

UNTERSUCHUNGEN ZUR TOPOLOGIE DER GESCHLOSSENEN ZWEISEITIGEN FLÄCHEN. III.

VON

JAKOB NIELSEN

in KOPENHAGEN.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung	88
1. Nichtbeständigkeit positiver Fixpunktklassen	90
2. Beschränkung des charakteristischen Exponenten durch das Geschlecht	95
3. Algebraische Hilfsbetrachtungen	99
4. Die zu einer Abbildungsklasse gehörige Gruppe T	105
5. Korrespondenz der Isogredienzklassen verschiedener Stufe durch Potenzieren	106
6. Korrespondenz der Isogredienzklassen bei Transformation mit Elementen von T	109
7. Der Fall endlicher Faktorgruppe $\frac{T}{F}$	111
8. Die Formel von Hurwitz	113
9. Eigenschaften der Abbildungsklassen endlicher Ordnung	115
10. Aufstellung aller Matrizentypen der Abbildungsklassen endlicher Ordnung für $p=2$	118
11. Beispiele für Abbildungsklassen endlicher Ordnung	121
12. Fragestellungen im Anschluss an die Beispiele	147
13. Sätze über Automorphismen zweiter Ordnung	148
14. Abbildungsklassen mit dem charakteristischen Polynom $(\lambda + 1)^{2p}$	156
15. Abbildungsklassen mit dem charakteristischen Polynom $\lambda^{2p} + 1$ und solche mit dem Polynom $\lambda^{2p} - \lambda^{2p-1} + \dots - \lambda + 1$	161

Einleitung.

Die vorliegende Abhandlung enthält eine Weiterführung der Untersuchungen, die der Verfasser in zwei Abhandlungen unter dem gleichen Titel¹ in dieser Zeitschrift veröffentlicht hat. Am Schluss der Einleitung zu II wurde die Frage hervorgehoben, ob eine Fixpunktklasse von positivem Index einer topologischen Flächenabbildung sich bei unbegrenzt fortgesetzter Iteration der Abbildung als solche behaupten kann. Diese Frage wird nun hier unter Benutzung eines Satzes von H. KNESER *verneinend beantwortet* (§ 1), und es wird gezeigt (§ 2), dass der »charakteristische Exponent«, d. h. die Iterationsstufe, bei der sich die positive Fixpunktklasse in eine solche vom Index ≤ 0 verwandelt, *durch eine Funktion des Geschlechts begrenzt ist*. Die volle Ausnutzung dieser Ergebnisse bleibt einer späteren Publikation vorbehalten. Die Untersuchung beliebiger Abbildungsklassen lenkt nämlich von selbst die Aufmerksamkeit zunächst auf die *Abbildungsklassen endlicher Ordnung*; dabei heisst eine Abbildungsklasse von der Ordnung n , wenn die n Mal iterierten Abbildungen der Klasse mit der identischen Abbildung stetig zusammenhängen. Man wird die besondere Rolle der Abbildungsklassen endlicher Ordnung auch für den allgemeinen Fall aus folgender Überlegung verstehen können: Eine Fixpunktklasse von positivem Index wird durch eine solche Abbildung der universellen Überlagerungsfläche dargestellt, die auf deren Randkreis E fixpunktfrei ist. Der laut § 1 existierende charakteristische Exponent sei n . Dann hat die n te Potenz auf E Fixpunkte. Die in II eingeführten Begriffe des Haupt- und Kerngebietes bekommen dadurch auch für positive Fixpunktklassen Bedeutung. Angenommen nun, die n te Potenz habe z. B. eine Fixelementgruppe mit $\nu > 1$ freien Erzeugenden. Dann entsteht ein Kerngebiet, das auf der gegebenen Fläche eine berandete Teilfläche von niedrigerem Geschlecht überdeckt. Die gegebene Abbildungsklasse lässt sich dann, geeignet gedeutet, *in ihrer Wirkung auf diese Teilfläche allein* als eine solche von endlicher Ordnung auffassen.

Demgemäss bilden die Abbildungsklassen endlicher Ordnung den Hauptteil der vorliegenden Arbeit. Die § 3—6 beziehen sich aber noch auf den allgemeinen Fall; sie führen als zusammenfassende Invariante einer Abbildungsklasse eine

¹ Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen, I, Acta math. B. 50 S. 189—358 und II, Acta math. B. 53 S. 1—76. Diese beiden Abhandlungen werden im Text mit I bezw. II und der Paragraphen- oder Seitenzahl zitiert.

Gruppe T von topologischen Abbildungen des Randes E der universellen Überlagerungsfläche ein. T enthält die Fundamentalgruppe F der Fläche als Normalteiler, und die Abbildungsklassen endlicher Ordnung sind durch die Endlichkeit der zugehörigen Faktorgruppe $\frac{T}{F}$ charakterisiert. Nun hat man Beispiele von Abbildungsklassen endlicher Ordnung in den *Abbildungen endlicher Ordnung*, d. h. solchen »periodischen« Flächenabbildungen, von denen eine Potenz die identische Abbildung selbst ist. Solche sind von verschiedenen Autoren, insbesondere von L. E. J. BROUWER und W. SCHERRER, untersucht worden, und Herr BROUWER hat sie durch seinen Begriff der »Modulfläche der Involution« zu den Blättervertauschungen regulärer Riemannscher Flächen in Beziehung gesetzt. Dadurch werden bekannte Anzahlrelationen der Riemannschen Flächen, wie die Formel von HURWITZ auf sie anwendbar. *Enthält nun aber eine Abbildungsklasse endlicher Ordnung stets eine Abbildung endlicher Ordnung?* Unabhängig von der Antwort auf diese Frage wird gezeigt, wie man im allgemeinen Fall aus der Formel von ALEXANDER die Formel von HURWITZ als eine *Relation zwischen gewissen gruppentheoretischen Anzahlen* der obigen Klasseninvariante T herleiten (§ 8) und weitere allgemeine Eigenschaften der Abbildungsklassen endlicher Ordnung gewinnen kann (§ 9), ohne dass von einer Riemannschen Fläche die Rede ist. Dann wird aber in § 11 gezeigt, wie die Gruppe T selbst in einer Reihe von für jedes Geschlecht p gültigen Beispielen durch ihr Gruppenbild *auf die zugehörige Riemannsche Fläche führt* und damit in der zugehörigen Abbildungsklasse periodische Abbildungen aufzeigt.

Alle in diesen Abhandlungen gesuchten Eigenschaften sind Invarianten von Abbildungsklassen; sie sind überdies die gleichen für zwei Klassen, die *äquivalent*, d. h. in der Gruppe aller Abbildungsklassen in einander transformierbar sind. Notwendig für diese Äquivalenz ist die Übereinstimmung in dem charakteristischen Polynom, das zu der Exponentensummenmatrix der zugehörigen Automorphismen der Fundamentalgruppe gehört. Diese Bedingung ist nicht hinreichend; nicht einmal die Übereinstimmung in der Matrix selbst ist hinreichend. Wie aber, wenn man die Fragestellung auf Abbildungsklassen endlicher Ordnung beschränkt? Hier gibt es zunächst zu gegebenem Geschlecht p nur endlich viele mögliche Polynome. Für drei bestimmte solche wird am Schluss der Arbeit gezeigt, dass sie in der Tat ein System von äquivalenten Abbildungsklassen eindeutig festlegen. Ob dies für Abbildungsklassen endlicher Ordnung allgemeingültig ist, hängt davon ab, ob T immer durch das Gruppenbild zu

einer Riemannschen Fläche führt. Wenn das der Fall ist, so wird es verständlich, warum für Abbildungsklassen endlicher Ordnung die notwendigen algebraischen Bedingungen für die Äquivalenz zweier Abbildungsklassen auch hinreichend sind.

Für vielfache Ratschläge und wertvolle Hülfe danke ich Herrn Dr. WERNER FENCHEL, Göttingen, mit dem ich während seines Aufenthaltes in Kopenhagen grosse Teile der vorliegenden Arbeit durchsprechen konnte.

I. Nicht-Beständigkeit positiver Fixpunktklassen.

Es sei $\tau\varphi$ eine topologische Abbildung einer geschlossenen zweiseitigen Fläche φ vom Geschlecht $p > 1$ auf sich. Mit $\tau^n\varphi$, $n \equiv 0$, werde die n Mal iterierte Abbildung bezeichnet. Das Innere \mathcal{D} des Einheitskreises E einer komplexen x -Ebene sei das Abbild der universellen Überlagerungsfläche von φ . F sei die aus linearen hyperbolischen Substitutionen bestehende Gruppe der Decktransformationen von \mathcal{D} über φ . $t\mathcal{D}$ sei eine topologische Abbildung von \mathcal{D} auf sich, die $\tau\varphi$ überlagert. Dann wird $t\mathcal{D}$ durch eine topologische Abbildung tE des Randkreises auf sich stetig abgeschlossen (I, 28). Dabei genügt die topologische Abbildung $t(\mathcal{D} + E)$ der abgeschlossenen Kreisscheibe auf sich dem System von Funktionalgleichungen

$$t(f(x)) = f_I(t(x)),$$

wo f die Gruppe F durchläuft und f_I das dem Element f bei dem zu t gehörigen Automorphismus I von F entsprechende Element ist (I, 22). Wir schreiben diese kurz

$$tf = f_I t. \quad (1)$$

τ^n wird dann von t^n überlagert, und diese Funktion genügt in $\mathcal{D} + E$ den Funktionalgleichungen

$$t^n f = f_I^n t^n, \quad (2)$$

wo I^n der n Mal iterierte Automorphismus ist.

Die durch t dargestellte Fixpunktklasse der Flächenabbildung τ (I, 31) hat einen Index $j(t)$ (I, 37), der nach II 14, 15 nur von der Struktur der Fixpunktmenge der Randabbildung tE , also nur von I , abhängt und durch

$$3 - 4p \leq j(t) \leq 1$$

beschränkt ist. Dabei ist $j=1$ nur dann, wenn tE fixpunktfrei ist. Wenn nun tE überhaupt Fixpunkte hat, also $j \leq 0$, so hat $t^n E$ für $n > 1$ offenbar genau dieselbe Fixpunktmenge wie tE , also ist

$$j(t^n) = j(t).$$

Es soll nun in diesem Paragraphen die für das Folgende grundlegende Tatsache gezeigt werden, dass sich die positiven Fixpunktklassen ($j=1$) in dieser Beziehung anders verhalten, dass also der Satz gilt:

Satz 1: *Während jede Fixpunktklasse von nicht-positivem Index einer Flächenabbildung $\tau\varphi$ sich bei beliebig hoher Iteration der Abbildung als Fixpunktklasse von $\tau^n\varphi$ mit demselben Index behauptet, verwandelt eine Fixpunktklasse von positivem Index sich bei genügend hoher Iteration der Abbildung in eine solche von nicht-positivem Index.*

Der Beweis wird indirekt geführt. Wir nehmen im Gegensatz zur Behauptung an, dass für jedes positive n die topologische Randabbildung $t^n E$ fixpunktfrei sei, und haben zu zeigen, dass diese Annahme mit dem Bestehen der Funktionalgleichung (2) nicht verträglich ist.

Es wird zweckmässig sein, zunächst an die Eigenschaften einer mitsamt allen ihren Potenzen fixpunktfreien topologischen Abbildung einer Kreislinie (Jordankurve) auf sich zu erinnern.¹ Sei E die Kreislinie, t die gegebene Abbildung, $t^n E$ also für alle $n \neq 0$ fixpunktfrei, P ein beliebiger Punkt von E und M die Menge der Häufungspunkte der Punktmenge $t^n P$. M hängt nicht von P , sondern nur von t ab. M ist abgeschlossen und wird durch t in sich abgebildet: $tM=M$. M ist entweder mit ganz E identisch (wie z. B. bei einer Drehung von E in sich um einen Winkel, der zu π ein irrationales Verhältnis hat) oder bildet eine perfekte, nirgends dichte Menge auf E . In letzterem Fall besteht also die überall dichte Restmenge $E-M$ aus abzählbar unendlich vielen Intervallen, von denen keine zwei mit den Endpunkten aneinander stossen.

Ist nun E' eine andere Kreislinie und χ eine topologische Abbildung von E auf E' , so ist $t'=\chi t \chi^{-1}$ eine topologische Abbildung von E' auf sich, die mit allen ihren Potenzen fixpunktfrei ist und deren Häufungsmenge M' dann und nur dann ganz E' ausmacht, wenn M ganz E ausmacht. Ändert man aber im Falle $M < E$ die Definition von χ so ab, dass χ eine stetige Abbildung von E

¹ Vgl. meine Abhandlung: »Om topologiske Afbildninger af en Jordankurve paa sig selv«, Matematisk Tidsskrift B, 1928.

auf E' bedeuten soll, bei welcher die überall dichte Intervallmenge $E - M$ auf eine überall dichte Punktmenge der gleichen zyklischen Anordnung auf E' abgebildet wird, so hat es auch noch einen Sinn, von einer Abbildung $t' = \chi t \chi^{-1}$ von E' auf sich zu sprechen, indem bei t' zwei Punkte jener Punktmenge korrespondieren, falls die ihnen entsprechenden Intervalle auf E bei t korrespondieren. t' ist dann eine mit allen ihren Potenzen fixpunktfreie Abbildung von E' auf sich, deren Häufungsmenge ganz E' ausmacht. Nun hat H. KNESER gezeigt, dass sich die Abbildung χ von E auf E' hierbei immer so wählen lässt, dass die Abbildung t' von E' auf sich eine Drehung von E' in sich (um ein irrationales Vielfaches von π) wird.¹

Nun sei χ so gewählt. Ferner bezeichne s die auf E , σ die auf E' gemessene Bogenlänge. Für einen beliebigen Teilbogen von E können wir von seinem s -Mass und von seinem σ -Mass sprechen, wobei das letztere durch die Länge des Bildbogens bei χ definiert ist. Dabei ist das σ -Mass eines Teilbogens nur dann Null, wenn $M < E$ und der Teilbogen ganz zu einem der $E - M$ ausmachenden Intervalle gehört. σ ist eine auf E gleichmässig stetige, monotone (und im Fall $M < E$ stückweise konstante) Funktion von s . Sei $m(\lambda)$ die untere Grenze des s -Masses eines Teilbogens vom σ -Masse λ , wenn die Lage des Teilbogens auf E veränderlich ist; dann ist wegen der gleichmässigen Stetigkeit von σ $m(\lambda) > 0$ für $\lambda > 0$. — Nun ist zufolge der obigen Wahl von χ die gegebene Abbildung tE von der Art, dass die σ -Länge eines Teilbogens durch die Abbildung t , also auch durch ihre Potenzen t^n , nicht geändert wird. Also kommt die s -Länge der Bilder eines Teilbogens positiver σ -Länge λ bei allen Potenzen t^n nie unter den Betrag $m(\lambda)$.

Es soll nun gezeigt werden, dass diese Eigenschaft einer mit allen Potenzen fixpunktfreien Abbildung tE mit dem Bestehen der Funktionalgleichung (2) nicht vereinbar ist. Zu jedem Element f von F gehören zwei »Kongruenzkreise« $C(f)$ und $fC(f)$ mit gleichem (euklidischen) Radius $r(f)$. (Vgl. I, S. 200 und II, S. 8; $C(f)$ ist der Ort der Punkte $|f'(z)| = 1$.) Für eine Folge von Elementen mit gleicher nichteuklidischer Verschiebungslänge, für welche der euklidische Abstand der Grundpunkte auf E gegen Null abnimmt, nimmt auch r gegen Null ab (II, S. 9). Hieraus und aus der Tatsache, dass die in F vorkommenden Verschie-

¹ H. KNESER: »Reguläre Kurvenscharen auf den Ringflächen«, Math. Ann. 91, S. 142—144. Der Satz hängt mit Untersuchungen von H. POINCARÉ, E. E. LEVI und P. BOHL zusammen. Eine ausführliche Darstellung des KNESERSCHEN Beweises findet man in meiner obengenannten Abhandlung.

bungslängen eine positive untere Schranke haben (I, S. 208), folgt, dass es nur endlich viele Elemente von F gibt, deren Kongruenzkreisradius r oberhalb einer gegebenen positiven Schranke R liegt, wie folgende Überlegung zeigt: Sei α die Achse einer (nicht notwendig zu F gehörigen) Substitution, deren Verschiebungslänge gleich der kleinsten in F vorkommenden Verschiebungslänge ist und deren Kongruenzkreisradius gerade R ist, und sei Γ ein mit E konzentrischer Kreis, der die Achse α berührt. Dann ist $r \leq R$ für alle diejenigen Elemente von F , deren Achse nicht in Γ eindringt. Sei ferner l die Verschiebungslänge einer (nicht notwendig zu F gehörigen) Substitution, deren Kongruenzkreisradius R

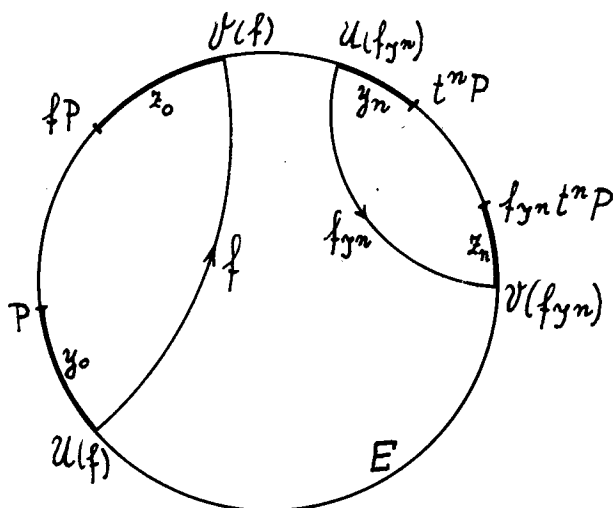


Fig. 1.

ist und deren Achse ein Durchmesser von E ist. Dann ist $r \leq R$ für alle diejenigen Elemente von F , deren Verschiebungslänge $\geq l$ ist (vgl. II, S. 8, 9). Unter den Elementklassen von F , d. h. den vollständigen Systemen in einander transformierbarer Elemente von F , gibt es nur endlich viele, deren Verschiebungslänge $< l$ ist (I, S. 208). Und nur endlich viele unter den Achsen einer Elementklasse schneiden Γ . Damit ist die Behauptung bewiesen. Wir können sie in folgendem *Hilfssatz* formulieren: *In jeder unendlichen Folge verschiedener Elemente von F geht der Kongruenzkreisradius gegen Null.*

Nun sei (Fig. 1) f ein beliebiges Element von F , P ein von den Grundpunkten von f verschiedener Punkt von E und fP sein Bild bei f . Mit y_0 werde der Teilbogen von $U(f)$ bis P und mit z_0 der Teilbogen von fP bis $V(f)$ be-

zeichnet. Bei t^n gehen die Grundpunkte $U(f)$ und $V(f)$ in $U(f_{I^n})$ und $V(f_{I^n})$ über. Ferner geht P in $t^n P$ und fP wegen (2) in

$$t^n(fP) = f_{I^n}(t^n P),$$

also y_0 in y_n und z_0 in z_n über. Je nachdem nun $t^n P$ innerhalb oder ausserhalb des zu f_{I^n} gehörigen Kongruenzkreises um $U(f_{I^n})$ liegt, liegt $f_{I^n} t^n P$ ausserhalb oder innerhalb des Kongruenzkreises um $V(f_{I^n})$. Einer der beiden Teilbögen y_n und z_n gehört also ganz einem Kongruenzkreise von f_{I^n} an (beide tun es in dem Falle, dass $t^n P$ genau auf dem Kongruenzkreise um $U(f_{I^n})$ liegt). Nun sind die Elemente der Folge f_{I^n} für $n=0, 1, 2, \dots$ alle verschieden, da nach Voraussetzung alle $t^n E$ ($n \neq 0$) fixpunktfrei sind. Also geht nach dem Hilfssatz der Kongruenz-

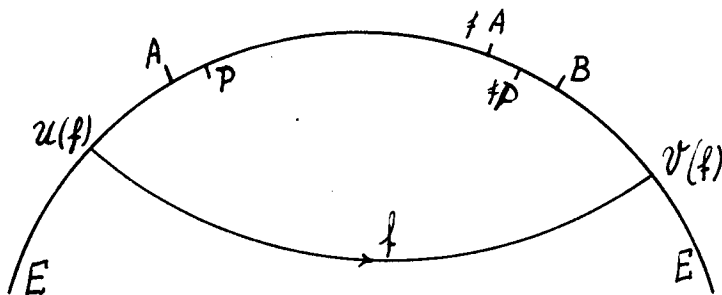


Fig. 2.

kreisradius von f_{I^n} gegen Null. In mindestens einer der beiden Teilbogenfolgen y_n und z_n hat daher die s -Länge der Teilbögen die untere Grenze Null. Wir schliessen daher aus dem oben gefundenen, dass mindestens einer der beiden Teilbögen y_0 und z_0 die σ -Länge Null haben muss. Somit kann die Häufungsmenge M nicht ganz E ausmachen. Ferner schliesst man nun, dass kein Grundpunkt von F zu M gehören kann. Denn es sei etwa der Grundpunkt $V(f)$ des Elementes f ein Punkt von M . Da kein Punkt von M isoliert ist, gibt es auf mindestens einem der Teilbögen, in die E durch $U(f)$ und $V(f)$ zerlegt wird, M -Punkte, die sich gegen $V(f)$ häufen. Auf diesem wähle man einen Punkt P so, dass $U(f)P$ positives σ -Mass hat. fP $V(f)$ hat positives σ -Mass, da $V(f)$ von dieser Seite her Häufungspunkt von M -Punkten ist. Man hätte also Teilbögen y_0 und z_0 der obigen Art mit positivem σ -Mass, was wir ausschliessen mussten. Für jedes Element f sind also die Grundpunkte innere Punkte der $E-M$ bildenden Restintervalle. Wir betrachten einen Teilbogen $U(f) V(f)$ von E , der M -Punkte enthält. Es seien A bzw. B die auf diesem Teilbogen liegenden End-

punkte der Restintervalle, zu denen $U(f)$ bzw. $V(f)$ gehören. Falls fA dem Bogen AB angehört (Fig. 2), so wähle man einen Punkt fP zwischen fA und B . Der aus ihm durch f^{-1} hervorgehende Punkt P gehört dann ebenfalls zu AB , und sowohl der Teilbogen $U(f)P$ wie der Teilbogen $fPV(f)$ hätten dann positives σ -Mass. Wir schliessen also, dass fA in B oder in einen inneren Punkt des Bogens $BV(f)$ fallen muss. Da die gleiche Betrachtung für den anderen Teilbogen $U(f)V(f)$ gilt, falls auch dieser M -Punkte enthält, falls also die Grundpunkte von f nicht demselben Restintervall angehören, so sieht man, dass die ganze Menge M durch jedes Element f von F in ein durch Hinzufügung seiner Endpunkte abgeschlossenes Restintervall verlegt wird. M und fM verteilen sich also auf zwei zu einander komplementäre Teilbögen von E . Nun kann man auf der abgeschlossenen Menge M ein nichteuklidisch—konvexes Gebiet aufbauen, indem man jedes der Restintervalle mit einem zu E orthogonalen Kreisbogen überspannt (in derselben Weise wie bei der Definition des Hauptgebietes II, S. 16). Nach dem Gefundenen wird dies Gebiet durch keines der mit ihm bezgl. F äquivalenten Gebiete überdeckt, es überdeckt also ein gewisses Gebiet der Fläche φ einfach. Es hat aber unendlichen nichteuklidischen Flächeninhalt, da M unendlich viele Punkte hat. Das steht im Widerspruch damit, dass φ den endlichen Flächeninhalt $4(p-1)$ hat (II, S. 22). — Die Annahme, dass alle $t^n E$ ($n \neq 0$) fixpunktfrei sind, hat also zu einem Widerspruch geführt.

Damit ist der Satz 1 bewiesen.

2. Beschränkung des charakteristischen Exponenten durch das Geschlecht.

Sei wiederum t eine T -Funktion, für welche tE fixpunktfrei ist. Dann gibt es nach Satz 1 eine kleinste ganze Zahl $n > 1$ derart, dass $t^n E$ Fixpunkte hat. Diese Zahl n heisse der *charakteristische Exponent* von t . Da tE nur von dem induzierten Automorphismus I abhängt, kann man n auch als charakteristischen Exponenten von I bezeichnen. Von T -Funktionen, deren zugehörige Randabbildung Fixpunkte hat, werde gesagt, dass sie den charakteristischen Exponenten 1 haben.

Diese Definition des charakteristischen Exponenten weicht von der I, S. 242 gegebenen in dem Falle ab, wo tE fixpunktfrei ist und $t^n E$ zwar Fixpunkte, aber keine Fixgrundpunkte hat, sodass I^n keine Fixelemente hat. Der Satz 2 a. a. O. bleibt richtig, und es gilt mit der neuen Definition auch seine Umkehrung: Zu

einer fixpunktfreien Randabbildung gehört ein Automorphismus erster Art mit einem charakteristischen Exponenten > 1 .

Nun sei P ein beliebiger Fixpunkt von $t^n E$. Dann sind die n Punkte

$$P, tP, t^2P, \dots, t^{n-1}P$$

alle verschieden, da t^n die niedrigste Potenz von t ist, die auf E Fixpunkte hat. Sie teilen E in n Teilbögen

$$B_1, B_2, \dots, B_n,$$

die bei t so vertauscht werden, dass

$$tB_i = B_{i+q},$$

wobei der Stellzeiger mod n verstanden wird und q zu n teilerfremd ist. Für jede ganze Zahl m gilt nun identisch:

$$t^n(t^m(x)) = t^m(t^n(x)).$$

Die Randabbildung t^n in dem Teilbogen B_1 wird also durch ein passendes t^m in die Randabbildung t^n in B_i abgebildet. Insbesondere bildet also t die Fixpunkte von $t^n E$ wieder in Fixpunkte von $t^n E$ und Nicht-Fixpunkte in Nicht-Fixpunkte ab; ferner führt t insbesondere isolierte, beiderseits abstossende Fixpunkte von t^n wieder in solche über; t bildet also die Punktmenge M^* , die II, S. 15, 16 als Randmenge des *Hauptgebietes* $\Omega(I^n)$ erklärt wurde, umkehrbar eindeutig in sich ab. Da ferner jede T -Funktion die Grundpunktmenge auf E in sich abbildet, so bildet t die Menge der Fixgrundpunkte von t^n , also auch die Menge $S(I^n)$ der singulären Punkte von t^n (II, 5), die II, S. 27 als Randmenge des *Kerngebietes* $\mathcal{A}(I^n)$ erklärt wurde, umkehrbar eindeutig in sich ab.

Nun unterwerfe man t^n der Typeneinteilung von II, 12. Zunächst sei t^n von einem Typus $\nu=0$. $t^n E$ hat 2μ Fixpunkte, von denen μ beiderseits anziehend sind; dabei ist (II, 6)

$$\mu \leq 4p - 2.$$

Da diese nach dem oben Gefundenen in n homöomorphe Abschnitte zerfallen sollen, wird n ein Teiler von μ und also auch n der Beschränkung durch das Geschlecht

$$n \leq 4p - 2$$

unterworfen. Wegen $n > 1$ ist dabei $\mu > 1$, also hat t^n einen negativen Index $1 - \mu$.

Danach sei t^n von einem Typus $\nu = 1$. Es gibt dann genau 2 singuläre Punkte, und diese müssen durch t vertauscht werden. Also folgt

$$n = 2.$$

Ist dabei $\mu = 0$, hat also t^2 zwei periodische fixpunktfreie Intervalle, so muss die Verschiebungsrichtung bei t^2 in diesen zyklisch *dieselbe* sein, da ja die Abbildung des einen Intervalls auf sich bei t^2 durch t in diejenige des anderen Intervalls auf sich transformiert wird. (t^2E enthält also keine beiderseits abstossenden Fixpunkte, sodass die Begriffsbildung eines (strichförmigen) Haupt- und Kerngebietes sich auch in diesem Fall aufrecht erhalten lässt.) Ist $\mu > 0$, so vertauschen sich die regulären Randfixpunkte von t^2 in den beiden durch das Fixelement bestimmten Intervallen, ihre Anzahl mod $H(I^2)$ ist also in beiden Intervallen dieselbe, und μ ist daher gerade.

Sodann sei $\nu > 1$. Die Fixelementgruppe $H(I^n)$ ist also eine freie Gruppe mit $\nu \leq 2p - 1$ Erzeugenden (II, 10), aber nicht ganz F . Da die Fixgrundpunktmenge von t^n durch t umkehrbar eindeutig in sich abgebildet wird, wird $H(I^n)$ durch den Automorphismus I isomorph in sich abgebildet. Nun seien

$$h_1, h_2, \dots, h_\nu$$

ein System unabhängiger Erzeugender von $H(I^n)$. Durch I , das wir im Augenblick nur als Automorphismus von $H(I^n)$ auffassen wollen, geht dieses in ein neues System unabhängiger Erzeugender

$$h'_1, h'_2, \dots, h'_\nu$$

über, wo diese Elemente durch gewisse eindeutig bestimmte Ausdrücke in den h_1, \dots, h_ν dargestellt werden können. Man bilde die zugehörigen Exponentensummen: Es sei γ_{ik} die Exponentensumme von h_k in dem Ausdruck für h'_i . So erhält man eine quadratische Matrix vom Grade ν :

$$\Gamma = (\gamma_{ik}), \quad i, k = 1, \dots, \nu.$$

Dem Automorphismus I^n von $H(I^n)$ entspricht nun die Matrix Γ^n und dem Automorphismus I , als dem identischen Automorphismus von $H(I^n)$, die Einheitsmatrix E_ν vom Grade ν :

$$I^n = E_\nu.$$

Es bleibt noch der Fall, in dem I^n der identische Automorphismus von F , $H(I^n) = F$, also t^n auf E die identische Abbildung ist. Hier hat $H(I^n)$ $2p$ Erzeugende und ist keine freie Gruppe, aber da in der Grundrelation von F die Exponentensumme in allen Erzeugenden Null ist, ist die Exponentensummenmatrix Γ von I wieder eindeutig bestimmt, und wieder ist

$$\Gamma^n = E_{2p}.$$

(Γ ist die schon I, S. 321 mit anderer Bezeichnung der Exponentensummen benutzte Matrix, deren Spur in die Formel von ALEXANDER eingeht.)

Setzt man im letztgenannten Falle $v = 2p$, so haben die beiden letzten Fälle auf die Aufgabe geführt, die möglichen endlichen Ordnungen n quadratischer ganzzahliger Matrizen von gegebenem Grade v zu bestimmen, welche man wohl am einfachsten durch folgende Betrachtung löst: Es sei

$$\gamma(\lambda) = |I - \lambda E_v| = (-1)^v \lambda^v + c_{v-1} \lambda^{v-1} + \dots + c_0 \quad (3)$$

das charakteristische Polynom von Γ , mit

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_v,$$

den Eigenwerten von Γ , als Wurzeln. Da $\Gamma^n = E_v$ nur den Eigenwert 1 hat, sind die λ_i n -te Einheitswurzeln. Die Koeffizienten von $\gamma(\lambda)$ sind ganze Zahlen, der höchste ± 1 . Man spalte $\gamma(\lambda)$ in Faktoren

$$\gamma(\lambda) = \gamma_1(\lambda) \gamma_2(\lambda) \dots \gamma_m(\lambda), \quad (4)$$

die im Körper der rationalen Zahlen irreduzibel sind. $\gamma_i(\lambda)$ ist ein ganzzahliges Polynom mit höchstem Koeffizienten ± 1 , dessen Wurzeln ein vollständiges System primitiver Einheitswurzeln eines Grades d_i ist, der in n aufgeht. Der Grad von $\gamma_i(\lambda)$ ist also $\varphi(d_i)$, wo φ die Eulersche Funktion bezeichnet. Man hat also

$$\varphi(d_1) + \varphi(d_2) + \dots + \varphi(d_m) = v. \quad (5)$$

Die Bestimmung aller möglichen Ordnungen n zu gegebenem Grade v geschieht nun so: Man bestimme die endlich vielen natürlichen Zahlen d , deren Eulersche Funktion der Bedingung

$$\varphi(d) \leq v \quad (6)$$

genügt, bilde aus den Zahlen $\varphi(d)$ die endlich vielen möglichen additiven Zu-

sammensetzungen der Zahl ν gemäss (5) und bestimme für jede solche Zusammensetzung die zugehörige Ordnung n als kleinstes gemeinsames Vielfache der benutzten Zahlen d . Das ergibt bei gegebenem ν endlich viele Möglichkeiten für n .

Da nun bei gegebenem Geschlecht p unserer Fläche für ν die Möglichkeiten $2, 3, \dots, 2p$ in Frage kommen, so ergeben sich in den letzten beiden Fällen der obigen Fallunterscheidung endlich viele Möglichkeiten für n . Da das Gleiche in den beiden erstgenannten Fällen galt, so haben wir den Satz bewiesen:

Satz 2: *Für die charakteristischen Exponenten der T-Funktionen gibt es eine nur vom Geschlecht der Fläche abhängende obere Schranke.*

Diese ist zugleich eine Schranke für die »Ordnung der Beständigkeit« der Fixpunktklassen von positivem Index auf einer Fläche gegebenen Geschlechts.

3. Algebraische Hilfsbetrachtungen.

In diesem Paragraphen verfolgen wir die (grossteils wohlbekannten) Eigenschaften der im vorigen Paragraphen betrachteten Matrizen aus Exponentensummen mit Beibehaltung der dortigen Bezeichnungen noch etwas weiter. Wegen der Beziehung zur Formel von ALEXANDER (I, 43) beachten wir dabei die Spuren

$$s_r = s(I^r)$$

der Matrizen und ihrer Potenzen. Dabei ist

$$s_r = \lambda_1^r + \lambda_2^r + \dots + \lambda_\nu^r$$

die Potenzsumme r ten Grades der Eigenwerte von I . Also hat man wegen (3) die in den s_r lineare Rekursionsformel:

$$(-1)^r s_{r+r} + c_{r-1} s_{r-1+r} + \dots + c_0 s_r = 0. \quad (7)$$

Das Polynom niedrigsten Grades

$$\chi(\lambda) = \lambda^q + k_{q-1} \lambda^{q-1} + \dots + k_0,$$

das durch Einsetzung von I die Nullmatrix ergibt, geht in $\gamma(\lambda)$ auf. Da $q < \nu$ sein kann, ergibt sich daraus eine im Allgemeinen kürzere Rekursionsformel:

$$s_{q+r} + k_{q-1} s_{q-1+r} + \dots + k_0 s_r = 0. \quad (7a)$$

Durch Vermittlung der ALEXANDERSchen Formel ergeben sich hieraus Rekursionsformeln zur Bestimmung der Indexsummen der Potenzen einer gegebenen Flächenabbildung.

Nun sei Γ eine Matrix endlicher Ordnung:

$$\Gamma^n = E_v.$$

Dann sind die Eigenwerte λ_i n te Einheitswurzeln, also ± 1 oder paarweise konjugiert imaginär, und somit zu einander reziprok. $\gamma(\lambda) = 0$ ist somit eine reziproke Gleichung, ihre Koeffizienten also von vorne und hinten gleich, eventuell bis aufs Vorzeichen.

Nun bezeichne man

$$\lambda^n - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} + \dots + \lambda + 1) = (\lambda - 1)Q_n(\lambda).$$

Die Wurzeln von $Q_n(\lambda)$ haben die Summe -1 . Die λ_i sind im Falle $\Gamma^n = E_v$ entweder gleich 1 oder Wurzeln von $Q_n(\lambda)$, die Eigenwerte von Γ^r sind die r ten Potenzen der λ_i .

1) Ist nun zunächst n eine Primzahl, so ist $Q_n(\lambda)$ im Körper der rationalen Zahlen irreduzibel, also, da $\gamma(\lambda)$ ganze rationale Koeffizienten hat,

$$\gamma(\lambda) = (-1)^v (\lambda - 1)^\alpha Q_n(\lambda)^\beta$$

mit $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$, und wegen des Grades v von $\gamma(\lambda)$:

$$\alpha + (n-1)\beta = v.$$

Für die Spur $s_1 = s(\Gamma)$ ergibt sich

$$s_1 = \sum \lambda_i = \alpha - \beta = v - n\beta.$$

Für $1 < r < n$ vertauschen sich die Wurzeln von Q_n bei Erhebung zur Potenz r , also hat man

$$\left. \begin{aligned} s_1 = s_2 = \dots = s_{n-1} = v - n\beta \\ s_n = v \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

(Dies ist natürlich nur eine sehr spezielle Folge aus dem aus bekannten algebraischen Sätzen zu folgernden »erweiterten FERMATSchen Satz«, dass für jede ganzzahlige Matrix Γ die charakteristischen Polynome von Γ und von Γ^n nach dem Modul n kongruent sind, wenn n eine Primzahl ist.)

Aus

$$\beta = \frac{v - \alpha}{n - 1} \leq \frac{v}{n - 1}$$

folgt noch

$$s_1 = v - n\beta \geq -\frac{v}{n - 1} \tag{9}$$

2) Im Falle eines allgemeinen n greifen wir auf die Zerlegung (4) für $\gamma(\lambda)$ mit der Bedingung (5) für die Grade der einzelnen Faktoren zurück. Hierbei brauchen die d_i nicht verschieden zu sein, also $\gamma(\lambda)$ kann irreduzible Faktoren in einer Potenz enthalten. Wir schreiben daher die Relation (4) mit neuer Bezeichnung:

$$\gamma(\lambda) = \prod_{d|n} \gamma_d(\lambda)^{\varepsilon_d}, \tag{4 a}$$

mit $\varepsilon_d \geq 0$, wobei d alle Teiler von n durchläuft, n das kleinste gemeinsame Vielfache der wirklich vorkommenden Teiler d ist und

$$\sum_d \varepsilon_d \varphi(d) = v$$

ist. Die Wurzelsumme $\mu(d)$ von γ_d ist bekanntlich

$\mu(d) = 0$, falls d einen Primfaktor mehrfach enthält,

$\mu(d) = 1$, falls d aus einer geraden Anzahl ungleicher Primfaktoren besteht,

$\mu(d) = -1$, » d » » ungeraden » » » » .

Diese Wurzelsumme, mit ε_d multipliziert, ergibt den auf den Teiler d von n entfallenden Beitrag zur Spur von Γ . Für $s(\Gamma)$ ergeben sich also bei gegebener Ordnung n endlich viele Möglichkeiten, die aus den möglichen d -Kombinationen leicht abzulesen sind. Dabei gilt in Abhängigkeit allein von dem Grade v von Γ :

$$-v \leq s(\Gamma) \leq v, \tag{10}$$

da der Realteil der Eigenwerte von Γ zwischen -1 und $+1$ liegt; insbesondere gilt wegen der endlichen Ordnung von Γ $s(\Gamma) = v$ nur für $\Gamma = E_v$ und $s(\Gamma) = -v$ nur für $\Gamma = -E_v$.

Um $s_r = s(\Gamma^r)$ aus der zu Γ gehörenden d -Kombination zu bestimmen, betrachte man einen irreduziblen Faktor $\gamma_d(\lambda)$ von $\gamma(\lambda)$. Ist $\delta = (r, d)$ der grösste gemeinsame Teiler von r und d , und $d = \delta d'$, so wird eine primitive d te Einheitswurzel durch Erhebung zur Potenz r eine primitive d' te Einheitswurzel, also

Wurzel in $\gamma_{d'}$ vom Grade $\varphi(d')$. Dem einzelnen Faktor γ_d in dem charakteristischen Polynom von I entsprechen also $\frac{\varphi(d)}{\varphi(d')}$ Faktoren $\gamma_{d'}$ in dem charakteristischen Polynom von I^r . Hierdurch lässt sich die d -Kombination von I^r aus derjenigen von I ablesen und die Spur s_r bestimmen. Für jedes zu r teilerfremde d bleibt der Beitrag zur Spur ungeändert. Speziell ist

$$s(I^r) = s(I) \quad (11)$$

für jedes zur Ordnung n von I teilerfremde r .

Nehmen wir nun noch die Bedingung $v=2p$ hinzu. Der Koeffizient c_0 in $\gamma(\lambda)$ ist der Determinantenwert der Matrix I , wegen der Ganzzahligkeit von I^{-1} also ± 1 , und für die Matrizen der Automorphismen erster Art von F immer $+1$.¹ Das charakteristische Polynom hat also die Form

$$\gamma(\lambda) = \lambda^{2p} - s_1 \lambda^{2p-1} + \dots - s_1 \lambda + 1 \quad (12)$$

mit gleichen Koeffizienten von beiden Enden. Betrachten wir nun einen irreduziblen Faktor $\gamma_d(\lambda)$ von $\gamma(\lambda)$. Für $d > 2$ ist der Grad $\varphi(d)$ von γ_d eine gerade Zahl, und die Wurzeln von γ_d haben das Produkt $+1$, da sie paarweise konjugiert imaginäre Einheitswurzeln, also paarweise reziprok sind. Da nun (12) zeigt, dass das Produkt aller Wurzeln von $\gamma(\lambda)$ ebenfalls $+1$ ist, so muss die Anzahl ε_2 der linearen Faktoren $\gamma_2 = \lambda + 1$ mit der Wurzel -1 gerade sein. Und da die Gesamtzahl der Wurzeln von $\gamma(\lambda)$ $2p$ ist, so muss endlich auch die Anzahl ε_1 der linearen Faktoren $\gamma_1 = \lambda - 1$ mit dem Eigenwert 1 gerade sein.

Endlich bestimmen wir noch im Falle $I^n = E_{2p}$ die Spurensomme. Ein Eigenwert λ erfüllt die Gleichung

$$1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{n-1} = \begin{cases} n & \text{falls } \lambda = 1 \\ 0 & \text{falls } \lambda \neq 1. \end{cases}$$

Also folgt durch Summation über alle Eigenwerte für die Spuren $s_r = s(I^r)$ die Relation

$$s_0 + s_1 + s_2 + \dots + s_{n-1} = \varepsilon_1 n,$$

und also wegen $s_0 = 2p$

$$s_1 + s_2 + \dots + s_{n-1} = \varepsilon_1 n - 2p. \quad (13)$$

¹ Ein Beweis hierfür wird am Schluss dieses Paragraphen nachgetragen.

Es bleibt noch ein Beweis für die oben benutzte Aussage über den Wert der Determinante von Γ nachzutragen:

Bezeichnet B die Bilinearform

$$B = x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_3 y_4 - x_4 y_3 + \dots + x_{2p-1} y_{2p} - x_{2p} y_{2p-1}$$

und sind X und Y zwei Kurven auf der Fläche vom Geschlecht p , so gibt B die algebraische Summe ihrer orientierten Schnitte an, wenn die x_i bzw. y_i die Exponentensummen von X bzw. Y in den $a_1, b_1, \dots, a_p, b_p$ bedeuten. Unterwirft man die Fläche einer topologischen Abbildung, deren zugehörige Automorphismenfamilie die Exponentensummenmatrix $\Gamma = (\gamma_{ik})$ hat, so muss B bei Ausübung der Substitution Γ auf beide Variablenreihen ungeändert bleiben oder das Zeichen wechseln, je nachdem die Abbildung die Orientierung erhält oder umkehrt, also je nachdem die Automorphismenfamilie von erster oder zweiter Art ist. Bezeichnet man nun mit (m, n) den Wert von B , wenn man für die x_i bzw. y_i die Elemente der m ten bzw. n ten Spalte von Γ einsetzt, so findet man durch Einsetzen, dass die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass B durch die Substitution Γ sich mit dem Faktor η reproduziert, durch

$$(1, 2) = (3, 4) = \dots = (2p-1, 2p) = \eta$$

und das Verschwinden aller übrigen (m, n) gegeben ist. (Und man sieht übrigens leicht, dass Γ dieselbe Eigenschaft dann auch bezüglich der Zeilen hat.)

Andererseits gestattet *jede* Determinante $| \Gamma |$ der Ordnung $2p$ eine »Entwicklung nach der Bilinearform B «, d. h. nach den (m, n) . Denn man bezeichne mit $\{ \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2p} \}$ die Zahl $+1$ oder -1 , je nachdem $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2p}$ eine gerade oder ungerade Permutation der Zahlen $1, 2, \dots, 2p$ ist, und setze

$$\begin{vmatrix} \gamma_{2i-1, \alpha_1} & \gamma_{2i-1, \alpha_2} \\ \gamma_{2i, \alpha_1} & \gamma_{2i, \alpha_2} \end{vmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2)_i$$

also

$$(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2)_1 + (\alpha_1, \alpha_2)_2 + \dots + (\alpha_1, \alpha_2)_p.$$

Dann ist

$$| \Gamma | = | \gamma_{ik} | = \sum \{ \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2p} \} \gamma_{1 \alpha_1} \gamma_{2 \alpha_2} \gamma_{3 \alpha_3} \dots \gamma_{2p \alpha_{2p}}$$

(die Summe über alle Permutationen $\alpha_1, \dots, \alpha_{2p}$ der Zahlen $1, 2, \dots, 2p$ erstreckt)

$$= \sum \{ \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2p} \} (\alpha_1, \alpha_2)_1 (\alpha_3, \alpha_4)_2 \dots (\alpha_{2p-1}, \alpha_{2p})_p$$

(die Summe über alle Permutationen mit der Einschränkung $\alpha_{2i-1} < \alpha_{2i}$ erstreckt)

$$= \sum_{(v)} \sum_{(a)} \{ \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2p} \} (\alpha_1, \alpha_2)_{v_1} (\alpha_3, \alpha_4)_{v_2} \dots (\alpha_{2p-1}, \alpha_{2p})_{v_p}.$$

Hierin ist $\sum_{(v)}$ über alle Permutationen v_1, v_2, \dots, v_p der Doppelzeilennummern

$1, 2, \dots, p$ und $\sum_{(a)}$ über alle Spaltenpermutationen mit $\alpha_{2i-1} < \alpha_{2i}$ und

$$\alpha_1 < \alpha_3 < \alpha_5 < \dots < \alpha_{2p-1}$$

zu erstrecken. Dann kann man aber für die Permutationen (v) auch Permutationen mit Wiederholung zulassen. Denn ein Glied der obigen Doppelsumme, in dem etwa $v_r = v_s$ ist, gibt, wenn man für festgehaltene (v) die $\sum_{(a)}$ ausführt,

eine Determinante, die aus den Doppelzeilen von Γ so aufgebaut ist, dass jedenfalls eine Doppelzeile zweimal auftritt, also den Wert Null. Führt man nun $\sum_{(v)}$

in den einzelnen Gliedern aus, so kommt die gewünschte Entwicklung (als eine für jede Determinante $2p$ ter Ordnung gültige Identität):

$$|\Gamma| = \sum_{(a)} \{ \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2p} \} (\alpha_1, \alpha_2) (\alpha_3, \alpha_4) \dots (\alpha_{2p-1}, \alpha_{2p}),$$

wobei die Summe über alle Spaltenpermutationen (a) erstreckt wird, für welche $\alpha_{2i-1} < \alpha_{2i}$ und $\alpha_1 < \alpha_3 < \alpha_5 < \dots < \alpha_{2p-1}$ ist.

Soll nun B bei Γ in ηB übergehen, so enthält nach dem oben gefundenen jedes Glied dieser Summe mindestens einen verschwindenden Faktor ausser demjenigen, für welches $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2p}$ die natürliche Reihenfolge $1, 2, \dots, 2p$ ist, und in diesem wird jeder Faktor gleich η , also

$$|\Gamma| = \eta^n.$$

Somit folgt der Satz:

Die Matrizen der Automorphismen erster Art haben für jedes p die Determinante $+1$, diejenigen der Automorphismen zweiter Art die Determinante $+1$ oder -1 , je nachdem p gerade oder ungerade ist.

Es sei bemerkt, dass sich dieser Satz aus den allgemeinen Untersuchungen von CAYLEY¹ über Automorphismen von Bilinearformen folgern lässt, und ebenso,

¹ siehe z. B. die französische Ausgabe der Enzyklopädie I, 2, 4, S. 482.

dass man ihn aus der Form der von POINCARÉ¹ angegebenen erzeugenden Automorphismen der speziellen Bilinearform B gewinnen kann. Vielleicht hat aber auch der hier gegebene direkte Beweis einiges Interesse.

4. Die zu einer Abbildungsklasse gehörige Gruppe T .

Es sei eine Abbildung $\tau\varphi$ vorgelegt. Wenn unter den zugehörigen T -Funktionen solche mit fixpunktfreier Randabbildung vorkommen, so sind wir in den beiden ersten Paragraphen dazu geführt worden, diese zu den zugehörigen charakteristischen Exponenten zu erheben. Wir machen diesen Schritt jetzt ganz, indem wir alle Potenzen τ^n , $-\infty < n < \infty$, und alle zu diesen gehörigen T -Funktionen in Betracht ziehen. Es sei also t eine T -Funktion über τ , und t induziere den Automorphismus I von F . Dann induziert t^n den Automorphismus I^n , und es gilt für alle n die Funktionalgleichung (2). Wird nun durch

$$f_0 = 1, \quad f_1, \quad f_2, \quad \dots$$

eine Aufzählung sämtlicher Elemente von I' gegeben, so betrachte man das System von T -Funktionen

$$\begin{array}{cccc}
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 t^{-2} & f_1 t^{-2} & f_2 t^{-2} & \dots \\
 t^{-1} & f_1 t^{-1} & f_2 t^{-1} & \dots \\
 1 & f_1 & f_2 & \dots \\
 t & f_1 t & f_2 t & \dots \\
 t^2 & f_1 t^2 & f_2 t^2 & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{array} \tag{14}$$

das zeilenweise aus der I' bildenden Zeile durch Anfügung aller t^n entsteht. Wegen (2) ist dabei

$$\begin{aligned}
 f_i t^m f_k t^n &= f_i f_k I^m t^{m+n}, \\
 (f_i t^m)^{-1} &= t^{-m} f_i^{-1} = f_{iI^{-m}}^{-1} t^{-m}, \\
 f_i t^m \cdot f_k \cdot (f_i t^m)^{-1} &= f_i \cdot f_k I^m \cdot f_i^{-1}.
 \end{aligned}$$

¹ Palermo Rend. 18 (1904), S. 64.

Diese Gleichungen zeigen, dass das obige System (14) eine Gruppe bildet, die mit T bezeichnet sei¹, und dass T die Gruppe F als Normalteiler enthält, sodass die Zeilen des obigen Systems Restklassen (»Nebengruppen«) nach F sind. Fasst man T nur als Gruppe von Abbildungen des Randkreises E auf, so gehört T zu der Abbildungsklasse von τ . Diese letztere Auffassung legen wir nun für die Bestimmung der Faktorgruppe $\frac{T}{F}$ zu Grunde. Im allgemeinen Fall fällt keine Potenz von tE in die Gruppe F ; dann sind alle Elemente des oben angeschriebenen Systems (14) verschiedene Abbildungen von E auf sich, und $\frac{T}{F}$ ist die freie Gruppe mit einer Erzeugenden (unendliche zyklische Gruppe). Sonst bestimme man den kleinsten positiven Exponenten n , für welchen $t^n E$ ein $f_i E$ ist. Dann gehört τ^n zur Klasse der Identität. Für $n=1$ ist τ selbst eine Abbildung aus der identischen Klasse und T auf E mit F identisch. Für $n > 1$ ist $\frac{T}{F}$ die zyklische Gruppe n ter Ordnung.

Wir bezeichnen die mit t beginnende Zeile in (14), also die vollständige Familie der mit t verwandten T -Funktionen, mit T_r . Die Elemente von T_r nennen wir »Funktionen r ter Stufe«. Zur m ten Potenz erhoben ergeben sie Funktionen m ter Stufe, aber im Allgemeinen nicht ganz T_{mr} . So braucht im Falle, dass $\frac{T}{F}$ die endliche Ordnung n hat, das Element n ter=oter Stufe $f_0=1$ nicht notwendig die n te Potenz eines Elements erster Stufe zu sein, was später näher erörtert werden soll.

5. Korrespondenz der Isogredienzklassen verschiedener Stufe durch Potenzieren.

Das Element $f_i t^m$ von T induziert den Automorphismus $I_{f_i}^m$. Zu diesem gehört eine Fixelementgruppe $H\left(I_{f_i}^m\right)$, die wir auch mit $H(f_i t^m)$ bezeichnen; sie ist die aus allen mit $f_i t^m$ vertauschbaren Elementen von F gebildete Untergruppe von F . Ferner werde an die in I, 18 gegebene Definition einer Isogredienz-

¹ Der Buchstabe T bedeutet nun also nicht mehr die Gruppe aller T -Funktionen, wie in I, 21, sondern die Gruppe derjenigen T -Funktionen, die über einer gegebenen Flächenabbildung τ und ihren Potenzen liegen.

klasse von T -Funktionen (bezw. von Automorphismen) erinnert: Alle aus $f_i t^n$ durch Transformation mit beliebigen Elementen von F hervorgehenden T -Funktionen bilden eine Isogredienzklass; ihre Elemente sind alle von m ter Stufe. Ferner beachte man, dass das Element t in (14) ein beliebig herausgegriffenes unter den Elementen erster Stufe ist, und dass man, wenn man die T entsprechende Gruppe für τ bilden will, die Zeilen T_{mr} des obigen Schemas bekommt, unter denen dann T_r als von erster Stufe zu gelten hat. Will man also das Verhalten der Elemente und Isogredienzklassen von T bei Potenz erhebungen untersuchen, so ist es keine Einschränkung, von dem Element t auszugehen.

Sei $H=H(I)=H(t)$ die zu I gehörige Fixelementgruppe und

$$F = H + g_1 H + g_2 H + \dots$$

eine Zerlegung von F nach H . Da die Elemente von H mit t vertauschbar sind, so bilden die Elemente

$$t, g_1 t g_1^{-1}, g_2 t g_2^{-1}, \dots \tag{15}$$

die vollständige Isogredienzklass von t . Man erhebe die Elemente von (15) zur n ten Potenz und erhält

$$t^n, g_1 t^n g_1^{-1}, g_2 t^n g_2^{-1}, \dots \tag{16}$$

Hierbei enthält (16) alle mit t^n isogredienten Elemente, da $H(t)$ in $H(t^n)$ enthalten ist. In (16) kommen gleiche Elemente dann und nur dann vor, wenn $H(t^n)$ umfassender ist, als $H(t)$; (aus $g_i t^n g_i^{-1} = g_k t^n g_k^{-1}$ folgt $g_k^{-1} g_i \in H(t^n)$, aber nach Voraussetzung nicht $\in H(t)$). Also ist t^n fixpunktfrei, $H(t^n) = 1$, n ein Multiplum des charakteristischen Exponenten von t , und F hat Fixelemente. In diesem Fall durchlaufen also die Elemente g_i in Wirklichkeit ganz F , und in (16) kommt jedes mit t^n isogrediente Element unendlich oft vor.

Nach dem eben besprochenen hat es einen Sinn, von der Erhebung einer Isogredienzklass zu einer Potenz zu sprechen, da eine vollständige Klasse dabei in eine vollständige Klasse übergeht. Wir untersuchen nun, unter welchen Bedingungen zwei verschiedene Isogredienzklassen erster Stufe durch Erhebung zur n ten Potenz zusammenfallen können. Wir können repräsentierende Elemente t und $f t$ der beiden Klassen so auswählen, dass

$$(f t)^n = t^n \tag{17}$$

ist. Dabei liegt f nicht in $H(t)$, denn aus $f \in H(t)$ würde

$$(ft)^n = f^n t^n,$$

also wegen (17) $f^n = 1$, also $f = 1$ folgen. f liegt daher auch nicht in $H(ft)$. Wegen (17) ist t^n mit ft vertauschbar, und da es mit t vertauschbar ist, ist es auch mit f vertauschbar. Also f liegt in $H(t^n)$, und $H(t^n)$ ist somit umfassender als $H(t)$. Ebenso ist $H((ft)^n)$ umfassender als $H(ft)$. Wir schliessen, dass sowohl t wie ft auf E fixpunktfrei sind. Ferner müssen beide den gleichen charakteristischen Exponenten haben. Denn t^m und $(ft)^m$, für beliebiges m , fallen mit n potenziert zusammen. Sie sind also entweder beide auf E fixpunktfrei, oder isogredient, und dann notwendig gleich. Sie fallen also bei Erhebung zu ihrem gemeinsamen charakteristischen Exponenten zusammen, und das obige n ist ein Multiplum desselben.

Angenommen nun, n sei dieser charakteristische Exponent selbst. Es ist

$$(ft)^n = f f_I f_{I^2} \dots f_{I^{n-1}} t^n,$$

also f eine Lösung der Automorphiegleichung

$$x x_I x_{I^2} \dots x_{I^{n-1}} = 1. \quad (18)$$

Es gibt also so viele Isogredienzklassen erster Stufe, die in der n ten Potenz mit der Klasse von t^n zusammenfallen, wie es bezgl. I nicht isogrediente Lösungen von (18) gibt. Diese Anzahl ist endlich, da die Zahl der Fixpunktklassen endlich ist. Man vergleiche dies mit I, 44. Der Unterschied ist der, dass hier nicht $I^n = 1$ zu sein braucht. Dies spricht sich auch in folgendem Sachverhalt aus: Sei h eine Lösung von (18) und k ein beliebiges Element von I' . Dann ist

$$(k h k_I^{-1}) (k h k_{I^2}^{-1}) \dots (k h k_{I^{n-1}}^{-1}) = k k_I^{-1},$$

also nur dann 1, wenn k Fixelement bei I^n ist. Hat man also zwei Lösungen h_1 und h_2 von (18), so sind sie nur dann bezgl. I isogredient, wenn für ein geeignetes Fixelement k von I^n gilt

$$h_2 = k h_1 k_I^{-1}.$$

Wir formulieren das Hauptergebnis dieses Paragraphen:

Satz 3: *Die Elemente einer Isogredienzklassse beliebiger Stufe ergeben, zu einer Potenz erhoben, alle Elemente einer Isogredienzklassse der Potenzstufe, und*

zwar im Allgemeinen einfach; unendlich oft jedoch, falls die Ausgangsklasse auf E fixpunktfrei ist und die Potenzklasse Fixelemente hat.

Zwei verschiedene Isogredienzklassen können nur dann bei Erhebung zu einer Potenz zusammenfallen, wenn sie einen gemeinsamen charakteristischen Exponenten $n > 1$ haben und der Potenzexponent ein Multiplum davon ist. Sie fallen dann schon in der n^{ten} Potenz zusammen und haben dort Fixelemente. Die Anzahl der so jeweils zusammenfallenden Klassen wird durch die Anzahl nicht isogredienter Lösungen der Automorphiegleichung (18) bestimmt.

6. Korrespondenz der Isogredienzklassen bei Transformation mit Elementen von T .

Das Symbol $[f_i t]$ möge für den Augenblick die Isogredienzklassse bezeichnen, zu der das Element $f_i t^r$ von T gehört. Bezeichnet nun g ein Element von F , so ist

$$t \cdot g f_i t^r g^{-1} \cdot t^{-1} = g_I f_{iI} t^r g_I^{-1}.$$

Lässt man hierin g ganz F durchlaufen, so durchläuft auch g_I ganz F' , und man kann schreiben

$$t \cdot [f_i t] \cdot t^{-1} = [f_{iI} t].$$

Daraus folgt, dass eine vollständige Isogredienzklassse beliebiger Stufe durch Transformation mit einem beliebigen Element von T in eine vollständige Isogredienzklassse der gleichen Stufe übergeht; die beiden Klassen können dabei verschieden sein oder zusammenfallen. Insbesondere zeigt die Gleichung

$$t \cdot f_i t \cdot t^{-1} = t f_i = f_i^{-1} \cdot f_i t \cdot f_i,$$

dass eine Klasse beliebiger Stufe, durch Transformation mit einem Element der gleichen Stufe in sich übergeht. Klassen der ersten Stufe sind daher mit ganz T vertauschbar, und das Gleiche gilt von Klassen, die Potenzen von Klassen erster Stufe sind. Es gibt aber noch mehr Klassen, die mit ganz T vertauschbar sind. Denn es sei k ein Fixelement des zu $f_i t$ gehörigen Automorphismus, also $k \rightleftharpoons f_i t$, dann ist auch

$$f_i t \rightleftharpoons k (f_i t),$$

also $[k(f_i t)^r] \Leftrightarrow T$. Und nun gilt auch die Umkehrung: Ist $[f^r] \Leftrightarrow T$, so lässt sich f^r in der Form $k(gt)^r$ mit $k \Leftrightarrow gt$ schreiben. Denn nach Voraussetzung gibt es ein Element g von T so, dass

$$t \cdot f^r \cdot t^{-1} = g^{-1} \cdot f^r \cdot g,$$

also $gt \Leftrightarrow f^r$. Nun ist

$$(gt)^r = g_r t^r = g_r f^{-1} \cdot f^r,$$

wenn man, wie in II, S. 60,

$$g_r = g g_1 g_1^2 \dots g_1^{r-1}$$

setzt. Das Element

$$k = f g_r^{-1} = f^r \cdot (gt)^{-r}$$

ist mit gt vertauschbar, da f^r und $(gt)^{-r}$ es sind. Und es ist

$$f^r = k \cdot (gt)^r,$$

wie behauptet. k ist auch mit f^r vertauschbar.

Nun sei g^r ein Element von T , und $[g^r]$ sei nicht mit ganz T vertauschbar. $[g^r]$ wird also nicht durch t in sich transformiert. t^m , $m > 1$, sei die niedrigste Potenz von t , die $[g^r]$ in sich transformiert. Es ist $m \leq r$, da ja $[g^r]$ durch t^r in sich transformiert wird. Dann gehören die Elemente

$$\begin{aligned} & g^r \\ & t \cdot g^r \cdot t^{-1} = g_1 t^r \\ & t^2 \cdot g^r \cdot t^{-2} = g_1^2 t^r \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ & t^{m-1} \cdot g^r \cdot t^{-(m-1)} = g_1^{m-1} t^r \end{aligned}$$

zu m verschiedenen Isogredienzklassen r ter Stufe, die sich bei Transformation mit t zyklisch vertauschen. m muss somit in r aufgehen. Diese m Klassen werden also von denjenigen und nur denjenigen Elementen von T in sich transformiert, die zu t^m gehören, also von allen Elementen mg ter Stufe. Nach dem obigen Satz gibt es daher eine Darstellung

$$g^r = k \cdot (h t^m)^{\frac{r}{m}}, \quad k \Leftrightarrow h t^m, \quad (19)$$

wobei k natürlich auch 1 sein kann. k ist auch mit g^r vertauschbar. Wir können, um einen kurzen, bezeichnenden Ausdruck zu haben, etwa sagen, dass

die Klasse $[gt^r]$ — und ebenso natürlich die anderen Klassen des m -gliedrigen Zyklus, dem sie angehört — »auf der m^{ten} Stufe wurzelt«. Dann lässt sich das Ergebnis dieses Paragraphen wie folgt zusammenfassen:

Satz 4: *Die Elemente einer vollständigen Isogredienzklassse beliebiger Stufe gehen durch Transformation mit einem beliebigen Element von T in die Elemente einer vollständigen Isogredienzklassse derselben Stufe über. Zu einer Klasse r^{ter} Stufe gibt es eine Zahl m , $1 \leq m \leq r$, die in r aufgeht, so, dass die Klasse durch t^m , aber durch keine niedrigere Potenz von t , in sich transformiert wird. Eine Klasse r^{ter} Stufe, die so »auf der m^{ten} Stufe wurzelt«, gestattet eine Darstellung gemäss (19). Sie gehört einem Zyklus von m Klassen r^{ter} Stufe an, die alle auf der m^{ten} Stufe wurzeln und sich bei Transformation mit Elementen von T , deren Stufenzahl kein Multiplum von m ist, zyklisch vertauschen.*

7. Der Fall endlicher Faktorgruppe $\frac{T}{F}$.

Nun erörtern wir diese Tatsachen und ihre Konsequenzen in dem Fall, wo (immer T als Abbildungsgruppe des Randkreises E allein aufgefasst) die Faktorgruppe $\frac{T}{F}$, endlich, also die zyklische Gruppe einer gewissen Ordnung n ist. Dabei nehmen wir $n > 1$ an. Dann ist T_n mit $T_0 = F$ identisch. Für die Flächenabbildung $\tau\varphi$ bedeutet dies, dass $\tau^n\varphi$ in die Abbildungsklassse der Identität fällt und dass dies für keinen niedrigeren Exponenten von τ der Fall ist. Für den zu t gehörigen Automorphismus I bedeutet dies, dass I^n ein innerer Automorphismus von F (evtl. die Identität) ist. Für die Matrix I von I ist dabei immer $I^n = E_{2p}$.

Die Isogredienzklassen der Stufe $T_n = F$ sind nichts anderes als die Klassen in einander transformierbarer Elemente von F . Unter diesen ist eine ausgezeichnet, die nur aus dem einen Element $f_0 = 1$ besteht. Diese wurzelt auf der ersten Stufe, da 1 mit t vertauschbar ist. Die übrigen Klassen können auf verschiedenen Stufen wurzeln.

Nun greifen wir ein Element gt^r der r ten Stufe heraus, wobei $1 \leq r < n$ ist. Sei (n, r) der grösste gemeinschaftliche Teiler von n und r . Dann liegt $(gt^r)^{\frac{n}{(n, r)}}$ in T_n , ist also entweder 1 oder ein Element $f \neq 1$ von F .

a) Aus der Annahme

$$(g^t)^{\overline{(n, r)}^n} = f$$

folgt

$$f \Leftrightarrow g^t,$$

also gehören zu g^t Fixelemente. Zu jeder Potenz davon gehören dann dieselben Fixelemente. Die $\frac{n}{(n, r)}$ te Potenz ist aber auf E die Operation f , hat also nur die zwei Grundpunkte von f zu Fixpunkten und als Fixelementgruppe daher die dazugehörige zyklische Gruppe, also die durch ein gewisses primäres Element f^* erzeugte Gruppe $\{f^*\}$, wenn f eine Potenz von f^* ist. Also ist $\{f^*\}$ auch die Fixelementgruppe von g^t , es entstehen bei $g^t E$ zwei periodische fixpunktfreie Intervalle mit zyklisch entgegengesetzter Verschiebungsrichtung, und der Index der zu g^t gehörigen Fixpunktklasse von $x^r \varphi$ ist Null. (g^t ist vom Typus $\nu=1, \mu=0$.)

b) Aus der Annahme

$$(g^t)^{\overline{(n, r)}^n} = 1$$

folgt aber, dass g^t vom Typus $\nu=0, \mu=0$ ist, also auf E fixpunktfrei ist und somit für $x^r \varphi$ eine Fixpunktklasse vom Index $+1$ ergibt.

Diese beiden Möglichkeiten des Verhaltens sind aber in Wirklichkeit Aussagen über die Isogredienzklasse, zu der g^t gehört, da Elemente derselben Isogredienzklasse sich in dieser Beziehung gleich verhalten. Im Falle b) stellen wir noch die Frage nach der Stufe, auf der die betreffende Isogredienzklasse von T_r wurzelt. Es sei dies die m te. Dann gestattet g^t nach Satz 4 eine Darstellung (19), wobei k ein gemeinsames Fixelement für ht^m und für g^t ist. g^t hat aber, als auf E fixpunktfrei, keine von 1 verschiedenen Fixelemente. Also ist $k=1$ und g^t die $\frac{r}{m}$ te Potenz eines Elements m ter Stufe ht^m . Dies muss selbst auf E fixpunktfrei sein, da eine Potenz davon es ist. Und es wurzelt selbst auf der m ten Stufe, da es sonst selbst eine reine Potenz wäre und g^t auf einer niedrigeren Stufe wurzeln würde. Die betrachtete Isogredienzklasse der r ten Stufe ist also mit allen T_{mq} , und nur diesen, vertauschbar, und da sie offenbar mit T_n vertauschbar ist, geht m auch in n auf. Nach Satz 4 ist die betrachtete Isogredienzklasse r ter Stufe nun Mitglied eines Zyklus von m Klassen der r ten Stufe, die sich bei Transformation mit t zyklisch vertauschen (die Klassen von

$gt^r, g_I t^r, \dots, g_{I^{m-1}} t^r$). Diese ergeben also jede eine Fixpunktklasse vom Index $+1$. In Wahrheit ist ein solcher Zyklus $ht^m, h_I t^m, \dots, h_{I^{m-1}} t^m$ schon auf der m ten Stufe vorhanden und behauptet sich durch alle Stufen, deren Ordnungszahl ein Multiplum von m ist (also auch der r ten), bis sie auf der n ten Stufe in der identischen Randabbildung zusammenfallen.

Wir haben es hier auf der Fläche φ mit m Punktgruppen zu tun, die sich bei $\tau, \tau^2, \dots, \tau^{m-1}$ zyklisch vertauschen und erst bei τ^m als m getrennte Fixpunktklassen in die Erscheinung treten. Man könnte sie »konjugierte Fixpunktklassen« von τ^m nennen. Natürlich kann τ^m noch weitere Systeme von je m konjugierten Fixpunktklassen enthalten und dazu noch andere Fixpunktklassen, die schon bei einer niedrigeren Potenz von τ auftreten, entsprechend Isogredienzklassen von T_m , die auf E fixpunktfrei sind, und schon auf einer niedrigeren Stufe wurzeln.

Hierdurch ist die in I, 45, insbesondere dem dortigen Satz 23, enthaltene Aussage in deutlicheres Licht gesetzt und auf alle Fälle endlicher Faktorgruppe $\frac{T}{F}$ erweitert: Sei wieder n die Ordnung der Abbildungsklasse von τ , d. h. τ^n zur Abbildungsklasse der Identität gehörig. Alle Potenzen $\tau, \tau^2, \dots, \tau^{n-1}$ haben nur Fixpunktklassen vom Index $+1$ oder Null. Ein Zusammenfallen ursprünglich verschiedener Fixpunktklassen findet nur in der Potenz τ^n statt, die ja nur eine wesentliche, und zwar negative Fixpunktklasse hat. Untereinander verschiedene positive Fixpunktklassen von τ behaupten sich als verschiedene positive Klassen bei $\tau^2, \dots, \tau^{n-1}$. Ausser diesen können bei denjenigen τ^m , für die m in n aufgeht, neue positive Klassen hinzukommen, und zwar ist die Anzahl der bei τ^m zuerst auftretenden Klassen in Multiplum von m . Und diese treten dann auch bei $\tau^{2m}, \dots, \tau^{\binom{n}{m}-1} m$ und nur dort auf. Die Anzahl der Klassen von τ^r ist also grösser oder gleich der Anzahl der Klassen von τ , und demnach gilt für die Spuren der Matrizen

$$s(\Gamma^r) \leq s(\Gamma) \tag{20}$$

oder allgemeiner geschrieben

$$s(\Gamma^{r^m}) \leq s(\Gamma^m). \tag{20 a}$$

8. Die Formel von Hurwitz.

Diese Ergebnisse benutzen wir nun — immer noch im Fall einer zyklischen Faktorgruppe n ter Ordnung, also einer »Abbildungsklasse n ter Ordnung« — zu

einer Abzählung der Summe \mathfrak{S} der Klassenzahlen von $\tau, \tau^2, \dots, \tau^{n-1}$. Ein m -gliedriger Zyklus obiger Art gibt Anlass zu m Fixpunktklassen vom Index $+1$, die bei $\tau^m, \tau^{2m}, \dots, \tau^{\left(\frac{n}{m}-1\right)m}$ und sonst nirgends auftreten. Ihr gesamter Beitrag zu \mathfrak{S} ist also $\left(\frac{n}{m}-1\right)m$. Dieser Beitrag ist nun so oft zu rechnen, wie die Anzahl A_m solcher m -gliedrigen Zyklen angibt. Und dann hat man noch m alle Teiler von n durchlaufen zu lassen. So bekommt man

$$\mathfrak{S} = \sum_{m|n} A_m (n - m).$$

Andererseits hat ja τ^r die Klassenzahl gleich der Indexsumme, da ja nur Fixpunktklassen vom Index 0 (die nicht mitzählen) und 1 auftreten, also ist die Klassenzahl nach der Formel von ALEXANDER $2 - s_r$, wo s_r die Spur der r ten Potenz I^r der Matrix I von I ist. Somit kommt

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} &= 2(n-1) - (s_1 + s_2 + \dots + s_{n-1}) \\ &= 2n - 2 - \varepsilon_1 n + 2p \end{aligned}$$

unter Benutzung von (13). Hierbei war ε_1 die Vielfachheit des Eigenwertes 1 in I , und ε_1 war eine gerade Zahl. Somit kommt

$$\sum_{m|n} A_m (n-m) = 2p - 2 - n(\varepsilon_1 - 2). \quad (21)$$

Setzt man noch $n = m\zeta$ und verabredet, statt den Faktor A_m anzuführen, den einzelnen Wert ζ so oft in Rechnung zu stellen, wie die Anzahl der $\frac{n}{\zeta}$ -gliedrigen Zyklen angibt, so schreibt sich (21)

$$\sum_{\zeta|n} \frac{n}{\zeta} (\zeta - 1) = 2p - 2 - n(\varepsilon_1 - 2). \quad (21 a)$$

Diese Formel soll die »HURWITZsche Formel« unseres Problems heissen, weil sie für n -periodische Abbildungen einer Fläche (Blättervertauschungen einer regulären n -blättrigen Riemannschen Fläche über einer Modulfläche¹) zur Hurwitzschen

¹ Siehe W. SCHERRER: »Über periodische Transformationen von Flächen«, Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Bd. 70 (1925).

Formel im gewöhnlichen Sinne wird; dann werden die Zahlen $\zeta - 1$ die zu den einzelnen Verzweigungspunkten gehörigen Verzweigungsordnungen, es ist über alle Verzweigungspunkte zu summieren, und ε_1 wird das doppelte Geschlecht der Modulfläche.

Es kann natürlich auch eintreten, dass alle Elemente von T auf E Fixpunkte haben, also der Fall b) des vorigen Paragraphen überhaupt nicht eintritt. Dann haben $\tau, \tau^2, \dots, \tau^{n-1}$ keine Fixpunktklassen mit von Null verschiedenem Index. Es sind dann alle $A_m = 0$, und (21) lehrt, dass dann $\frac{\varepsilon_1}{2} - 1$ in $p - 1$ aufgeht, und dass der Quotient die Ordnung von $\frac{T}{F}$ angibt. Man sieht, dass in diesem Fall aus $n > 1$ folgt $p > 2$. Zwar gibt es bekanntlich auch für $p = 2$ topologische Abbildungen der Fläche auf sich mit Erhaltung der Indikatrix und ohne Fixpunkte. Aber von der Klasse einer solchen Abbildung gilt nach dem soeben gefundenen, dass sie entweder keine endliche Ordnung hat, oder, falls sie von der Ordnung n ist, dass schon bei einer niedrigeren Potenz als der n ten wesentliche Fixpunktklassen auftreten.

Dass alle Flächen $p > 2$ Abbildungsklassen endlicher Ordnung n (und sogar n -periodische Abbildungen) gestatten, die mit allen Potenzen bis zur $(n - 1)$ ten fixpunktfrei sind, wird in § 11 an einem naheliegenden Beispiel erörtert (dortiges Beispiel 2).

In den §§ 4—8 ist nur von unendlichen oder endlichen zyklischen Gruppen von Abbildungsklassen die Rede gewesen. Man wird aber erkennen, dass manche der Betrachtungen eine Erweiterung auf andere Gruppen, insbesondere endliche nicht-zyklische Gruppen von Abbildungsklassen zulassen.

9. Eigenschaften der Abbildungsklassen endlicher Ordnung.

Sei Γ die Matrix einer Abbildungsklasse endlicher Ordnung n . Man spalte das zugehörige charakteristische Polynom $\gamma(\lambda)$ gemäss (4), § 2 bzw. (4 a), § 3. Das System der dabei wirklich auftretenden Teiler d von n , jeder so oft gesetzt, wie seine Vielfachheit $\varepsilon_d > 0$ angibt, heisse die » d -Kombination« von Γ . Es sei

$$d, d', d'', \dots, \delta, \delta', \delta'', \dots, 1, \dots, 1$$

eine d -Kombination, in welcher alle $d > 1$ und alle $\delta > 1$ und alle d zu allen δ teilerfremd sind. Bezeichnen dann D bzw. \mathcal{A} das kleinste gemeinsame Viel-

fache der d bzw. der δ , so ist D teilerfremd zu \mathcal{A} und $D\mathcal{A} = n$. Nun bilde man die Matrix Γ^D . Der Beitrag, den die Eigenwerte Γ zur Spur s_D liefern, ist derselbe, wie für s_1 . Dasselbe gilt für den Beitrag, der von den Teilern δ herrührt, da der Exponent D zu allen δ teilerfremd ist. Alle zu den Teilern d gehörigen Eigenwerte von Γ verwandeln sich aber durch die Potenzierung mit D in $+1$. Also ist $s_D > s_1$ im Widerspruch zu (20):

Satz 5: *In der zu einer Abbildungsklasse endlicher Ordnung n gehörenden Kombination von Teilern von n in der Zerlegung des charakteristischen Polynoms der zugehörigen Matrix lassen sich die auftretenden von 1 verschiedenen Teiler nicht in zwei zu einander teilerfremde Systeme zerlegen.*

Es ist stets

$$s(\Gamma) = s_1 \leq 2, \quad (22)$$

da die Klassenzahl

$$Z = 2 - s_1 \geq 0$$

ist. Wegen (10), § 3, hier für $\nu = 2p$, ist

$$Z \leq 2 + 2p,$$

und das Gleichheitszeichen ist nur für $n=2$ und nur für $\Gamma = -E_{2p}$ erreichbar. Für $n=2$ ist überdies

$$\begin{aligned} Z &\equiv 2 + 2p \pmod{4} \\ &\equiv 2 - 2p \pmod{4}, \end{aligned}$$

denn

$$s_1 = 2p - 2\varepsilon_2 \equiv 2p \pmod{4},$$

da ε_2 gerade ist. Ist n eine ungerade Primzahl, so ist wegen (9), § 3, hier für $\nu = 2p$,

$$Z \equiv 2 - 2p \pmod{n}$$

und

$$Z \leq 2 + \frac{2p}{n-1}.$$

Es ist also für ein $k > 0$

$$Z = 2 - 2p + kn \leq 2 + \frac{2p}{n-1},$$

und hieraus folgt

$$n \leq \frac{2p}{k} + 1 \leq 2p + 1.$$

Aus (13), § 3, und (20), § 7, folgt für beliebiges n

$$\begin{aligned} (n-1)s_1 &\geq \varepsilon_1 n - 2p, \\ (\varepsilon_1 - s_1)n &\leq 2p - s_1. \end{aligned}$$

Für $\varepsilon_1 - s_1 > 0$ hat man also

$$n \leq \frac{2p - s_1}{\varepsilon_1 - s_1} = 1 + \frac{2p - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 - s_1} \leq 2p + 1.$$

Ist z. B. $\varepsilon_1 > 0$, also $\varepsilon_1 \geq 2$, da ε_1 ja gerade ist, und hat die Grundpotenz der Abbildung wesentliche Fixpunktklassen, also $s_1 \leq 1$, so ist stets $n \leq 2p - 1$.

Ist $\varepsilon_1 = 0$ und $s_1 \geq 0$, so muss wegen (13) in (20) für wenigstens ein $r < n$ das Ungleichheitszeichen gelten.

Satz 6: *Für Abbildungsklassen endlicher Ordnung n einer Fläche vom Geschlecht p ist n durch eine Funktion von p beschränkt (§ 2). Die Klassenzahl Z wird durch $Z = 2 - s_1$ bestimmt und ist durch*

$$Z \leq 2 + 2p$$

beschränkt, und das Gleichheitszeichen kann nur für $n = 2$ eintreten. Ist die Ordnung n eine Primzahl, so ist sie durch

$$n \leq 2p + 1$$

beschränkt. Z ist in diesem Falle durch

$$Z \leq 2 + \frac{2p}{n-1}$$

beschränkt und genügt der Kongruenz

$$Z \equiv 2 - 2p \pmod{n},$$

die sich für $n = 2$ zu

$$Z \equiv 2 - 2p \pmod{4}$$

verschärfen lässt.

Ist (für beliebiges n) in der Matrix I' die Vielfachheit ε_1 des Eigenwertes 1 grösser als die Spur s_1 , so gilt insbesondere

$$n \leq 1 + \frac{2p - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 - s_1} \leq 2p + 1.$$

10. Aufstellung aller Matrizentypen der Abbildungsklassen endlicher Ordnung für $p = 2$.

Für $p=2$, also $v=2p=4$, kommen als Teiler der Ordnungen wegen (6), § 2, nur die in der folgenden Tabelle angeführten Werte von d in Frage. Es ist dabei noch für jeden Wert von d die Summe $\mu(d)$ der Wurzeln von $\gamma_d(\lambda)$, also die Summe der primitiven d ten Einheitswurzeln angegeben, die in § 3 bestimmt wurde.

d	$\varphi(d)$	$\mu(d)$
1	1	1
2	1	-1
3	2	-1
4	2	0
5	4	-1
6	2	1
8	4	0
10	4	1
12	4	0

Nun hat man aus diesen Werten d -Kombinationen zu bilden, denen gemäss (5) eine additive Zusammensetzung der Zahl 4 aus den zugehörigen $\varphi(d)$ entspricht. Dabei berücksichtigen wir zugleich, dass, wie am Schluss von § 3 gezeigt, sowohl $d=2$ als auch $d=1$ nur in gerader Vielfachheit auftreten dürfen. Man bekommt dann zunächst die in der Tabelle Seite 119 aufgeführten Möglichkeiten.

In der zweiten Spalte ist die Ordnung n als kleinstes gemeinsames Vielfache der benutzten d angegeben. In der dritten Spalte ist die Spur s_1 als Summe der entsprechenden $\mu(d)$ angegeben. Von den so gefundenen Möglichkeiten widerstreiten aber eine ganze Reihe den früher gefundenen Eigenschaften der Matrizen von Abbildungsklassen endlicher Ordnung und sind daher auszumerzen, entsprechend den Angaben der letzten Spalte. So scheidet die Kombination

d -Kombination	Ordnung n	Spur s_1	Widerspricht
12	12	0	$s_2 \cong s_1$
10	10	1	
8	8	0	
5	5	-1	
6 6	6	2	
6 4	12	1	Satz 5 (quadriert)
6 3	6	0	
6 2 2	6	-1	$s_2 \cong s_1$
6 1 1	6	3	$s_1 \cong 2$
4 4	4	0	
4 3	12	-1	Satz 5
4 2 2	4	-2	$s_2 \leq s_1$
4 1 1	4	2	
3 3	3	-2	
3 2 2	6	-3	Satz 5
3 1 1	3	1	
2 2 2 2	2	-4	
2 2 1 1	2	0	
1 1 1 1	1	4	

(6, 1, 1) aus, weil ihre Spur > 2 ist im Widerspruch zu (22). (Die letzte Kombination (1, 1, 1, 1) entspricht der Abbildungsklasse der Identität und hat die Ordnung $n=1$. Sie gehört also in gewisser Beziehung nicht in die Aufstellung hinein, es ist aber im Folgenden bequem, sie mitzuzählen.) Die Kombinationen (4, 3) und (3, 2, 2) widersprechen dem Satz 5. Für die Ausmerzung weiterer Typen ist die Quadrierung der betreffenden Matrix erforderlich, die man nach dem in § 3 gegebenen Verfahren direkt an der d -Kombination vollziehen kann. Das Quadrat einer Matrix vom Typus (6, 2, 2) ist eine Matrix vom Typus (3, 1, 1), und diese hat eine grössere Spur, was der Bedingung $s_2 \leq s_1$ aus (20), § 7, widerspricht. Ebenso führt (4, 2, 2) quadriert auf (2, 2, 1, 1) mit grösserer Spur. (6, 4) führt quadriert zu (3, 2, 2) und scheidet also aus. (12) führt quadriert auf (6, 6) mit grösserer Spur und scheidet also aus.

Die übrigen 12 Typen sind mit den bisher aufgestellten Bedingungen verträglich. Das wird aus der folgenden Tabelle erhellen, die diese 12 Typen, die sich durch Potenzieren reproduzieren, mit sämtlichen Potenzen darstellt. Dabei führen wir eine feste Numerierung dieser 12 Typen mit römischen Ziffern, nach

Typus	d Kombi- nation	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Matrixgleichung
I	1 1 1 1	1	I 4										$\Gamma - E_4 = 0$
II	2 2 1 1	2	II 0 2	I 4									$\Gamma^2 - E_4 = 0$
III	2 2 2 2	2	III -4 6	I 4									$\Gamma + E_4 = 0$
IV	3 1 1	3	IV 1 1	IV 1 1	I 4								$\Gamma^3 - E_4 = 0$
V	3 3	3	V -2 4	V -2 4	I 4								$\Gamma^2 + \Gamma + E_4 = 0$
VI	4 1 1	4	VI 2 0	II 0 2	VI 2 0	I 4							$\Gamma^3 - \Gamma^2 + \Gamma - E_4 = 0$
VII	4 4	4	VII 0 2	III -4 6	VII 0 2	I 4							$\Gamma^2 + E_4 = 0$
VIII	5	5	VIII -1 3	VIII -1 3	VIII -1 3	VIII -1 3	I 4						$\Gamma^4 + \Gamma^3 + \Gamma^2 + \Gamma + E_4 = 0$
IX	6 3	6	IX 0 2	V -2 4	II 0 2	V -2 4	IX 0 2	I 4					$\Gamma^4 + \Gamma^2 + E_4 = 0$
X	6 6	6	X 2 0	V -2 4	III -4 6	V -2 4	X 2 0	I 4					$\Gamma^2 - \Gamma + E_4 = 0$
XI	8	8	XI 0 2	VII 0 2	XI 0 2	III -4 6	XI 0 2	VII 0 2	XI 0 2	I 4			$\Gamma^4 + E_4 = 0$
XII	10	10	XII 1 1	VIII -1 3	XII 1 1	VIII -1 3	III -4 6	VIII -1 3	XII 1 1	VIII -1 3	XII 1 1	I 4	$\Gamma^4 - \Gamma^3 + \Gamma^2 - \Gamma + E_4 = 0$

steigender Ordnungszahl n geordnet, ein. In den mit 1 bis 10 überschriebenen Spalten sind für die Potenzen jedes Typus angegeben: zu oberst die Typennummer der Potenz, in der Mitte die Spur und zu unterst die Anzahl positiver Fixpunktklassen. (Die einzige negative Klasse, vom Index -2 , die zum Typus I gehört, ist nirgends mit aufgeführt.) Endlich ist in der letzten Spalte die in § 3 mit $\kappa=0$ bezeichnete Gleichung niedrigsten Grades angegeben, die von der Matrix des betreffenden Typus erfüllt wird. Sie ist ein Teiler der charakteristischen Gleichung vierten Grades der Matrix und bestimmt nach § 3 die Rekursionsformel für die Spuren der Potenzen der Matrix.

Die im nächsten Paragraphen für beliebiges p gebildeten Beispiele ergeben, für $p=2$ spezialisiert, Belege für alle Typen der Tabelle mit Ausnahme der Typen IV und VI, deren Existenz fraglich gelassen werden muss.

11. Beispiele für Abbildungsklassen endlicher Ordnung.

In diesem Paragraphen soll eine Reihe von typischen Beispielen für Abbildungsklassen endlicher Ordnung für beliebige p angegeben werden. Für $p=2$ spezialisiert, ergeben sie Beispiele für alle Typen obiger Tabelle, mit Ausnahme der fraglich bleibenden Typen IV und VI. Als Ausgangspunkt wird jedesmal eine geeignete abstrakte Darstellung der Fundamentalgruppe F genommen, die eine Automorphismenfamilie endlicher Ordnung in Evidenz setzt. Sodann wird das Augenmerk auf die im § 4 aufgestellte Gruppe T gerichtet, die F als Normalteiler enthält. Sie entsteht durch Hinzufügung einer Erzeugenden t zu F , die einer Relation $t^n=f$ genügt, wenn n die endliche Ordnung der Abbildungsklasse und f ein Element aus F , eventuell die 1, bedeutet. Eine abstrakte Darstellung von T erhält man, wenn man überdies noch die endlich vielen Relationen

$$tet^{-1} = e_I$$

hinzufügt, wo e ein Erzeugendensystem von F durchläuft und die Korrespondenz $e \rightarrow e_I$ den durch t induzierten Automorphismus I von F angibt, und wenn man noch ein vollständiges Relationensystem für F in den e angibt. Diese abstrakte Darstellung von T wird nun durch Umformungen so vereinfacht, dass sie das »Streckengruppenbild« im Sinne von DEHN¹ zu konstruieren gestattet. Dies ergibt sich hier immer als ein metrisch regulärer Streckenkomplex der nicht-

¹ M. DEHN, Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes, Math. Ann. 69, § 1.

euklidischen Ebene Φ , der eine mit T isomorphe Gruppe von Deckbewegungen in sich gestattet. Als Fundamentalbereich derselben kann man die einzelne Masche des zum »Streckengruppenbild« dualen »Polyongruppenbildes« nehmen, dessen Eckpunkte die Maschenmitten des Streckengruppenbildes sind. F ist eine invariante Untergruppe dieser Deckbewegungsgruppe T . Die modulo F reduzierte Ebene Φ ist die geschlossene Fläche φ vom Geschlecht p . Die modulo T reduzierte Ebene ist eine geschlossene Fläche M von einem gewissen Geschlecht π . Dabei ist $\varphi = \Phi \bmod F$ eine n -blättrige reguläre Riemannsche Fläche über $\Phi \bmod T = M$, und den Elementen der Faktorgruppe $\frac{T}{F}$ entspricht die zyklische Vertauschungsgruppe dieser n Blätter. Damit ist für diese Beispiele gezeigt, dass die betrachtete Abbildungsklasse endlicher Ordnung n unter ihren Abbildungen solche enthält, die n -periodisch sind, d. h. deren n te Potenz nicht nur zur Klasse der Identität gehört, sondern selbst die identische Abbildung ist. Und M ist die zugehörige »Modulfläche der Involution« im Sinne von BROUWER.¹ Positive Fixpunktklassen werden dabei immer durch je einen Punkt (Verzweigungspunkt von φ über M) dargestellt und Fixpunktklassen vom Index 0 ganz vermieden. Die Hurwitzsche Formel des § 8 wird dabei zur Hurwitzschen Formel der Riemannschen Fläche, und das Geschlecht π von M hat daher den Wert $\frac{\varepsilon_1}{2}$, wo ja ε_1 die Vielfachheit des Eigenwertes 1 in der Matrix I' von I war.

Man könnte einwenden, dass man, wenn es sich nur um die Aufstellung von Beispielen für Abbildungsklassen endlicher Ordnung handelt, den Ausgangspunkt umgekehrt in den Gruppen von Blättervertauschungen regulärer Riemannscher Flächen nehmen könnte. Demgegenüber sei hervorgehoben, dass die folgenden Beispiele vor allem zeigen sollen, wie die in den vorstehenden Paragraphen gegebene gruppentheoretische Analyse für beliebige Abbildungsklassen endlicher Ordnung von selbst in den hier behandelten Beispielen auf die zugehörigen Riemannschen Flächen führt. Das ist von Wichtigkeit für die Frage (die hier — in den folgenden Paragraphen — nur zum Teil gelöst wird), *ob eine Abbildungsklasse endlicher Ordnung immer eine Abbildung endlicher Ordnung enthält*. Die folgenden Beispiele suchen einen Weg zur Beantwortung dieser Frage anzubahnen, indem für die abstrakte Darstellung der Gruppen T und für die Darstellung der Automorphismen von F eine typische Normalform angestrebt wird.

¹ L. E. J. BROUWER, Über topologische Involutionen, Amsterdam Proceedings, Vol. XXI.

Auch für die Entscheidung der Frage, wann zwei Abbildungsklassen in einander transformierbar sind, ist dies von Bedeutung.

Beispiel 1.

Die Darstellung der Gruppe F

$$F = \{a_1, b_1, \dots, a_p, b_p\}$$

$$R = k_1 k_2 \dots k_p = 1 \quad (k_i = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1})$$

setzt den Automorphismus der Ordnung p

$$I: \left. \begin{array}{l} a_i \rightarrow a_{i+1} \\ b_i \rightarrow b_{i+1} \end{array} \right\} (i \bmod p)$$

in Evidenz. Er werde durch die Abbildungsfunktion $t(\mathcal{O} + E)$ induziert. Für alle Potenzen t^r hat man die Spur $s_r = 0$ und also die Klassenzahl $Z_r = 2$ ($r = 1, 2, \dots, p-1$). Das charakteristische Polynom von t ist

$$\gamma(\lambda) = (\lambda^p - 1)^2.$$

Für die Matrix I' von I ist also $\varepsilon_1 = 2$.

Die Gruppe T wird (auf E)

$$T = \{a_1, b_1, \dots, a_p, b_p, t\}$$

$$R = 1 \quad \left. \begin{array}{l} t^p = 1 \quad t a_i t^{-1} = a_{i+1} \\ t b_i t^{-1} = b_{i+1} \end{array} \right\} (i \bmod p).$$

Mittels der letzten Gleichungen für $i = 1, \dots, p-1$ kann man $a_2, b_2, \dots, a_p, b_p$ eliminieren. Die beiden letzten

$$t a_p t^{-1} = a_1 \quad t b_p t^{-1} = b_1$$

sind dann wegen $t^p = 1$ identisch erfüllt. Ferner wird

$$k_i = t^{i-1} k_1 t^{-(i-1)},$$

also

$$R = (k_1 t)^p \cdot t^{-p}.$$

Somit bekommt man

$$T = \{a_1, b_1, t\}$$

$$t^p = (k_1 t)^p = 1.$$

Führt man noch $t_1 = t^{-1}k_1^{-1}$ als überzählige Erzeugende ein, so hat man

$$T = \{a_1, b_1, t, t_1\}$$

$$t^p = t_1^p = tt_1 a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} = 1.$$

t und t_1 repräsentieren die beiden positiven Klassen.

Legt man der Herstellung der Gruppe F in \mathcal{O} das in I, 3 benutzte im Einheitskreise zentral gelegene reguläre $4p$ -Eck zu Grunde, so ist in diesem Beispiel die Abbildung t auf E einfach die Drehung von E in sich um den Winkel $\frac{2\pi}{p}$, also eine elliptische lineare Substitution. Also ist die Abbildungsgruppe T von E auf sich durch eine Gruppe linearer Substitutionen gegeben, die F invariant enthält. *Nun betrachtet man dieselbe Gruppe in \mathcal{O} .* Man kann als ein Beispiel der erzeugenden Funktion der hier betrachteten Abbildungsklasse die p -tel Drehung von \mathcal{O} um den Mittelpunkt O nehmen, denn sie genügt den richtigen Funktionalgleichungen. Nun betrachte man den zentralen Fundamentalbereich von F :

4 aufeinanderfolgende Seiten desselben korrespondieren zu Paaren bei a_1 und b_1 . Man verbinde die beiden freien Endpunkte mit dem Zentrum O von E . Das so entstehende 6-Eck ist Fundamentalbereich von T . Die beiden neu hinzugekommenen Seiten korrespondieren bei t . Daraus folgt das Polygongruppenbild von T . φ ist p -blättrig über M mit 2 Verzweigungspunkten $(p-1)$ ter Ordnung: derjenige in O entspricht der Klasse von t , derjenige in den Ecken des ursprünglichen $4p$ -Ecks der Klasse von t_1 . M hat das Geschlecht 1 entsprechend $\varepsilon_1 = 2$.

Ist r ein Teiler von p , und betrachtet man die Abbildungsklasse von t^r , so ist diese von der Ordnung $\frac{p}{r}$ und hat auch zwei positive Klassen, gegeben durch t^r und $t_1^r = k_1 k_2 \dots k_r t^r$. Der Eigenwert 1 bekommt die Vielfachheit $2r$ und die Modulfläche M das Geschlecht r .

Man kann sich diese Abbildungsklasse im Raume so veranschaulichen: A sei ein Durchmesser einer Kugel. Man bringe p »Henkel« rotationssymmetrisch um A auf der Kugel an. Dann ergibt die p -tel Drehung um A die obige Abbildungsklasse, und die Endpunkte von A sind die einzigen Fixpunkte bei allen Potenzen.

Beispiel 2.

Die im Beispiel 1 benutzte Darstellung von F lässt auch folgenden Automorphismus erkennen:

$$I: \begin{aligned} a_1 &\rightarrow a_1 \\ b_1 &\rightarrow k_2^{-1} b_1 \\ \left. \begin{aligned} a_i &\rightarrow a_{i+1} \\ b_i &\rightarrow b_{i+1} \end{aligned} \right\} (i = 2, \dots, p-1) \\ a_p &\rightarrow a_1 a_2 a_1^{-1} \\ b_p &\rightarrow a_1 b_2 a_1^{-1}, \end{aligned}$$

denn die alten Erzeugenden lassen sich durch die neuen ausdrücken, und R geht über in

$$a_1 k_2^{-1} b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} k_2 k_3 k_4 \dots k_p a_1 k_2 a_1^{-1} = a_1 k_2^{-1} a_1^{-1} \cdot R \cdot a_1 k_2 a_1^{-1}.$$

Die Potenzen I^r werden für $r = 1, 2, \dots, p-1$:

$$I^r: \begin{aligned} a_1 &\rightarrow a_1 \\ b_1 &\rightarrow k_{r+1}^{-1} \dots k_2^{-1} b_1 \\ \left. \begin{aligned} a_i &\rightarrow a_{i+r} \\ b_i &\rightarrow b_{i+r} \end{aligned} \right\} (i = 2, 3, \dots, p-r) \\ \left. \begin{aligned} a_{p-r+j} &\rightarrow a_1 a_{j+1} a_1^{-1} \\ b_{p-r+j} &\rightarrow a_1 b_{j+1} a_1^{-1} \end{aligned} \right\} (j = 1, 2, \dots, r). \end{aligned}$$

Für $r = p-1$ hat man

$$\begin{aligned} a_1 &\rightarrow a_1 = a_1 a_1 a_1^{-1} \\ b_1 &\rightarrow k_p^{-1} \dots k_2^{-1} b_1 = a_1 b_1 a_1^{-1} \quad (\text{wegen } R = 1) \\ \left. \begin{aligned} a_{1+j} &\rightarrow a_1 a_{1+j} a_1^{-1} \\ b_{1+j} &\rightarrow a_1 b_{1+j} a_1^{-1} \end{aligned} \right\} (j = 1, 2, \dots, p-1). \end{aligned}$$

Also ist I^{p-1} der innere Automorphismus $(I_0)_{a_1^{-1}}$. Wir haben es also mit einer Abbildungsklasse der Ordnung $p-1$ zu tun. Sei t eine I induzierende Abbildungsfunktion. Dann ist auf E

$$t^{p-1} = a_1.$$

Die Matrix von I ist bezüglich der ersten beiden Erzeugenden die Einheitsmatrix E_2 und bezüglich der übrigen gleich der Matrix aus Beispiel 1 mit $p-1$ statt p . Also wird das charakteristische Polynom

$$\gamma(\lambda) = (\lambda - 1)^2 (\lambda^{p-1} - 1)^2$$

und $\varepsilon_1 = 4$. Die Spuren werden für alle Potenzen I^r für $r = 1, 2, \dots, p-2$

$$s_r = 2$$

also die Klassenzahlen

$$Z_r = 0.$$

Es treten also in der ganzen Gruppe T keine Klassen mit positivem Index auf. Man kann sich hiervon auch leicht durch direkte Ausrechnung überzeugen. Denn es sei f^r ein beliebiges Element aus T und σ die Exponentensumme von a_1 in f . Diese ändert sich nicht bei Ausübung von I . Nun ist

$$(f^r)^{p-1} = f f_{I^r} f_{I^{2r}} \dots f_{I^{(p-2)r}} t^r (f^{p-1}) = f f_{I^r} \dots f_{I^{(p-2)r}} a_1^r = h$$

ein Element aus F , und seine Exponentensumme in a_1 ist

$$(p-1)\sigma + r$$

also $\neq 0$ für $r = 1, 2, \dots, p-2$. Also ist h nicht homolog Null und daher $h \neq 1$.

Für die Gruppe T hat man nun folgende Ausgangsdarstellung:

$$T = \{a_1, b_1, \dots, a_p, b_p, t\}$$

$$\begin{aligned} R = 1 \quad t^{p-1} &= a_1 & t a_1 t^{-1} &= a_1 \\ & & t b_1 t^{-1} &= k_2^{-1} b_1 \\ & & t a_i t^{-1} &= a_{i+1} \\ & & t b_i t^{-1} &= b_{i+1} \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} t a_1 t^{-1} &= a_1 \\ t b_1 t^{-1} &= k_2^{-1} b_1 \\ t a_i t^{-1} &= a_{i+1} \\ t b_i t^{-1} &= b_{i+1} \end{aligned}} \right\} (i = 2, \dots, p-1)$$

$$\begin{aligned} t a_p t^{-1} &= a_1 a_2 a_1^{-1} \\ t b_p t^{-1} &= a_1 b_2 a_1^{-1}. \end{aligned}$$

Nun kann man mittels der zweiten Relation die Erzeugende a_1 und mittels der den Buchstaben i enthaltenden Relationen die Erzeugenden $a_3, b_3, \dots, a_p, b_p$ eliminieren. Setzt man überall ein, so werden in der letzten Relationengruppe

die erste und die beiden letzten Relationen identisch erfüllt. Es bleibt also nur die zweite stehen, die wir

$$R' = t b_1 t^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} = 1$$

schreiben. Die Einsetzung von $a_1, a_3, b_3, \dots, b_p$ in R ergibt

$$\begin{aligned} R &= t^{p-1} b_1 t^{-(p-1)} b_1^{-1} \cdot k_2 \cdot t k_2 t^{-1} \cdot t^2 k_2 t^{-2} \cdot \dots \cdot t^{p-2} k_2 t^{-(p-2)} \\ &= t^{p-1} b_1 t^{-(p-1)} b_1^{-1} (k_2 t)^{p-1} t^{-(p-1)}. \end{aligned}$$

Nun ist aber wegen $R' = 1$

$$k_2 t = b_1 t b_1^{-1},$$

also

$$R = t^{p-1} \cdot (b_1 t b_1^{-1})^{-(p-1)} \cdot (b_1 t b_1^{-1})^{p-1} \cdot t^{-(p-1)} = 1$$

eine Folge aus $R' = 1$. Somit hat $T = \{t, b_1, a_2, b_2\}$ nur die eine Relation $R' = 1$. T ist also der zu einer Fläche M vom Geschlecht 2 gehörigen Fundamentalgruppe isomorph, und das Gruppenbild ist bekannt. (T ist also wiederum als Gruppe linearer Substitutionen darstellbar.)

F ist diejenige invariante Untergruppe (vom Index $p-1$) von T , deren Elemente in der Erzeugenden t eine durch $p-1$ teilbare Exponentensumme haben. Man kommt umgekehrt von T zu F , indem man $t^{p-1} = a_1$ und die transformierten

$$\left. \begin{aligned} t^r a_2 t^{-r} &= a_{2+r} \\ t^r b_2 t^{-r} &= b_{2+r} \end{aligned} \right\} (r = 1, 2, \dots, p-2)$$

einführt und bedenkt, dass $t^r b_1 t^{-r}$ wegen $R' = 1$ durch die übrigen ausgedrückt werden kann. Dann induziert t in F den Automorphismus I .

T ist Decktransformationsgruppe der universellen Überlagerungsfläche der geschlossenen Fläche M vom Geschlecht 2 — dies stimmt mit $\varepsilon_1 = 4$ —, und die Fläche φ vom Geschlecht p ist wegen des Index $p-1$ von F in T eine $p-1$ -blättrige Überlagerungsfläche von M . Deren Blätter werden bei Durchlaufung des dem Element t auf M entsprechenden Weges zyklisch vertauscht; man kann sie als längs einer solchen geschlossenen Kurve von M zyklisch zusammenhängend auffassen, die dem mit t gekoppelten Element b_1 entspricht. φ ist unverzweigt über M .¹ Die betrachtete Abbildungsklasse enthält also eine mit allen Potenzen fixpunktfreie $(p-1)$ -periodische Abbildung.

¹ Zur Frage der unverzweigten Überlagerungsflächen und ihrem Zusammenhang mit den Untergruppen von endlichem Index der Fundamentalgruppe der Grundfläche vergleiche man auch

Für $p=2$ ist t selbst Klasse der Identität und φ mit M identisch. Wir haben es also nur für $p>2$ mit einer Abbildungsklasse einer Ordnung > 1 zu tun. Vergleiche hierzu den Schluss von § 8. Im Raume kann man sich diese Abbildungsklasse so anschaulich machen: An einem Torus, der sich bei Drehung um eine Achse A in sich verschiebt, bringe man $p-1$ Henkel rotationssymmetrisch um A an. Dann ist die $(p-1)$ tel Drehung um A die hier betrachtete Abbildungsklasse der Fläche vom Geschlecht p .

Bei der Abbildungsklasse von t^r hat, wenn r in $p-1$ aufgeht, die Modulfläche das Geschlecht $r+1$ und der Eigenwert 1 , wie man leicht bestätigt, die Multiplizität $2r+2$.

Beispiel 3.

Zunächst soll nun die Gruppe F auf eine neue, für dies Beispiel geeignete Darstellung umgeschrieben werden. Von der in den ersten beiden Beispielen benutzten Darstellung ausgehend, setze man

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1 b_1 a_1^{-1} \\ c_2 &= b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} \\ c_3 &= b_2^{-1} a_3 b_3 a_3^{-1} \\ &\dots \\ c_p &= b_{p-1}^{-1} a_p b_p a_p^{-1}. \end{aligned}$$

Dann ist $F = \{a_1, \dots, a_p, c_1, \dots, c_p\}$, denn die b_i lassen sich aus diesen ausdrücken, und zwar kommt

$$b_i = a_i^{-1} a_{i-1}^{-1} \dots a_1^{-1} \cdot c_1 a_1 c_2 a_2 \dots c_i a_i.$$

Nun führe man noch zwei überzählige Erzeugende c_{p+1} und a_{p+1} durch die Definitionsgleichungen

$$\begin{aligned} c_1 c_2 \dots c_p c_{p+1} &= 1 \\ a_1 a_2 \dots a_p a_{p+1} &= 1 \end{aligned}$$

ein und setze zur Abkürzung

$$\left. \begin{aligned} (c)_i &= c_1 c_2 \dots c_i \\ (a)_i &= a_1 a_2 \dots a_i \\ (ca)_i &= c_1 a_1 c_2 a_2 \dots c_i a_i \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, p+1.$$

Es ist also $(c)_{p+1} = (a)_{p+1} = 1$ nach den obigen Definitionsgleichungen. Nun wird

$$b_i = (a)_i^{-1} (ca)_i$$

also

$$k_i = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} = (a)_{i-1}^{-1} (ca)_{i-1} \cdot c_i \cdot (ca)_i^{-1} (a)_i$$

und somit

$$R = k_1 k_2 \dots k_p = (c)_p (ca)_p^{-1} (a)_p$$

und wegen

$$(c)_p = c_{p+1}^{-1}, \quad (a)_p = a_{p+1}^{-1}$$

$$R = a_{p+1} a_{p+1}^{-1} c_{p+1}^{-1} (ca)_p^{-1} a_{p+1}^{-1} = a_{p+1} \cdot (ca)_{p+1}^{-1} \cdot a_{p+1}^{-1}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} F &= \{c_1, \dots, c_{p+1}, a_1, \dots, a_{p+1}\} \\ (c)_{p+1} &= (a)_{p+1} = (ca)_{p+1} = 1 \end{aligned} \tag{23}$$

die Darstellung von F in den neuen $2p+2$ Erzeugenden. — Wir verabreden noch, die Stellzeiger in den c_i, a_i und in den Symbolen $()_i$ nur modulo $p+1$ zu rechnen. Die ursprüngliche Definition der Klammergrößen $()_i$ bleibt dabei wegen (23) auch für $i > p+1$ richtig.

Die Darstellung (23) für F setzt nun den folgenden, mit H bezeichneten Automorphismus von F in Evidenz:

$$H: \begin{aligned} c_i &\rightarrow a_i \\ a_i &\rightarrow c_{i+1}. \end{aligned}$$

Denn es ist

$$\begin{aligned} (c)_{iH} &= (a)_i \\ (a)_{iH} &= c_i^{-1} (c)_{i+1} \\ (ca)_{iH} &= c_i^{-1} (ca)_i c_{i+1}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} (c)_{p+1} &\rightarrow (a)_{p+1} \\ (a)_{p+1} &\rightarrow c_i^{-1} (c)_{p+1} c_1 \\ (ca)_{p+1} &\rightarrow c_i^{-1} (ca)_{p+1} c_1. \end{aligned}$$

Dabei ist

$$H^{2r-1}: \begin{array}{l} c_i \rightarrow a_{i+r-1} \\ a_i \rightarrow c_{i:r} \end{array} \quad H^{2r}: \begin{array}{l} c_i \rightarrow c_{i:r} \\ a_i \rightarrow a_{i+r} \end{array}$$

also $H^{2(p+1)-1}$. Sei h eine H induzierende Abbildungsfunktion (früher mit dem Buchstaben t bezeichnet), so ist auf E $h^{2p+2} = 1$.

Zur Bildung der Spuren und des charakteristischen Polynoms hat man auf die in der Homologiegruppe unabhängigen Erzeugenden $c_1, \dots, c_p, a_1, \dots, a_p$ zurückzugehen, also wieder c_{p+1} und a_{p+1} mittels der Relation $(c)_{p+1} = 1$ und $(a)_{p+1} = 1$ zu eliminieren. Man hat dann für F die Darstellung

$$F = \{c_1, \dots, c_p, a_1, \dots, a_p\} \quad (24)$$

$$(ca)_p (c)_p^{-1} (a)_p^{-1} = 1,$$

wobei jede Erzeugende in der Relation die Exponentensumme 0 hat. Bei der Bildung der Spuren können nur diejenigen c_i oder a_i etwas beitragen, die gerade in c_{p-1} oder a_{p+1} übergehen. c_{p-1} enthält alle c_i mit dem Exponenten -1 und kein a_i , und a_{p+1} enthält alle a_i mit dem Exponenten -1 und kein c_i . Also wird

$$s_{2r-1} = 0$$

und

$$s_{2r} = -2 \quad (\text{für } r \not\equiv 0 \pmod{p+1}).$$

Die ungeraden Potenzen von h haben also die Klassenzahl $Z_{2r-1} = 2$ und die geraden die Klassenzahl $Z_{2r} = 4$. Für das charakteristische Polynom von H findet man:

$$\gamma(\lambda) = \lambda^{2p} + \lambda^{2p-2} + \dots + \lambda^2 + 1,$$

also $\varepsilon_1 = 0$.

Ehe wir auf die Untersuchung der zugehörigen Gruppe T eingehen, lesen wir aus der Darstellung (23) von F noch einen zweiten, mit S bezeichneten Automorphismus ab:

$$S: \begin{array}{l} c_i \rightarrow (ca)_{i-1} c_i^{-1} (ca)_{i-1}^{-1} \\ a_i \rightarrow (ca)_i a_i^{-1} (ca)_i^{-1}, \end{array}$$

denn man bestätigt durch Einsetzen die Gleichungen

$$\begin{aligned} (c)_{iS} &= (a)_i (ca)_i^{-1} \\ (a)_{iS} &= (c)_i (ca)_i^{-1} \\ (ca)_{iS} &= (ca)_i^{-1}, \end{aligned}$$

und setzt man hierin überall $p + 1$ für i , so sieht man, dass das Relationensystem in ein gleichwertiges übergeht; ferner folgt aus der letzten Gleichung sofort $S^2 = 1$. S werde durch die Abbildungsfunktion s induziert, und auf E ist also $s^2 = 1$.

Geht man wieder auf (24) zurück, so hat man in S einfach die beiden letzten Transformationsformeln fortzulassen. Man sieht, dass S die Matrix $-E_{2p}$, also $s_1 = -2p$, $Z_1 = 2 + 2p$ und

$$\gamma(\lambda) = (\lambda + 1)^{2p}$$

als charakteristisches Polynom, also $\varepsilon_1 = 0$ hat.

Nur kurz erwähnt sei, dass man in diesem Zusammenhang noch in ähnlicher Weise zwei andere Automorphismen zweiter Ordnung

$$G_1: \begin{aligned} c_i &\rightarrow (c)_i c_i^{-1} (c)_i^{-1} \\ a_i &\rightarrow (c)_i a_i (c)_i^{-1} \end{aligned} \quad G_2: \begin{aligned} c_i &\rightarrow (a)_{i-1} c_i (a)_{i-1}^{-1} \\ a_i &\rightarrow (a)_{i-1} a_i^{-1} (a)_{i-1}^{-1} \end{aligned}$$

feststellen kann, für welche man die Beziehungen

$$\begin{aligned} G_2 &= H^{-1} G_1 H \\ G_1^2 &= G_2^2 = 1 \\ S &= G_1 G_2 = G_2 G_1 = G_1^{-1} H^{-1} G_1 H \end{aligned}$$

bestätigt. Daraus folgt, dass S als Produkt zweier Automorphismen gleicher Art ein Automorphismus erster Art ist. Im übrigen sind G_1 und G_2 von zweiter Art. Die Determinante ihrer Matrix ist offensichtlich $(-1)^p$. Vgl. dazu den Satz am Schluss von § 3.

Die in dieser Abhandlung dargestellte Untersuchung der Gruppen T bezieht sich nur auf Automorphismen erster Art. S und H sind solche (H hat einen charakteristischen Exponenten > 2 , vgl. I, S. 242). Wir betrachten auf E die Abbildungsgruppe U , die durch Hinzufügung der erzeugenden Abbildungsfunktionen s und h zu E' entsteht:

$$U = \{c_i, a_i, h, s\} \quad (i = 1, \dots, p + 1).$$

Da F durch h und s in sich transformiert wird, ist F Normalteiler von U . Durch Substitution von S in H findet man

$$HS: \begin{aligned} c_i &\rightarrow (ca)_i \cdot a_i^{-1} \cdot (ca)_i^{-1} \\ a_i &\rightarrow (ca)_i \cdot c_{i+1}^{-1} \cdot (ca)_i^{-1} \end{aligned}$$

und durch Substitution von H in S

$$SH: \begin{aligned} c_i &\rightarrow c_1^{-1}(ca)_{i-1}c_i \cdot a_i^{-1} \cdot c_i^{-1}(ca)_{i-1}^{-1}c_1 = c_1^{-1}(ca)_i \cdot a_i^{-1} \cdot (ca)_i^{-1}c_1 \\ a_i &\rightarrow c_1^{-1}(ca)_ic_{i+1} \cdot c_{i+1}^{-1} \cdot c_{i+1}^{-1}(ca)_i^{-1}c_1 = c_1^{-1}(ca)_i \cdot c_{i+1}^{-1} \cdot (ca)_i^{-1}c_1. \end{aligned}$$

Es bezeichne C_1 den inneren Automorphismus von F , bei dem jedes Element f in $c_1fc_1^{-1}$ übergeht. Er wird durch das Element c_1 induziert. Dann ist, wie man sieht:

$$SH = HSC_1^{-1}.$$

Für die zugehörigen Abbildungsfunktionen gilt also

$$hs = c_1^{-1}sh,$$

denn es ist ja z. B.

$$hsfs^{-1}h^{-1} = hfs h^{-1} = (fs)_H = fs_H.$$

Die somit gefundene Relation

$$shs^{-1}h^{-1} = c_1$$

zeigt, dass der Kommutator der beiden ausserhalb F liegenden Erzeugenden von U in F liegt, dass also die Faktorgruppe $\frac{U}{F}$ Abelsch ist. Sie hat die Ordnung $4p+4$ mit den Restklassen von s und h als Basiselementen. Damit hat sich folgende Darstellung von U ergeben:

$$U = \{c_i, a_i, h, s\}$$

$$(c)_{p+1} = (a)_{p+1} = (ca)_{p+1} = h^{2p+2} = s^2 = 1 \quad hc_i h^{-1} = a_i$$

$$shs^{-1}h^{-1} = c_1 \quad ha_i h^{-1} = c_{i+1}$$

$$\begin{aligned} sc_i s^{-1} &= (ca)_{i-1} c_i^{-1} (ca)_{i-1}^{-1} \\ sa_i s^{-1} &= (ca)_i \cdot a_i^{-1} (ca)_i^{-1}. \end{aligned} \quad (25)$$

Das Relationensystem (25) ist vollständig. Denn auf Grund desselben kann man offenbar s und h unter sich und mit allen Elementen von F vertauschen, also jedes Produkt

$$\Pi_1(c_i, a_i, h, s)$$

in die Form

$$\Pi_2(c_i, a_i) \cdot h^x \cdot s^y$$

mit $0 \leq x \leq 2p + 1$ und $0 \leq y \leq 1$ umsetzen, und für die Form der Produkte Π_2 sind die ersten drei Relationen von (25) vollständig.

Aus

$$c_1 = shs^{-1}h^{-1} = shsh^{-1}$$

bekommt man durch Transformation mit den Potenzen von h der Reihe nach alle c_i und a_i :

$$\begin{aligned} c_i &= h^{2i-2}shsh^{-(2i-1)} \\ a_i &= h^{2i-1}shsh^{-2i}. \end{aligned} \tag{26}$$

Also wird U bereits durch h und s erzeugt. Ein vollständiges Relationensystem erhält man durch Einsetzen der Ausdrücke (26) in alle Relationen von (25). Dabei sind zunächst die den Automorphismus H ausdrückenden Relationen identisch erfüllt. Ferner wird wegen $s^2 = 1$

$$(ca)_i = sh^{2i}sh^{-2i}.$$

Setzt man dies in die den Automorphismus S ausdrückenden Relationen ein, so sind sie identisch erfüllt. Setzt man in der letzten Gleichung $i = p + 1$, so findet man wegen $h^{2p+2} = 1$, dass die Relation $(c)_{p+1} = 1$ identisch erfüllt wird. Es bleibt also nur noch, in die ersten beiden Relationen (25) einzusetzen. Man findet

$$\begin{aligned} (c)_i &= (sh)^{2i}h^{-2i} \\ (a)_i &= h(c)_ih^{-1} \end{aligned}$$

und also aus jeder von beiden für $i = p + 1$ die Gleichung $(sh)^{2p+2} = 1$. Somit ist

$$\begin{aligned} U &= \{h, s\} \\ h^{2p+2} &= s^2 = (sh)^{2p+2} = 1. \end{aligned} \tag{27}$$

Führt man noch eine neue Erzeugende $k = h^{-1}s$ ein, so kommt

$$U = \{s, h, k\} \tag{28}$$

$$s^2 = h^{2p+2} = k^{2p+2} = shk = 1.$$

Bleiben wir bei der Darstellung (27). F ist derjenige Normalteiler von U , dessen Elemente in s eine gerade und in h eine durch $2p + 2$ teilbare Exponentensumme haben. Die zugehörige Faktorgruppe wird durch die Restklassen der Elemente

$$h^x \cdot s^y \quad 0 \leq x < 2p + 2, 0 \leq y < 2,$$

repräsentiert. Sie entspricht einer Abelschen, aber nicht zyklischen Gruppe von Abbildungsklassen der Fläche vom Geschlecht p . Die Ordnung dieser Gruppe

ist $4p + 4$. Für die Potenzen von h wurden oben schon die Spuren und Klassenzahlen bestimmt. Da zu s die Matrix $-E_{2p}$ gehört, wechselt die Spur bei Hinzufügung des Faktors s das Zeichen. Also haben die Abbildungsklassen $h^{2r-1}s$ die Spur 0 und die Klassenzahl 2 und die Abbildungsklassen $h^{2r}s$ die Spur 2 und die Klassenzahl 0 .

Das Streckengruppenbild von U in der Darstellung (27) lässt sich sofort metrisch regulär in einer hyperbolischen Ebene Φ zeichnen und ist in Fig. 3 angedeutet. Es besteht aus regulären $(2p + 2)$ -Ecken und $(4p + 4)$ -Ecken von gleicher Seitenlänge und solcher Grösse, dass der Eckenwinkel des $(2p + 2)$ -Ecks plus zwei Mal dem Eckenwinkel des $(4p + 4)$ -Ecks 2π ergibt. Die Seiten der $(2p + 2)$ -Ecke und

jede zweite Seite der $(4p + 4)$ -Ecke sind h -Seiten und tragen Pfeile, die übrigen Seiten sind s -Seiten und wegen $s^2 = 1$ nicht orientiert. Die Maschen des dualen Polygongruppenbildes — in der Figur punktiert — sind kongruente Dreiecke (oder vielleicht besser gesagt: Vierecke mit einem Winkel π). Die erzeugenden Deckbewegungen seien die Drehung h um den Punkt P der Figur durch den Winkel $\frac{\pi}{p + 1}$ und die Halbdrehung s um Q . $\Phi \text{ mod } U$ entsteht aus dem Fundamentaldreieck und hat den Zusammenhang der Kugel. Hierdurch ist die Gruppe U als Gruppe linearer Substitutionen dargestellt. F ist Normalteiler von U vom

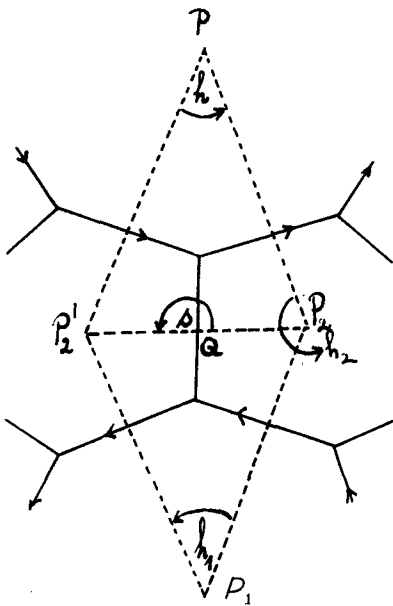


Fig. 3.

Index $4p + 4$, $\mathcal{O} \bmod F'$ also eine $(4p + 4)$ -blättrige Riemannsche Fläche über der »Kugel« $\mathcal{O} \bmod U$. Ein Fundamentalbereich von F' wird von den $4p + 4$ Dreiecken gebildet, die aus den beiden in der Figur gezeichneten durch alle Potenzen der Drehung h hervorgehen. Die $4p + 4$ freien Randseiten dieser F' sternförmig umgebenden Figur korrespondieren zu Paaren bei den $2p + 2$ Bewegungen c_i und a_i ($i = 1, \dots, p + 1$), wie man leicht aus deren Darstellung (26) sieht.

$\frac{U}{F'}$ ist nicht zyklisch. Um Beispiele zyklischer Abbildungsklassengruppen zu gewinnen, greife man zyklische Untergruppen heraus. Wir heben die folgenden drei hervor. Sie sind als Untergruppen von U alle durch lineare Substitutionen darstellbar, und es gehört also zu jeder eine Riemannsche Fläche.

1) Zu dem Automorphismus H gehört die Gruppe

$$T(H) = \{c_i, a_i, h\}.$$

Sie ist derjenige Normalteiler von U , dessen Elemente in s eine gerade Exponentensumme haben, wird also durch h und

$$h_1 = shs$$

erzeugt. Trägt man dies in die letzte Relation von (27) ein, so kommt

$$(sh)^{2p+2} = (shsh)^{p+1} = (h_1h)^{p+1} = 1.$$

Die Relation $s^2 = 1$ ist wegzulassen, dafür sind aber diejenigen Relationen hinzuzufügen, die durch Transformation der übrigen mit s entstehen. Die letzte Relation gibt dabei nichts neues; die erste von (27) ergibt $h_1^{2p+2} = 1$. Somit wird

$$\begin{aligned} T(H) &= \{h, h_1\} \\ h^{2p+2} &= h_1^{2p+2} = (h_1h)^{p+1} = 1. \end{aligned} \tag{29}$$

Neben diese Darstellung schreiben wir noch, einer angestrebten Normalform zu Liebe, die folgende, die durch Einführung von $h_2 = h_1^{-1}h^{-1}$ entsteht:

$$\begin{aligned} T(H) &= \{h, h_1, h_2\} \\ h^{2p+2} &= h_1^{2p+2} = h_2^{p+1} = hh_1h_2 = 1. \end{aligned} \tag{30}$$

Ein Fundamentalbereich für $T(H)$ ist die aus den beiden in der Figur 3 gezeichneten Dreiecken bestehende Figur. h_1 ist die Drehung um P_1 , h_2 die

Drehung um P_2 um den Winkel $\frac{2\pi}{p+1}$. Die Modulfläche $M = \Phi \bmod T(H)$ hat das Geschlecht 0 entsprechend $\varepsilon_1 = 0$ (siehe oben). $\varphi = \Phi \bmod F$ ist $(2p+2)$ -blättrig über M mit 2 Verzweigungspunkten $(2p+1)$ ter Ordnung in P und P_1 und einem Verzweigungspunkt, in dem zweimal je $p+1$ Blätter zusammenhängen, in P_2 (und P_2'). h und h_1 repräsentieren die beiden positiven Klassen der Grundpotenz der Abbildungsklasse, h_2 (und das konjugierte hh_2h^{-1}) die beiden in den geraden Potenzen hinzutretenden Klassen. Die letzte Relation in (30) drückt die Zusammenziehbarkeit eines alle drei Verzweigungspunkte auf M umschliessenden Weges aus.

2) In $T(H)$ stellen wir weiter den Normalteiler $T(H^4)$ auf. Für gerades p ist $(h^4)^{\frac{p}{2}} = h^{2p} = h^{-2}$, also $T(H^4) = T(H^2)$. Daher sei p ungerade vorausgesetzt. Dann geht 4 in $2p+2$ auf. $T(H^4)$ ist derjenige Normalteiler von $T(H)$, dessen Elemente in h eine durch 4 teilbare Exponentensumme haben. Es war

$$h_1 = shs = c_1 h.$$

Nun setze man

$$\begin{aligned} h^4 &= u \\ h_1^4 &= (c_1 h)^4 = c_1 a_1 c_2 a_2 h^4 = u_1 \\ (h_1 h)^2 &= (c_1 h^2)^2 = c_1 c_2 h^4 = u_2 \\ (hh_1)^2 &= (hc_1 h)^2 = (a_1 h^2)^2 = a_1 a_2 h^4 = u_3. \end{aligned}$$

Aus der ersten und den beiden letzten Gleichungen folgt

$$\begin{aligned} c_2 &= c_1^{-1} u_2 u^{-1} \\ a_2 &= a_1^{-1} u_3 u^{-1}. \end{aligned} \tag{31}$$

Trägt man dies in die zweite ein, so kommt die Relation

$$c_1 a_1 c_1^{-1} u_2 u^{-1} a_1^{-1} u_3 u^{-1} = 1. \tag{32}$$

Nun ist

$$T(H^4) = \{c_i, a_i, h^4\} = \{c_1, a_1, c_2, a_2, h^4\},$$

da ja

$$\begin{aligned} c_{i+2} &= h^4 c_i h^{-4} \\ a_{i+2} &= h^4 a_i h^{-4} \end{aligned}$$

ist. Also ist weiter wegen (31)

$$T(H^4) = \{c_1, a_1, c_2, a_2, u\} = \{c_1, a_1, u, u_2, u_3\} = \{c_1, a_1, u, u_1, u_2, u_3\},$$

wobei (32) als Definitionsgleichung für u_1 gelten kann. Durch Einsetzen in (29) folgen für diese Erzeugenden die Relationen

$$u^{\frac{p+1}{2}} = u_1^{\frac{p+1}{2}} = u_2^{\frac{p+1}{2}} = 1. \tag{33}$$

Um ein vollständiges Relationensystem für $T(H^4)$ zu erhalten, hat man (32) und (33) mit denjenigen Relationen zu ergänzen, die aus ihnen durch Transformation mit den nicht in $T(H^4)$ liegenden Elementen h, h^2 und h^3 hervorgehen. $h_1 = c_1 h$ braucht nicht besonders berücksichtigt zu werden, da c_1 in F , also in $T(H^4)$ liegt; h und h_1 sind also hierbei gleichwertig. Nun findet man

$$\begin{aligned} h u h^{-1} &= h h^4 h^{-1} = h^4 = u \\ h u_1 h^{-1} &= h(c_1 a_1 c_2 a_2 h^4) h^{-1} = a_1 c_2 a_2 c_3 h^4 = c_1^{-1} u_1 h^{-4} c_3 h^4 = c_1^{-1} u_1 c_1 \\ h u_2 h^{-1} &= h(h_1 h)^2 h^{-1} = (h h_1)^2 = u_3 \\ h u_3 h^{-1} &= h a_1 a_2 h^4 h^{-1} = c_2 c_3 h^4 = c_1^{-1} \cdot c_1 c_2 h^4 \cdot h^{-4} c_3 h^4 = c_1^{-1} u_2 c_1. \end{aligned}$$

Also gibt in (33) nur die letzte Relation noch $u_3^{\frac{p+1}{2}} = 1$. Und wegen (31) findet man, dass die linke Seite von (32) durch Transformation mit h_1 in sich übergeht. Somit ist

$$\begin{aligned} T(H^4) &= \{c_1, a_1, u, u_1, u_2, u_3\} \\ u^{\frac{p+1}{2}} &= u_1^{\frac{p+1}{2}} = u_2^{\frac{p+1}{2}} = u_3^{\frac{p+1}{2}} = 1 \\ c_1 a_1 c_1^{-1} u_2 u^{-1} a_1^{-1} u_3 u_1^{-1} &= 1. \end{aligned} \tag{34}$$

Um die letzte Relation symmetrischer zu gestalten, kann man

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 \\ u_3^{-1} &= v_2 \\ a_1 u a_1^{-1} &= v_3 \\ a_1 u_2^{-1} a_1^{-1} &= v_4 \end{aligned}$$

setzen und erhält

$$\begin{aligned} T(H^4) &= \{c_1, a_1, v_1, v_2, v_3, v_4\} \\ v_1^{\frac{p+1}{2}} &= v_2^{\frac{p+1}{2}} = v_3^{\frac{p+1}{2}} = v_4^{\frac{p+1}{2}} = 1 \\ v_1 v_2 v_3 v_4 &= c_1 a_1 c_1^{-1} a_1^{-1}. \end{aligned} \tag{35}$$

Zu H^4 gehört für ungerades p $\varepsilon_1 = 2$, wie man leicht aus dem obigen Polynom $\gamma(\lambda)$ für H folgert. Ein Fundamentalbereich für $T(H^4)$ entsteht aus dem Doppeldreieck der Fig. 3 durch h^0, h^1, h^2 und h^3 und ergibt eine Modulfläche M vom Geschlecht 1. φ ist über dieser $\frac{p+1}{2}$ -blättrig mit 4 Verzweigungspunkten der Ordnung $\frac{p+1}{2} - 1$, entsprechend den ersten 4 Relationen (35). Die letzte Relation sagt aus, dass eine Umlaufung aller Verzweigungspunkte einer vollständigen Durchlaufung eines kanonischen Schnittsystems der Modulfläche äquivalent ist.

3) Endlich betrachten wir noch die Untergruppe $T(SH^2)$ von U . Es ist

$$SH^2: \quad \begin{aligned} c_i &\rightarrow a_i^{-1} c_i^{-1} (ca)_i \cdot c_{i+1}^{-1} \cdot (ca)_i^{-1} c_1 a_1 \\ a_i &\rightarrow a_i^{-1} c_i^{-1} (ca)_{i+1} \cdot a_{i+1}^{-1} \cdot (ca)_{i+1}^{-1} c_1 a_1, \end{aligned}$$

und dieser Automorphismus von F wird durch $t = h^2 s$ induziert. Zur Bildung der zugehörigen Matrix hat man c_{p+1} und a_{p+1} zu eliminieren, und man erhält, wenn man erst c_1, \dots, c_p und dann a_1, \dots, a_p anschreibt, in der Hauptdiagonale zweimal die Teilmatrix p -ten Grades

$$\begin{array}{cccccc} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \end{array}$$

und sonst lauter Nullen. Daraus ergibt sich das charakteristische Polynom

$$\gamma(\lambda) = (1 - \lambda + \lambda^2 - \cdots + (-1)^p \lambda^p)^2,$$

das für gerades p $\varepsilon_1 = 0$ und für ungerades p $\varepsilon_1 = 2$ ergibt.

Nun ist

$$t^2 = (h^2 s)^2 = h^2 s h^2 s = h^2 h_1^2 = h^2 (c_1 h)^2 = c_2 a_2 h^4.$$

Also ist $T(H^4)$ in $T(SH^2)$ enthalten. Für gerades p ist mit h^4 auch h^2 , also auch $h^{-2} t = s$ in $T(SH^2)$ enthalten, und diese Gruppe ist daher derjenige Normalteiler von U , dessen Elemente in h eine gerade Exponentensumme haben. Im Folgenden soll die Form von $T(SH^2)$ nur für *ungerades* p aufgestellt werden.

Wir können in diesem Fall die oben gefundene Darstellung (34) des Normalteilers $T(H^4)$ benutzen und die dortigen Bezeichnungen beibehalten. Es ist $c_2 a_2 h^4 = a_1^{-1} c_1^{-1} u_1$, also

$$t^2 = a_1^{-1} c_1^{-1} u_1. \quad (36)$$

Also gehört

$$t^{p+1} = (a_1^{-1} c_1^{-1} u_1)^{\frac{p+1}{2}}$$

zu F , und die Abbildungsklasse von $t = h^2 s$ ist von der Ordnung $p + 1$. (Für gerades p ist sie von der Ordnung $2p + 2$.) Man braucht jetzt nur noch anzugeben, wie sich die Erzeugenden des Normalteilers $T(H^4)$ bei t transformieren. Man findet, indem man erst mit s und dann zweimal mit h transformiert,

$$\begin{aligned} t c_1 t^{-1} &= u u_2^{-1} c_1 \\ t a_1 t^{-1} &= c_1^{-1} u_2 u_1^{-1} c_1 a_1 \\ t u t^{-1} &= a_1^{-1} c_1^{-1} u_1 c_1 a_1 \\ t u_1 t^{-1} &= u \\ t u_2 t^{-1} &= a_1^{-1} u_3 a_1 \\ t u_3 t^{-1} &= c_1^{-1} u_2 c_1. \end{aligned} \quad (37)$$

Also entsteht $T(SH^2)$, indem man zu (34) die Erzeugende t und die Relationen (36) und (37) hinzufügt. Endlich kann man mittels (36) u_1 und dann weiter mittels (37) u , u_2 und u_3 eliminieren, und man erhält durch Einsetzen folgende einfache Darstellung:

$$\begin{aligned} T(SH^2) &= \{c_1, a_1, t\} \\ (c_1 a_1 t^2)^{\frac{p+1}{2}} &= (c_1 t a_1 t)^{\frac{p+1}{2}} = 1. \end{aligned} \quad (38)$$

φ ist $(p + 1)$ -blättrig über einer Modulfläche vom Geschlecht 1 mit 2 Verzweigungspunkten. In jedem hängen 2 Systeme von $\frac{p+1}{2}$ Blättern zusammen. Die ungeraden Potenzen der Abbildung sind fixpunktfrei, die geraden haben 4 Fixpunkte.¹

¹ Dies letzte Beispiel entspricht der die Indikatrix erhaltenden Abbildung im § 2 meiner Arbeit: »Über fixpunktfreie topologische Abbildungen geschlossener Flächen«, Math. Ann. 81 (1920) S. 94.

Beispiel 4.

Zunächst wird F auf eine neue Darstellung umgeschrieben. Von der Darstellung in Beispiel 1 ausgehend, setze man

$$\begin{aligned} V_0 &= 1 \\ V_r &= b_r V_{r-1} = b_r b_{r-1} \dots b_2 b_1, \quad (r = 1, 2, \dots, p) \end{aligned}$$

und definiere $2p$ neue Erzeugende d_1, d_2, \dots, d_{2p} durch

$$\begin{aligned} d_{2r-1} &= V_{r-1}^{-1} a_r \\ d_{2r} &= b_r a_r^{-1} V_{r-1} = b_r a_r^{-1} b_r^{-1} V_r. \end{aligned}$$

Dann ist

$$d_{2r} d_{2r-1} = b_r,$$

also

$$d_{2r} d_{2r-1} \dots d_2 d_1 = V_r$$

und somit auch die a_i durch die d_i ausdrückbar. Andererseits ist

$$d_{2r-1} d_{2r} = V_{r-1}^{-1} a_r b_r a_r^{-1} b_r^{-1} V_r,$$

also

$$k_r = a_r b_r a_r^{-1} b_r^{-1} = V_{r-1} d_{2r-1} d_{2r} V_r^{-1}$$

und

$$\begin{aligned} R &= k_1 k_2 \dots k_p = d_1 d_2 d_3 d_4 \dots d_{2p-1} d_{2p} \cdot V_p^{-1} \\ &= d_1 d_2 \dots d_{2p} d_1^{-1} d_2^{-1} \dots d_{2p}^{-1}. \end{aligned}$$

Somit hat man für F die Darstellung

$$\begin{aligned} F &= \{d_1, d_2, \dots, d_{2p}\} \\ d_1 d_2 \dots d_{2p} d_1^{-1} d_2^{-1} \dots d_{2p}^{-1} &= 1. \end{aligned} \quad (39)$$

Diese Darstellung lässt den Automorphismus

$$I: \quad \begin{aligned} d_i &\rightarrow d_{i+1}^{\quad} & (i = 1, 2, \dots, 2p-1) \\ d_{2p} &\rightarrow d_1 \end{aligned} \quad (40)$$

erkennen, da hierdurch die linke Seite der Relation (39) um $2p+1$ Schritte zyklisch vertauscht in sich übergeht. Man findet

$$I^{2p}: \quad d_i \rightarrow d_i^{-1}, \quad (i = 1, 2, \dots, 2p) \quad (40a)$$

also $I^{4p} = 1$. Die Spuren der Matrix von I sind offenbar alle Null mit Ausnahme von $s_{2p} = -2p$, die Klassenzahlen der Potenzen dieser Abbildungsklasse also alle 2 mit Ausnahme von $Z_{2p} = 2 + 2p$. Für das charakteristische Polynom von I kommt

$$\gamma(\lambda) = \lambda^{2p} + 1,$$

also $\varepsilon_1 = 0$.

Nun sei t eine I induzierende Abbildungsfunktion. Dann hat man für die Gruppe $T(I)$ auf E die Darstellung

$$\begin{aligned} T &= \{d_1, d_2, \dots, d_{2p}, t\} \\ d_1 d_2 \dots d_{2p} d_1^{-1} d_2^{-1} \dots d_{2p}^{-1} &= 1 \\ t^{4p} &= 1 \\ t d_i t^{-1} &= d_{i+1}^{-1} \quad (i = 1, 2, \dots, 2p-1) \\ t d_{2p} t^{-1} &= d_1. \end{aligned} \tag{41}$$

Nun bedenke man, dass es ausser t wegen $Z_1 = 2$ noch genau eine positive Klasse auf der ersten Stufe gibt. Es ist wegen (40) und (40a)

$$I^{2p+1}: \quad \begin{aligned} d_i &\rightarrow d_{i+1} & (i = 1, 2, \dots, 2p-1) \\ d_{2p} &\rightarrow d_1^{-1}, \end{aligned} \tag{40b}$$

also wird

$$\begin{aligned} (d_1 t^{2p+1})^{4p} &= d_1 d_{1I^{2p+1}} d_{1I^{2(2p+1)}} \dots d_{1I^{(4p-1)(2p+1)}} \cdot t^{(2p+1)4p} \\ &= d_1 d_2 \dots d_{2p} d_1^{-1} d_2^{-1} \dots d_{2p}^{-1} \cdot t^{4p(2p+1)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

wegen der ersten beiden Relationen von (41). Man führe

$$t_1 = d_1 t^{2p+1}$$

als neue Erzeugende von T ein und kann dann nach (40b) alle d_i durch t und t_1 ausdrücken:

$$\begin{aligned} d_i &= t^{(2p+1)(i-1)} d_1 t^{-(2p+1)(i-1)} \\ &= t^{(2p+1)(i-1)} t_1 t^{-(2p+1)i}. \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, 2p) \tag{42}$$

Bei Einsetzung von (42) in die letzte Relation von (41) unter Benutzung von $t^{4p} = 1$ ist diese identisch erfüllt, bei Einsetzung in die vorletzte ergibt sich für alle Werte von i nur

$$(t_1 t^{-1})^2 = 1,$$

und bei Einsetzung in die erste Relation von (41) unter Benutzung der eben gefundenen noch $t_1^{4p} = 1$. Somit ist

$$T = \{t, t_1\} \tag{43}$$

$$t^{4p} = t_1^{4p} = (t_1 t^{-1})^2 = 1.$$

Schreibt man

$$t_1 = z_1, \quad t^{-1} = z_2, \quad t t_1^{-1} = z_3,$$

so hat man die Normalform

$$T = \{z_1, z_2, z_3\} \tag{44}$$

$$z_1^{4p} = z_2^{4p} = z_3^2 = z_1 z_2 z_3 = 1,$$

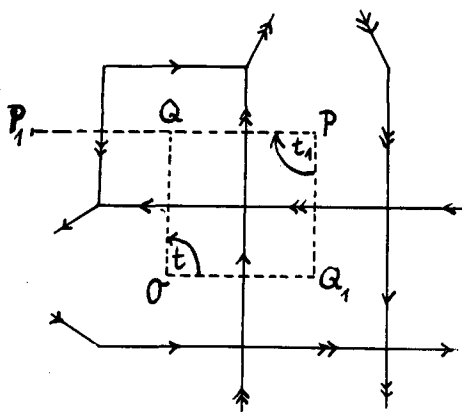


Fig. 4.

in welcher z_1 und z_2 die beiden positiven Klassen der Grundstufe repräsentieren und z_3 den in der $2p$ -ten Potenz hinzutretenden Zyklus von weiteren $2p$ Klassen repräsentiert.

Das Streckengruppenbild von (43) lässt sich in der hyperbolischen Ebene \mathcal{D} metrisch regulär zeichnen und ist in Fig. 4 angedeutet: An jede Ecke stoßen zwei reguläre Vierecke und zwei reguläre $4p$ -Ecke, alle mit gleicher Seitenlänge. Die mit einfachem bzw. doppeltem Pfeil bezeichneten Seiten sollen dabei t bzw. t_1 entsprechen. Das

dazu duale Polyongruppenbild ist in der Figur durch Punktierung angedeutet. Die Maschen desselben sind kongruente Vierecke, in denen das eine Paar gegenüberliegender Winkel (bei Q und Q_1) die Grösse $\frac{\pi}{2}$, das andere (bei O und P)

die Grösse $\frac{\pi}{2p}$ hat. t bzw. t_1 seien die $4p$ -tel Drehung um O bzw. P . T ist

dadurch als Gruppe linearer Substitutionen dargestellt. $M = \mathcal{D} \text{ mod } T$ hat den Zusammenhang der Kugel entsprechend $\varepsilon_1 = 0$. Einen Fundamentalbereich von F erhält man, indem man zu der gezeichneten Vierecksmasche (dem Fundamentalbereich von T) ihre Bilder bei t, t^2, \dots, t^{p-1} hinzufügt. Der so entstehende

Vierecksstern um O bildet ein reguläres $4p$ -Eck mit dem Eckenwinkel $\frac{\pi}{2p}$.

PP_1 ist eine Seite desselben (die Winkel bei Q sind ja Rechte). Die Bewegung

$$t_1 t^{-(2p+1)} = d_1$$

führt offenbar die PP_1 gegenüberliegende Seite dieses $4p$ -Ecks in PP_1 über. Wegen (42) tun die übrigen d_i dasselbe für die übrigen Paare gegenüberliegender Seiten. (Die Verschiebungsrichtung dieser hyperbolischen Substitutionen wechselt dabei bei der Drehung um O ab, ausgenommen bei der Folge $d_{2p}d_1$.) Es ist dies also die Hervorbringung einer geschlossenen Fläche vom Geschlecht p durch Identifizierung der Gegenseitenpaare eines $4p$ -Ecks. — $\varphi = \Phi \bmod F$ ist $4p$ -blättrig über $M = \Phi \bmod T$ mit je einem Verzweigungspunkt $(4p - 1)$ ter Ordnung in O und P und einem Verzweigungspunkt in Q , in welchem $2p$ Systeme von je 2 Blättern zusammenhängen.

Beispiel 5.

Wir ändern die Darstellung (39) von F ab durch Hinzufügung der überzähligen Erzeugenden

$$d_{2p+1} = d_1^{-1} d_2^{-1} \dots d_{2p}^{-1}$$

und gelangen so zu der Darstellung

$$\begin{aligned} F &= \{d_1, d_2, \dots, d_{2p}, d_{2p+1}\} \\ d_1 d_2 \dots d_{2p} d_{2p+1} &= 1 \\ d_{2p+1} d_{2p} \dots d_2 d_1 &= 1. \end{aligned} \tag{45}$$

Diese lässt den Automorphismus

$$I: \quad d_i \rightarrow d_{i+1}^{-1} \tag{46}$$

erkennen, wo der Stellzeiger $i \bmod 2p + 1$ gerechnet wird, denn die beiden Relationen von (45) gehen dabei in einander über. Es wird

$$I^{2p+1}: \quad d_i \rightarrow d_i^{-1}, \tag{47}$$

also $I^{4p+2} = 1$. Zur Bildung der Spuren und des charakteristischen Polynoms hat man auf die in der Homologiegruppe unabhängigen Erzeugenden d_1, \dots, d_{2p} zurückzugehen und dabei zu bedenken, dass d_{2p+1} in allen diesen den Exponenten -1 hat. Wegen (47) ist $s_{2p+1} = -2p$, also $Z_{2p+1} = 2 + 2p$. Für alle anderen Potenzen trägt nur dasjenige Element zur Spur bei, das gerade in $d_{2p+1}^{\pm 1}$ übergeht, und zwar für ungerade Potenzen $+1$ und für gerade -1 . Die ersteren

haben also Spur und Klassenzahl gleich 1, die letzteren die Spur -1 und die Klassenzahl 3. Als charakteristisches Polynom findet man

$$\gamma(\lambda) = \lambda^{2p} - \lambda^{2p-1} + \dots + \lambda^2 - \lambda + 1.$$

Es ist wieder $\varepsilon_1 = 0$.

t sei eine I induzierende Abbildung. Dann hat man für die Gruppe $T(I)$ auf E die Darstellung

$$\begin{aligned} T &= \{d_1, d_2, \dots, d_{2p+1}, t\} \\ d_1 d_2 \dots d_{2p+1} &= 1 \\ d_{2p+1} d_{2p} \dots d_1 &= 1 \\ t^{4p+2} &= 1 \\ t d_i t^{-1} &= d_{i+1}^{-1}. \quad (i \bmod 2p+1) \end{aligned} \quad (48)$$

Um T einfacher darzustellen, suche man, da es auf der Grundstufe wegen $Z_1 = 1$ ausser t keine weitere positive Klasse gibt, eine solche auf einer geraden Potenzstufe, z. B. der $(2p+2)$ ten. Es ist wegen (47) und (46)

$$I^{2p+2}: \quad d_i \rightarrow d_{i+1}, \quad (49)$$

also

$$(d_1 t^{2p+2})^{2p+1} = d_1 d_2 \dots d_{2p+1} t^{(4p+2)(p+1)} = 1.$$

Man setze

$$d_1 t^{2p+2} = t_1,$$

also

$$d_1 = t_1 t^{-(2p+2)}$$

und weiter wegen (49)

$$\begin{aligned} d_i &= t^{(2p+2)(i-1)} d_1 t^{-(2p+2)(i-1)} \\ &= t^{(2p+2)(i-1)} t_1 t^{-(2p+2)i} \end{aligned}$$

für $i = 1, 2, \dots, 2p+1$. Einsetzung in die letzte Relation (48) ergibt

$$(t_1 t^{-1})^2 = 1. \quad (50)$$

Einsetzung in die erste Relation ergibt

$$t_1^{2p+1} \cdot t^{-(2p+2)(2p+1)} = 1,$$

und die hierin auftretende Potenz von t ist 1. Einsetzung in die zweite ergibt

$$(t^{-1} t_1 t^{-1})^{2p+1} = 1.$$

Es ist aber wegen (50)

$$t^{-1} t_1 t^{-1} = t_1^{-1},$$

sodass nur wieder $t_1^{2p+1} = 1$ kommt. Man hat also

$$T = \{t, t_1\} \\ t^{4p+2} = t_1^{2p+1} = (t_1 t^{-1})^2 = 1 \quad (51)$$

oder in der Normalform:

$$T = \{z_1, z_2, z_3\} \\ z_1^{4p+2} = z_2^{2p+1} = z_3^2 = z_1 z_2 z_3 = 1. \quad (52)$$

z_1 repräsentiert die positive Klasse der Grundstufe, z_2 den Zyklus von 2 weiteren Klassen in den geraden Potenzen, z_3 den Zyklus von weiteren $2p$ Klassen in der $(2p+1)$ ten Potenz.

Das Streckengruppenbild von (51) folgt genau so, wie in Beispiel 4 dasjenige von (43). Es kann durch dieselbe Fig. 4 verdeutlicht werden. Man hat sich nur jetzt das Polygon mit dem Mittelpunkt O als reguläres $(4p+2)$ -Eck und dasjenige mit dem Mittelpunkt P als reguläres $(2p+1)$ -Eck zu denken. Dementsprechend ist die Bewegung t die $(4p+2)$ -tel Drehung um O und t_1 die $(2p+1)$ -tel Drehung um P . $M = \mathcal{O} \bmod T$ hat das Geschlecht 0 entsprechend $\varepsilon_1 = 0$. $\varphi = \mathcal{O} \bmod F$ entsteht wieder aus dem Vierecksstern um O . Hier liegt die Herstellung einer geschlossenen Fläche vom Geschlecht p durch Identifizierung der Gegenseitenpaare eines $(4p+2)$ -Ecks vor. Ein Unterschied gegen das vorige Beispiel ist, dass die Ecken desselben hier *zwei* verschiedene Flächenpunkte ergeben, während sie bei dem $4p$ -Eck nur *einen* Flächenpunkt ergeben. — φ ist $(4p+2)$ -blättrig über M mit einem Verzweigungspunkt $(4p+1)$ ter Ordnung in O , einem Verzweigungspunkt in P , in welchem 2 Systeme von je $2p+1$ Blättern zusammenhängen, und einem Verzweigungspunkt in Q , in welchem $2p+1$ Systeme von je zwei Blättern zusammenhängen.

Spezialisierung der Beispiele für $p = 2$.

Man spezialisire die in den vorstehenden Beispielen erhaltenen charakteristischen Polynome für $p=2$.

1) Beispiel 1 ergibt für $p=2$ das charakteristische Polynom

$$\gamma(\lambda) = (\lambda^2 - 1)^2 = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)^2,$$

also die d -Kombination 22 11 des Typus II der im vorigen Paragraphen aufgestellten Tabelle.

2) Beispiel 2 kommt, wie in demselben schon genannt, eigentlich nur für $p > 2$ in Betracht. Für $p=2$ ergibt es die Klasse der Identität, also den Typus I der Tabelle. $\gamma(\lambda)$ wird für $p=2$

$$\gamma(\lambda) = (\lambda - 1)^4.$$

3) Das charakteristische Polynom von H im Beispiel 3 wird für $p=2$

$$\gamma(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^2 + 1 = (\lambda^2 - \lambda + 1)(\lambda^2 + \lambda + 1),$$

ergibt also die d -Kombination 6 3 und damit den Typus IX.

4) S im Beispiel 3 ergibt

$$\gamma(\lambda) = (\lambda + 1)^4,$$

also die d -Kombination 2 2 2 2 des Typus III.

5) SH^2 im Beispiel 3 ergibt

$$\gamma(\lambda) = (\lambda^2 - \lambda + 1)^2,$$

also die d -Kombination 6 6 des Typus X.

6) Beispiel 4 ergibt

$$\gamma(\lambda) = \lambda^4 + 1,$$

also $d=8$ und damit Typus XI.

7) Beispiel 5 ergibt

$$\gamma(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1,$$

also $d=10$ und damit Typus XII.

Damit ist zugleich die Existenz der Typen V, VII und VIII nachgewiesen. Denn sie sind die Quadrate der Typen IX (oder X), XI und XII.

Es bleiben nur die Typen IV und VI übrig, für die mir kein Beispiel bekannt ist. Verschiedene Anzeichen scheinen darauf zu deuten, dass diese Matrizen Typen nicht bei Abbildungsklassen endlicher Ordnung für $p=2$ auftreten können.

12. Fragestellungen im Anschluss an die Beispiele.

Die im vorigen Paragraphen behandelten Beispiele geben Anlass, eine Reihe von fundamentalen Fragen zu stellen.

I) Gegeben sei eine endliche Anzahl N von Klassen topologischer Abbildungen einer Fläche vom Geschlecht p auf sich, die eine Gruppe bilden. *Lässt sich in jeder Klasse eine repräsentierende Abbildung so auswählen, dass diese N Abbildungen eine Gruppe bilden?*

II) Oder auf zyklische Gruppen spezialisiert: *Enthält eine Abbildungsklasse endlicher Ordnung stets eine Abbildung endlicher Ordnung?*

Wenn Frage II zu bejahen ist, so werden die Invarianten der Abbildungsklassen endlicher Ordnung in vollem Ausmass durch die endlichvielblättrigen regulären Riemannschen Flächen veranschaulicht. Die Klassenzahl Z , die in allen Fällen eine untere Schranke für die Minimalzahl der Fixpunkte bei der betreffenden Abbildungsklasse ist, ist dann gleich dieser Minimalzahl. Statt nach Abbildungsklassen endlicher Ordnung n zu fragen, kann man dann von vorneherein nach n -periodischen Abbildungen geschlossener Flächen fragen, wie BROUWER¹ und SCHERRER² es getan haben. Der BROUWERSche Begriff der Modulfläche führt dann auf die Darstellung der gegebenen Fläche als Riemannscher Fläche über dieser; und man kann bekannte Relationen für die Konstanten Riemannscher Flächen (wie die Formel von HURWITZ und andere von SCHERRER l. c. angeführte) auf die n -periodischen Abbildungen anwenden. Dem gegenüber ist in dieser Arbeit gezeigt, wie man, *unabhängig davon, wie die Antwort auf die Frage II ausfällt*, eine solche Relation wie die Formel von Hurwitz als eine *Beziehung zwischen gewissen gruppentheoretischen Anzahlen* für Abbildungsklassen endlicher Ordnung herleiten kann, und in den Beispielen des vorigen Paragraphen ist zu Tage getreten, wie die *Randkreisgruppe T* , die eine Invariante der Abbildungsklasse ist, durch ihr *Gruppenbild* zu der zugehörigen Riemannschen Fläche führt. Die Frage II erscheint dadurch als äquivalent mit der folgenden:

III) *Ist die zu einer Abbildungsklasse endlicher Ordnung gehörige Randkreisgruppe T immer als Gruppe linearer Substitutionen darstellbar?* Genau formuliert: Auf dem Randkreis E liegt zunächst die Fundamentalgruppe F mit überall dicht

¹ L. E. J. BROUWER: Amsterdam Proceedings, Vol. XXI, No. 5, 9 u. 10 (1918—1919) und Comptes rendus (Paris), t. 168, pg. 677 und pg. 845 (1919) und t. 171, pg. 89 (1920).

² W. SCHERRER: »Über topologische Involutionen« und »Über periodische Transformationen von Flächen«. Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Bd. 70 (1925).

liegenden Grundpunkten vor. Ein Automorphismus erster Art I von F induziert eine topologische Abbildung t von E auf sich. Ist I^n ein innerer Automorphismus, so ist t^n ein Element aus F . Frage: Lässt sich E so auf einen Kreis E' topologisch abbilden, dass die transformierte Abbildung t' von E' auf sich eine lineare Substitution wird, dass die transformierte Gruppe F' eine Gruppe von solchen bleibt und dass dabei die Funktionalgleichungen erhalten bleiben; dass also die transformierte Gruppe T' eine Gruppe linearer Substitutionen auf E' wird? Und ferner: Ist diese Abbildung von E auf E' eindeutig bestimmt bis auf die selbstverständlich freibleibende Transformation mit einer linearen Abbildung von E' auf sich?

Man könnte versuchen, eine solche topologische Abbildung von E auf E' unter Anlehnung an die Funktionalgleichung direkt zu konstruieren. Die Beispiele verweisen auf den anderen Weg, für die Gruppe T eine solche abstrakte Darstellung zu suchen, dass sich das Gruppenbild übersehen lässt. Das führt auf die Fragen:

IV) *Ist die in den Beispielen auftretende Normalform für die abstrakte Darstellung der Gruppe T für Abbildungsklassen endlicher Ordnung allgemeingültig?*

V) *Gibt es eine aus dem charakteristischen Polynom folgende, durch Erzeugendenwechsel erreichbare kanonische Darstellung derjenigen Automorphismen von F , von denen eine Potenz ein innerer Automorphismus ist? (in Analogie mit den durch Wechsel der Variablen erreichbaren rationalen kanonischen Formen der Matrizen linearer Substitutionen). Und endlich:*

VI) *Sind zwei Abbildungsklassen endlicher Ordnung mit gleichem charakteristischen Polynom äquivalent? D. h. wenn zwei Abbildungsklassen A_1 und A_2 endlicher Ordnung dasselbe charakteristische Polynom haben, gibt es dann einen (zu ihrer Ordnung teilerfremden) Exponenten q und eine Abbildungsklasse A_3 so, dass*

$$A_2 = A_3 A_1^q A_3^{-1}$$

ist?

13. Sätze über Automorphismen zweiter Ordnung.

Sei I ein Automorphismus erster Art zweiter Ordnung, $I^2=1$, t eine I induzierende Abbildungsfunktion, also $t^2=1$ auf E . Sei $f \neq 1$ ein Element von F , das zu einer Abbildungsfunktion zweiter Ordnung führt:

$$1 = (ft)^2 = f f_I t^2 = f f_I,$$

also

$$f_I = f^{-1}. \quad (53)$$

Die Achse von f kehrt sich bei I um, d. h. ihre Grundpunkte vertauschen sich bei der Randabbildung t . Alle zu einer sich bei I umkehrenden Achse gehörigen Elemente genügen (53). Insbesondere gilt das für das zu der Achse von f gehörige primäre Element f^* , von dem f eine Potenz ist. Nun ist

$$\begin{aligned} f^{*2r} &= f^{*r} (f^{*-r})_I \approx I \\ f^{*2r+1} &= f^{*r} f^* (f^{*-r})_I \approx f^*, \end{aligned}$$

wenn das Zeichen \approx die Isogredienz zweier Elemente von F bezüglich I bedeutet. (Es wird also $g \approx f$ geschrieben, wenn es zu den Elementen g und f von F ein Element h von F so gibt, dass

$$gt = hft h^{-1} = hfh_I^{-1}t,$$

also

$$g = hfh_I^{-1}$$

ist. Nicht-Isogredienz wird durch \neq bezeichnet.) Es ist damit nichts darüber entschieden, ob $f^* \approx I$ ist, oder nicht; aber jedenfalls gibt eine sich bei I umkehrende Achse höchstens zu einer von der Klasse von t verschiedenen Isogredienzklassse von Abbildungsfunktionen vom Index $+1$ Anlass.

Angenommen nun, f sei primär, $\neq I$ und genüge (53). Angenommen ferner, das transformierte Element $gf g^{-1}$ genüge (53). Es ist also

$$(gf g^{-1})_I = g f^{-1} g^{-1},$$

andererseits

$$(gf g^{-1})_I = g_I f_I g_I^{-1} = g_I f^{-1} g_I^{-1}.$$

Durch Gleichsetzen folgt

$$g^{-1} g_I \Leftrightarrow f.$$

Das Element $g^{-1} g_I$ ist also einerseits $\approx I$, andererseits eine Potenz von f und darum notwendig eine gerade Potenz, denn

$$f^{2r+1} \approx f \neq I.$$

Aus

$$g^{-1} g_I = f^{2r} = f^r (f^{-r})_I$$

folgt, dass gf^r ein Fixelement von I ist. I hat aber wegen $I^2=1$ nur das Fixelement 1 , also folgt $g=f^{-r}$ und $gfg^{-1}=f$. Unter den über f gemachten Annahmen wird also keine mit der Achse von f äquivalente Achse durch I umgekehrt, oder anders gesprochen: f ist in seiner Elementklasse das einzige Element, dass (53) genügt.

Die Anzahl der positiven Klassen der zu I gehörigen Abbildungsklasse wird durch die Anzahl der bezgl. I nicht isogredienten Lösungen von (53) gegeben. Als eine Lösung werde dabei $f=1$, also t selbst als Repräsentant der einen positiven Klasse genommen. Alle weiteren Lösungen können nach dem gefundenen primär gewählt werden, und alle Lösungen gehören zu verschiedenen Elementklassen von F .

Sei P ein beliebiger Punkt von E , tP sein Bild. Die beiden durch P und tP auf E bestimmten Bögen vertauschen sich bei t . Ist also Q ein beliebiger von ihnen verschiedener Punkt, so werden P und Q durch tP und tQ nicht getrennt. Ist g ein Element von F , so schneiden also die Achsen von g und g_I einander nicht. Ist ferner f eine Lösung von (53), so schneiden die Achsen von $f^r g f^{-r}$ und $f^s g_I f^{-s}$ für beliebige r und s einander nicht. Denn

$$f^s g_I f^{-s} = f^{s+r} t \cdot f^r g f^{-r} \cdot (f^{s+r} t)^{-1}$$

und $(f^{s+r} t)^2=1$.

Nun werde von einer primären Lösung f von (53) mit $f \neq 1$ angenommen, dass die der Achse von f auf der Fläche φ entsprechende geschlossene geodätische Linie Doppelpunkte aufweist. Sei k ein Element von F , für welches die Achse von kfk^{-1} die Achse von f schneidet. Es geht bei I in $k_I f^{-1} k_I^{-1}$ über; die Achse dieses Elements schneidet auch die Achse von f und zwar in umgekehrtem Sinne. Die Achsen von kfk^{-1} und $k_I f k_I^{-1}$ schneiden die Achse von f in gleicher Überschneidungsrichtung. $k_I f k_I^{-1}$ geht nicht aus kfk^{-1} durch eine Potenz f^r von f hervor, denn sonst würde es sich bei $f^r t$ umkehren, und bei $f^r t$ kehrt sich bereits das damit äquivalente f um. Betrachtet man die Achsen der Elemente

$$f^r k f k^{-1} f^{-r}$$

für beliebiges r und

$$f^s k_I f k_I^{-1} f^{-s}$$

für beliebiges s , so schneiden die Achsen jedes einzelnen Systems einander nicht wegen ihrer Lage zur Achse von f , und eine Achse des ersten und eine des zweiten Systems schneiden einander nicht wegen des im letzten Absatz gefun-

denen, denn sie gehen bei Transformation mit einem $f^i t$ in einander über. Diese Achsenmenge zerlegt also \mathcal{D} in quer zur Achse von f gelegene Streifen, und ein Verschiebungsstück auf der Achse von f durchschneidet genau zwei Streifen. Die beiden Systeme vertauschen sich bei t , und es gibt genau ein Paar, die sich vertauschen und einen Streifen begrenzen, also durch keine der anderen Achsen getrennt werden. Es seien dies

$$f^r k f k^{-1} f^{-r} = m f m^{-1}$$

und

$$f^{-r} k_I f k_I^{-1} f^r = m_I f m_I^{-1}.$$

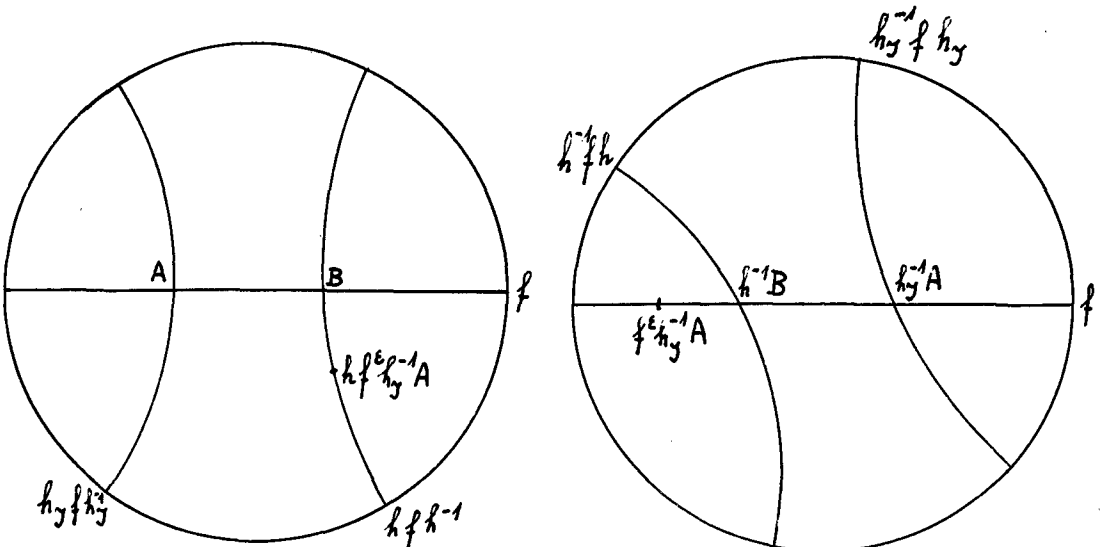


Fig. 5 a.

Fig. 5 b.

Man beachte, dass der Transformator m durch diese Forderung noch nicht völlig bestimmt ist, sondern noch durch $m f^i$ für beliebiges i ersetzt werden kann. Davon machen wir jetzt Gebrauch, indem wir aus dem Achsenpaar $m^{-1} f m$ und $m_I^{-1} f m_I$, welches die Achse von f in dem zum vorherigen entgegengesetzten Sinn überschneidet, wieder alle $f^i m^{-1} f m f^{-i}$ und $f^j m_I^{-1} f m_I f^{-j}$ herstellen und genau wie oben folgern: i lässt sich so wählen, dass die Achse von $f^i m^{-1} f m f^{-i}$ mit der bei I entsprechenden einen Streifen begrenzt, also durch keine der anderen getrennt wird. Insgesamt haben wir also aus dem ursprünglichen Transformator k einen neuen

$$h = m f^{-i} = f^r k f^{-i}.$$

abgeleitet, so dass folgender Sachverhalt vorliegt, der durch die Figuren 5 a und 5 b veranschaulicht wird: Die Achsen von $hf h^{-1}$ und $h_I f h_I^{-1}$ schneiden die Achse von f in zwei Punkten B und A , deren Entfernung kleiner ist als die Verschiebungslänge l von f . Die Achsen von $h^{-1} f h$ und $h_I^{-1} f h_I$ schneiden die Achse von f in den Punkten $h^{-1} B$ und $h_I^{-1} A$, und deren Entfernung ist auch $< l$. Im übrigen kann die Lage der ersten beiden Achsen zu den letzten beiden beliebig sein; sie können einander z. B. auch schneiden; um hierüber keine Annahmen zu machen, sind die Figuren getrennt gezeichnet. h und h^{-1} treten in dieser Aufstellung gleichberechtigt auf, und man darf daher annehmen, dass

$$AB \leq (h_I^{-1} A)(h^{-1} B)$$

ist. Nun ergänze man das grössere von beiden zu l durch Bildung des komplementären Stücks von $h^{-1} B$ bis $f^\varepsilon h_I^{-1} A$, wo $\varepsilon = +1$ oder -1 je nach der positiven Richtung der Achse f . Das Bild dieses Achsenstücks bei h liegt auf der Achse von $hf h^{-1}$ von B bis $hf^\varepsilon h_I^{-1} A$. Seine Länge ist

$$l - (h^{-1} B)(h_I^{-1} A) \leq l - AB.$$

Es gilt daher für die geradlinige Entfernung

$$A(hf^\varepsilon h_I^{-1} A) < AB + B(hf^\varepsilon h_I^{-1} A) \leq l.$$

Die Endpunkte der links stehenden Strecke entsprechen sich bei dem Element $hf^\varepsilon h_I^{-1}$. Also ist auch die zu diesem Element gehörige Verschiebungslänge $< l$.

Und es ist

$$f' = hf^\varepsilon h_I^{-1} \approx f^\varepsilon \approx f.$$

Möglicherweise ist das neue Element f' nicht primär. Dann ist wegen

$$f' \approx f \neq 1$$

notwendig

$$f \approx f' \approx f'^*,$$

wo f'^* das zugehörige primäre Element ist, also eine kürzere Verschiebungslänge als f' hat. Entspricht nun f'^* wieder einem Kurventypus mit Doppelpunkten, so wende man auf dies Element die gleiche Schlussweise an. Nun kommen aber in der Gruppe F nur endlich viele Verschiebungslängen unterhalb einer gegebenen Schranke vor (I, 5). Das Verfahren muss also abbrechen. Wir haben also:

Satz 7: Eine Klasse mit positivem Index, die von der Klasse von t verschieden ist, lässt sich durch ein solches ft darstellen, bei dem f primär ist und einem Kurventypus ohne Doppelpunkte entspricht.

Nun betrachten wir zwei verschiedene Klassen dieser Art. Es sei also: $f_I = f^{-1}$, $g_I = g^{-1}$, $f \neq g$, $f \neq 1$, $g \neq 1$, f und g primär; und sowohl f wie g entspreche auf φ einem Kurventypus ohne Doppelpunkte.

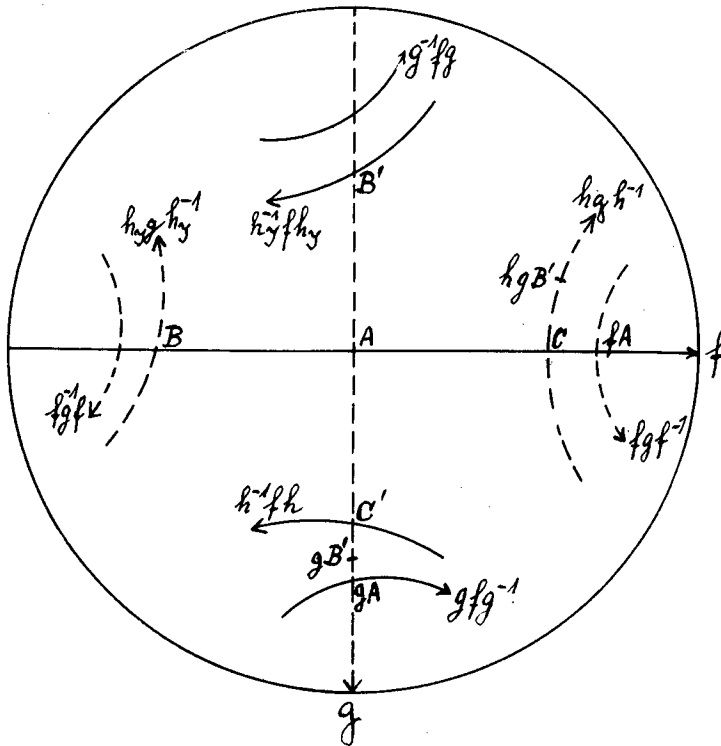


Fig. 6.

Die Achsen von f und g schneiden einander, denn beide kehren sich bei t um. Die ihnen auf φ entsprechenden geodätischen Linien haben also mindestens einen Schnittpunkt. (Diese beiden geodätischen Linien sind verschieden; denn f und g gehören, wie oben gezeigt, nicht zur selben Elementklasse von F .) Angenommen nun, sie haben *mehr als einen* Schnittpunkt. Dann ergibt sich ein Achsenbild wie in Fig. 6. Ein Verschiebungstück von f reicht von A bis fA . Nach Voraussetzung wird dieses Stück von der Achse eines Elementes hgh^{-1} in einem Punkte C geschnitten. Diese Achse verläuft ganz in dem Streifen zwischen den Achsen von g und fgf^{-1} , da g einem Kurventypus ohne Doppel-

punkte entspricht. Die beiden letztgenannten Achsen gehen bei I in die Achsen von g und $f^{-1}gf$ über, also verläuft die Achse von $h_I g h_I^{-1}$ ganz in dem durch diese bestimmten Streifen und schneidet die Achse von f in einem Punkte B . Untersuchen wir zunächst, ob B und C äquivalente Punkte sein, also demselben Flächenpunkt entsprechen können. Sie liegen auf der f entsprechenden geodätischen Linie, die nach Voraussetzung doppelpunktfrei ist. Also könnte nur $C=fB$ sein. Da auch g doppelpunktfrei ist, müsste dabei

$$h g h^{-1} = f h_I g h_I^{-1} f^{-1},$$

also

$$h^{-1} f h_I \approx g$$

und daher

$$h^{-1} f h_I = g^r$$

sein. Dann wäre aber $f \approx g$ oder $f \approx 1$, und beides ist nach Voraussetzung ausgeschlossen. Also sind B und C nicht äquivalent. Die von A verschiedenen Schnittpunkte der f und g entsprechenden geodätischen Linien treten also zu Paaren auf, diese haben also eine ungerade Anzahl von Schnittpunkten. *Daraus folgt, dass sowohl f wie g nicht homolog Null ist.*

fB fällt in einen von C verschiedenen Punkt zwischen A und fA . Angenommen fB fällt zwischen A und C . Dann ist $BC > l(f)$, wenn $l(f)$ die Verschiebungslänge von f bedeutet. Dann fällt auch $f^{-1}C$ zwischen A und B und

$$(f^{-1}C)(fB) < l(f).$$

Dann lasse man die Elemente $f h_I g h_I^{-1} f^{-1}$ und $f^{-1} h g h^{-1} f$ an die Stelle der beiden bisher benutzten treten. Mit andern Worten: Man ist berechtigt anzunehmen, der Transformator h sei so gewählt, dass $BC < l(f)$ ist.

Durch die Bewegung h^{-1} geht C in einen Punkt $C' = h^{-1}C$ auf der Achse von g über. Nun beachte man, dass h durch das bisherige nur bis auf eine freibleibende Potenz von g bestimmt ist:

$$h g h^{-1} = h g^r \cdot g \cdot g^{-r} h^{-1}.$$

Man kann daher h so wählen, dass $h^{-1}C = C'$ zwischen A und gA fällt. Dann fällt die Achse $h^{-1}fh$ in den Streifen zwischen den Achsen von f und $gf g^{-1}$; die Achse $h_I^{-1} f h_I$ fällt dann in den Streifen zwischen den Achsen von f und $g^{-1}fg$ und schneidet die Achse von g im Punkte $B' = h_I^{-1}B$. — Man könnte auch h so wählen, dass C' zwischen A und $g^{-1}A$ fällt, dann fällt B' zwischen

A und gA . — Für einen dieser Fälle gilt $B' C' < l(g)$, und für diesen entscheiden wir uns. (In der Figur ist der erste Fall angenommen, aber die folgende Betrachtung berücksichtigt beide Möglichkeiten.)

In der bisherigen Aufstellung sind f und g gleichberechtigt. Wir können daher

$$BC \leq B' C'$$

annehmen. Dann sei $\varepsilon = \pm 1$ so gewählt, dass

$$C' (g^\varepsilon B') = l(g) - B' C'$$

ist. (In dem Fall der Figur ist dazu $\varepsilon = +1$ zu wählen.) Dies Achsenstück verlege man mittels der Bewegung h . Dann liegt es auf der Achse von $hg h^{-1}$ und reicht von $h C' = C$ bis $hg^\varepsilon B' = hg^\varepsilon h_I^{-1} B$. Dieser letztere Punkt geht aus B durch die Bewegung

$$g' = h g^\varepsilon h_I^{-1} \approx g$$

hervor, und dabei ist

$$l(g') \leq B(h g^\varepsilon h_I^{-1} B) < BC + C(h g^\varepsilon h_I^{-1} B) = BC + l(g) - B' C' \leq l(g).$$

Man kann also g , ohne seine Isogredienzklassse zu verlassen, durch ein Element g' mit kleinerer Verschiebungslänge ersetzen. Ist g' nicht primär, so ersetze man es durch das zugehörige primäre Element (es ist ja $g' \approx g \neq 1$), was einer weiteren Verkleinerung der Verschiebungslänge entspricht. Ist es nicht doppelpunktfrei, so ersetze man es auf Grund des Satzes 7 innerhalb seiner Klasse durch ein doppelpunktfreies, was einer Verkleinerung der Verschiebungslänge entspricht. Hat man dann wieder ein primäres doppelpunktfreies Element g_1 der Klasse erreicht, und hat dies mit f noch mehr als einen Schnittpunkt, so wende man das obige Verfahren auf das Paar f und g_1 an und fahre so fort. Das Verfahren muss abbrechen, da die Summe der Verschiebungslängen von f und g dauernd abnimmt. Hat man mehr als zwei verschiedene Isogredienzklassen, so kann man das Verfahren auf je zwei von ihnen anwenden. So erhält man den

Satz 8: Für die Gleichung (53) lässt sich ein vollständiges System

$$f_1 = 1, f_2, f_3, \dots, f_z$$

nicht isogredienter Lösungen so finden, dass die den f_2, \dots, f_z entsprechenden geodätischen Linien auf der Fläche \mathfrak{g} nicht begrenzen und doppelpunktfrei sind und zu je zweien genau einen Schnittpunkt haben.

14. **Abbildungsklassen mit dem charakteristischen Polynom $(\lambda + 1)^{2p}$.**

Nun sei eine Abbildungsklasse der Ordnung 2 mit der Maximalzahl $Z=2p+2$ von positiven Fixpunktklassen vorgelegt. Das Vorkommen von solchen zeigt der Automorphismus S des Beispiels 3, § 11, sowie der Automorphismus I^{2p} des Beispiels 4 ($=I^{2p+1}$ des Beispiels 5). Die zugehörige Matrixspur ist also $s=-2p$, die Matrix selbst ist $-E_{2p}$, und das charakteristische Polynom ist $(\lambda + 1)^{2p}$.

Sei t ein Element zweiter Ordnung der zugehörigen Gruppe T , also $t^2=1$ auf E . t induziere den Automorphismus I , und es ist $I^2=1$. Die Gleichung

$$x x_I = 1 \tag{54}$$

hat dann $2+2p$ bezüglich I nicht isogrediente Lösungen. Wählt man $x=1$ als die eine von ihnen, so können für die übrigen nach dem Ergebnis des letzten Paragraphen solche Elemente

$$f_1, f_2, \dots, f_{2p+1} \tag{55}$$

gewählt werden, dass

- 1) diese Elemente primär sind,
- 2) die ihnen entsprechenden geschlossenen geodätischen Linien der Fläche doppelpunktfrei und nicht homolog Null sind,
- 3) diese geodätischen Linien sich zu je zweien in genau einem Punkte schneiden.

Nun denke man sich von einem Punkt O einer Fläche φ vom Geschlecht p aus n doppelpunktfreie geschlossene Kurven u_i auf der Fläche gezogen, die sich in O überschneiden und sonst zu einander fremd sind; wie dies durch die punktierten Linien in Fig. 7 für gerades n und in Fig. 8 für ungerades n angedeutet ist. Als Umgebung jeder Kurve zeichne man einen bandförmigen Streifen auf der Fläche. Diese n Bänder können als an einem O umgebenden Elementarflächenstück anfangend und endigend gedacht werden. Dieses mit den n Bändern zusammen bilde den Flächenteil φ^* von φ . Wir unterscheiden nun, ob n gerade oder ungerade ist, und lesen an den Figuren ab:

- a) Ist $n=2r$, so hat φ^* nur eine Randkurve, und bei passender Bezeichnung der u_i und passender Durchlaufung der Randkurve ist diese durch das Element

$$R = u_1 u_2 \dots u_{2r} u_1^{-1} u_2^{-1} \dots u_{2r}^{-1} \tag{56}$$

der Fundamentalgruppe gegeben. R ist homolog Null, und die Restfläche $\varphi - \varphi^*$ hat dieselbe Randkurve R . Ist diese Restfläche ein Elementarflächenstück, so ist $R=1$, $r=p$, und die Gruppe

$$U = \{u_1, u_2, \dots\}$$

ist die Gruppe F in der im Beispiel 4 benutzten Darstellung. Ist die Restfläche nicht ein Elementarflächenstück, so ist $R \neq 1$, $r < p$, U eine echte Untergruppe von F , und zwar als Fundamentalgruppe eines Flächenstücks φ^* vom Geschlecht r und mit einer Randkurve eine freie Gruppe. Die Restfläche $\varphi - \varphi^*$ hat das

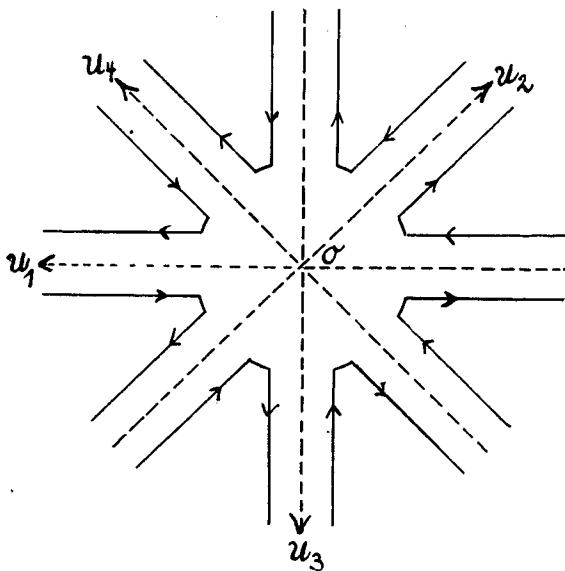


Fig. 7.

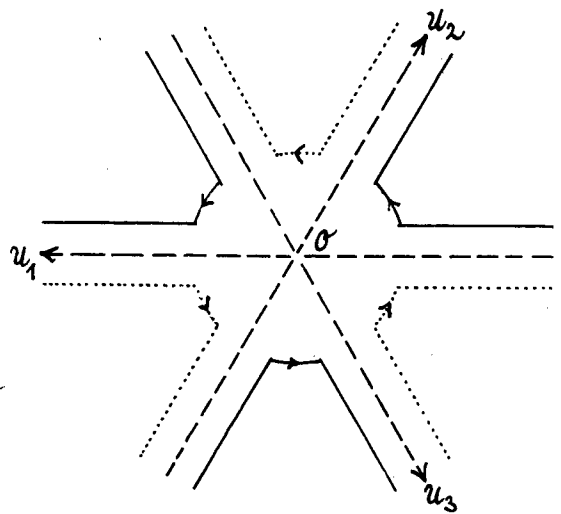


Fig. 8.

Geschlecht $p-r$ und eine Randkurve. Man kann sich in diesem Fall die geschlossene, doppeltpunktfreie und der Null homologe, also φ zerlegende geodätische Linie auf φ gezogen denken, die dem Element R von U entspricht. Sie zerlegt φ in zwei bezw. mit φ^* und $\varphi - \varphi^*$ homöomorphe Bestandteile. Wir können geradezu annehmen, dass die Randkurve schon diese geodätische Linie ist. Ihr Bild in der Überlagerungsfläche Φ von φ und alle aus diesem durch die Untergruppe U hervorgehenden Orthogonalkreise zu E grenzen die universelle Überlagerungsfläche Φ^* von φ^* in Φ ab. Φ^* ist die konvexe Hülle der Achsenmenge der Untergruppe U .

b) Ist $n=2r+1$, so hat φ^* zwei Randkurven, und diese entsprechen den Elementen

$$\begin{aligned} R_1 &= u_1 u_2 \dots u_{2r+1} \\ R_2 &= u_{2r+1} u_{2r} \dots u_1 \end{aligned} \tag{57}$$

von U . Besteht $\varphi - \varphi^*$ aus zwei von diesen beiden Randkurven berandeten Elementarflächen, so ist $R_1 = R_2 = 1$, $r = p$, und U ist die Gruppe F in der im Beispiel 5 benutzten Darstellung. Ist sowohl $R_1 \neq 1$ als auch $R_2 \neq 1$ in F , so ist U die (freie) Fundamentalgruppe einer Fläche vom Geschlecht r mit zwei Randkurven. Die Achsen von R_1 und R_2 und alle aus ihnen durch U hervorgehenden Achsen begrenzen dann in Φ einen konvexen Bereich, der die konvexe Hülle der Achsenmenge von U ist und die universelle Überlagerungsfläche von φ^* darstellt.

Wir bauen nun mittels des Lösungssystems (55) schrittweise ein solches Kurvensystem u_i auf der Fläche φ auf. f_1 erzeugt die Gruppe $U_1 = \{f_1\}$. f_2 ist nicht Element von U_1 , da es nicht Potenz von f_1 ist. Sei O der Schnittpunkt der Achsen von f_1 und f_2 in Φ . Wir nehmen die durch sie bestimmten geodätischen Linien als erste Kurven u_1 und u_2 auf φ . Dadurch entsteht ein Torus mit einer Randkurve R gemäss (56), da $p > 1$ ist. Die Randkurve ist die Achse des Elements

$$R = f_1 f_2 f_1^{-1} f_2^{-1},$$

und diese grenzt zusammen mit ihren bei U äquivalenten ein konvexes Gebiet Ω_2 , die konvexe Hülle der Achsenmenge von

$$U_2 = \{f_1, f_2\}$$

in Φ ab. Ω_2 ist universelle Überlagerungsfläche des berandeten Torus.

Nun nehmen wir f_3 hinzu und überzeugen uns zunächst davon, dass f_3 nicht Element von U_2 ist. Denn angenommen, es sei

$$f_3 = x \Pi(f_1, f_2) y,$$

wo auch sowohl x wie y entweder f_1^{+1} oder f_2^{+1} ist. Diese Darstellung ist eindeutig, da U_2 frei ist. Nun ist einerseits,

$$f_{3I} = x^{-1} \Pi(f_1^{-1}, f_2^{-1}) y^{-1},$$

andererseits

$$f_{3I} = f_3^{-1} = y^{-1} \Pi^{-1} x^{-1},$$

also wegen der Eindeutigkeit der Darstellung in U_2 : $x = y$ und also

$$f_3 = x \Pi x = x \Pi x_I^{-1} \approx \Pi.$$

f_3 kann also, ohne seine Isogredienzklassse zu verlassen, durch den kürzeren Ausdruck $\Pi(f_1, f_2)$ ersetzt werden. Ebenso kann dieser weiter verkürzt werden, und zum Schluss kommt entweder $f_3 \approx 1$ oder $\approx f_1^{+1}$ oder $\approx f_2^{+1}$, alles gegen die Voraussetzung über (55).

f_3 gehört also nicht zu U_2 und $f_3 \Omega_2$ liegt ganz ausserhalb Ω_2 . Die Achse von f_3 schneidet Ω_2 , da sie die Achsen von f_1 und f_2 schneidet, aber der Schnitt wird natürlich im Allgemeinen nicht gerade in O stattfinden. Die Achse von f_3 schneidet auch $f_3 \Omega_2$, aber zwischen Ω_2 und $f_3 \Omega_2$ kein anderes mit Ω_2 äquivalentes Gebiet; denn ein Verschiebungsstück der Achse von f_3 , das in Ω_2 anfängt, endet in $f_3 \Omega_2$ und kann nach Voraussetzung nicht zwischen diesen beiden Gebieten Achsen, die mit denen von f_1 und f_2 äquivalent sind, schneiden. Verbindet man also den Punkt O , der in Ω_2 liegt, mit dem Punkt $f_3 O$, der in $f_3 \Omega_2$ liegt, durch eine nichteuklidisch geradlinige Strecke, so trifft diese keine ihrer äquivalenten. Auf φ ergibt sie ein geodätisches Linienstück, das von O ausgehend, ohne sich selbst zu überschneiden und ohne die beiden schon vorhandenen Kurven ausserhalb O zu treffen, wieder nach O zurückkehrt und sich dort schliesst (im Allgemeinen unter einem Knick) und dabei die beiden ersten Kurven überkreuzt.

Nun benutzen wir diese drei Kurven als u_1, u_2 und u_3 und haben zwei Randkurven entsprechend (57). Es ist jetzt, *eventuell nach einer Ummummerierung der ersten drei f* :

$$R_1 = f_1 f_2 f_3$$

$$R_2 = f_3 f_2 f_1,$$

und diese Elemente von F sind nicht beide 1, da φ ein Geschlecht $p > 1$ hat. Dann sind sie aber notwendig beide $\neq 1$, da

$$R_1 I = R_2^{-1}$$

ist. Also ist

$$U_3 = \{f_1, f_2, f_3\}$$

wieder frei, und die Achsen von R_1 und R_2 grenzen auf φ einen Torus mit zwei Randkurven ab. Dessen Überlagerungsfläche, also die konvexe Hülle der Achsenmenge aus U_3 , heisse Ω_3 . Genau wie oben schliesst man nun, dass f_4 nicht zu U_3 gehört, dass seine Achse die Achsen von f_1, f_2 und f_3 in Ω_3 schnei-

det, dass $f_4 \Omega_3$ ganz ausserhalb Ω_3 , aber durch kein anderes äquivalentes Gebiet von ihm getrennt liegt; und man führt die Verbindungsstrecke von O mit $f_4 O$ als u_4 -Kurve ein. Ist $p > 2$, so hat man nun auf φ eine Teilfläche vom Geschlecht 2 mit einer Randkurve und freier Fundamentalgruppe

$$U_4 = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$$

u.s.w. Das Verfahren bricht erst ab bei Einführung von f_{2p} , da φ^* erst dann das Geschlecht p der Fläche φ erreicht. Und man hat dann eventuell nach geeigneter Umnummerierung der f_1, \dots, f_{2p} :

$$U_{2p} = F = \{f_1, f_2, \dots, f_{2p}\}$$

$$f_1 f_2 \dots f_{2p} f_1^{-1} \dots f_{2p}^{-1} = I.$$

Durch Vergleich mit Beispiel 4 sieht man, dass auf φ durch die benutzten Kurven ein $4p$ -Eck mit paarweise inzidenten Gegenseiten gezeichnet ist. Das Element f_{2p+1} von (55) ist bisher nicht erwähnt worden. Es steht uns noch frei, als dieses das Element

$$f_{2p+1} = f_1^{-1} f_2^{-1} \dots f_{2p}^{-1}$$

zu wählen. Denn dieses entspricht der Diagonale des $4p$ -Ecks, also einem primären, doppelpunktfreien Kurventypus. Und es ist weder mit 1 noch mit einem der bisher benutzten f_i isogredient. Das sieht man so: Man hat f_1, \dots, f_{2p} als unabhängige Erzeugende in der Homologiegruppe. Ist nun

$$g = x h x_I^{-1},$$

so haben g und h in jeder Erzeugenden Exponentensummen gleicher Parität, denn x und x_I^{-1} haben wegen $f_{iI} = f_i^{-1}$ in jeder Erzeugenden die gleiche Exponentensumme. Und f_{2p+1} erfüllt diese Bedingung weder mit 1 noch mit einem der f_i . — Endlich genügt f_{2p+1} auch (54), wie aus der Relation von F folgt.

Der hier mit I bezeichnete Automorphismus wird durch denjenigen Automorphismus von f , der durch

$$f_i \rightarrow d_i \quad (i=1, 2, \dots, 2p)$$

ausgedrückt wird, in den im Beispiel 4 mit I^{2p} bezeichneten Automorphismus transformiert.

Satz 9: *Alle Abbildungsklassen erster Art, zweiter Ordnung mit $(\lambda + 1)^{2p}$ als charakteristischem Polynom, also mit $2 + 2p$ positiven Fixpunktklassen, sind in einander transformierbar.*

Zur Darstellung der Gruppe T in Normalform hat man zu setzen:

$$\begin{aligned} t_1 &= f_1^{-1} t \\ t_2 &= f_2 t \\ &\dots \\ t_{2p-1} &= f_{2p-1}^{-1} t \\ t_{2p} &= f_{2p} t \\ t_{2p+1} &= f_1 f_2 \dots f_{2p} t. \end{aligned}$$

Dann kann man alle f_i durch t und die t_i ausdrücken und erhält:

$$\begin{aligned} T &= \{t, t_1, t_2, \dots, t_{2p+1}\} \\ t^2 &= t_1^2 = \dots = t_{2p+1}^2 = t t_1 t_2 \dots t_{2p+1} = 1. \end{aligned}$$

Damit sind die Fragen II)–VI) des § 12 für die hier betrachtete Gesamtheit von Abbildungsklassen bejahend beantwortet.

15. Abbildungsklassen mit dem charakteristischen Polynom $\lambda^{2p} + 1$ und solche mit dem Polynom $\lambda^{2p} - \lambda^{2p-1} + \dots - \lambda + 1$.

Vorgelegt sei eine Abbildungsklasse endlicher Ordnung mit dem charakteristischen Polynom $\lambda^{2p} + 1$. Beispiel 4, § 11, zeigt, dass es solche Abbildungsklassen gibt. Eigenwerte, Ordnung, Spuren und Klassenzahlen sind dann dieselben wie im Beispiel 4. Die Ordnung ist also $4p$, und es gibt zwei positive Klassen in allen Potenzen ausser der $2p$ -ten, und in dieser $2p + 2$ Klassen. Sei t eine Abbildungsfunktion der Grundstufe mit $t^{4p} = 1$ auf E und I der zugehörige Automorphismus. Dann ist $I^{4p} = 1$.

I^{2p} fällt unter den allgemeinen Fall des vorigen Paragraphen, da dieser Automorphismus die Ordnung 2 und die Matrix $-E_{2p}$ hat. Die Gleichung

$$x x_{I^{2p}} = 1 \tag{58}$$

hat also $2 + 2p$ bezgl. I^{2p} nicht isogrediente Lösungen. Für unsere jetzigen Zwecke müssen diese aber besonders ausgewählt werden. Dazu greifen wir auf

die allgemeine Theorie des § 6 zurück. Von den $2 + 2p$ positiven Klassen der $2p$ -ten Stufe wurzeln zwei auf der ersten Stufe; die übrigen $2p$ bilden einen Zyklus, der auf der $2p$ -ten Stufe hinzukommt. Aus einem vollen Lösungssystem von (58), das die im Satz 8 beschriebenen Eigenschaften hat, greife man ein Element f so heraus, dass f^{2p} nicht auf der ersten Stufe wurzelt, sondern eine der auf der $2p$ -ten Stufe hinzukommenden Klassen darstellt. Dabei ist also

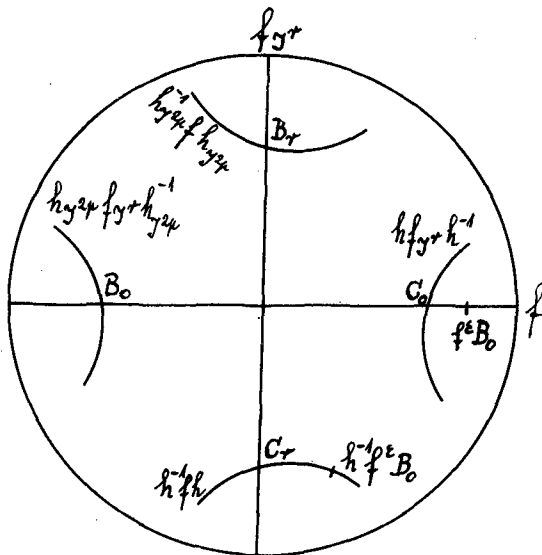


Fig. 9.

gegeben, dass f primär und inhomolog Null ist und einem doppeltpunktlosen Kurventypus entspricht. Nach § 6 repräsentieren dann die Elemente

$$f, f_I, f_{I^2}, \dots, f_{I^{2p-1}} \tag{59}$$

den $2p$ -gliedrigen Zyklus. Sie sind alle primär und inhomolog Null und entsprechen alle doppeltpunktlosen Kurventypen, da sie aus einer Kurve mit diesen Eigenschaften durch die Potenzen einer topologischen Flächenabbildung hervorgehen. Aber es bedarf eines neuen Beweises, dass sie überdies so gewählt werden können, dass sie auch die letzte im Satz 8 genannte Eigenschaft haben, also zu je zweien genau einen Schnittpunkt haben. Der Beweis wird durch eine Verallgemeinerung der der Fig. 6 zu Grunde liegenden Betrachtung geführt. Die Verschiebungslänge auf der Achse von f werde wieder durch $l(f)$ bezeichnet, ferner setze man

$$L(f) = l(f) + l(f_I) + \dots + l(f_{I^{2p-1}}).$$

Irgend zwei Achsen des Systems (59) schneiden einander, da sich beide bei I^{2p} umkehren. Die sie auf \mathcal{g} darstellenden geodätischen Linien haben also zu je zweien mindestens einen Schnittpunkt. Angenommen nun, zwei von ihnen haben mehr als einen Schnittpunkt. Das gleiche gilt dann von den Achsenpaaren als geodätische Linien auf \mathcal{g} betrachtet, die aus diesem Paar durch die Potenzen von I hervorgehen. Wir können daher annehmen, es handle sich um f und f_{I^r} , $1 \leq r \leq 2p - 1$. Nun betrachte man Fig. 6 und lese f_{I^r} statt g und I^{2p} statt I . Im übrigen kann man alle in § 13 über diese Figur angeführten Betrachtungen beibehalten, nur dass wir die dort aus berechtigten Symmetriegründen eingeführte Annahme $BC \leq B'C'$ hier fallen lassen. Um anzudeuten, dass B' und C' auf der Achse von f_{I^r} liegen, schreiben wir diese Punkte B_r und C_r , und für B und C schreiben wir B_0 und C_0 . Über das gegenseitige Verhältnis von $B_0 C_0$ und $B_r C_r$ wird nichts vorausgesetzt, aber die Voraussetzung $B_0 C_0 < l(f)$, $B_r C_r < l(f_{I^r})$ bleibt gültig. Wir kommen so zur Fig. 9 und betrachten die Strecke von C_0 bis $f^\varepsilon B_0$ ($\varepsilon = \pm 1$), die $B_0 C_0$ zu $l(f)$ ergänzt. Verlegen wir diese durch h^{-1} , so liegt sie auf der Achse von $h^{-1}fh$ und reicht von $h^{-1}C_0 = C_r$ bis $h^{-1}f^\varepsilon B_0 = h^{-1}f^\varepsilon h_{I^{2p}} B_r$. Man hat also die Ungleichung

$$l(h^{-1}f^\varepsilon h_{I^{2p}}) < B_r C_r + l(f) - B_0 C_0.$$

Ersetzt man alle auftretenden Elemente durch die ihnen bei I^s entsprechenden, so bekommt man ein Achsenbild in völlig analoger Lage, kann also, wenn man die B_0 und C_0 auf der Achse von f_{I^s} entsprechenden Punkte mit B_s und C_s bezeichnet, die Ungleichung

$$l(h_{I^s}^{-1} f_{I^s}^\varepsilon h_{I^{2p+s}}) < B_{r+s} C_{r+s} + l(f_{I^s}) - B_s C_s$$

für alle s aufstellen. Für $s=2p$ ist $f_{I^s} = f^{-1}$ und die Punkte B_0 und C_0 werden einfach vertauscht, die (numerisch gerechneten) Strecken kommen also nur nach dem mod $2p$ gerechneten Wert ihres Stellzeigers in Betracht. Man bekommt also aus der letzten Ungleichung

$$\sum_{s=0}^{2p-1} l(h_{I^s}^{-1} f_{I^s}^\varepsilon h_{I^{2p+s}}) < \sum_{s=0}^{2p-1} l(f_{I^s}),$$

da die BC -Strecken sich paarweise aufheben. Nun ist

$$f' = h^{-1}f^\varepsilon h_{I^{2p}} \approx f$$

bezüglich I^{2p} , repräsentiert also dieselbe Klasse, und die f'_{I^s} repräsentieren also die damit konjugierten Klassen. Die letzte Ungleichung zeigt nun, dass die Grösse L kleiner wird, wenn man f durch f' ersetzt: $L(f') < L(f)$.

Ist das neue Element f' nicht primär, so ersetze man es durch das zugehörige primäre, was eine weitere Verkleinerung der Grösse L bedeutet. Wie aber, wenn f' keinem doppeltpunktfreien Kurventypus entspricht? Dann verallgemeinern wir, indem wir wieder f statt f' schreiben, die zu den Fig. 5 a und 5 b von § 13 gehörige Betrachtung. Wir erhalten Fig. 10 a und 10 b mit der

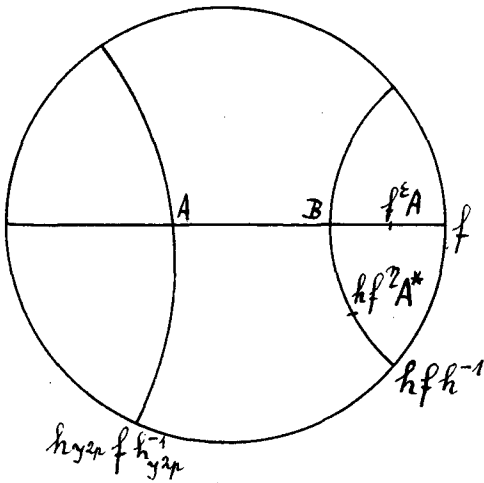


Fig. 10 a.

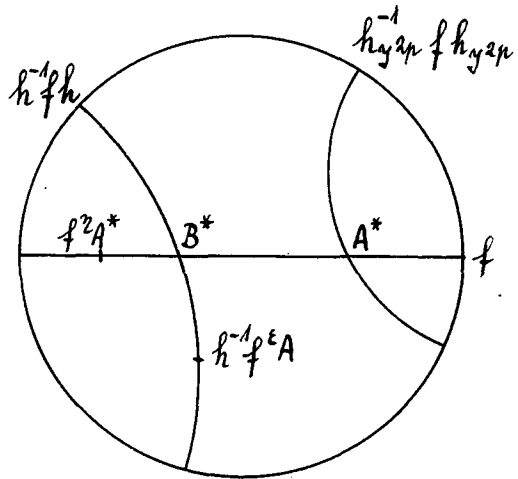


Fig. 10 b.

Beziehung $A^* = h_{I^{2p}}^{-1} A$, $B^* = h^{-1} B$, und machen hier keine Voraussetzung über dies Grössenverhältnis von AB und A^*B^* . Es ist

$$h f^\eta A^* = h f^\eta h_{I^{2p}}^{-1} A = f' A$$

$$h^{-1} f^\epsilon A = h^{-1} f^\epsilon h_{I^{2p}} A^* = f'' A^*,$$

wenn man

$$f' = h f^\eta h_{I^{2p}}^{-1} \quad (\eta = \pm 1)$$

$$f'' = h^{-1} f^\epsilon h_{I^{2p}} \quad (\epsilon = \pm 1)$$

einführt. Die Figuren lehren dann, dass

$$l(f') < AB + l(f) - A^*B^*$$

$$l(f'') < A^*B^* + l(f) - AB,$$

also

$$l(f') + l(f'') < 2l(f)$$

ist. Bei Ausübung von I^s bekommt man Achsen in analoger Lage und schliesst daher

$$l(f'_{I^s}) + l(f''_{I^s}) < 2l(f_{I^s})$$

und durch Summation von $s=0$ bis $s=2p-1$

$$L(f') + L(f'') < 2L(f).$$

Es ist also entweder

$$L(f') < L(f)$$

oder

$$L(f'') < L(f).$$

Und bezüglich I^{2p} ist sowohl $f' \approx f$ wie $f'' \approx f$. Man kann also wieder durch Auswechseln von f innerhalb seiner Klasse die Grösse L verkleinern.

Dies setzt man fort, bis man nach endlich vielen Schritten ein primäres doppelpunktfreies f hat. Hat das neue System (59) dann noch nicht zu je zweien nur einen Schnittpunkt, so setze man wieder das erste Verfahren an und wechsele so ab. Weil es nur endlich viele Möglichkeiten für L unterhalb einer gegebenen Schranke gibt, führt das Verfahren zu einem Ende.

Wir können also jetzt über das System von $2p$ Elementen (59) noch die Voraussetzung hinzunehmen, dass die ihnen auf φ entsprechenden geodätischen Linien zu je zweien genau einen Schnittpunkt haben. Dann lassen sich aber, wie im vorigen Paragraphen gezeigt wurde, durch einen Punkt O der Fläche $2p$ einfache geschlossene Kurven legen, von denen jede in O alle anderen überkreuzt und sie sonst nicht trifft. Und dabei entsprechen diese Kurven für O als Anfangs- und Endpunkt dem System der Elemente (59). Wir bezeichnen die Kurven mit demselben Buchstaben. Bei Linksdrehung um O sei $f_{I^r}^{\pm 1}$ die zunächst auf f^{+1} folgende. Dann ist r zu $4p$ teilerfremd. Wir betrachten nun die Potenz

$$J = I^r \quad \text{oder} \quad J = I^{2p+r}$$

je nachdem $f_{I^r}^{+1}$ oder $f_{I^r}^{-1}$ auf f^{+1} folgt. In beiden Fällen ist J eine primitive Potenz von I . Die positiven Richtungen der Elemente

$$f, f_J, f_{J^2}, \dots, f_{J^{2p-1}} \tag{60}$$

folgen dann bei Linksumlauf um O auf einander. Durch Vergleich mit Fig. 7 folgt dann für die Elemente (60) die Relation

$$f f_J^{-1} f_{J^2} f_J^{-1} \dots f_{J^{2p-1}} f_J^{-1} f_J \dots f_{J^{2p-1}} = 1. \quad (61)$$

Die Substitution

$$\begin{aligned} f_{J^{2r}} &\rightarrow d_{2r+1} \\ f_{J^{2r+1}} &\rightarrow d_{2r+2}^{-1}, \end{aligned}$$

wo die d_i die Erzeugenden des Beispiels 4 bedeuten, bildet dann einen Automorphismus A von T , denn sie führt die Relation (61) in die Relation (39) über. Und nun ist

$$A J A^{-1} = I,$$

wenn \bar{I} (zum Unterschied von dem jetzigen I) den im Beispiel 4 mit I bezeichneten Automorphismus bedeutet. Damit ist zugleich gezeigt, dass

$$A I A^{-1} = A J^q A^{-1} = \bar{I}^q$$

ist, wenn q eine Lösung der Kongruenz

$$\text{bezw. } \left. \begin{aligned} q^r &\equiv 1 \\ q(2p+r) &\equiv 1 \end{aligned} \right\} \pmod{4p}$$

ist. \bar{I}^q ist eine primitive Potenz von \bar{I} . Die Gruppe $T(\bar{I})$ lässt sich also ebenso wie die mit ihr isomorphe Gruppe $T(\bar{I})$ im Beispiel 4 in die Normalform bringen. Alles am Beispiel 4 ausgeführte ist also allgemeingültig für die hier betrachteten Abbildungsklassen. Die Fragen II)—VI), § 12, sind für diese bejahend beantwortet.

Nur kurz erwähnt sei noch, dass man in genau entsprechender Weise die Abbildungsklassen mit dem charakteristischen Polynom

$$\lambda^{2p} - \lambda^{2p-1} + \dots + \lambda^2 - \lambda + 1,$$

das im Beispiel 5, § 11, auftrat, erledigen kann. Hier ist die Ordnung $4p+2$, die Grundstufe hat eine positive Klasse, in der zweiten Potenz tritt ein Zyklus von 2 Klassen hinzu, und in der $(2p+1)$ ten Potenz tritt ein Zyklus von $2p+1$ Klassen hinzu. Man fängt wieder damit an, den letzteren durch geeignete Elemente

$$f, f_I, f_{I^2}, \dots, f_{I^{2p}}$$

darzustellen, und zeichnet diesen entsprechend ein System von $2p+1$ sich in einem Punkt überkreuzenden einfachen Kurven auf der Fläche. Entsprechend der Fig. 8 ergeben sich dadurch für diese Elemente zwei Relationen. Und dann sieht man analog wie oben, dass sich eine primitive Potenz des betrachteten Automorphismus der Ordnung $4p+2$ in den im Beispiel 5 behandelten Automorphismus transformieren lässt. Damit sind auch für diese Abbildungsklassen die Fragen II)–VI) des § 12 bejahend beantwortet.

