y)\}$ folgt natürlich auch $E(X) < E(Y)$. Also gibt es eine nicht negative ganze Zahl $k < n$ derart, daß

$$E(X) = E(K_k) < E(K_{k+1})\,.$$

Ist x ein Element aus K_{k+1}, so liegt x im Normalisator von K_k, woraus sofort

$$x^{-1} E(X)\, x = x^{-1} E(K_k)\, x = E(K_k) = E(X)$$

folgt; und hieraus ergibt sich dann auch $x^{-1} X\, x = X$. Wählen wir für x irgendein nicht in $E(X)$ enthaltenes Element aus $E(K_{k+1}) \leqq E(Y)$, so haben wir den Beweis von (E. 5) erbracht.

(E. 6) Sind X und Y zwei E-Untergruppen von H, so gilt

$$E(X) \cap E(Y) = E(X \cap Y) .$$

Ein Beweis dieser einfachen Formel erübrigt sich.

(E. 7) Der Durchschnitt verschiedener maximaler E-Untergruppen von H enthält kein von 1 verschiedenes engelsches Element aus H.

Wäre dies nicht wahr, so gäbe es ein Paar U, V maximaler E-Untergruppen von H derart, daß $U \neq V$, die Untergruppe $D = \{E(U \cap V)\}$ von 1 verschieden und maximal unter allen diesen E-Untergruppen ist. Als von 1 verschiedene E-Untergruppe von H ist D, wie schon bemerkt, kein Normalteiler von H. Ist weiter X irgendeine E-Untergruppe von H derart, daß $E(U \cap V) < E(U \cap X)$ ist, so liegt X in einer maximalen E-Untergruppe T von H, da ja H Noethersch ist. Dann ist aber auch $E(U \cap V) < E(U \cap T)$ und $D < \{E(U \cap T)\}$; und aus der Maximalität von D folgt $U = T$, so daß $X \leqq U$ ist. Entsprechend enthält V jede E-Untergruppe R derart, daß $E(U \cap V) < E(V \cap R)$ ist.

Den Normalisator von D in H wollen wir mit D^* bezeichnen; und $D^* < H$, da ja D kein Normalteiler von H ist. Da $D < U$ ist, so folgt aus (E. 5), daß $E(U \cap V) < D^* \cap E(U)$ ist. Wir setzen $U^* = \{D^* \cap E(U)\}$. Dann ist natürlich auch $D < U^*$. — Ebenso ist $E(U \cap V) < D^* \cap E(V)$ und $D < V^* = \{D^* \cap E(V)\}$; und U^* und V^* liegen beide in D^*.

Wäre nun V^* im Normalisator von U^* enthalten, so wäre $U^* V^*$ eine Untergruppe von D^*, die von engelschen Elementen aus H erzeugt wird, da dasselbe von D^* und V^* gilt. Weiter ist $U^* V^*$ eine Erweiterung der Gruppe U^* von endlicher Klasse durch die Gruppe $U^* V^*/U^*$, die als homomorphes Bild von V^* ebenfalls von endlicher Klasse ist — man erinnere sich daran, daß U und V ja als E-Untergruppen von endlicher Klasse sind. Es folgt, daß $U^* V^*$ eine auflösbare und Noethersche Gruppe ist, die von ihren engelschen Elementen erzeugt wird; und eine solche ist wegen Satz A von endlicher Klasse. Dann ist $U^* V^*$ also sogar eine E-Untergruppe von H. Da

$$E(U \cap V) < E(U^* V^*) \cap E(U)$$

ist, so ist $U^* V^* \leqq U$ nach einer früheren Bemerkung. Ebenso sieht man aber auch $U^* V^* \leqq V$ ein, so daß $U^* V^* \leqq U \cap V$ und also

$$E(U \cap V) < E(U^* V^*) \leqq E(U \cap V)$$

ist. Dies ist unmöglich. Also ist V^* nicht im Normalisator von U^* enthalten; und ebenso sieht man ein, daß U^* nicht im Normalisator von V^* liegt.

Es gibt also in $D^* \cap E(V)$ ein Element v, das nicht im Normalisator von U^* liegt; und ebenso gibt es ein Element u in $D^* \cap E(U)$, das nicht im Normalisator von V^* liegt. Insbesondere liegt also weder u noch v in $E(U \cap V)$.

Wäre die 1 nicht in der Folge der $u^{(i)} \circ v$ enthalten, so wäre u nicht links-engelsch und v nicht rechts-engelsch; und wäre die 1 auch in der Folge der $v^{(i)} \circ u$ nicht enthalten, so wäre u nicht rechts-engelsch und v nicht links-engelsch. Da aber u und v beides engelsche Elemente sind, so muß die 1 in wenigstens einer der beiden Folgen enthalten sein; und wir können o.B.d.A. annehmen, daß die 1 in der Folge der $u^{(i)} \circ v$ vorkommt.

Da $u^{(0)} \circ v = v$ nicht im Normalisator von U^* liegt und die 1 in der Folge der $u^{(i)} \circ v$ vorkommt, so gibt es eine nicht negative ganze Zahl r derart, daß $u^{(r)} \circ v = t$ nicht im Normalisator von U^* liegt, während $u \circ t = u^{(r+1)} \circ v$ im Normalisator von U^* liegt. Da u zu U^* gehört, so gehört auch $u(u \circ t) = t^{-1} u t$ zum Normalisator von U^*. Mit u und v liegen auch alle $u^{(i)} \circ v$ in D^*. Also ist $\{U^*, t^{-1} u t\}$ eine Untergruppe von D^* und eine zyklische Erweiterung von U^*. Es folgt, daß $\{U^*, t^{-1} u t\}$ eine Noethersche und auflösbare Gruppe ist, die von ihren engelschen Elementen erzeugt wird; und als solche ist $\{U^*, t^{-1} u t\}$ nach Satz A sogar von endlicher Klasse und also eine E-Untergruppe von H. Wir haben oben gezeigt, daß jede $E(U \cap V) < E(U \cap X)$ erfüllende E-Untergruppe X in U enthalten ist. Aus $E(U \cap V) < E(U^*)$ folgt aber, daß $\{U^*, t^{-1} u t\}$ eine solche E-Untergruppe von H ist und daß also $t^{-1} u t$ ebenfalls in U liegt. Da aber $t^{-1} u t$ in D^* liegt, so liegt dieses Element sogar in U^*. Da t im Normalisator von D und $E(U \cap V)$ liegt, so enthält der Durchschnitt $U^* \cap t^{-1} U^* t$ sowohl $E(U \cap V)$ wie auch das nicht zu $E(U \cap V)$ gehörige Element $t^{-1} u t$. Also ist $t^{-1} U^* t$ ebenfalls eine $E(U \cap V) < E(U \cap X)$ erfüllende E-Untergruppe X von H, woraus wir wieder $t^{-1} U^* t \leqq U$ folgern können. Da t in D^* liegt und $U^* = \{D^* \cap E(U)\}$ ist, so folgt hieraus zunächst $t^{-1} U^* t \leqq U^*$ und dann natürlich auch $U^* = t^{-1} U^* t$, so daß t im Normalisator von U^* liegt im Widerspruch zu unserer Wahl von [r und] t. Unsere Annahme, daß (E. 7) falsch sei, hat uns also zu einem Widerspruch geführt, aus dem die Gültigkeit von (E. 7) folgt.

Da H nicht von endlicher Klasse ist, aber von seinen engelschen Elementen erzeugt wird, so enthält H ein engelsches Element $a \neq 1$; und da H Noethersch ist, so liegt a in einer maximalen E-Untergruppe A von H. Wären alle zu a in H konjugierten Elemente in A enthalten, so wäre $\{a^H\}$ als Untergruppe von A ein von 1 verschiedener auflösbarer Normalteiler von H, was (E. 4) widerspricht. Also gibt es ein zu a konjugiertes Element b in H, das nicht in A liegt. Läge b im Normalisator von A, so wäre $\{A, b\}$ als zyklische Erweiterung von A sicher Noethersch, auflösbar, von engelschen Elementen aus H erzeugt, da ja b mit a engelsch ist. Anwendung von Satz A ergäbe, daß die echte Obergruppe $\{A, b\}$ von A ebenfalls eine E-Untergruppe von H wäre, was der Maximalität von A widerspräche. Folglich liegt b sicher nicht im Normalisator von A.

Ist a nicht links-engelsch, so ist a und das zu a in H konjugierte Element b rechts-engelsch. Also ist die 1 in der Folge $a^{(i)} \circ b$ sicherlich enthalten. Da $a^{(0)} \circ b = b$ nicht im Normalisator von A liegt, so gibt es eine ganze Zahl $c \geqq 0$ derart, daß $a^{(c)} \circ b = d$ nicht im Normalisator von A liegt, während $a \circ d = a^{(c+1)} \circ b$ dem Normalisator von A angehört. Der Normalisator von A enthält mit a und $a \circ d$ auch $d^{-1} a d$. Da A eine E-Untergruppe von H ist, so ist die zyklische Erweiterung $\{A, d^{-1} a d\}$ von A sicher eine auflösbare, Noethersche, von engelschen Elementen (aus H) erzeugte Gruppe, die nach Satz A von endlicher Klasse und also eine E-Untergruppe von H ist. Aus der

Maximalität von A folgt dann, daß $d^{-1}ad$ zu A gehört. Da aber d nicht im Normalisator von A liegt, so ist $A \neq d^{-1}Ad$; und der Durchschnitt $A \cap d^{-1}Ad$ dieser maximalen E-Untergruppen von H enthält im Widerspruch zu (E. 7) das engelsche Element $d^{-1}ad \neq 1$. Aus diesem Widerspruch folgt die Unmöglichkeit unserer Annahme der Falschheit von Satz N; und damit ist der Beweis von Satz N voll erbracht.

F. Es ist klar, daß Satz L ein Spezialfall des ad E bewiesenen Satzes N ist. Sei nun a ein rechts-engelsches Element aus G und $\{a^G\}$ ein Noetherscher Normalteiler von G. Dann ist $\{a^G\}$ eine von engelschen Elementen erzeugte Noethersche Gruppe; und eine solche ist nach Satz 1 von endlicher Klasse. Da also $\{a^G\}$ Noethersch und auflösbar ist, so können wir aus **D** erschließen, daß der Normalteiler $\{a^G\}$ von endlicher Klasse in G ist. Damit ist auch der Beweis von Satz R voll erbracht.

G. Die Resultate von Abschnitt **A** sind nicht als Spezialfälle in den Sätzen enthalten, die wir in der Einleitung aufgezählt haben. Wir wollen deshalb eine Gruppenklasse einführen, die es gestattet, umfassendere Sätze aus den schon gewonnenen Resultaten herzuleiten.

(A-N) *Jedes nicht-Noethersche homomorphe Bild von G besitzt einen von* 1 *verschiedenen abelschen Normalteiler.*

Gruppen mit der Eigenschaft (A-N) werden wir als A-N-*Gruppen* bezeichnen. Es ist klar, daß sowohl Noethersche wie auch auflösbare Gruppen A-N-Gruppen sind. Mit dem Begriff der A-N-Gruppen verwandt ist der der fast-auflösbaren Gruppen (siehe etwa Baer [5]). Es ist unbekannt, ob diese beiden Begriffe sich unterscheiden, da es ja noch unentschieden ist, ob alle Noetherschen Gruppen fast-auflösbar sind.

Satz A-N: *Endlich erzeugbare, von ihren engelschen Elementen erzeugte* A-N-*Gruppen sind Noethersch und von endlicher Klasse.*

Beweis: Es sei G eine endlich erzeugbare A-N-Gruppe, die von ihren engelschen Elementen erzeugt wird. Wäre G nicht Noethersch und von endlicher Klasse, so wäre G nicht von endlicher Klasse, da ja endlich erzeugbare Gruppen endlicher Klasse Noethersch sind. Aus Hilfssatz 2 folgt dann die Existenz eines Normalteilers M von G derart, daß G/M nicht von endlicher Klasse ist, während jedes echte homomorphe Bild von G/M von endlicher Klasse ist. Nach Satz N sind Noethersche Gruppen, die von ihren engelschen Elementen erzeugt werden, von endlicher Klasse. Da aber G/M mit G von seinen engelschen Elementen erzeugt wird, so ist G/M auch nicht Noethersch. Da G eine A-N-Gruppe ist, so existiert ein abelscher Normalteiler $A/M \neq 1$ von G/M. Da G/A ein echtes homomorphes Bild von G/M ist, so ist G/A von endlicher Klasse und also G/M auflösbar. Nach Satz A sind aber endlich erzeugbare, auflösbare Gruppen, die von ihren engelschen Elementen erzeugt werden, Noethersch und von endlicher Klasse. Da schließlich G/M mit G endlich erzeugbar ist und von seinen engelschen Elementen erzeugt wird, so ergibt sich, daß G/M Noethersch und von endlicher Klasse ist, ein Widerspruch, aus dem unser Satz folgt.

Satz L″: *Ist $\{a^G\}$ eine A-N-Gruppe, so ist a dann und nur dann links-engelsch, wenn $\{a, a\circ x\}$ für jedes x aus G von endlicher Klasse ist.*

Satz R″: *Ist $\{a^G\}$ eine A-N-Gruppe, so ist a dann und nur dann rechts-engelsch, wenn $\{a, x\}$ für jedes x aus G von endlicher Klasse ist.*

Beweis: Das Hinreichen der in diesen beiden Sätzen ausgesprochenen Bedingungen liegt auf der Hand.

Sei zunächst a ein links-engelsches Element aus G. Ist dann x irgendein Element aus G, so ist $\{a, a\circ x\} = \{a, x^{-1}a\,x\}$ eine endlich erzeugbare, von ihren links-engelschen Elementen erzeugte Untergruppe der A-N-Gruppe $\{a^G\}$ und also selbst eine A-N-Gruppe. Anwendung des Satzes A-N zeigt, daß $\{a, a\circ x\}$ Noethersch und von endlicher Klasse ist, womit Satz L″ bewiesen ist.

Sei zweitens a ein rechts-engelsches Element aus G und x irgendein Element aus G. Sei X die von allen Elementen $x^{(i)}\circ a$ erzeugte Untergruppe von $\{a, x\}$. Da a rechts-engelsch ist, so ist die 1 in der Folge der $x^{(i)}\circ a$ enthalten, so daß also insbesondere X endlich erzeugbar ist. Man überzeugt sich weiter davon, daß jeder a enthaltende Normalteiler von $\{a, x\}$ auch X enthält. Aus

$$x^{-1}(x^{(i)}\circ a)\, x = (x^{(i)}\circ a)\,(x^{(i+1)}\circ a)^{-1}$$

folgt sofort $x^{-1}X\,x \leqq X$. Weiter bemerken wir, daß

$$x(x^{(i)}\circ a)\, x^{-1} = (x^{(i)}\circ a)\,[\,x(x^{(i+1)}\circ a)\, x^{-1}]$$

ist. Da a rechts-engelsch ist, so gibt es eine ganze Zahl j derart, daß $x^{(j)}\circ a = 1$ ist; und dann gehört natürlich auch $x(x^{(j)}\circ a)\,x^{-1}$ zu X. Haben wir schon gezeigt, daß $x(x^{(i+1)}\circ a)\,x^{-1}$ zu X gehört, so folgt aus obiger Gleichung, daß auch $x(x^{(i)}\circ a)\,x^{-1}$ in X liegt. Aus diesen Überlegungen ergibt sich, daß $x\,X\,x^{-1} \leqq X$ ist, daß also sogar $X = x^{-1}X\,x$ ist. Da aber a in X liegt, so sehen wir, daß X ein Normalteiler von $\{a, x\}$ ist. Nach dem früher bemerkten ist also X der kleinste, a enthaltende Normalteiler von $\{a, x\}$. Folglich wird X von zu a konjugierten Elementen erzeugt. Also ist X als Untergruppe von $\{a^G\}$ eine A-N-Gruppe, die endlich erzeugbar ist und von ihren rechts-engelschen Elementen erzeugt wird. Wir wenden Satz A-N an, um zu zeigen, daß X eine Noethersche Gruppe endlicher Klasse ist. Da die Noethersche Gruppe X der kleinste, das rechts-engelsche Element a enthaltende Normalteiler von $\{a, x\}$ ist, so folgt aus Satz R, daß X von endlicher Klasse in $\{a, x\}$ ist. Da a im Normalteiler X von $\{a, x\}$ liegt, so ist $\{a, x\}/X$ zyklisch; und da X in $\{a, x\}$ von endlicher Klasse ist, so folgt schließlich, daß $\{a, x\}$ selbst von endlicher Klasse ist, q.e.d.

Folgerung A-N: *Ist $\{a^G\}$ eine A-N-Gruppe und a rechts-engelsch in G, so ist a auch links-engelsch in G.*

Dies folgt sofort durch Vergleich der Sätze L″ und R″.

H. Wir wollen zum Schluß noch auf einige interessante Zusammenhänge zwischen dem Begriff des engelschen Elements und dem der nachinvarianten Untergruppe hinweisen. Diesen letzteren Begriff wollen wir in einer Form benutzen, die etwas allgemeiner ist als H. WIELANDTs ursprüngliche Definition. Zunächst soll *Normalkette der Gruppe G* eine jede nicht leere Menge Σ von Untergruppen von G genannt werden, die die folgenden beiden Eigenschaften hat:

(N. 1) Ist $X \neq G$ eine Untergruppe in Σ, so gibt es eine Untergruppe Y in Σ derart, daß $X < Y$ und X ein Normalteiler von Y ist.

(N. 2) Ist θ ein Turm von Untergruppen aus Σ, so gehört auch die Vereinigung von θ zu Σ.

Hierbei sei unter einem *Turm* θ eine nicht leere Menge von Untergruppen mit folgender Eigenschaft verstanden: gehören X und Y zu θ, so ist entweder $X < Y$ oder $Y \leqq X$.

Man überzeugt sich leicht, daß G in jeder Normalkette vorkommt und daß jede Normalkette Σ mit irgendeiner Untergruppe X eine wohlgeordnete, X enthaltende Teilnormalkette enthält. Schließlich sei darauf hingewiesen, daß die Bedingung (N. 2) gebraucht wird, um das Maximumprinzip der Mengenlehre anzuwenden.

Sämtliche Glieder von Normalketten werden als nachinvariante Untergruppen bezeichnet. Natürlich sind Normalteiler nachinvariante Untergruppen; und jede nachinvariante Untergruppe einer nachinvarianten Untergruppe ist eine nachinvariante Untergruppe.

Glieder endlicher Normalketten heißen auch nachinvariante Untergruppen von endlichem Index; und dieser letzte Begriff deckt sich genau mit dem Wielandtschen Begriff. Es ist klar, daß eine jede nachinvariante Untergruppe einer Noetherschen Gruppe auch von endlichem Index ist.

Lemma L: *Ist $\{a\}$ für jedes x aus G eine nachinvariante Untergruppe von $\{a, x\}$, so ist a ein links-engelsches Element von G.*

Lemma R: *Ist $\{x\}$ für jedes x aus G eine nachinvariante Untergruppe von $\{a, x\}$, so ist a ein rechts-engelsches Element von G.*

Beweis *von Lemma L:* Wäre etwa $\{a\}$ eine nachinvariante Untergruppe von $\{a, x\}$, obwohl keines der Elemente $a^{(i)} \circ x = 1$ ist, so läge auch keines der Elemente $a^{(i)} \circ x$ in $\{a\}$. Es gibt eine Normalkette Σ von $\{a, x\}$, die $\{a\}$ enthält; und wegen (N. 2) gibt es in Σ eine maximale, a enthaltende Untergruppe M, die keines der $a^{(i)} \circ x$ enthält. Dann ist $M < \{a, x\}$; und es gibt wegen (N. 1) eine Untergruppe N in Σ, die M als echten Normalteiler enthält. Wegen der Maximalität von M enthält N eines der $a^{(i)} \circ x$; und da a in M liegt und M ein Normalteiler von N ist, so liegt auch $a \circ [a^{(i)} \circ x] = a^{(i+1)} \circ x$ in M. Aus diesem Widerspruch folgt Lemma L.

Der ganz ähnliche Beweis von Lemma R sei dem Leser überlassen.

Das Interesse dieser beiden einfachen Lemmata beruht auf der Schwäche der dort angegebenen Bedingungen, die dafür hinreichen, daß ein Element engelsch ist.

Zusatz L': *Ist $\{a^G\}$ Noethersch, so ist a dann und nur dann ein links-engelsches Element von G, wenn $\{a\}$ für jedes x aus G eine nachinvariante Untergruppe von $\{a, x\}$ ist.*

Zusatz R': *Ist $\{a^G\}$ Noethersch, so ist a dann und nur dann ein rechts-engelsches Element von G, wenn $\{x\}$ für jedes x aus G eine nachinvariante Untergruppe von $\{a, x\}$ ist.*

Die Beweise dieser Zusätze ergeben sich sofort aus den obigen Lemmata L und R in Verbindung mit den Sätzen L″ und R″.

Literatur

Baer, R.: [1] Group elements of prime power index. Trans. Amer. Math. Soc. **75**, 20—47 (1953). — [2] Das Hyperzentrum einer Gruppe. II. Arch. d. Math. **4**, 86—96 (1953). — [3] Das Hyperzentrum einer Gruppe. III. Math. Z. **59**, 299—338 (1953). — [4] Nilgruppen. Math. Z. **62**, 402—431 (1955). — [5] Noethersche Gruppen. Math. Z. **66**, 269—288 (1956). — Gruenberg, K. W.: Two Theorems on Engel Groups. Proc. Cambridge Philosophic. Soc. **49**, 377—380 (1953). — Schenkmann, E.: A generalization of the central elements of a group. Pacific J. Math. **3**, 501—504 (1953).

(Eingegangen am 1. Dezember 1956)