DIE STABILITÄTSFRAGE BEI DIFFERENZENGLEICHUNGEN[1].

VON

TA LI

Research Fellow of China Foundation for the Promotion of Education and Culture
in PEIPING.

Inhaltsverzeichnis.

§ 1.

Einleitung.

Die Untersuchungen über Stabilität, die Herr O. Perron im Jahre 1928 angestellt hat[2], haben im wesentlichen gezeigt, dass die Mannigfaltigkeit der für $t \to \infty$ nach Null strebenden Integrale des Differenzengleichungssystems mit *konstanten Koeffizienten* $a_{\nu\mu}$

$$(1) \qquad x_\nu(t+1) = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu} x_\mu(t) + \varphi_\nu(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

---

[1] Dissertation, die von der Universität München angenommen ist.

[2] Über Stabilität und asymptotisches Verhalten der Lösungen eines Systems endlicher Differenzengleichungen, Journ. f. d. reine und angew. Math. Bd. *161*, 1929.

wenn die Zusatzfunktionen φ_ν im Vergleich zu den linearen Gliedern absolut sehr klein sind, im allgemeinen ebenso gross ist, wie wenn die Zusatzfunktionen gar nicht da wären. Die Raschheit der Konvergenz nach Null ist dabei mit der Potenz $|\varrho|^t$ vergleichbar, wobei ϱ eine charakteristische Wurzel, d. h. eine Wurzel der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11} - x & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - x \end{vmatrix} = 0$$

ist. Der Fall, der soeben durch die Worte »im allgemeinen» charakterisiert wurde, liegt vor, wenn **kein** $|\varrho| = 1$ ist. Wenn insbesondere bei dem linearen System *ohne* Zusatzfunktionen jedes Integral für $t \to \infty$ nach Null strebt, was dann und nur dann der Fall ist, wenn alle ϱ_ν absolut kleiner als 1 sind, so ist auch bei dem System *mit* Zusatzfunktionen für jedes Integral, dessen Anfangswerte $x_\nu(0)$ absolut hinreichend klein sind, $|x_\nu(t)|$ dauernd sehr klein und es gilt sogar $\lim\limits_{t \to \infty} x_\nu(t) = 0$.

Im Jahre 1930 hat Herr Perron eine Untersuchung über die Stabilität bei dem Differentialgleichungssystem

$$\frac{dx_\nu}{dt} = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\nu\mu}(t)\, x_\mu + \varphi_\nu(t, x_1, \dots, x_n) \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

durchgeführt[1], wobei $f_{\nu\mu}$, φ_ν beliebige stetige beschränkte Funktionen von t bzw. $t, x_1, x_2, \dots, x_n$ sind.

In der gegenwärtigen Arbeit wird nun analog die Stabilitätsfrage bei dem Differenzengleichungssystem

$$(2) \qquad x_\nu(t+1) = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\nu\mu}(t)\, x_\mu(t) + \varphi_\nu(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

behandelt, *wobei $f_{\nu\mu}(t)$, $\varphi_\nu(t, x_1, \dots, x_n)$ beliebige beschränkte Funktionen sind. Die Variable t soll dabei auf die ganzzahligen Werte $t = 0, 1, 2, \dots$ beschränkt werden; für $f_{\nu\mu}$, x_μ sind dagegen beliebige komplexe Werte zulässig.* Falls die φ_ν im Vergleich zu den linearen Gliedern absolut sehr klein sind, wird man in Bezug auf das System (2) zunächst vermuten, dass die Mannigfaltigkeit der für $t \to \infty$ nach Null strebenden Integrale »im allgemeinen» ebenso gross ist, wie wenn die Zu-

[1] Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen. Math. Zeitschr. Bd. *32*, 1930.

satzfunktionen gar nicht da wären. Im Gegensatz dazu zeigt aber das in § 2 hervorzuhebende Beispiel ein ganz anderes Verhalten.

Um eine genaue Übertragung auf (2) zu ermöglichen, muss man das über (1) Gesagte ein wenig modifizieren. Es ist nämlich an Stelle der Forderung, dass keine charakteristische Wurzel ϱ_ν absolut gleich 1 sein soll, die folgende zu setzen:

Forderung $\mathfrak{A}$: *Das lineare System*

$$x_\nu(t+1) = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu}\, x_\mu(t) + \psi_\nu(t) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

soll für beliebige beschränkte Funktionen $\psi_\nu(t)$ immer wenigstens ein beschränktes Integral haben.

Hierdurch verliert die über (1) gemachte Aussage nichts an Tragweite; denn diese Voraussetzung ist in dem Fall, den wir durch die Worte »im allgemeinen» gekennzeichnet haben, wenn also $|\varrho_\nu| \neq 1$ für $\nu = 1, 2, \ldots, n$ ist, stets von selbst erfüllt. Zum Beweis bezeichne man die Koeffizienten-Matrix von (3) mit A und die charakteristischen Wurzeln mit $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$, und zwar in solcher Reihenfolge, dass

$$|\varrho_1| \leqq |\varrho_2| \leqq \cdots \leqq |\varrho_n|$$

ist. Dann kann man auf verschiedene Weise eine Matrix B mit nicht verschwindender Determinante angeben derart, dass

$$B^{-1} A B = \begin{pmatrix} \varrho_1 & 0 & \ldots & 0 \\ c_{21} & \varrho_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & \varrho_n \end{pmatrix}.$$

Es ist also

$$\sum_{\nu=1}^{n} (a_{\lambda\nu} - \delta_{\lambda\nu}\,\varrho_\mu)\, b_{\nu\mu} = \sum_{\beta=\mu+1}^{n} b_{\lambda\beta}\, c_{\beta\mu}, \qquad \delta_{\lambda\nu} = \begin{cases} 1 & \text{für } \nu = \lambda \\ 0 & \text{für } \nu \neq \lambda \end{cases} \qquad \sum_{n+1}^{n} = 0,$$

$$\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n,$$

und durch die lineare Transformation

$$(x_1, \ldots, x_n) = B\,(y_1, \ldots, y_n)$$

geht (3) in

(4) $$y_\nu(t+1) = \varrho_\nu y_\nu(t) + \sum_{\mu=1}^{\nu-1} c_{\nu\mu} y_\mu(t) + \omega_\nu(t) \quad \text{mit} \quad \sum_1^0 = 0$$

über, wobei $\omega_\nu(t)$ beschränkt ist.

Aus (4) folgt zunächst

$$y_1(t) = \varrho_1^t \left(y_1(0) + \sum_{\tau=0}^{t-1} \frac{\omega_1(\tau)}{\varrho_1^{\tau+1}} \right).$$

Nachdem $y_1(t)$ bekannt ist, kann $y_2(t)$ dann $y_3(t)$ etc. berechnet werden. Das allgemeine Integral von (4) ist also

(5) $$\left\{ \begin{aligned} y_\nu(t) &= \varrho_\nu^t \left(y_\nu(0) + \sum_{\tau=0}^{t-1} \frac{\Phi_\nu(\tau)}{\varrho_\nu^{\tau+1}} \right) \\ \Phi_\nu(\tau) &= \sum_{\mu=1}^{\nu-1} c_{\nu\mu} y_\mu(\tau) + \omega_\nu(\tau) \end{aligned} \right. \qquad \sum_1^0 = 0,$$

wobei die $y_\mu(t)$ sukzessiv zu berechnen sind.

Sei nun für einen gewissen Index k ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$),

$$|\varrho_\nu| < 1 \quad \text{für} \quad \nu \leqq k$$
$$|\varrho_\nu| > 1 \quad \text{für} \quad \nu > k,$$

so sind die k ersten Integrale von (4) beschränkt, wie auch $y_1(0), \ldots, y_k(0)$ gewählt werden mag. Denn für $|\varrho_1| < 1$ ist $y_1(t)$ folglich $\Phi_2(\tau)$ beschränkt, daher auch $y_2(t)$ für $|\varrho_2| < 1$ usw. Nach der obigen Auseinandersetzung ist $\Phi_{k+1}(\tau)$ beschränkt; wir wählen daher

$$y_{k+1}(0) = -\sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{\Phi_{k+1}(\tau)}{\varrho_{k+1}^{\tau+1}},$$

dann ist $y_{k+1}(t)$ und folglich $\Phi_{k+2}(\tau)$ beschränkt, daher kann

$$y_{k+2}(0) = -\sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{\Phi_{k+2}(\tau)}{\varrho_{k+2}^{\tau+1}},$$

gewählt werden, so dass $y_{k+2}(t)$ beschränkt bleibt. Allgemein wählt man für $\nu > k$

$$y_\nu(0) = -\sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{\Phi_\nu(\tau)}{\varrho_\nu^{\tau+1}},$$

wobei $\Phi_\nu(\tau)$ die in (5) gegebene Bedeutung hat und $y_\mu(t)$ sukzessiv zu berechnen sind. Hiernach ist

$$y_\nu(t) = -\varrho_\nu^t \sum_{\tau=t}^{\infty} \frac{\Phi_\nu(\tau)}{\varrho_\nu^{\tau+1}} = -\sum_{\xi=0}^{\infty} \frac{\Phi_\nu(t+\xi)}{\varrho_\nu^{\xi+1}} \qquad \nu = k+1, \ldots, n$$

auch beschränkt, was durch vollständige Induktion bewiesen wird.

Stelle ich die Forderung $\mathfrak{A}$, so lässt sich die Aussage über (1) auf das System (2) übertragen. Die obige Vermutung wird dann richtig und man darf sogar die Worte »im allgemeinen» durchstreichen, wenn man die Voraussetzung hinzufügt, *dass das lineare System*

$$x_\nu(t+1) = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\nu\mu}(t)\, x_\mu(t) + \psi_\nu(t) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{6}$$

für beliebige beschränkte $\psi_\nu(t)$ immer wenigstens ein beschränktes Integral haben soll. Diese Voraussetzung ist nicht immer von selbst erfüllt. Sie ist eine wesentlich neue Forderung. Die genauen Ergebnisse sind in § 7 und § 8 enthalten.

Die Antwort darauf, ob es immer ein beschränktes Integral gibt, kann aus den Integralen des homogenen Systems

$$x_\nu(t+1) = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\nu\mu}(t)\, x_\mu(t) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

erschlossen werden. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen sind für einen Spezialfall in Satz 1 niedergelegt, und in § 7 und § 8 zeigt es sich, dass der allgemeine Fall sich stets auf diesen Spezialfall zurückführen lässt.

Wir werden in dieser Arbeit nicht nur solche Zusatzfunktionen φ_ν betrachten, welche gegenüber den linearen Gliedern absolut sehr klein sind, sondern auch solche, die nur einer Beschränktheitsforderung genügen. Es handelt sich dann nicht um die für $t \to \infty$ nach Null strebenden Integrale, sondern um beschränkte Integrale.

§ 2.

Ein unerwartetes Beispiel.

Das System

$$\begin{cases} x_1(t+1) = e^{-a}\, x_1(t), & \left(\frac{1}{2} < a < \frac{1+e^{-\pi}}{2}\right) \\ x_2(t+1) = e^{(\sin\log(t+1) - 2a)(t+1) - (\sin\log t - 2a)t}\, x_2(t) \end{cases} \tag{7}$$

hat beschränkte Koeffizienten; denn es ist nach dem Mittelwertsatz, wenn τ eine geeignete Zahl des Intervalles $t < \tau < t + 1$ bedeutet,

$$|(t+1)\sin\log(t+1) - t\sin\log t| = |\cos\log\tau + \sin\log\tau| < 2.$$

Das allgemeine Integral von (7) ist:

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1 e^{-at} \\ x_2(t) = C_2 e^{(\sin\log t - 2a)t}. \end{cases}$$

Diese 2-parametrige Schar von Integralen hat die Eigenschaft, dass

$$\lim_{t\to\infty} (|x_1(t)| + |x_2(t)|) = 0 \tag{8}$$

und sogar

$$\lim_{t\to\infty} \frac{|x_1(t)| + |x_2(t)|}{e^{-ct}} = 0 \tag{9}$$

für $c < \mathrm{Min}\,(a,\ 2a - 1) = 2a - 1$.

Nun betrachten wir das abgeänderte System

$$\begin{cases} x_1(t+1) = e^{-a} x_1(t), \\ x_2(t+1) = e^{(\sin\log(t+1) - 2a)(t+1) - (\sin\log t - 2a)t}\, x_2(t) + x_1^2(t). \end{cases} \tag{10}$$

Die Zusatzfunktionen 0 und $x_1^2(t)$ werden für $|x_1(t)| + |x_2(t)| \to 0$ von zweiter Ordnung gegen Null streben, so dass man für die Integrale von (10) das gleiche Verhalten wie bei dem System (7) erwarten sollte.

Das allgemeine Integral von (10) ist aber

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1 e^{-at} \\ x_2(t) = C_2 e^{(\sin\log t - 2a)t} + C_1^2 e^{2a} e^{(\sin\log t - 2a)t} \sum_{\tau=0}^{t-1} e^{-(\tau+1)\sin\log(\tau+1)}. \end{cases}$$

Wir wählen eine natürliche Zahl n so gross und zwei positive Zahlen ε_n, δ_n so klein, dass einerseits die Zahlen

$$t = e^{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi + \varepsilon_n}, \qquad \tau_0 + 1 = e^{\left(2n-\frac{1}{2}\right)\pi + \delta_n}$$

ganzzahlig werden, anderseits

$$\cos\varepsilon_n - 2a + e^{-\pi + \delta_n - \varepsilon_n}\cos\delta_n$$

oberhalb einer positiven Schranke ϱ bleibt. Wegen $2a < 1 + e^{-\pi}$ ist das möglich. Für ein solches t und τ_0 ist

$$\sin \log t = \sin\left[\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi + \varepsilon_n\right] = \cos \varepsilon_n,$$

$$\sin \log (\tau_0 + 1) = -\cos \delta_n.$$

Es ist aber

$$\tau_0 + 1 = t e^{-\pi + \delta_n - \varepsilon_n} < t.$$

Daher ist

$$e^{(\sin \log t - 2a)\, t} \sum_{\tau=0}^{t-1} e^{-(\tau+1)\sin\log(\tau+1)} > e^{(\sin \log t - 2a)\, t}\, e^{-(\tau_0+1)\sin\log(\tau_0+1)} =$$

$$= e^{(\cos \varepsilon_n - 2a)\, t + \cos \delta_n (\tau_0 + 1)} = e^{(\cos \varepsilon_n - 2a + \cos \delta_n e^{-\pi + \delta_n - \varepsilon_n})\, t} > e^{\varrho t}.$$

Hiernach kann $x_2(t)$ für $t \to \infty$ nur dann nach Null gehen, wenn $C_1 = 0$ ist, und in diesem Falle gilt auch wirklich die Beziehung (8) und sogar (9) für genügend kleines c. Im Gegensatz zu System (7) genügt also nicht jedes Integral von (10) der Forderung (8) sondern nur einer ein-parametrigen Schar von Integralen kommt diese Eigenschaft zu.

§ 3.

Vorbereitende Sätze.

Wir betrachten zunächst das folgende spezielle System von linearen Differenzengleichungen

$$(11) \qquad x_\nu(t+1) = \sum_{\mu=1}^{\nu} g_{\nu\mu}(t)\, x_\mu(t) + \omega_\nu(t) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Es ist dadurch ausgezeichnet, dass die Koeffizienten $g_{\nu\mu}(t)$ für $\nu < \mu$ gleich Null sind. Für jedes ν enthalten daher die ersten ν Gleichungen auch nur die ersten ν Unbekannten $x_\nu(t)$. Für ein solches System wollen wir den folgenden Satz beweisen.

Satz 1. *Die Funktionen*

$$g_{\nu\mu}(t) \qquad (1 \leqq \mu \leqq \nu \leqq n)$$

seien für $t = 0, 1, 2 \ldots$ gegeben und beschränkt. Es werde zur Abkürzung

$$\prod_{\tau=0}^{t-1} g_{\nu\nu}(\tau) = G_\nu(t)$$

gesetzt. Dann besteht die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass das System (11) *bei jeder Wahl der beschränkten Funktionen $\omega_\nu(t)$ wenigstens ein beschränktes Integral hat, darin, dass für jedes einzelne ν aus der Menge $\nu = 1, 2, \ldots, n$ entweder die Bedingung*

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} G_\nu(t) & \textit{beschränkt} \\ \sum\limits_{\tau=0}^{t-1} \prod\limits_{\varrho=\tau+1}^{t-1} |g_{\nu\nu}(\varrho)| & \textit{beschränkt} \end{cases} \qquad \left(\prod_t^{t-1} = 1\right)$$

oder die Bedingung

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} G_\nu(t) & \textit{nicht beschränkt} \\ G_\nu(t) \sum\limits_{\tau=t}^{\infty} \dfrac{1}{|G_\nu(\tau+1)|} & \textit{vorhanden und beschränkt}^{1} \end{cases}$$

erfüllt ist.

Man beachte dabei, dass die Bedingungen (A) und (B) für ein und denselben Index ν sich gegenseitig ausschliessen. Ehe wir Satz 1 beweisen, wollen wir einige Beispiele betrachten.

1. Beispiel: $x(t+1) = \sin\frac{\pi}{2} t x(t) + 1$. Hier ist $g(t) g(t-1) = 0$, also

$$\sum_{\tau=0}^{t-1} \prod_{\varrho=\tau+1}^{t-1} |g(\varrho)| = 1 + |g(t-1)| = 1 + \left|\sin\frac{\pi}{2}(t-1)\right|$$

beschränkt, so dass (A) erfüllt ist. In der Tat hat die Gleichung die Lösung

$$x(0) \text{ beliebig}, \qquad x(t) = \sin\frac{\pi}{2}(t-1) + 1 \text{ für } t > 0,$$

welche offenbar beschränkt ist.

2. Beispiel: $x(t+1) = \dfrac{t}{t+1} x(t) + 1$. Hier ist $G(t) = 0$.

$$\sum_{\tau=0}^{t-1} \prod_{\varrho=\tau+1}^{t-1} |g(\varrho)|$$

---

[1] Sowohl bei (A) als bei (B) kann die erste der beiden Forderungen weggelassen werden, da sie, wie man leicht sieht, infolge der zweiten von selbst erfüllt ist.

nicht beschränkt, also weder (A) noch (B) erfüllt. In der Tat gibt es auch nur die Lösung

$$x(0) = \text{beliebig}, \qquad x(t) = \frac{t+1}{2},$$

welche sicherlich nicht beschränkt ist.

3. Beispiel: $x(t+1) = 2\,x(t) + 1$. Hier ist $G(t) = 2^t$ nicht beschränkt

$$G(t) \sum_{\tau=t}^{\infty} \frac{1}{|G(\tau+1)|}$$

vorhanden und beschränkt, also (B) erfüllt. In der Tat gibt es eine beschränkte Lösung, nämlich $x(t) = -1$.

4. Beispiel: $x(t+1) = \frac{t+2}{t+1}\,x(t) + 1$. Hier ist $G(t) = t+1$ nicht beschränkt,

$$G(t) \sum_{\tau=t}^{\infty} \frac{1}{|G(\tau+1)|} = (t+1) \sum_{\tau=t}^{\infty} \frac{1}{\tau+2}$$

nicht vorhanden, also weder (B) noch (A) erfüllt. In der Tat ist die allgemeine Lösung die folgende:

$$x(t) = (t+1)\left(C + \sum_{\tau=0}^{t-1} \frac{1}{\tau+2}\right).$$

Diese ist für keine Wahl von C beschränkt.

Den Beweis von Satz 1 verbinden wir mit dem Beweis von

Satz 2. *Wenn das System (11) bei jeder Wahl der beschränkten Funktionen $\omega_\nu(t)$ wenigstens ein beschränktes Integral hat, wenn also die Bedingungen von Satz 1 erfüllt sind, so gilt für jedes beschränkte Integral des homogenen Systems*

$$x_\nu(t+1) = \sum_{\mu=1}^{\nu} g_{\nu\mu}(t)\, x_\mu(\tau) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

die Beziehung

$$\lim_{t \to \infty} \sum_{\mu=1}^{n} |x_\mu(t)| = 0.$$

Dem Beweis der beiden Sätze schicken wir einen Hilfssatz voraus, der sich später auch als nützlich erweisen wird.

Hilfssatz. *Ist die Funktion*

$$\sum_{\tau=0}^{t-1} \prod_{\varrho=\tau+1}^{t-1} |g(\varrho)| \qquad \text{für} \qquad t = 1, 2, \ldots$$

beschränkt, so gilt für jedes feste τ

$$\lim_{t \to \infty} \prod_{\varrho=\tau+1}^{t-1} g(\varrho) = 0.$$

Insbesondere ist

$$\lim_{t \to \infty} G(t) = 0.$$

Beweis. Verschwindet $g(t)$ *für kein positives ganzzahliges* t, so ist nach den Voraussetzungen

$$\sum_{\tau=0}^{t-1} \prod_{\varrho=\tau+1}^{t-1} |g(\varrho)| = |G(t)| \sum_{\tau=0}^{t-1} \frac{1}{|G(\tau+1)|} \leqq L$$

also auch

$$|G(t)| \leqq L,$$

daher

$$|G(t)| \frac{t}{L} \leqq L.$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$\lim_{t \to \infty} G(t) = 0.$$

Durch Division mit der nicht verschwindenden endlichen Grösse $G(\tau + 1)$ ergibt sich

$$\lim_{t \to \infty} \prod_{\varrho=\tau+1}^{t-1} g(\varrho) = 0.$$

Verschwindet dagegen $g(t)$ *für unendlich viele* t-*Werte,* so ist, was τ auch sei, für genügend grosse t:

$$\prod_{\varrho=\tau+1}^{t-1} g(\varrho) = 0,$$

also die Behauptung richtig.

Es bleibt noch der Fall übrig, wo $g(t)$ *nur für endlich viele* t *verschwindet.* Bedeutet dann t_0 die grösste dieser Zahlen, so ist nach den Voraussetzungen

$$\sum_{\tau=t_0}^{t-1} \prod_{\varrho=\tau+1}^{t-1} |g(\varrho)| = \prod_{\varrho=t_0+1}^{t-1} |g(\varrho)| \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \frac{1}{\prod\limits_{\varrho=t_0+1}^{t} |g(\varrho)|} \leqq L$$

also auch

$$\prod_{\varrho=t_0+1}^{t-1} |g(\varrho)| \leqq L,$$

oder

$$\prod_{\varrho=t_0+1}^{t-1} |g(\varrho)| \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \frac{1}{L} \leqq L,$$

also

$$\prod_{\varrho=t_0+1}^{t-1} |g(\varrho)| \leqq \frac{L^2}{t-t_0}.$$

Hieraus ergibt sich

$$\lim_{t\to\infty} \prod_{\varrho=t_0+1}^{t-1} g(\varrho) = 0.$$

Dividiert man diese Gleichung durch die nicht verschwindende endliche Grösse $\prod\limits_{\varrho=t_0+1}^{\tau} g(\varrho)$, so folgt

$$\lim_{t\to\infty} \prod_{\varrho=\tau+1}^{t-1} g(\varrho) = 0.$$

Damit ist der Hilfssatz vollständig bewiesen.

Nun wenden wir uns dem Beweis von Satz 1 und Satz 2 zu, und zwar behandeln wir zunächst den Fall $n = 1$; hier handelt es sich um die eine Differenzengleichung

$$x_1(t+1) = g_{11}(t)\, x_1(t) + \omega_1(t), \tag{12}$$

welche das allgemeine Integral

$$x_1(t) = c_1\, G_1(t) + \sum_{\tau=0}^{t-1} \omega_1(\tau) \prod_{\varrho=\tau+1}^{t-1} g_{11}(\varrho) \tag{13}$$

hat[1].

Beweis zu Satz 1 für $n = 1$: Nehmen wir den Fall $\boldsymbol{G_1(t) \neq 0}$ vorweg und setzen wir für $\omega_1(t)$ die spezielle Funktion

$$\omega_1(t) = \frac{G_1(t+1)}{|G_1(t+1)|},$$

[1] Dabei ist $G_1(0) = 1$ zu setzen, ebenso wie später stets $G_\nu(0) = 1$. Man beachte, dass $G_\nu(t)$ bisher nur für $\tau = 1, 2, 3, \ldots$ definiert war (vgl. Satz 1).

die ja offenbar beschränkt, nämlich absolut gleich I ist, so erhalten wir, wegen

$$\prod_{\varrho=\tau+1}^{t-1} g_{11}(\varrho) = G_1(t)\,\frac{\mathrm{I}}{G_1(\tau+\mathrm{I})},$$

$$x_1(t) = G_1(t)\left(c_1 + \sum_{\tau=0}^{t-1} \frac{\mathrm{I}}{|\,G_1(\tau+\mathrm{I})\,|}\right). \tag{13 a}$$

Wenn nun $G_1(t)$ *beschränkt* ist, dann muss, damit ein beschränktes Integral vorhanden ist, offenbar auch

$$G_1(t) \sum_{\tau=0}^{t-1} \frac{\mathrm{I}}{|\,G_1(\tau+\mathrm{I})\,|}$$

beschränkt sein. Umgekehrt ist in diesem Fall das Integral (13 a) und allgemeiner auch (13) für jede beschränkte Funktion $\omega_1(t)$ wirklich beschränkt und zwar bei jeder Wahl von c_1.

Wenn dagegen $G_1(t)$ *nicht beschränkt* ist, so kann das Integral (13 a) nur dann beschränkt sein, wenn für die Konstante c_1 der Wert

$$-\sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{\mathrm{I}}{|\,G_1(\tau+\mathrm{I})\,|}$$

gewählt wird. Diese Reihe muss also konvergieren und die rechte Seite von (13 a) geht dann über in

$$-G(t) \sum_{\tau=t}^{\infty} \frac{\mathrm{I}}{|\,G_1(\tau+\mathrm{I})\,|}. \tag{14}$$

Es ist daher notwendig, dass diese Funktion beschränkt ist. Das ist aber auch hinreichend, denn das Integral (13) geht dann für den speziellen Wert

$$c_1 = -\sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{\omega_1(\tau)}{G_1(\tau+\mathrm{I})}$$

über in

$$x_1(t) = -\,G_1(t) \sum_{\tau=t}^{\infty} \frac{\omega_1(\tau)}{G_1(\tau+\mathrm{I})}$$

und diese Funktion ist wegen der Beschränktheit von (14) augenscheinlich für jede beschränkte Funktion $\omega_1(t)$ selbst beschränkt.

Nun bleibt noch der Fall, dass $g_{11}(t)$ für endlich oder unendlich viele t **verschwindet**, etwa für

$$t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_\nu < t_{\nu+1} < \cdots.$$

Dann gibt es zu jedem (hinreichend grossen) t ein grösstes t_ν derart, dass $t_\nu < t$ und $g_{11}(t_\nu) = 0$ ist. Dann ist

$$(13^*) \qquad x_1(t) = \sum_{\tau=t_\nu}^{t-1} \omega_1(\tau) \prod_{\varrho=\tau+1}^{t-1} g_{11}(\varrho)$$

$$= \prod_{\varrho=t_\nu+1}^{t-1} g_{11}(\varrho) \left[\omega_1(t_\nu) + \frac{\omega_1(t_\nu+1)}{g_{11}(t_\nu+1)} + \cdots + \frac{\omega_1(t-1)}{g_{11}(t_\nu+1)\ldots g_{11}(t-1)}\right].$$

Wir wählen

$$\omega_1(t_\nu) = 1, \quad \omega_1(t_\nu+1) = \frac{g_{11}(t_\nu+1)}{|g_{11}(t_\nu+1)|}, \ldots, \quad \omega_1(t-1) = \frac{g_{11}(t_\nu+1)\ldots g_{11}(t-1)}{|g_{11}(t_\nu+1)\ldots g_{11}(t-1)|}.$$

dann ist

$$|x_1(t)| = \sum_{\tau=t_\nu}^{t-1} \prod_{\varrho=\tau+1}^{t-1} |g_{11}(\varrho)| = \sum_{\tau=0}^{t-1} \prod_{\varrho=\tau+1}^{t-1} |g_{11}(\varrho)|.$$

Damit ein beschränktes Integral existiert, muss also diese Summe beschränkt sein. Umgekehrt ist dann das Integral

$$x_1(t) = \sum_{\tau=0}^{t-1} \omega_1(\tau) \prod_{\varrho=\tau+1}^{t-1} g_{11}(\varrho)$$

für jede beschränkte Funktion $\omega_1(t)$ auch wirklich beschränkt.

Damit ist der Satz 1 für $n = 1$ bewiesen.

Beweis von Satz 2 für $n = 1$: Es habe nun die inhomogene Gleichung (12) für jedes beschränkte $\omega_1(t)$ wenigstens ein beschränktes Integral; dann folgt speziell für $\omega_1(t) = 0$ aus (13)

$$x_1(t) = c_1 G_1(t).$$

Wenn daher $G_1(t)$ *nicht beschränkt* ist, so kann $x_1(t)$ nur für $c_1 = 0$ beschränkt sein und dann ist dauernd $x_1(t) = 0$, also gewiss $\lim\limits_{\tau \to \infty} x_1(t) = 0$.

Wenn dagegen $G_1(t)$ *beschränkt* und folglich nach Voraussetzung (vgl. Bed. (A) in Satz 1) auch

$$\sum_{\tau=0}^{t-1} \prod_{\varrho=\tau+1}^{t-1} |g_{11}(\varrho)|$$

beschränkt ist, so ist nach dem Hilfssatz

$$\lim_{t \to \infty} G_1(t) = 0$$

und daher wiederum

$$\lim_{t \to \infty} x_1(t) = 0.$$

Damit ist auch Satz 2 für $n = 1$ bewiesen.

Der allgemeine Beweis von Satz 1: Nunmehr beweisen wir die Sätze 1 und 2 durch vollständige Induktion. Wir wollen annehmen, dass beide bereits für das System von $n - 1$ Gleichungen

$$x_\nu(t+1) = \sum_{\mu=1}^{\nu} g_{\nu\mu}(t)\, x_\mu(t) + \omega_\nu(t) \qquad (\nu = 1, \ldots, n-1) \tag{15}$$

gelten. Fügen wir noch die n:te Gleichung mit der neuen Unbekannten $x_n(t)$ hinzu

$$x_n(t+1) = g_{nn}(t)\, x_n(t) + \sum_{\mu=1}^{n-1} g_{n\mu}(t)\, x_\mu(t) + \omega_n(t), \tag{16}$$

so entsteht das System (11).

Für $\boldsymbol{G_n(t) \neq 0}$ ergibt sich aus (16)

$$x_n(t) = G_n(t) \left[c_n + \sum_{\tau=0}^{t-1} \left(\sum_{\mu=1}^{n-1} g_{n\mu}(\tau)\, x_\mu(\tau) + \omega_n(\tau) \right) \frac{1}{G_n(\tau+1)} \right], \tag{17}$$

wobei unter $G_n(0)$ der Wert 1 unter $\sum_0^{-1}$ der Wert Null zu verstehen ist. Wählen wir nun speziell

$$\omega_1(t) = 0, \ldots, \omega_{n-1}(t) = 0,$$

so gilt für jedes beschränkte Integral $x_\nu(t)$, weil der Satz 2 für das System (15) bereits gelten soll, die Beziehung

$$\lim_{t \to \infty} \sum_{\mu=1}^{n-1} |x_\mu(t)| = 0. \tag{18}$$

Wählen wir ausserdem für $\omega_n(t)$ die Funktion

$$\omega_n(t) = \frac{G_n(t+1)}{|G_n(t+1)|},$$

so nimmt Formel (17) die Gestalt an

$$x_n(t) = G_n(t)\left(c_n + \sum_{\tau=0}^{t-1}[1 + H(\tau)]\frac{1}{|G_n(\tau+1)|}\right), \tag{17a}$$

wobei zur Abkürzung

$$\sum_{\mu=1}^{n-1} g_{n\mu}(t)\, x_\mu(t)\frac{|G_n(t+1)|}{G_n(t+1)} = H(t) \tag{19}$$

gesetzt ist, sodass wegen (18)

$$\lim_{t\to\infty} H(t) = 0 \tag{20}$$

ist. Wenn daher $G_n(t)$ *beschränkt* ist, dann muss, damit ein beschränktes Integral vorhanden ist, anch die Funktion

$$|G_n(t)|\sum_{\tau=0}^{t-1}\frac{1}{|G_n(\tau+1)|}$$

beschränkt sein. Umgekehrt ist in diesem Fall das Integral (17 a) und allgemein auch das Integral (17) bei beschränkten $x_1(t), \ldots, x_{n-1}(t)$ und beliebiger beschränkter Zusatzfunktion $\omega_n(t)$ wirklich beschränkt und zwar bei jeder Wabl von c_n. Wenn $G_n(t)$ *nicht beschränkt* ist, so muss in (17 a), damit $x_n(t)$ beschränkt ist, c_n einen ganz bestimmten Wert haben, nämlich $c_n = -\sum_{\tau=0}^{\infty}[1 + H(\tau)]\frac{1}{|G_n(\tau+1)|}$, und zwar geht dann die rechte Seite von (17 a) über in

$$-G_n(t)\sum_{\tau=t}^{\infty}[1 + H(\tau)]\frac{1}{|G_n(\tau+1)|}.$$

Die Existenz und Beschränktheit dieser Funktion ist aber gleichbedeutend mit der Existenz und Beschränktheit von

$$G_n(t)\sum_{\tau=t}^{\infty}\frac{1}{|G_n(\tau+1)|} \tag{21}$$

Es ist daher notwendig, dass diese Funktion beschränkt ist. Das ist aber auch hinreichend; denn das Integral (17) geht dann für einen geeigneten Spezialwert c_n über in

$$x_n(t) = -G_n(t)\sum_{\tau=t}^{\infty}\left[\sum_{\mu=1}^{n-1} g_{n\mu}(\tau)\,x_\mu(\tau) + \omega_n(\tau)\right]\frac{1}{G_n(\tau+1)}$$

und diese Funktion ist wegen der Beschränktheit von (21) augenscheinlich für beschränkte $x_1(t), \ldots, x_{n-1}(t)$ und für ein beliebiges, beschränktes $\omega_n(t)$ stets selbst beschränkt.

Wenn dagegen $g_{nn}(t)$ für gewisse t **verschwindet**, etwa für $t_0 < t_1 < \cdots < < t_{\nu-1} < t_\nu < t_{\nu+1} < \cdots$, gleichgültig, ob endlich oder unendlich viele, so gibt es zu jedem (hinreichend grossen) t ein grösstes t_ν derart, dass $t_\nu < t$ und $g_{nn}(t_\nu) = 0$ ist. Dann ist

$$(17^*)\quad \begin{cases} x_n(t) = \displaystyle\sum_{\tau=t_\nu}^{t-1}\varpi_n(\tau)\prod_{\varrho=\tau+1}^{t-1} g_{nn}(\varrho) = \prod_{\varrho=t_\nu+1}^{t-1} g_{nn}(\varrho)\left[\varpi_n(t_\nu) + \frac{\varpi_n(t_\nu+1)}{g_{nn}(t_\nu+1)} + \cdots \right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left. + \dfrac{\varpi_n(t-1)}{g_{nn}(t_\nu+1)\cdots g_{nn}(t-1)}\right] \\ \varpi_n(\tau) = \displaystyle\sum_{\mu=1}^{n-1} g_{n\mu}(\tau)\,x_\mu(\tau) + \omega_n(\tau). \end{cases}$$

Wir wählen

$$\varpi_n(t_\nu) = 1\,,\ \varpi_n(t_\nu+1) = \frac{g_{nn}(t_\nu+1)}{|g_{nn}(t_\nu+1)|}, \ldots, \varpi_n(t-1) = \frac{g_{nn}(t_\nu+1)\cdots g_{nn}(t-1)}{|g_{nn}(t_\nu+1)\cdots g_{nn}(t-1)|},$$

dann ist

$$|x_n(t)| = \sum_{\tau=t_\nu}^{t-1}\prod_{\varrho=\tau+1}^{t-1}|g_{nn}(\varrho)| = \sum_{\tau=0}^{t-1}\prod_{\varrho=\tau+1}^{t-1}|g_{nn}(\varrho)|.$$

Damit das Integral (17*) beschränkt bleibt, muss die letzte Summe beschränkt sein. Ist dies erfüllt, so folgt auch die Beschränktheit des Integrals (17*) für jedes beschränkte $\omega_n(t)$.

Der allgemeine Beweis von Satz 2: Nunmehr besitze das System (11) für jedes beschränkte $\omega_\nu(t)$ ein beschränktes Integral und es mögen alle $\omega_\nu(t)$ gleich Null gesetzt werden. Dann gilt für $G_n(t) \neq 0$ wieder die Formel (18) und folglich auch (20). Die Formel (17) geht aber jetzt über in

$$(17\,\text{b})\qquad x_n(t) = G_n(t)\left(c_n + \sum_{\tau=0}^{t-1} H(\tau)\frac{1}{|G_n(\tau+1)|}\right),$$

wobei $H(t)$ wieder die Bedeutung (19) hat. Ist dann $G_n(t)$ *nicht beschränkt*, also nach Voraussetzung (vgl. Bedingung (B) in Satz 1) die Funktion (21) beschränkt, so muss in (17 b), wenn $x_n(t)$ beschränkt sein soll, c_n einen ganz bestimmten Wert haben, und zwar geht dann (17 b) über in

$$x_n(t) = -\,G_n(t)\sum_{\tau=t}^{\infty} H(t)\frac{1}{|G_n(\tau+1)|}.$$

Daraus folgt aber wegen (20) sogleich auch $\lim\limits_{t\to\infty} x_n(t) = 0$. Wenn dagegen $G_n(t)$ *beschränkt* und folglich nach Voraussetzung (vgl. Bedingung (A) in Satz 1) auch

$$|G_n(t)|\sum_{\tau=0}^{t-1}\frac{1}{|G_n(\tau+1)|}$$

beschränkt ist, so ist nach dem Hilfssatz gewiss $\lim\limits_{t\to\infty} G_n(t) = 0$. Wegen (19) folgt aber aus (17 b)

$$\begin{aligned} x_n(t) &= c_n\,G_n(t) + G_n(t)\sum_{\tau=0}^{t-1} H(\tau)\frac{1}{|G_n(\tau+1)|} \\ &= c_n\,G_n(t) + G_n(t)\sum_{\tau=0}^{t_0-1}\sum_{\mu=0}^{n-1} g_{n\mu}(\tau)\,x_\mu(\tau)\frac{1}{G_n(\tau+1)} + G_n(t)\sum_{\tau=t_0}^{t-1} H(\tau)\frac{1}{|G_n(\tau+1)|}. \end{aligned}$$

Wählt man nun nach (20) t_0 so gross, dass die Ungleichung

$$|H(t)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad t \geqq t_0$$

gilt, wobei ε eine kleine positive Zahl ist, so ergibt sich

$$\begin{aligned} |x_n(t) - c_n G_n(t)| &= \left| G_n(t)\sum_{\tau=0}^{t-1} H(\tau)\frac{1}{|G_n(\tau+1)|}\right| \leqq |G_n(t)|\sum_{\tau=0}^{t_0-1}\sum_{\mu=1}^{n-1}\left| g_{n\mu}(\tau)\,x_\mu(\tau)\frac{1}{G_n(\tau+1)}\right| \\ &\quad + \varepsilon\,|G_n(t)|\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\frac{1}{|G_n(\tau+1)|} \leqq |G_n(t)|\sum_{\tau=0}^{t_0-1}\sum_{\mu=1}^{n-1}\left|\frac{g_{n\mu}(\tau)\,x_\mu(\tau)}{G_n(\tau+1)}\right| + \varepsilon\,L_1. \end{aligned}$$

Nun ist wegen $\lim\limits_{t\to\infty} G_n(t) = 0$, auch

$$|c_n\,G_n(t)| < \varepsilon, \quad \left| G_n(t)\sum_{\tau=0}^{t_0-1}\sum_{\mu=1}^{n-1} g_{n\mu}(\tau)\,x_\mu(\tau)\frac{1}{G_n(\tau+1)}\right| < \varepsilon$$

für genügend grosse t, also $|x_n(t)| < 2\varepsilon + \varepsilon L_1$. Hieraus folgt offenbar, da man ε beliebig klein wählen kann,

$$\lim_{t\to\infty} x_n(t) = 0.$$

Ist dagegen $G_n(t) = 0$, so is wegen $\lim_{t\to\infty} \sum_{\mu=1}^{n-1} |x_\mu(t)| = 0$ von einem gewissen t_1 an

$$\sum_{\mu=1}^{n-1} |g_{n\mu}(t)\, x_\mu(t)| < \varepsilon.$$

Daher ist

$$|x_n(t)| \leqq C \sum_{\tau=0}^{t_1-1} \prod_{\varrho=\tau+1}^{t-1} |g_{nn}(\varrho)| + \varepsilon L_1,$$

wobei C eine positive Konstante ist. Nach dem Hilfssatz von § 3 ist also

$$\lim_{t\to\infty} x_n(t) = 0.$$

Damit sind die beiden Sätze 1 und 2 vollständig bewiesen.

Eine wesentliche Ergänzung zu Satz 1 ist der

Satz 3. *Wenn die Bedingungen von Satz 1 erfüllt sind, so ist in dem allgemeinen beschränkten Integral des linearen Differenzengleichungssystems* (11) *die Anzahl der willkürlichen Konstanten stets so gross wie die Anzahl derjenigen Indizes ν, für welche die Bedingung* (A) *erfüllt ist, und zwar dürfen diejenigen Anfangswerte $x_\nu(0) = c_\nu$ willkürlich gewählt werden, für deren Index ν die Bedingung* (A) *erfüllt ist.*

Wenn insbesondere für **jeden** *Index ν die Bedingung* (A) *erfüllt ist, so ist jedes Integral beschränkt. Wenn dagegen für* **jeden** *Index die Bedingung* (B) *erfüllt ist, so gibt es nur ein einziges beschränktes Integral.*

Beweis. Falls $n = 1$ ist, so handelt es sich wieder um die eine Differenzengleichung (12) mit dem allgemeinen Integral (13), bezw. (13*), wobei c_1 gleich $x_1(0)$ ist. Aus (13) bezw. (13*) erkennt man sogleich folgendes: Wenn die Bedingung (A) erfüllt, also $G_1(t)$ beschränkt ist, so ist $x_1(t)$ bei jeder Wahl von c_1 beschränkt; wenn dagegen die Bedingung (B) erfüllt, also $G_1(t)$ nicht beschränkt ist, so ist $x_1(t)$ nur bei einer eindeutig bestimmten Wahl von c_1 beschränkt. Damit ist der Satz 3 bereits für $n = 1$ bewiesen.

Den allgemeinen Beweis können wir wieder durch vollständige Induktion erledigen, indem wir annehmen, dass der Satz 3 für das System der $n - 1$

Gleichungen (15) bereits gelte. Fügen wir dann wieder die n^{te} Gleichung (16) mit dem allgemeinen Integral (17) bezw. (17*) hinzu, wobei c_n die Bedeutung $x_n(0)$ hat, so können wir aus (17) bezw. (17*) folgendes schliessen: Wenn für $\nu = n$ die Bedingung (A) erfüllt ist, so ist $x_n(t)$ bei jeder Wahl von c_n beschränkt; wenn dagegen für $\nu = n$ die Bedingung (B) erfüllt, also $G_n(t)$ nicht beschränkt ist, so ist $x_n(t)$ nur bei eindeutig bestimmter Wahl von c_n beschränkt. Damit ist Satz 3 bewiesen.

Eine unmittelbare Folgerung aus Satz 3 ist der

Satz 4. *Wenn die Bedingungen von Satz 1 erfüllt sind, sodass für k Indizes ν die Bedingung* (A) *und für die $n-k$ anderen Indizes die Bedingung* (B) *erfüllt ist, so hat das lineare homogene Differenzengleichungssystem*

$$x_\nu(t+1) = \sum_{\mu=1}^{\nu} g_{\nu\mu}(t)\, x_\mu(t) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

genau k linear unabhängige beschränkte Integrale. Dabei darf k jede der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, n$ bedeuten. Der Fall $k = 0$ besagt natürlich, dass kein beschränktes Integral vorhanden ist ausser dem trivialen $x_\nu(t) = 0$.

§ 4.

Stabilität bei einem speziellen System.

Satz 5. *Die gegebenen Funktionen*

$$g_{\nu\mu}(t) \qquad (1 \leqq \mu \leqq \nu \leqq n)$$

seien für $t = 0, 1, 2, \ldots$ beschränkt. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass das Differenzengleichungssystem

$$x_\nu(t+1) = \sum_{\mu=1}^{\nu} g_{\nu\mu}(t)\, x_\mu(t) + \chi_\nu(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

für jede beliebige Wahl der im Bereich

$$t = 0, 1, 2, \ldots, \qquad x_\lambda = \text{beliebig} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

beschränkten Funktionen $\chi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)$ nur beschränkte Integrale hat, ist, dass die n Funktionen

$$\sum_{\tau=0}^{t-1} \prod_{\varrho=\tau+1}^{t-1} |g_{\nu\nu}(\varrho)| \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

beschränkt sind.

Ist sie erfüllt und genügen ausserdem die Funktionen χ_ν in einem Bereich der Form

$$t = 0, 1, 2, \ldots \qquad |x_\lambda| \leqq a \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

den weiteren Bedingungen

$$|\chi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqq \gamma \sum_{\mu=1}^{n} |x_\mu| \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

wobei γ eine hinreichend kleine (von a und den $g_{\nu\mu}(t)$ abhängende) Konstante ist, so ist für jedes Integral, dessen Anfangswerte $x_\nu(0)$ absolut hinreichend klein sind, dauernd $|x_\nu(t)| \leqq a$ und es gilt sogar die Beziehung

$$\lim_{t \to \infty} \sum_{\mu=1}^{n} x_\mu(t) = 0.$$

Dass die angegebene Bedingung notwendig ist, folgt unmittelbar aus den Sätzen 1 und 3. Dass sie hinreichend ist und dass die weiteren Behauptungen von Satz 5 zutreffen, wird bewiesen sein, wenn es gelingt, den nachstehenden schärferen Satz zu beweisen.

Satz 6. *Es sei für $t = 0, 1, 2, \ldots$ $|x_\lambda| \leqq b\, \alpha^{n-\lambda}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, n)$, wenn $\prod_{\tau=0}^{t-1} g_{\nu\nu}(\tau) = G_\nu(t)$, $\prod_0^{-1} = 1$, $\sum_0^{-1} = 0$ gesetzt wird,*

$$|g_{\nu\mu}(t)| \leqq K,$$

$$|G_\nu(t)| \leqq L_1 \qquad (\text{wegen } G_\nu(0) = 1 \text{ ist } L_1 \geqq 1)$$

$$\sum_{\tau=0}^{t-1} \prod_{\varrho=\tau+1}^{t-1} |g_{\nu\nu}(\varrho)| \leqq L_2 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

$$|\chi_\nu(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)| \leqq K b \frac{1}{1-\alpha} \alpha^n,$$

wobei b, α, K, L_1, L_2 positive Konstanten sind, für die

$$\alpha < 1, \qquad \frac{K L_2 \alpha}{1-\alpha} < 1$$

ist. Bedeutet dann c diejenige positive Zahl, für welche

$$\frac{c}{b} L_1 + \frac{K L_2 \alpha}{1 - \alpha} = 1, \quad (\text{also } c < b \text{ wegen } L_1 \geqq 1),$$

so ist jedes Integral des Differenzengleichungssystems

$$x_\nu(t+1) = \sum_{\mu=1}^{\nu} g_{\nu\mu}(t) x_\mu(t) + \chi_\nu(t, x_1(t), \ldots, x_\nu(t)) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

dessen Anfangswerte $x_\nu(0)$ den Bedingungen

$$|x_\nu(0)| \leqq c\,\alpha^{n-\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

genügen, für $t = 0, 1, 2, \ldots$ dauernd vorhanden und genügt den Ungleichungen

$$|x_\nu(t)| \leqq b\,\alpha^{n-\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Wenn die Funktionen χ_ν noch den weiteren Bedingungen

$$|\chi_\nu(t, x_1, \ldots, x_\nu)| \leqq \frac{1}{n} \frac{K}{1-\alpha} \sum_{\mu=1}^{n} \alpha^\mu |x_\mu| \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

genügen, so ist ausserdem

$$\lim_{t \to \infty} \sum_{\mu=1}^{n} |x_\mu(t)| = 0.$$

Um Satz 6 zu beweisen, definieren wir eine Funktion $\chi_\nu^*(t, x_1, \ldots, x_n)$, die in dem Bereich

$$t = 0, 1, 2, \ldots, \qquad |x_\lambda| \leqq b\alpha^{n-\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

überall mit der Funktion $\chi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)$ sich deckt, und ausserhalb dieses Bereiches identisch verschwindet. Das zu untersuchende Differenzengleichungssystem kann daher auch in der Form

$$x_\nu(t+1) = g_{\nu\nu}(t) x_\nu(t) + \sum_{\mu=1}^{\nu-1} g_{\nu\mu}(t) x_\mu(t) + \chi_\nu^*(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

geschrieben werden, wobei unter dem Zeichen $\sum_{0}^{-1}$ stets Null zu verstehen ist. Hieraus folgt sogleich

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} x_\nu(t) &= G_\nu(t)\,x_\nu(0) + \sum_{\tau=0}^{t-1} \Phi_\nu(\tau) \prod_{\varrho=\tau+1}^{t-1} g_{\nu\nu}(\varrho)\\ \Phi_\nu(\tau) &= \sum_{\mu=1}^{\nu-1} g_{\nu\mu}(\tau)\,x_\mu(\tau) + \chi_\nu^*(\tau, x_1(\tau), \ldots, x_n(\tau)). \end{aligned}\right.$$

Wegen $|x_1(0)| \leqq c\alpha^{n-1}$ und $c < b$ gilt nach (22) zunächst die Ungleichung

$$|x_1(t)| \leqq L_1 c\alpha^{n-1} + Kb\frac{\alpha^n}{1-\alpha} L_2 = b\alpha^{n-1}\left(\frac{c}{b} L_1 + \frac{K L_2 \alpha}{1-\alpha}\right) = b\alpha^{n-1}$$

für $t = 1, 2, 3, \ldots$. Die zu beweisenden Ungleichungen

$$|x_\nu(t)| \leqq b\alpha^{n-\nu}$$

gelten also mindestens für $\nu = 1$. Solange sie aber für $\nu \leqq \lambda - 1$ gelten, ist auf Grund der im ersten Teil von Satz 6 geforderten Ungleichungen

$$\left|\sum_{\mu=1}^{\lambda-1} g_{\lambda\mu}(t)\,x_\mu(t) + \chi_\lambda^*(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))\right| \leqq \sum_{\mu=1}^{\lambda-1} K b\alpha^{n-\mu} + \frac{Kb\alpha^n}{1-\alpha} - \frac{Kb\alpha}{1-\alpha}\alpha^{n-\lambda}$$

und aus (22) ergibt sich dann die Abschätzung:

$$|x_\lambda(t)| \leqq c\alpha^{n-\lambda} L_1 + \frac{Kb\alpha}{1-\alpha}\alpha^{n-\lambda} L_2 = b\alpha^{n-\lambda}.$$

Solange also die Ungleichung $|x_\nu(t)| \leqq b\alpha^{n-\nu}$ für $\nu \leqq \lambda - 1$, $t = 0, 1, 2, \ldots$ gilt, gilt sie auch für $\nu = \lambda$, $t = 0, 1, 2, \ldots$. Daraus folgt, dass das Integral $x_\nu(t)$ dauernd vorhanden ist und stets in dem ursprünglichen Existenzbereich der $\chi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)$ bleibt. Damit ist der erste Teil von Satz 6 bereits bewiesen.

Nun sei B eine positive Zahl derart, dass

$$(23)\quad \overline{\lim_{t\to\infty}}\, |x_\nu(t)| < B\alpha^{n-\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

ist. Wenn dann die χ_ν auch den im zweiten Teil von Satz 6 geforderten Ungleichungen genügen, so ist für genügend grosse Werte von t, etwa für $t \geqq t_0$,

$$(24)\quad |x_\nu(t)| < B\alpha^{n-\nu}$$

$$(25)\quad |\chi_\nu(x_1, \ldots, x_n)| < \frac{1}{n}\frac{K}{1-\alpha}\sum_{\mu=1}^{n} \alpha^\mu B\alpha^{n-\mu} = \frac{KB\alpha^n}{1-\alpha} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

In Formel (22) zerlegen wir nun die Summe von 0 bis $t - 1$ in

$$\sum_{\tau=0}^{t-1} = \sum_{\tau=0}^{t_0-1} + \sum_{\tau=t_0}^{t-1}.$$

Die erste Summe der rechten Seite ist nach dem Hilfssatz von § 3 eine kleine Grösse ε_ν. Zur Abschätzung der zweiten können wir die für $t \geqq t_0$ gültigen Formeln (24), (25) benützen. Hiernach ergibt sich für $t \geqq t_0$ aus (22) die Abschätzung

$$|x_\nu(t)| \leqq |G_\nu(t)|\,|x_\nu(0)| + |\varepsilon_\nu| + \left[\sum_{\mu=1}^{\nu-1} KB\alpha^{n-\mu} + \frac{KB\alpha^n}{1-\alpha}\right] L_2$$

$$= |G_\nu(t)|\,|x_\nu(0)| + |\varepsilon_\nu| + \frac{KL_2\alpha}{1-\alpha} B\alpha^{n-\nu}.$$

Nach dem Hilfssatz von § 3 ist aber auf Grund der Voraussetzungen von Satz 6

$$\lim_{t\to\infty} G_\nu(t) = 0$$

und daher folgt aus der vorigen Ungleichung sogleich

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, |x_\nu(t)| \leqq \frac{KL_2\alpha}{1-\alpha} B\alpha^{n-\nu} = \left(1 - \frac{c}{b} L_1\right) B\alpha^{n-\nu} < \left(1 - \frac{c}{2b} L_1\right) B\alpha^{n-\nu}. \tag{26}$$

Aus einer Ungleichung der Form (23) kann also allemal auf (26) geschlossen werden. Indem man diesen Schluss wiederholt anwendet, ergibt sich auch

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, |x_\nu(t)| < \left(1 - \frac{c}{2b} L_1\right)^k B\alpha^{n-\nu},$$

wo k beliebig gross sein darf. Daher ist

$$\lim_{t\to\infty} x_\nu(t) = 0$$

womit auch der zweite Teil von Satz 6 bewiesen ist.

§ 5.

Instabilität und bedingte Stabilität bei einem speziellen System.

Satz 7. *In dem Differenzengleichungssystem*

$$x_\nu(t+1) = \sum_{\mu=1}^{\nu} g_{\nu\mu}(t)\, x_\mu(t) + \chi_\nu(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

mögen die Funktionen

$$g_{\nu\mu}(t) \qquad (1 \leqq \mu \leqq \nu \leqq n)$$

$$\chi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

im Bereich

$$t = 0, 1, 2, \ldots, |x_\lambda| \leqq b\alpha^{n-\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

den Ungleichungen genügen:

$$|g_{\nu\mu}(t)| \leqq K$$

$$|\chi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqq \frac{K b \alpha^n}{1 - \alpha}$$

$$|\chi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n) - \chi_\nu(t, x_1^*, \ldots, x_n^*)| \leqq \frac{1}{n} \frac{K}{1 - \alpha} \sum_{\mu=1}^{n} \alpha^\mu |x_\mu - x_\mu^*|.$$

Ferner sei, wenn $\prod_{\tau=0}^{t-1} g_{\nu\nu}(\tau) = G_\nu(t)$ *gesetzt wird, für eine gewisse Sorte Indizes* ν, *die ich* ν_A *nennen will,*

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} |G_\nu(t)| \leqq L_1 \\ \sum_{\tau=0}^{t-1} \prod_{\varrho+\tau+1}^{t-1} |g_{\nu\nu}(\varrho)| \leqq L_2 \end{cases}$$

erfüllt, und für die übrigen ν, *die* ν_B *heissen mögen,*

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} |G_\nu(t)| & \textit{nicht beschränkt} \\ |G_\nu(t)| \sum_{\tau=t}^{\infty} \frac{1}{|G_\nu(\tau + 1)|} \leqq L_2 \end{cases}$$

richtig. Es kann aber möglicherweise auch die Sorte ν_A *oder* ν_B *ganz fehlen. Dabei seien* b, α, K, L_1, L_2, *positive Konstanten*[1], *die den Ungleichungen genügen:*

$$\alpha < 1, \qquad \frac{K L_2 \alpha}{1 - \alpha} < 1.$$

Bedeutet dann c *eine positive Zahl derart, dass* $c \leqq b$ *und, falls es unter den Indizes* ν *wenigstens ein* ν_A *gibt, auch*

$$\frac{c}{b} L_1 + \frac{K L_2 \alpha}{1 - \alpha} \leqq 1$$

---

[1] L_1 kommt nur dann vor, wenn es unter den Indizes ν mindestens ein ν_A gibt.

ist, so hat das gegebene Differenzengleichungssystem wenigstens ein beschränktes Integral; und zwar gibt es, wenn man $\chi_\nu(0) = c_\nu$ *für jedes* $\nu = \nu_A$ *im Bereich* $|c_\nu| \leqq c\alpha^{n-\nu}$ *willkürlich vorgibt, genau ein Integral, für welches dauernd* $|x_\nu(t)| \leqq b\,\alpha^{n-\nu}$ *für alle* ν *ist.*

Wenn für alle ν *ausserdem* $\chi_\nu(t, 0, \ldots, 0) = 0$ *ist, so gilt für die angegebene Integrale noch die weitere Beziehung*

$$\lim_{t \to \infty} \sum_{\mu=1}^{n} |x_\mu(t)| = 0.$$

Nach diesem Satz ist, falls es kein ν_A gibt, auch kein $x_\nu(0)$ willkürlich; es gibt dann nur ein einziges Integral, für welches dauernd $|x_\nu(t)| \leqq b\alpha^{n-\nu}$ bleibt, und dieses ist im Fall $\chi_\nu(t, 0, \ldots, 0) = 0$ natürlich das Integral $x_\nu(t) = 0$. Das ist also der Fall der vollkommenen Instabilität. Falls es kein ν_B gibt, sind alle $x_\nu(0)$ willkürlich wählbar; das ist der bereits im vorigen Paragraphen unter etwas allgemeineren Voraussetzungen behandelte Fall der Stabilität. Falls es unter den Indizes ν sowohl ν_A als auch ν_B gibt, liegt sogenannte bedingte Stabilität vor (unvollkommene Instabilität).

Um Satz 7 zu beweisen, schreiben wir das darin auftretende Differenzengleichungssystem wieder in der Form

$$x_\nu(t+1) = g_{\nu\nu}(t)\,x_\nu(t) + \sum_{\mu=1}^{\nu-1} g_{\nu\mu}(t)\,x_\mu(t) + \chi_\nu(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \tag{27}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Daraus folgt:

$$\left\{\begin{aligned} x_\nu(t) &= c_\nu G_\nu(t) + \sum_{\tau=0}^{t-1} \Phi_\nu(\tau) \prod_{\varrho=\tau+1}^{t-1} g_{\nu\nu}(\varrho) \\ \Phi_\nu(\tau) &= \sum_{\mu=1}^{\nu-1} g_{\nu\mu}(\tau)\,x_\mu(\tau) + \chi_\nu(\tau, x_1(\tau), x_2(\tau), \ldots, x_n(\tau)). \end{aligned}\right. \tag{28}$$

Dabei bestimmen sich die Konstanten c_ν für $\nu = \nu_B$ eindeutig aus der Forderung, dass $x_\nu(t)$ für $t \to \infty$ beschränkt bleiben soll, und für $\nu = \nu_A$ aus der Nebenbedingung $x_\nu(0) = c_\nu$. Hiernach[1] ist

[1] Vgl. dazu insbesondere die Beweise zu den Sätzen 1 und 2 in § 3.

$$(29)\qquad \begin{cases} x_\nu(t) = c_\nu G_\nu(t) + \sum\limits_{\tau=0}^{t-1} \Phi_\nu(\tau) \prod\limits_{\varrho=\tau+1}^{t-1} g_{\nu\nu}(\varrho) & \text{für} \quad \nu = \nu_A \\ x_\nu(t) = -\, G_\nu(t) \sum\limits_{\tau=t}^{\infty} \dfrac{\Phi_\nu(\tau)}{G_\nu(\tau+1)} & \text{für} \quad \nu = \nu_B \end{cases}$$

Umgekehrt ergibt sich aus (29) auch rückwärts wieder (27) sowie die Nebenbedingung $x_\nu(0) = c_\nu$ für $\nu = \nu_A$. Es genügt daher zu beweisen, dass das Gleichungssystem (29) genau eine Lösung $x_\nu(t)$ mit den in Satz 7 behaupteten Eigenschaften hat.

Wir zeigen zunächst, dass es *höchstens eine Lösung* gibt, für die dauernd $|x_\nu(t)| \leqq b\alpha^{n-\nu}$ ist. Sind $x_\nu(t)$, $x_\nu^*(t)$ zwei solche Lösungen und setzt man sie in (29) ein, so ergibt sich durch Substraktion der entstehenden Gleichungen:

$$(30)\qquad \begin{cases} x_\nu(t) - x_\nu^*(t) = \sum\limits_{\tau=0}^{t-1} (\Phi_\nu(\tau) - \Phi_\nu^*(\tau)) \prod\limits_{\varrho=\tau+1}^{t-1} g_{\nu\nu}(\varrho) & \text{für} \quad \nu = \nu_A \\ x_\nu(t) - x_\nu^*(t) = -\, G_\nu(t) \sum\limits_{\tau=t}^{\infty} \dfrac{\Phi_\nu(\tau) - \Phi_\nu^*(\tau)}{G_\nu(\tau+1)} & \text{für} \quad \nu = \nu_B, \end{cases}$$

wo Φ_ν^* eine analoge Bedeutung wie Φ_ν hat. Nun sind wegen $|x_\nu(t)| \leqq b\alpha^{n-\nu}$, $|x_\nu^*(t)| \leqq b\alpha^{n-\nu}$ die Ungleichungen:

$$(31)\qquad |x_\nu(t) - x_\nu^*(t)| \leqq A\alpha^{n-\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

für eine gewisse Zahl A sicher richtig. Wenn sie aber für einen gewissen Wert von A gelten, so ist nach den in Satz 7 gemachten Voraussetzungen auch

$$|\Phi_\nu(t) - \Phi_\nu^*(t)| = \left| \sum_{\mu=1}^{\nu-1} g_{\nu\mu}(t)(x_\mu(t) - x_\mu^*(t)) + \chi_\nu(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) - \chi_\nu(t, x_1^*(t), \ldots, x_n^*(t)) \right|$$

$$\leqq \sum_{\mu=1}^{\nu-1} KA\alpha^{n-\mu} + \frac{1}{n}\,\frac{K}{1-\alpha} \sum_{\mu=1}^{n} \alpha^{\mu} A\alpha^{n-\mu} =$$

$$= KA\,\frac{\alpha - \alpha^\nu}{1-\alpha}\,\alpha^{n-\nu} + \frac{KA\alpha^n}{1-\alpha} = \frac{KA\alpha}{1-\alpha}\,\alpha^{n-\nu}.$$

und aus (30) ergibt sich dann die Abschätzung

$$|x_\nu(t) - x_\nu^*(t)| \leqq \frac{KA\alpha}{1-\alpha}\,\alpha^{n-\nu} L_2 = \frac{KL_2\alpha}{1-\alpha}\,A\alpha^{n-\nu}.$$

Die Ungleichungen (31) bleiben also auch richtig, wenn man die Konstante A durch die nach Voraussetzung kleinere Konstante $\frac{K L_2 \alpha}{1-\alpha} A$ ersetzt. Durch wiederholte Anwendung dieses Prozesses kann man die Konstante A beliebig klein machen; aus (31) folgt dann aber

$$x_\nu(t) - x_\nu^*(t) = 0,$$

sodass die Lösungen $x_\nu(t)$ und $x_\nu^*(t)$ in der Tat zusammenfallen.

Wir wollen jetzt zeigen, dass das System (29) auch *wirklich eine Lösung* der verlangten Art hat. Dazu wenden wir sukzessive Näherungen an, indem wir setzen:

$$(32)\quad \begin{cases} x_{\nu 0}(t) = 0 \\ x_{\nu, k+1}(t) = c_\nu G_\nu(t) + \sum\limits_{\tau=0}^{t-1} \Phi_{\nu k}(\tau) \prod\limits_{\varrho=\tau+1}^{t-1} g_{\nu\nu}(\varrho) & \text{für } \nu = \nu_A \\ x_{\nu, k+1}(t) = -G_\nu(t) \sum\limits_{\tau=t}^{\infty} \frac{\Phi_{\nu k}(\tau)}{G_\nu(\tau+1)} & \text{für } \nu = \nu_B \end{cases}$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots),$$

wobei natürlich analog zu (28)

$$(33)\qquad \Phi_{\nu k}(\tau) = \sum_{\mu=1}^{\nu-1} g_{\nu\mu}(\tau)\, x_{\mu k}(\tau) + \chi_\nu(\tau, x_{1k}(\tau), \ldots, x_{nk}(\tau))$$

ist. Man sieht leicht, dass die Funktionswerte von $|x_{\mu k}(t)|$ stets $\leqq b\alpha^{n-\mu}$ sind, also im Definitionsbereich der Funktionen χ_ν bleiben, sodass die Funktionen $x_{\nu, k+1}(t)$ wirklich sukzessive gebildet werden können. Denn jedenfalls trifft das für $k = 0$ zu. Wenn es aber für einen gewissen Wert k zutrifft, so folgt zunächst aus (33)

$$|\Phi_{\nu k}(\tau)| \leqq \sum_{\mu=1}^{\nu-1} K b \alpha^{n-\mu} + \frac{K b \alpha^n}{1-\alpha} = \frac{K b \alpha}{1-\alpha} \alpha^{n-\nu}$$

und daher aus (32) für $\nu = \nu_A$:

$$|x_{\nu, k+1}(t)| \leqq c\alpha^{n-\nu} L_1 + \frac{K b \alpha}{1-\alpha} \alpha^{n-\nu} L_2 = \left(c L_1 + \frac{K L_2 \alpha}{1-\alpha} b\right) \alpha^{n-\nu} \leqq b\alpha^{n-\nu}$$

und noch einfacher für $\nu = \nu_B$:

$$|x_{\nu,\,k+1}(t)| \leqq \frac{K b \alpha}{1-\alpha} \alpha^{n-\nu} L_2 < b \alpha^{n-\nu}.$$

Die Funktionen $x_{\nu k}(t)$ können also wirklich für alle k gebildet werden, und es ist

(34) $$|x_{\nu k}(t)| \leqq b \alpha^{n-\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n;\ k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Nun zeigen wir weiter, dass

(35) $$|x_{\nu k}(t) - x_{\nu,\,k-1}(t)| \leqq \left(\frac{K L_2 \alpha}{1-\alpha}\right)^{k-1} b \alpha^{n-\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

ist. Da $x_{\nu 0}(t) = 0$ ist, trifft das nach (34) jedenfalls für $k = 1$ zu. Wenn aber die Formel (35) für einen gewissen Wert von k gilt, so ist nach (33) und auf Grund der in Satz 7 gemachten Voraussetzungen

$$\begin{aligned}
|\Phi_{\nu k}(\tau) - \Phi_{\nu,\,k-1}(\tau)| &\leqq \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \left(\frac{K L_2 \alpha}{1-\alpha}\right)^{k-1} K b \alpha^{n-\mu} + \frac{1}{n} \frac{K}{1-\alpha} \sum_{\mu=1}^{n} \alpha^{\mu} \left(\frac{K L_2 \alpha}{1-\alpha}\right)^{k-1} b \alpha^{n-\mu} = \\
&= K b \left(\frac{K L_2 \alpha}{1-\alpha}\right)^{k-1} \left(\sum_{\mu=1}^{\nu-1} \alpha^{n-\mu} + \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\right) = \\
&= K b \left(\frac{K L_2 \alpha}{1-\alpha}\right)^{k-1} \frac{\alpha^{n-\nu+1}}{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

Daher folgt aus (32) für $\nu = \nu_A$ und für $\nu = \nu_B$

$$\begin{aligned}
|x_{\nu,\,k+1}(t) - x_{\nu k}(t)| &= \left\{ \begin{array}{l} \left| \sum_{\tau=0}^{t-1} (\Phi_{\nu k}(\tau) - \Phi_{\nu,\,k-1}(\tau)) \prod_{\varrho=\tau+1}^{t-1} g_{\nu\nu}(\varrho) \right| \\ \left| G_\nu(t) \sum_{\tau=t}^{\infty} (\Phi_{\nu k}(\tau) - \Phi_{\nu,\,k-1}(\tau)) \frac{1}{G_\nu(\tau+1)} \right| \end{array} \right\} \leqq \\
&\leqq K b \left(\frac{K L_2 \alpha}{1-\alpha}\right)^{k-1} \frac{\alpha^{n-\nu+1}}{1-\alpha} L_2 = \left(\frac{K L_2 \alpha}{1-\alpha}\right)^{k} b \alpha^{n-\nu}.
\end{aligned}$$

Damit ist die Formel (35) allgemein bewiesen. Aus (35) folgt aber sofort, dass die Grenzwerte

(36) $$\lim_{k \to \infty} x_{\nu k}(t) = x_\nu(t) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

für $t = 0, 1, 2, \ldots$ gleichmässig vorhanden sind. Wegen (34) ist dann auch

(37) $$|x_\nu(t)| \leqq b \alpha^{n-\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots;\ n).$$

Die Funktionen $x_\nu(t)$ bleiben also absolut unter der in Satz 7 behaupteten Schranke. Sie genügen aber auch dem Gleichungssystem (29). Das ergibt sich sogleich, wenn man in (32) zur Grenze $k \to \infty$ übergeht, wobei nur die Formel

$$-\lim_{k\to\infty} G_\nu(t) \sum_{\tau=t}^{\infty} \frac{\Phi_{\nu k}(\tau)}{G_\nu(\tau+1)} = -G_\nu(t) \sum_{\tau=t}^{\infty} \frac{\Phi_\nu(\tau)}{G_\nu(\tau+1)} \qquad \text{für } \nu = \nu_B$$

einer genaueren Begründung bedarf. Nun folgt aber aus (35) und (36) leicht

$$|x_\nu(t) - x_{\nu k}(t)| = \lim_{l\to\infty} |x_{\nu,\,k+l}(t) - x_{\nu k}(t)| \leqq \lim_{l\to\infty} \sum_{\lambda=1}^{l} |x_{\nu,\,k+\lambda}(t) - x_{\nu,\,k+\lambda-1}(t)| \leqq$$

$$\leqq b\alpha^{n-\nu} \left(\frac{KL_2\alpha}{1-\alpha}\right)^k \lim_{l\to\infty} \sum_{\lambda=1}^{l} \left(\frac{KL_2\alpha}{1-\alpha}\right)^{\lambda-1} = \left(\frac{KL_2\alpha}{1-\alpha}\right)^k b\alpha^{n-\nu} \frac{1}{1-\dfrac{KL_2\alpha}{1-\alpha}}.$$

Daraus ergibt sich zunächst die Abschätzung

$$|\Phi_{\nu k}(\tau) - \Phi_\nu(\tau)| \leqq \sum_{\mu=1}^{\nu-1} K \left(\frac{KL_2\alpha}{1-\alpha}\right)^k \frac{b\alpha^{n-\mu}}{1-\dfrac{KL_2\alpha}{1-\alpha}} +$$

$$+ \frac{1}{n} \frac{K}{1-\alpha} \sum_{\mu=1}^{n} \alpha^\mu \left(\frac{KL_2\alpha}{1-\alpha}\right)^k \frac{b\alpha^{n-\mu}}{1-\dfrac{KL_2\alpha}{1-\alpha}} = \left(\frac{KL_2\alpha}{1-\alpha}\right)^k \frac{Kb\alpha}{1-\dfrac{KL_2\alpha}{1-\alpha}} \frac{\alpha^{n-\nu}}{1-\alpha}$$

und folglich ist für $\nu = \nu_B$

$$\left| G_\nu(t) \sum_{\tau=t}^{\infty} [\Phi_{\nu k}(\tau) - \Phi_\nu(\tau)] \frac{1}{G_\nu(\tau+1)} \right| \leqq \left(\frac{KL_2\alpha}{1-\alpha}\right)^k \frac{Kb\alpha}{1-\dfrac{KL_2\alpha}{1-\alpha}} \frac{\alpha^{n-\nu}}{1-\alpha} L_2.$$

Daraus folgt unmittelbar die Gültigkeit der zu beweisenden Limesformel.

Von Satz 7 bleibt daher nur noch übrig die Behauptung zu beweisen, dass für

(38) $$\chi_\nu(t, 0, \ldots, 0) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

stets $\lim\limits_{t\to\infty} \sum\limits_{\mu=1}^{n} |x_\mu(t)| = 0$ ist. Um dies als richtig zu erkennen, bemerken wir zunächst, dass aus (38) auf Grund der anderen in Satz 7 in Bezug auf χ_ν gemachten Voraussetzungen folgt:

(39) $$|\chi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqq \frac{1}{n} \frac{K}{1-\alpha} \sum_{\mu=1}^{n} \alpha^\mu |x_\mu|.$$

Nun sei B eine positive Zahl derart, dass

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} |x_\nu(t)| < B\alpha^{n-\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{40}$$

ist. Für genügend grosse Werte von t ist dann

$$|x_\nu(t)| < B\alpha^{n-\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

und folglich mit Rücksicht auf (39) auch

$$|\chi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)| < \frac{1}{n}\frac{K}{1-\alpha}\sum_{\mu=1}^{n}\alpha^\mu B\alpha^{n-\mu} = \frac{KB\alpha^n}{1-\alpha}.$$

Nach der in (28) gegebenen Definition von $\Phi_\nu(t)$ ist daher für genügend grosse Werte von t

$$|\Phi_\nu(t)| < \sum_{\mu=1}^{\nu-1} KB\alpha^{n-\mu} + \frac{KB\alpha^n}{1-\alpha} = \frac{KB\alpha^{n-\nu+1}}{1-\alpha}.$$

Folglich nach (29) zunächst für $\nu = \nu_B$:

$$|x_\nu(t)| < \frac{KB\alpha^{n-\nu+1}}{1-\alpha}L_2 = \frac{KL_2\alpha}{1-\alpha}B\alpha^{n-\nu} \qquad (\nu = \nu_B)$$

und analog für $\nu = \nu_A$, weil dann nach dem Hilfssatz von § 3 gewiss $\lim\limits_{t\to\infty} G_\nu(t) = 0$ ist,

$$|x_\nu(t)| < \varepsilon + \frac{KB\alpha^{n-\nu+1}}{1-\alpha}L_2 = \frac{KL_2\alpha}{1-\alpha}B\alpha^{n-\nu} + \varepsilon \qquad (\nu = \nu_A),$$

wo ε beliebig klein sein darf, wenn nur t genügend gross ist. Aus den beiden letzten Ungleichungen folgt aber sowohl für $\nu = \nu_B$ als auch für $\nu = \nu_A$:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} |x_\nu(t)| \leqq \frac{KL_2\alpha}{1-\alpha}B\alpha^{n-\nu} < \sqrt{\frac{KL_2\alpha}{1-\alpha}}\,B\alpha^{n-\nu}.$$

Die Ungleichung (40) bleibt daher richtig, wenn man B durch die kleinere Zahl $\sqrt{\frac{KL_2\alpha}{1-\alpha}}\,B$ ersetzt. Durch wiederholte Anwendung dieses Prozesses kann B beliebig klein gemacht werden, woraus folgt:

$$\lim_{t\to\infty} x_\nu(t) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Damit ist Satz 7 vollständig bewiesen.

§ 6.

Eine Matrixtransformation.

Ehe wir das allgemeine System (2) untersuchen, wollen wir eine Matrixtransformation behandeln. Wir betrachten die quadratische Matrix

$$F(t)=\begin{pmatrix} f_{11}(t)\ldots f_{1n}(t) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ f_{n1}(t)\ldots f_{nn}(t)\end{pmatrix},$$

deren Elemente Funktionen einer Variablen $t=0, 1, 2, \ldots$ sind. Die Funktionen $f_{\lambda\mu}(t)$ dürfen dabei beliebige komplexe Werte annehmen.

Eine Matrix $F(t)$ heisst »*beschränkt*», wenn ihre Elemente beschränkte Funktionen von t sind. Endlich soll die Matrix $F(t)$ »*reduziert*» genannt werden, wenn die Elemente oberhalb der Hauptdiagonale lauter Nullen sind, wenn also für $\lambda<\mu$ stets $f_{\lambda\mu}(t)=0$ ist. Für die beschränkte Matrix $F(t)$ beweisen wir den

Satz 8. *Zu jeder beschränkten Matrix $F(t)$ lässt sich auf unendlich viele Arten eine beschränkte Matrix $P(t)$ mit beschränkter Reziproken $P^{-1}(t)$ angeben derart, dass die offenbar wieder beschränkte Matrix*

$$P(t+1)F(t)P^{-1}(t)=G(t)$$

reduziert ist.

Um den Satz zu beweisen, betrachten wir die folgende Matrixgleichung:

$$F(t)\,Q(t)=Q(t+1)\,G(t), \tag{41}$$

wobei

$$Q(t)=\begin{pmatrix} q_{11}(t)\ldots q_{1n}(t) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ q_{n1}(t)\ldots q_{nn}(t)\end{pmatrix}$$

und

$$G(t)=\begin{pmatrix} g_{11}(t) & 0 & \ldots & 0 \\ g_{21}(t) & g_{22}(t) & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ g_{n1}(t) & g_{n2}(t) & \ldots & g_{nn}(t)\end{pmatrix}$$

unbekannte Matrices sind. Dabei wollen wir $Q(t)$ noch der weiteren Bedingung unterwerfen, unitär zu zein; d. h. wir verlangen:

$$Q(t)\,\overline{Q}_1(t)=E, \tag{42}$$

wenn man mit $\bar{Q}_1(t)$ die Konjugiertkomplexe der Transponierten von $Q(t)$ bezeichnet, oder nach (42), da $\bar{Q}_1(t) = Q^{-1}(t)$ ist,

$$\bar{Q}_1(t)\, Q(t) = E. \tag{43}$$

Wir wählen etwa $Q(0) = E$ und nehmen an, die Bestimmung von $G(t)$, $Q(t)$ sei bereits soweit gelungen, dass (41) für $t = 0, 1, 2, \ldots, \tau - 1$ und (43) für $t = 0, 1, 2, \ldots, \tau$ gelten; dann suchen wir (41) für $t = \tau$ so zu erfüllen, dass die Unitaritätsbedingungen (43) auch für $t = \tau + 1$ gelten. Die Bedingung (43) besagt aber, wenn man sie für $t = \tau + 1$ ausführlich schreibt,

$$\sum_{\nu=1}^{n} \bar{q}_{\nu\mu}(\tau + 1)\, q_{\nu\lambda}(\tau + 1) = \begin{cases} 0 \text{ für } \mu \neq \lambda \\ 1 \text{ für } \mu = \lambda. \end{cases} \tag{44}$$

Nach (41) ist

$$\begin{pmatrix} f_{11}(\tau) & \ldots & f_{1n}(\tau) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1}(\tau) & \ldots & f_{nn}(\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11}(\tau) & \ldots & q_{1n}(\tau) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{n1}(\tau) & \ldots & q_{nn}(\tau) \end{pmatrix} = \tag{45}$$

$$= \begin{pmatrix} q_{11}(\tau + 1) & \ldots & q_{1n}(\tau + 1) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{n1}(\tau + 1) & \ldots & q_{nn}(\tau + 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11}(\tau) & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{n1}(\tau) & \ldots & g_{nn}(\tau) \end{pmatrix}.$$

Unsere Frage ist, ob man die $q_{\lambda\mu}(\tau + 1)$, $g_{\lambda\mu}(\tau)$ so wählen kann, dass die Gleichung (45) und zugleich die Bedingungen (44) erfüllt sind. Aus (45) und (44) ergeben sich die Formeln für die Bestimmung von $g_{nn}(\tau)$ und $q_{\nu n}(\tau + 1)$:

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_{\lambda\nu}(\tau) q_{\nu n}(\tau) = q_{\lambda n}(\tau + 1) g_{nn}(\tau) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n), \tag{45 a}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \bar{q}_{\nu n}(\tau + 1) q_{\nu n}(\tau + 1) = 1\,. \tag{44 a}$$

Es fragt sich, ob man $g_{nn}(\tau)$ und $q_{\lambda n}(\tau + 1)$ so wählen kann, dass (45 a) und (44 a) gelten. Wenn die bekannte linke Seite von (45 a) für jedes λ verschwindet, wählen wir $g_{nn}(\tau) = 0$ und die $q_{\lambda n}(\tau + 1)$ irgendwie so, dass (44 a) erfüllt ist. Man kann z. B. $q_{1n}(\tau + 1) = 1$, $q_{\lambda n}(\tau + 1) = 0$ für $\lambda > 1$ wählen. Wenn aber die linke Seite von (45 a) nicht für jedes λ verschwindet, so folgt aus (45 a), indem man beiderseits das Quadrat des absoluten Betrages bildet und dann nach λ summiert, weil ja (44 a) auch gelten soll, dass

$$|g_{nn}(\tau)|^2 = \sum_{\lambda=1}^{n} \left| \sum_{\nu=1}^{n} f_{\lambda\nu}(\tau) q_{\nu n}(\tau) \right|^2$$

sein muss. Wir wählen daher

$$g_{nn}(\tau) = \sqrt{\sum_{\lambda=1}^{n} \left| \sum_{\nu=1}^{n} f_{\lambda\nu}(\tau) q_{\nu n}(\tau) \right|^2} \tag{46}$$

und dann muss wegen (45 a) für $q_{\lambda n}(\tau + 1)$ der folgende Wert gewählt werden:

$$q_{\lambda n}(\tau + 1) = \frac{1}{g_{nn}(\tau)} \sum_{\nu=1}^{n} f_{\lambda\nu}(\tau) q_{\nu n}(\tau) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n). \tag{47}$$

Bei dieser Wahl von $g_{nn}(\tau)$ und $q_{\lambda n}(\tau + 1)$ sind dann die Forderungen (45 a) und (44 a) offenbar auch wirklich erfüllt.

Wir wenden jetzt vollständige Induktion an, indem wir annehmen, die Wahl von $g_{\varrho\nu}(\tau)$ und $q_{\lambda\nu}(\tau + 1)$ sei für $\nu > \mu$ bereits gelungen, und wir wollen dann auch die Grössen $g_{\varrho\mu}(\tau)$ $(\varrho = \mu, \mu + 1, \ldots, n)$ und $q_{\lambda\mu}(\tau + 1)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, n)$ so wählen, dass die Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_{\lambda\nu}(\tau) q_{\nu\mu}(\tau) - \sum_{\beta=\mu+1}^{n} q_{\lambda\beta}(\tau + 1) g_{\beta\mu}(\tau) = q_{\lambda\mu}(\tau + 1) g_{\mu\mu}(\tau) \tag{45 b}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \bar{q}_{\lambda\nu}(\tau + 1) q_{\lambda\mu}(\tau + 1) = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu > \mu \\ 1 & \text{für } \nu = \mu \end{cases} \tag{44 b}$$

erfüllt sind. Multipliziert man die Gleichung (45 b) mit $\bar{q}_{\lambda\gamma}(\tau + 1)$ und summiert nach λ, so folgt, dass

$$g_{\gamma\mu}(\tau) = \sum_{\lambda=1}^{n} \bar{q}_{\lambda\gamma}(\tau + 1) \sum_{\nu=1}^{n} f_{\lambda\nu}(\tau) q_{\nu\mu}(\tau) \quad \text{für } \gamma = \mu + 1, \ldots, n \tag{48}$$

sein muss. Hiernach sind die $g_{\gamma\mu}(\tau)$ für $\gamma > \mu$ bekannt. Wir versuchen nun die Elemente $g_{\mu\mu}(\tau)$ und $q_{\lambda\mu}(\tau + 1)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, n)$ so zu bestimmen, dass die Gleichungen (45 b) und (44 b) gelten. Verschwindet die bereits bekannte linke Seite von (45 b) für jedes λ, so kann man $g_{\mu\mu}(\tau) = 0$ wählen. Alsdann können die $q_{\lambda\mu}(\tau + 1)$ so gewählt werden, dass die Bedingungen (44 b) erfüllt sind. Da die $q_{\lambda\varkappa}(\tau + 1)$ für $\varkappa = \mu + 1, \ldots, n$ bereits bekannt sind, braucht man nur noch die Grössen $q_{\lambda\mu}(\tau + 1)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, n)$ aus dem homogenen System

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \bar{q}_{\lambda\varkappa}(\tau+1) q_{\lambda\mu}(\tau+1) = 0 \qquad (\varkappa = \mu+1, \ldots, n) \tag{49}$$

mit $n-\mu$ Gleichungen und n Unbekannten so zu bestimmen, dass die Bedingung

$$\sum_{\lambda=1}^{n} |q_{\lambda\mu}(\tau+1)|^2 = 1 \tag{50}$$

auch erfüllt ist. Das ist ohne weiteres möglich.

Verschwindet dagegen die bekannte linke Seite nicht für jedes λ, so folgt aus (45 b), indem man beiderseits das Quadrat des absoluten Betrages bildet und dann nach λ summiert, wegen der Bedingungen (44 b), dass

$$|g_{\mu\mu}(\tau)|^2 = \sum_{\lambda=1}^{n} \left| \sum_{\nu=1}^{n} f_{\lambda\nu}(\tau) q_{\nu\mu}(\tau) - \sum_{\sigma=\mu+1}^{n} q_{\lambda\sigma}(\tau+1) g_{\sigma\mu}(\tau) \right|^2$$

sein muss. Wir wählen daher

$$g_{\mu\mu}(\tau) = \sqrt{\sum_{\lambda=1}^{n} \left| \sum_{\nu=1}^{n} f_{\lambda\nu}(\tau) q_{\nu\mu}(\tau) - \sum_{\sigma=\mu+1}^{n} q_{\lambda\sigma}(\tau+1) g_{\sigma\mu}(\tau) \right|^2}$$

und dann muss nach (45 b)

$$q_{\lambda\mu}(\tau+1) = \frac{1}{g_{\mu\mu}(\tau)} \left[\sum_{\nu=1}^{n} f_{\lambda\nu}(\tau) q_{\nu\mu}(\tau) - \sum_{\sigma=\mu+1}^{n} q_{\lambda\sigma}(\tau+1) g_{\sigma\mu}(\tau) \right] \tag{51}$$

gewählt werden. Man sieht leicht mit Rücksicht auf (48), dass die so gewählten $q_{\lambda\mu}(\tau+1)$, $g_{\mu\mu}(\tau)$ wirklich die Bedingungen (44 b) und (45 b) erfüllen.

Damit ist gezeigt, dass es mindestens eine solche Matrix $Q(t)$ gibt, welche den Bedingungen (41) und (43) Genüge leistet.

Bilden wir nun die Matrix

$$P(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) \ldots p_{1n}(t) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_{n1}(t) \ldots p_{nn}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{q}_{11}(t) \ldots \bar{q}_{n1}(t) \\ \\ \bar{q}_{1n}(t) \ldots \bar{q}_{nn}(t) \end{pmatrix} = \bar{Q}_1(t),$$

so sind die Elemente $p_{\lambda\mu}(t)$ wegen (44) alle beschränkt, nämlich

$$|p_{\lambda\mu}(t)| = |\bar{q}_{\mu\lambda}(t)| \leqq 1.$$

Hieraus folgt wegen $Q(t)\overline{Q}_1(t) = E$

$$P^{-1}(t) = Q(t) = \begin{pmatrix} q_{11}(t) \dots q_{1n}(t) \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ q_{n1}(t) \dots q_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

welche offenbar beschränkt ist.

Die Matrixgleichung (41) kann daher geschrieben werden:

$$P(t+1)F(t)P^{-1}(t) = G(t),$$

wo $P(t)$ und $P^{-1}(t)$ beschränkt sind und $G(t)$ reduziert ist. Damit ist Satz 8 bewiesen.

In Wahrheit gibt es aber unendlich viele Matrizes, die der Forderung von Satz 8 genügen. Doch kommt es darauf hier nicht an. Wir bemerken nur noch folgendes:

Satz 9. *Die Elemente $g_{\lambda\lambda}(t)$ der reduzierten Matrix $G(t)$ in Satz 8 können sämtlich reell gewählt werden. Sind die Elemente von $F(t)$ sämtlich reell, so kann man es sogar so einrichten, dass die Elemente von $P(t)$ und folglich auch die Elemente von $G(t)$ sämtlich reell sind.*

Der erste Teil von Satz 9 folgt unmittelbar daraus, dass wir $g_{\lambda\lambda}(t)$ reell gewählt haben. Wenn die $f_{\nu\mu}(t)$ alle reell sind, so werden gemäss (51) die $q_{\lambda\mu}(t)$ reell, so dass $g_{\lambda\mu}(t)$ für $\lambda \neq \mu$ auch reell werden (vgl. (48)). Wenn aber die linke Seite von (45 a) oder (45 b) verschwindet, so ist im Anschluss an (49) und (50) ebenfalls eine reelle Wahl für $q_{\lambda\mu}(t+1)$ möglich, nachdem die $q_{\lambda\varkappa}(t+1)$ für $\varkappa > \mu$ bereits reell gewählt sind.

§ 7.

Stabilität bei dem allgemeinen System.

Nun sind wir in der Lage, das allgemeine Differenzengleichungssystem (2) der Einleitung durch Zurückführung auf das in § 4 und § 5 behandelte spezielle System zu erledigen.

Satz 10. *Die Funktionen*

$$f_{\nu\mu}(t) \qquad (\nu, \mu = 1, 2, \dots, n)$$

seien für $t = 0, 1, 2, \dots$ gegeben und beschränkt. Dann besteht die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass das Differenzengleichungssystem

$$\text{(I)} \qquad x_\nu(t+1) = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\nu\mu}(t)\, x_\mu(t) + \varphi_\nu(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

für jede beliebige Wahl der im Bereich

$$t = 0, 1, 2, \ldots, \quad x_\lambda \text{ beliebig} \qquad (\lambda = 1, \ldots, n)$$

beschränkten Funktionen $\varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)$ *nur beschränkte Integrale hat, darin, dass das lineare System*

$$\text{(II)} \qquad x_\nu(t+1) = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\nu\mu}(t) x_\mu(t) + \psi_\nu(t) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

für beliebige beschränkte $\psi_\nu(t)$ *stets lauter beschränkte Integrale hat.*

Wenn sie erfüllt ist und wenn dann die Funktionen φ_ν *in einem Bereich der Form*

$$t = 0, 1, 2, \ldots, \qquad |x_\lambda| \leqq a \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

den weiteren Bedingungen

$$|\varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqq \gamma \sum_{\mu=1}^{n} |x_\mu| \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

genügen, wo γ *eine hinreichend kleine (nur von* a *und den Funktionen* $f_{\nu\mu}(t)$ *abhängende) Konstante ist, so gelten für jedes Integral, dessen Anfangswerte* $x_\nu(0)$ *absolut hinreichend klein sind, sogar die Beziehungen*

$$|x_\nu(t)| \leqq a \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

$$\lim_{t \to \infty} \sum_{\mu=1}^{n} |x_\mu(t)| = 0.$$

Beweis. Nach § 6 gibt es zu der beschränkten Matrix

$$F(t) = \begin{pmatrix} f_{11}(t) \ldots f_{1n}(t) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ f_{n1}(t) \ldots f_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

eine beschränkte Matrix

$$P(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) \ldots p_{1n}(t) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ p_{n1}(t) \ldots p_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

mit beschränkter Reziproken

$$P^{-1}(t) = \begin{pmatrix} q_{11}(t) \dots q_{1n}(t) \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ q_{n1}(t) \dots q_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

derart, dass $Q(t)$ unitär ist und die wieder beschränkte Matrix $P(t+1)F(t)P^{-1}(t) = G(t)$ reduziert ist, also

$$P(t+1)F(t)P^{-1}(t) = G(t) = \begin{pmatrix} g_{11}(t) & 0 & \dots & 0 \\ g_{21}(t) & g_{22}(t) & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{n1}(t) & g_{n2}(t) & \dots & g_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Führen wir nun vermöge der Transformation

$$(52) \qquad \begin{cases} y_\nu(t) = \sum_{\mu=1}^{n} p_{\nu\mu}(t)\, x_\mu(t) & (\nu = 1, \dots, n) \\ x_\nu(t) = \sum_{\mu=1}^{n} q_{\nu\mu}(t)\, y_\mu(t) & (\nu = 1, \dots, n) \end{cases}$$

neue Unbekannte $y_1(t), \dots, y_n(t)$ ein, so transformiert sich das Differenzengleichungssystem (I) in

$$(\mathrm{I\,a}) \qquad y_\nu(t+1) = \sum_{\mu=1}^{\nu} g_{\nu\mu}(t) y_\mu(t) + \chi_\nu(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \quad (\nu = 1, 2, \dots, n),$$

wobei

$$(53) \qquad \begin{cases} \chi_\nu(t, y_1, \dots, y_n) = \sum_{\mu=1}^{n} p_{\nu\mu}(t+1)\varphi_\mu(t, x_1, \dots, x_n) & (\nu = 1, 2, \dots, n), \\ \varphi_\nu(t, x_1, \dots, x_n) = \sum_{\mu=1}^{n} q_{\nu\mu}(t+1)\chi_\mu(t, x_1, \dots, x_n) & (\nu = 1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

$$(52\,\mathrm{a}) \qquad \begin{cases} y_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} p_{\nu\mu}(t) x_\mu \\ x_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} q_{\nu\mu}(t) y_\mu \end{cases}$$

ist. Analog geht das System (II) über in

(II a)
$$y_\nu(t+1) = \sum_{\mu=1}^{\nu} g_{\nu\mu}(t) y_\mu(t) + \omega_\nu(t) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

wobei

(54)
$$\begin{cases} \omega_\nu(t) = \sum_{\mu=1}^{n} p_{\nu\mu}(t+1)\psi_\mu(t) & (\nu = 1, 2, \ldots, n), \\ \psi_\nu(t) = \sum_{\mu=1}^{n} q_{\nu\mu}(t+1)\omega_\mu(t) & (\nu = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

ist. Die Forderung, dass das System (I) für beliebige beschränkte $\varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)$ lauter beschränkte Integrale haben soll, ist daher gleichbedeutend mit der Forderung, dass das System (I a) für beliebige beschränkte $\chi_\nu(t, y_1, \ldots, y_n)$ lauter beschränkte Integrale haben soll. Letzteres trifft nach Satz 5 dann und nur dann zu, wenn die n Funktionen

(55)
$$\sum_{\tau=0}^{t-1} \prod_{\varrho=\tau+1}^{t-1} |g_{\nu\nu}(\varrho)| \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

beschränkt sind. Nach Satz 3 ist das aber die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass das lineare System (II a) für beliebige beschränkte $\omega_\nu(t)$ nur beschränkte Integrale hat und damit ist offenbar gleichbedeutend, dass das lineare System (II) für beliebige beschränkte $\psi_\nu(t)$ nur beschränkte Integrale hat.

Damit ist der erste Teil von Satz 10 bewiesen[1], der zweite Teil ergibt sich alsdann vermöge Transformation (52) unmittelbar aus dem zweiten Teil von Satz 5.

§ 8.

Instabilität und bedingte Stabilität bei dem allgemeinen System.

Satz 11. *In dem Differenzengleichungssystem*

(I)
$$x_\nu(t+1) = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\nu\mu}(t) x_\mu(t) + \varphi_\nu(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

seien die Funktionen

[1] Der erste Teil ist eigentlich trivial. Denn jede Lösung von (I) erweist sich, nachdem man sie in die Funktionen φ_ν von (I) eingesetzt hat, auch als Lösung eines Systems der Form (II), ist also auf Grund der Voraussetzung beschränkt. Der Beweis des Textes hat aber den Vorzug, dass er ein Mittel gibt, um das Erfülletsein der Voraussetzung zu prüfen. Für den Beweis des zweiten Teils ist die Transformation (52) wohl nicht zu umgehen.

$$f_{\nu\mu}(t) \qquad (\nu, \mu = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

im Bereich

$$t = 0, 1, 2, \ldots, \qquad |x_\lambda| \leqq a \qquad (\lambda = 1, \ldots, n)$$

beschränkt. Speziell die $f_{\nu\mu}(t)$ seien so beschaffen, dass das lineare inhomogene System

$$\text{(II)} \qquad x_\nu(t + 1) = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\nu\mu}(t) x_\mu(t) + \psi_\nu(t) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

für beliebige beschränkte Funktionen $\psi_\nu(t)$ stets wenigstens ein beschränktes Integral hat und dass das homogene System

$$\text{(III)} \qquad x_\nu(t + 1) = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\nu\mu}(t) x_\mu(t) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

genau k linear unabhängige beschränkte Integrale hat ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$).

Wenn dann die Funktionen φ_ν den weiteren Bedingungen genügen

$$|\varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqq \gamma_1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

$$|\varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n) - \varphi_\nu(t, x_1^*, \ldots, x_n^*)| \leqq \gamma_2 \sum_{\mu=1}^{n} |x_\mu - x_\mu^*|$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

wo γ_1, γ_2 zwei hinreichend kleine (nur von a und den Funktionen $f_{\nu\mu}(t)$ abhängende) positive Konstanten sind, so bilden diejenigen Integrale von (I), für die dauernd $|x_\nu(t)| \leqq a$ bleibt, eine Schar mit genau k willkürlichen Konstanten; und zwar kann man k linear unabhängige Verbindungen der Anfangswerte

$$\sum_{\mu=1}^{n} A_{\varkappa\mu} x_\mu(0) = \alpha_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$$

in einem hinreichend kleinen Bereich $|\alpha_\varkappa| < c_\varkappa$ willkürlich wählen[1]*, wodurch das betreffende Integral dann eindeutig bestimmt ist.*

---

[1] für $k = 0$ hat das System (III) kein beschränktes Integral ausser dem trivialen $x_\nu(t) = 0$. In diesem Fall besagt der Satz, dass es nur ein einziges Integral der verlangten Art gibt, dessen Anfangswerte $x_\nu(0)$ also völlig eindeutig sind.

Wenn für alle ν ausserdem $\varphi_\nu(t, 0, \ldots, 0) = 0$ ist, so ist für dieses Integral sogar

$$\lim_{t \to \infty} \sum_{\mu=1}^{n} |x_\mu(t)| = 0.$$

Beweis. Genau wie im vorigen Paragraphen wenden wir wieder die Transformation (52) an. Die Differenzengleichungssysteme (I), (II), (III) gehen dadurch über in bezw.

$$\text{(I a)} \qquad y_\nu(t+1) = \sum_{\mu=1}^{\nu} g_{\nu\mu}(t) y_\mu(t) + \chi_\nu(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)) \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

$$\text{(II a)} \qquad y_\nu(t+1) = \sum_{\mu=1}^{\nu} g_{\nu\mu}(t) y_\mu(t) + \omega_\nu(t) \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

$$\text{(III a)} \qquad y_\nu(t+1) = \sum_{\mu=1}^{\nu} g_{\nu\mu}(t) y_\mu(t) \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

wobei die Funktionen χ_ν, ω_ν wieder durch die Gleichungen (53), (52 a), (54) bestimmt sind.

Die in Satz 11 über die Funktionen $f_{\nu\mu}(t)$ gemachten Voraussetzungen sind dann gleichbedeutend damit, dass das System (II a) für beliebige beschränkte $\omega_\nu(t)$ stets ein beschränktes Integral hat, und dass das System (III a) genau k linear unabhängige beschränkte Integrale hat. Nach Satz 4 ist also, wenn wieder $\prod_{\tau=0}^{t-1} g_{\nu\nu}(\tau) = G_\nu(t)$ gesetzt wird, für genau k Indizes

$$\text{(A)} \qquad \sum_{\tau=0}^{t-1} \prod_{\varrho=\tau+1}^{t-1} |g_{\nu\nu}(\varrho)| \text{ beschränkt, also auch } G_\nu(t) \text{ beschränkt}$$

und für die anderen $n - k$ Indizes ν ist

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} G_\nu(t) & \text{nicht beschränkt} \\ G_\nu(t) \displaystyle\sum_{\tau=t}^{\infty} \frac{1}{G_\nu(\tau+1)} & \text{vorhanden und beschränkt.} \end{cases}$$

Wir bezeichnen wie in Satz 7 die k Indizes der ersten Art mit ν_A, die $n - k$ anderen mit ν_B.

Durch die Transformation (52 a) $y_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} p_{\nu\mu}(t) x_\mu$ geht der Bereich

(56) $$|x_\lambda| \leqq a \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

in dem die Funktionen φ_ν gegeben sind, über in einen mit t veränderlichen Bereich $\mathfrak{B}$ für die y_λ, der jedenfalls, wenn man die Gleichung (52 a) und die Unitaritätsbedingung von $Q(t)$, also $|p_{\nu\mu}(t)| \leqq 1$, $|q_{\lambda\mu}(t)| \leqq 1$, berücksichtigt, ganz in dem Gebiet:

$$|y_\lambda| \leqq n a \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

enthalten ist und den Teilbereich:

$$|y_\lambda| \leqq \frac{a}{n}$$

umfasst, da nach Einsetzung von

$$|y_\mu| \leqq \frac{a}{n}$$

in der zweiten der Formeln (52 a) die Ungleichung:

$$|x_\lambda| \leqq a$$

erfüllt ist.

Um Satz 7 anwenden zu können, wählen wir eine zwischen 0 und 1 liegende Zahl α derart, dass mit der Benutzung der dortigen Bezeichnungen

$$\alpha < 1, \qquad \frac{K L_2 \alpha}{1 - \alpha} < 1$$

ist, wobei K und L_2 gewisse obere Schranken sind, die nur von den $g_{\nu\mu}(t)$ also letzten Endes nur von den $f_{\nu\mu}(t)$, abhängen. Setzen wir nun $\frac{a}{n} = b_0$, $n a = b_1 \alpha^n$, so liegt der Bereich $\mathfrak{B}$ innerhalb des Bereiches

(57) $$|y_\lambda| \leqq b_1 \alpha^{n-\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

und umfasst den Teilbereich

(58) $$|y_\lambda| \leqq b_0 \alpha^{n-\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n).$$

Die Funktionen χ_ν sind dann zunächst nur im Bereich $\mathfrak{B}$ gegeben. Um sie in dem Bereich (57) zu erklären, bilden wir die Funktionen:

$$\varphi_\nu^*(t, x_1, \ldots, x_n) = \varphi_\nu(t, \vartheta_1 x_1, \ldots, \vartheta_n x_n),$$

wobei

$$\vartheta_\mu = \begin{cases} 1 & \text{für } |x_\mu| \leqq a \\ \dfrac{a}{|x_\mu|} & \text{für } |x_\mu| > a \end{cases} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n)$$

ist. Die so definierten Funktionen φ_ν^* genügen offenbar den Ungleichungen:

$$(59) \qquad \begin{aligned} &|\varphi_\nu^*(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqq \gamma_1 \\ &|\varphi_\nu^*(t, x_1, \ldots, x_n) - \varphi_\nu^*(t, x_1^*, \ldots, x_n^*)| \leqq \gamma_2 \sum_{\mu=1}^{n} |x_\mu - x_\mu^*|, \end{aligned} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

was nach geometrischer Veranschaulichung leicht einzusehen ist. Die vermöge (52 a) und (53) aus den Funktionen $\varphi_\nu^*(t, x_1, \ldots, x_n)$ entstehenden Funktionen $\chi_\nu^*(t, y_1, \ldots, y_n)$ sind dann ebenfalls überall, also auch im ganzen Bereich (57), gegeben. In dem Teilbereich $\mathfrak{B}$, also erst recht im Bereich (58), decken sie sich mit den früheren Funktionen χ_ν. Aus (52), (53), (59) folgen die Ungleichungen:

$$|\chi_\nu^*(t, y_1, \ldots, y_n)| \leqq n\gamma_1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

$$|\chi_\nu^*(t, y_1, \ldots, y_n) - \chi_\nu^*(t, y_1^*, \ldots, y_n^*)| \leqq n\gamma_2 \sum_{\mu=1}^{n} |x_\mu - x_\mu^*| \leqq n^2\gamma_2 \sum_{\mu=1}^{n} |y_\mu - y_\mu^*|$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Wir nehmen γ_1, γ_2 so klein gegeben an, dass die Ungleichungen

$$n\gamma_1 \leqq \frac{K b_0 \alpha^n}{1 - \alpha}, \qquad n^2\gamma_2 \leqq \frac{1}{n} \frac{K\alpha^n}{1 - \alpha}$$

gelten. Dann genügen für $t = 0, 1, 2, \ldots$ die Funktionen

$$\chi_\nu^*(t, y_1, \ldots, y_n) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

im Bereich

$$(57) \qquad |y_\lambda| \leqq b_1 \alpha^{n-\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

den Ungleichungen

$$|\chi_\nu^*(t, y_1, \ldots, y_n)| \leqq \frac{K b_0 \alpha^n}{1 - \alpha} \left(< \frac{K b_1 \alpha^n}{1 - \alpha} \text{ wegen } b_1 > b_0 \right)$$

$$|\chi_\nu^*(t, y_1, \ldots, y_n) - \chi_\nu^*(t, y_1^*, \ldots, y_n^*)| \leqq \frac{1}{n} \frac{K}{1 - \alpha} \sum_{\mu=1}^{n} \alpha^\mu |y_\mu - y_\mu^*|$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Nun kann man auf das System (I a) sowohl für den Bereich (57) als auch für den Bereich (58) den Satz 7 anwenden. Hiernach gibt es, wenn man $y_\nu(0)$ für die k Indizes $\nu = \nu_A$ in einem hinreichend kleinen Bereich $|y_\nu(0)| \leqq c\alpha^{n-\nu}$ willkürlich vorgibt, genau ein Integral $y_\nu(t)$ des Differenzengleichungssystems (I a), für welches dauernd $|y_\nu(t)| \leqq b_1 \alpha^{n-\nu}$ bleibt, und für dieses Integral gilt sogar $|y_\nu(t)| \leqq b_0 \alpha^{n-\nu}$, wenn die Zahl c so klein gewählt wurde, dass $\frac{c}{b_0} L_1 + \frac{K L_2 \alpha}{1-\alpha} \leqq 1$ erfüllt ist. Vermöge der Transformation (52) ergibt sich dann aus diesem Integral des Systems (I a) genau ein Integral $x_\nu(t)$ des Systems (I), für welches dauernd $|x_\nu(t)| \leqq a$ bleibt. Dabei darf man also

$$y_\nu(0) = \sum_{\mu=1}^{n} p_{\nu\mu}(0)\, x_\mu(0)$$

für die k Indizes $\nu = \nu_A$ im Bereich

$$\left| \sum_{\mu=1}^{n} p_{\nu\mu}(0)\, x_\mu(0) \right| \leqq c\alpha^{n-\nu}$$

willkürlich vorgeben. Wenn $\varphi_\nu(t, 0, \ldots, 0) = 0$ ist, so ist nach (53) $\chi_\nu(t, 0, \ldots, 0) = 0$. Daraus folgt unmittelbar der letzte Absatz von Satz 11, indem man den letzten Teil von Satz 7 anwendet. Damit ist Satz 11 bewiesen.