ÜBER REGELFLÄCHEN VON BELIEBIG HOHEM GRADE MIT VOLLSTÄNDIG ZERFALLENDEN DOPPELKURVEN.

Von

A. WIMAN.

in LUND.

1. Die aufgestellte Frage wird uns zur Beschäftigung mit dreierlei Arten von Regelflächen veranlassen.

1) Die Erzeugenden gehören zur Kongruenz der Bisekanten einer rationalen W-Kurve.

2) Die Regelfläche besitzt eine Leitgerade.

3) Die Erzeugenden treffen einen Leitkegelschnitt C_2 und berühren dual dazu einen mit der C_2 inzidenten Kegel 2. Grades K_2, d. h. die C_2 wird als Schnitt einer Ebene mit dem K_2 erhalten.

Legt man durch eine Erzeugende einer Regelfläche n^{ten} Grades R_n eine Ebene, so enthält die Schnittkurve ausser der Erzeugenden noch eine C_{n-1}, welche mit der Erzeugenden $n-1$ gemeinsame Punkte haben muss. Von diesen Punkten ist einer Berührungspunkt der Ebene mit der R_n. In den übrigen $n-2$, welche zur Doppelkurve der R_n gehören, wird die Erzeugende von anderen Erzeugenden getroffen. Gehen nun durch diese $n-2$ Punkte eben so viele verschiedene Teile der Doppelkurve, so hat man offenbar einen vollständigen Zerfall der Doppelkurve, und zwar in $n-2$ Teilkurven. Ausser Acht gelassen werden dabei etwa auftretende Doppelerzeugende oder mehrfache Erzeugende. Für eine nähere Untersuchung ist der natürliche Ausgangspunkt die $(n-2, n-2)$-Korrespondenz, welche zwischen den einander treffenden Erzeugenden besteht, und die wir als *Hauptkorrespondenz* bezeichnen können. Wir erweitern die ursprüngliche Aufgabe, indem wir verlangen, dass die Hauptkorrespondenz sich in $n-2$ $(1, 1)$-Korrespondenzen auflösen lassen soll. Man erhält ja nur dann $n-2$ verschiedene Teile der Doppelkurve, wenn sämtliche jene $(1, 1)$-Korrespondenzen involutorisch sind. Die nicht involutorischen treten ja in zu einander inversen Paaren auf. und zu einem solchen Paare gehört nur *eine* Teildoppelkurve, welche also von den Erzeugenden in je zwei Punkten getroffen wird. Ein solcher Teil der Doppelkurve besteht eigentlich aus zwei über einander gelagerten einfachen Kurven, und wenn man durch birationale Transformation der Regelfläche in eine andere Fläche die Teildoppelkurve in eine einfache Kurve umwandelt, so zerfällt letztere in zwei verschiedene Kurven.

2. Das aus der Theorie der W-Kurven erhaltene Beispiel, wo die Hauptkorrespondenz vollständig aufgelöst wird, haben wir bereits in einer früheren Arbeit ausführlich untersucht[1]. Die Gleichung der W-Kurve können wir nach Einführung eines Parameters t in der Gestalt

$$x:y:z:w = t^n:t^{n_1}:t^{n_2}:1$$

schreiben. Im algebraischen Fall mögen n, n_1, n_2 ganze rationale Zahlen ohne gemeinsamen Teiler bedeuten; dabei lässt sich $n > n_1 > n_2 > 0$ annehmen. Die Substitution

$$t' = kt$$

definiert ein Element der eingliedrigen Gruppe, welche die W-Kurve gestattet. Wenn wir die dabei einander entsprechenden Punkte der W-Kurve durch gerade Linien verbinden, so ergibt sich eine Regelfläche, für welche wir in »W-Kurven» die Benennung »*assoziierte Regelfläche*» eingeführt haben. Als Grad einer solchen Fläche erhält man

$$n + n_1 - n_2,$$

wobei jedoch der Fall $k = -1$ ausgenommen werden muss, wo es sich um eine doppelt überdeckte Fläche handelt. Es ist unmittelbar einleuchtend, dass eine assoziierte Regelfläche die eingliedrige Gruppe der W-Kurve gestatten muss. Dieselbe wird mithin durch Bahnkurven, welche ja eben W-Kurven mit den Exponenten n, n_1, n_2 sind, erzeugt. *Insbesondere wird die Doppelkurve in derartige W-Kurven zerlegt, und zu jedem solchen Teile der Doppelkurve steht die Regelfläche in einer ähnlichen assoziierten Beziehung wie zur ursprünglichen W-Kurve.* Doch müssen wir hinfügen, dass, falls der Grad $n + n_1 - n_2$ ungerade ist, ein Teil der Doppelkurve in einer der Koordinatenebenen liegt, und von den Erzeugenden nur einmal getroffen wird. Für $k \to 1$ geht die Regelfläche in eine

[1] *Über die W-Kurven im dreidimensionalen Raum* (kurz »*W-Kurven*»), Acta mathematica 64 (1934).

abwickelbare Fläche über. Auch für andere k-Werte kann dieselbe abwickelbar sein, indem ein anderer Teil der Doppelkurve die Rolle der Kuspidalkurve übernimmt. *In den zu den W-Kurven assoziierten Regelflächen haben wir somit Fälle, wo wohl die Hauptkorrespondenz, nicht aber die Doppelkurve vollständig zerlegt wird.* Für die weiteren Eigenschaften dieser Regelflächen sei auf die eingehende Behandlung in »W-Kurven» verwiesen.

3. Enthält die Doppelkurve eine r-fache Kurve, welche von den Erzeugenden nur in je einem Punkte getroffen wird, so löst sich von der Hauptkorrespondenz eine Involution von der Ordnung r ab. Soll die Hauptkorrespondenz vollständig auflösbar sein, so muss diese, die ja eine $(r-1, r-1)$-Korrespondenz bedeutet, in $r-1$ $(1, 1)$-Korrespondenzen zerfallen. Der entsprechende Teil der Doppeldeveloppablen ist im allgemeinen nicht r-fach, sondern kann sich in verschiedene Teile auflösen, je nachdem die Involution in involutorische oder paarweise zu einander inverse Korrespondenzen zerfällt.

Hat man insbesondere eine r-fache Leitgerade, so wird die Hauptkorrespondenz in zwei Involutionen zerlegt. Die Ebenen durch die Leitlinie schneiden ja eine zweite Involution von der Ordnung $n-r$ aus. Hier sind jedoch Ausnahmefälle zu berücksichtigen, indem nämlich eine oder mehrere Erzeugende sich mit der Leitgeraden vereinigen können. Für jede solche Erzeugende löst sich von der Hauptkorrespondenz eine Involution von parabolischer Art ab, wo in der Korrespondenz die Erzeugende immer das eine Glied ist, welches sämtlichen Erzeugenden entspricht. Derartige entartete Bestandteile sind offensichtlich beiden Involutionen gemeinsam, und wir können von denselben absehen, indem wir mit r und $n-r$ die Anzahl der *veränderlichen* von einem Punkte der Leitlinie ausgehenden bzw. in einer Ebene durch dieselbe liegenden Erzeugenden bezeichnen. Vereinigen sich dann k Erzeugende mit der Leitgeraden, so hat man also jetzt $n+k$ als Grad der Regelfläche. Man findet hier leicht Fälle, freilich von trivialer Art, wo bei beliebig hohem Grade der Regelfläche die Hauptkorrespondenz vollständig aufgelöst wird.

Hat man erstens $r = n - r = 1$ und k beliebig, so zerfällt die Hauptkorrespondenz in k entartete Involutionen. Die Regelfläche ist in diesem Falle immer rational.

Eben so einfach verhält es sich, wenn man entweder $r = 2$, $n - r = 1$ oder $r = 1$, $n - r = 2$ hat, indem die Hauptkorrespondenz in k entartete und eine nicht entartete Involution zerfällt. Auch hier ist die Regelfläche stets rational.

Für $r = n - r = 2$, wo man zwei nicht entartete Involutionen bekommt, ist die Regelfläche entweder rational oder elliptisch. Der elliptische Fall kann aber nur dann eintreten, wenn entweder die Regelfläche eine zweite Leitgerade besitzt oder mindestens eine Erzeugende sich mit der Leitlinie vereinigt hat, also $k > 0$. Ganz allgemein ist es ja das Verhältniss, dass für r und $n - r > 1$ der höchste Wert $(r - 1)(n - r - 1)$ des Geschlechtes p einer R_n mit einer r-fachen Leitgeraden nur bei der Existenz einer zweiten geraden Leitlinie erhalten wird. Denkt man sich jetzt, dass k Erzeugende sich mit der Leitgeraden vereinigt haben, so lässt sich fragen, ob bei einer geeigneten Wahl von k der obige Wert von p für die so entstandene R_{n+k} erreicht werden kann.

Jede in der Hauptkorrespondenz eingehende nicht entartete $(1, 1)$-Korrespondenz vermittelt eine birationale Transformation der R_n in sich. Sollen nun bei einer r-fachen Leitgeraden die beiden zu den Punkten und Ebenen der Leitlinie gehörigen Involutionen I_r und I_{n-r} vollständig zerfallen, so ergibt sich hieraus zwei Gruppen birationaler Transformationen, welche die R_n in sich überführen. Eine von diesen, Γ_r von der Ordnung r lässt die Punkte der Leitgeraden und die andere, Γ_{n-r} von der Ordnung $n - r$ die Ebenen durch dieselbe invariant. Nichts hindert, dass Γ_r und Γ_{n-r} eine gemeinsame Untergruppe Γ_s für $s > 1$ haben können, wobei s Teiler von sowohl r als $n - r$ sein muss. In einem solchen Falle treten die Erzeugenden in Systeme von je s auf, welche sowohl demselben Punkte als auch derselben Ebene der Leitlinie angehören. Fasst man Γ_s als Untergruppe von Γ_{n-r} auf, so bedeutet dies, dass die zu den Operationen von Γ_s gehörigen Teile der Doppelkurve sich in die Leitlinie zurückgezogen haben, und das entsprechende gilt für die Doppeldeveloppable, wenn man Γ_s als Untergruppe von Γ_r betrachtet. Bei dieser Veränderung kann die Regelfläche eine gewisse Anzahl von Doppelerzeugenden bekommen. Längs der Leitgeraden berühren sich jetzt die Mäntel der Regelfläche zu je s. Im Spezialfall $s = r = n - r$ hat die Regelfläche zwei unmittelbar auf einander folgende Leitgeraden. Ist Γ_s Normalteiler von Γ_{n-r}, so werden die Teile der Doppelkurve, welche sich mit der Leitgeraden vereinigt haben, bei der Ausführung von Γ_{n-r} nicht von anderen Teilen ersetzt, und das entsprechende gilt für die Doppeldeveloppable, falls Γ_s Normalteiler von Γ_r ist. Γ_r und Γ_{n-r} sind natürlich immer Untergruppen derjenigen Gruppe von birationalen Transformationen, welche das durch die Regelfläche definierte algebraische Gebilde in sich zulässt. Für $p > 1$ ist aber diese Gruppe immer endlich und bei gegebenem p von begrenzter Ordnung, so dass man hieraus Maximalzahlen für r und $n - r$ bekommt. Für die rationalen und elliptischen Regelflächen gelten derartige Begrenzungen nicht. In den jetzt folgenden Entwicklungen wollen wir uns auf diese Fälle beschränken.

Doch seien zuerst einige Bemerkungen über eine mit Fragestellungen dieser Art sich beschäftigende Arbeit von E. LUNELL eingeschaltet[1]. Dort wird verlangt, dass die Hauptkorrespondenz sich in lauter quadratische Involutionen auflösen soll. Hierdurch tritt für Γ_r und Γ_{n-r} die Beschränkung ein, dass ihre Ordnungen Potenzen von 2 sein müssen. Behandelt werden Fälle, wo als solche Ordnungen 2, 4 und 8 auftreten. Einerseits werden zahlreiche einzelne Typen von R_n für $n \leqq 16$ mit den verlangten Eigenschaften gefunden. Andererseits gibt der Verfasser ganze Reihen von Fällen mit einer Auflösung der Hauptkorrespondenz in der gewünschten Art, wo der Grad n und gleichzeitig das Geschlecht p über alle Grenzen wächst. Dabei hat man, um nur den einen von zwei reziproken Fällen hervorzuheben, $r = 2$, so dass es sich also um hyperelliptische Gebilde handelt. Nun wird, wenn r und $n - r$ gegeben sind, durch die Existenz von zwei verschiedenen rationalen Involutionen I_r und I_{n-r} eine Begrenzung für das Geschlecht p eines algebraischen Gebildes eingeführt. Bei den obigen Reihen ist aber $s = r = 2$, wo s die oben angegebene Bedeutung hat, und die andere Involution ist also mit I_2 zusammengesetzt. Es kommt mithin nur die Involution I_2 vor, so dass eine Begrenzung für p nicht erforderlich wird. Soll es nun möglich sein, bei hohem p das Gebilde durch die Regelfläche darzustellen, so muss der Grad der Regelfläche erhöht werden, was dadurch gelingt, dass eine geeignete Anzahl k von Erzeugenden sich mit der Leitgeraden vereinigt. In den oben besprochenen Reihen handelt es sich also um Fälle, wo die Regelfläche eine doppelte Berührungsleitgerade hat, mit welcher eine gewisse Anzahl k von Erzeugenden inzidieren. Als Beispiele nehmen wir die Fälle, in denen in einer Ebene durch die Leitlinie vier bzw. acht nicht mit ihr zusammenfallende Erzeugende liegen. Die Doppelkurve enthält dann bei vollständiger Zerlegung zwei bzw. sechs Teilkurven ausserhalb der Leitgeraden. Unter den hier möglichen Reihen seien erwähnt:

1) Im ersten Falle R_{k+6} mit $p = k + 2$, also $p \geqq 2$.

2) Im zweiten Falle R_{k+10} mit $p = k + 3$ und einer Doppelerzeugenden. Hier tritt überdies die Beschränkung ein, dass p ungerade sein muss. Dies lässt sich bereits daraus folgern, dass nur hyperelliptische Kurven von ungeradem

---

[1] *Liniengeometrische Studien mit besonderer Rücksicht auf Regelflächen mit vollständigem Zerfalle der Doppelkurve* (Diss., Uppsala 1940). Hier gilt es besonders Kap V, § 1.

Geschlechte eine Gruppe Γ_8 des Typus (2, 2, 2) von birationalen Transformationen in sich gestatten können.

Wenn man von der Anhäufung von Erzeugenden auf die Leitgerade absieht, so ist es eigentlich dieselbe Zerlegung der Doppelkurve in jeder solchen Reihe. Im letzten Teile dieser Arbeit werden wir Fälle finden, wo für n beliebig gross die Doppelkurve einer R_n wirklich in $n-2$ verschiedene Teile zerfällt.

4. Für eine rationale Regelfläche ist es möglich für die Koordinaten der Erzeugenden eine rationale Darstellung vermittelst eines Parameters t zu bekommen. Wir nehmen unseren Ausgangspunkt von den sechs Plückerschen Linienkoordinaten

$$p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i \quad (i, k = 1, 2, 3, 4; \ i < k),$$

wo x_1, x_2, x_3, x_4 und y_1, y_2, y_3, y_4 die Koordinaten für zwei Punkte der geraden Linie bezeichnen. Es besteht die fundamentale Identität

$$(1) \qquad p_{12} p_{34} - p_{13} p_{24} + p_{14} p_{23} = 0.$$

Als Leitgerade können wir $x_1 = x_2 = 0$ annehmen. Für die Erzeugenden der Regelfläche ergibt sich dann

$$p_{13} : p_{14} = p_{23} : p_{24} = f_r(t) : g_r(t);$$
$$p_{13} : p_{23} = p_{14} : p_{24} = f_{n-r}(t) : g_{n-r}(t).$$

Wir können annehmen, dass die Funktionen f_r, g_r, f_{n-r} und g_{n-r} ganze rationale Funktionen ohne gemeinsamen Teiler von den durch die Indizes angegebenen Gradzahlen sind. Gibt es nun k durch eine Relation $h_k(t) = 0$ bestimmte Erzeugende, welche mit der Leitgeraden zusammenfallen, so erhält man die Parameterstellung

$$(2) \qquad p_{13} : p_{14} : p_{23} : p_{24} : p_{34} = f_r(t) f_{n-r}(t)\, h_k(t) : g_r(t) f_{n-r}(t)\, h_k(t) :$$
$$: f_r(t)\, g_{n-r}(t)\, h_k(t) : g_r(t)\, g_{n-r}(t)\, h_k(t) : l_{n+k}(t).$$

Die Funktion $l_{n+k}(t)$ darf keinen Faktor mit $h_k(t)$ gemeinsam haben, ist aber sonst beliebig zu nehmen. Damit zwei gerade Linien mit den Koordinaten p_{ik} und p'_{ik} einander treffen, hat man bekanntlich die Bedingung

$$p'_{12} p_{34} + p'_{34} p_{12} - p'_{13} p_{24} - p'_{24} p_{13} + p'_{14} p_{23} + p'_{23} p_{14} = 0.$$

Sind nun die geraden Linien zwei Erzeugende mit den Parametern t und t_1, so ergibt sich hieraus

$$(3) \qquad h_k(t)\,h_k(t_1)\,[f_r(t)\,g_r(t_1) - f_r(t_1)\,g_r(t)]\,[f_{n-r}(t)\,g_{n-r}(t_1) - f_{n-r}(t_1)\,g_{n-r}(t)] = 0.$$

Der erste Faktor $h_k(t)\,h_k(t_1)$ bezieht sich auf die mit der Leitlinie inzidenten Erzeugenden und hat hier für uns kein Interesse. Wir können deshalb $k = 0$ annehmen. Die beiden anderen rühren von den Involutionen I_r und I_{n-r} her.

Für die vollständige Zerlegung der Hauptkorrespondenz haben wir jetzt offensichtlich die notwendige und hinreichende Bedingung, dass, wenn wir

$$\frac{f_r(t)}{g_r(t)} = Z_r(t), \quad \frac{f_{n-r}(t)}{g_{n-r}(t)} = Z_{n-r}(t)$$

schreiben, sowohl $Z_r(t)$ als $Z_{n-r}(t)$ *Grundfunktionen bei endlichen linearen Substitutionsgruppen* sein sollen. Wenn wir zwei zu einander reziproke Fälle zusammenfassen, so bekommen wir hier 15 verschiedene Fälle. Nun haben die Tetraedergruppe, die Oktaedergruppe und die Ikosaedergruppe die bestimmten Ordnungen 12, 24 und 60. Zyklische Gruppen und Diedergruppen gibt es dagegen für jede ganze Zahl $m > 0$ von den Ordnungen m, $2m$. Da wir hier die fünf Gruppen in jeder möglichen Art mit einander kombinieren, so erhalten wir bei der Annahme, dass keine Erzeugende mit der Leitgeraden inzidieren soll, als Lösungen unserer gestellten Aufgabe Regelflächen von den Gradzahlen

1) 24, 2) 36, 3) 48, 4) 72, 5) 84, 6) 120, 7) $12 + m$, 8) $24 + m$, 9) $60 + m$,
10) $12 + 2m$, 11) $24 + 2m$, 12) $60 + 2m$, 13) $m + m_1$, 14) $m + 2m_1$, 15) $2m + 2m_1$.

Bei gegebenem Grad n findet man die Lösungen aus den Zerlegungen von n.

Wir brauchen weiter nur von der Doppelkurve zu sprechen, da das reziproke für die Doppeldeveloppable gilt. Jede von den $r - 1$ Projektivitäten in der Veränderlichen t, in welche Γ_r zerlegt wird, hat mit jeder von den $n - r - 1$ Projektivitäten von Γ_{n-r-1} ein entsprechendes Paar gemeinsam. Hieraus bekommt man $(r - 1)\,(n - r - 1)$ Punkte, in denen die Restdoppelkurve die r-fache Leitgerade trifft. Zu jedem Teile der Restdoppelkurve, welche von den Erzeugenden in nur einem Punkte getroffen wird, gehören $r - 1$ von diesen Punkten und zu jedem Teile, welche die Erzeugenden als Bisekanten hat, $2(r - 1)$. Überdies sieht man leicht ein, dass in einer Ebene durch die Leitlinie noch $\frac{n-r}{2}$ Punkte einer Teildoppelkurve der ersten Art und $n - r$ Punkte einer Teildoppelkurve der zweiten Art liegen. Eine Teildoppelkurve der ersten Art hat mithin die Ordnung $\frac{n+r}{2} - 1$ und eine Teildoppelkurve der zweiten Art die Ordnung $n + r - 2$.

Aus einer Teildoppelkurve können aber Doppelerzeugende sich aussondern. Eine solche muss natürlich von einem gemeinsamen Punkte mit der Leitlinie ausgehen. Die Existenz von Doppelerzeugenden wird natürlich durch die Wahl des Ausdruckes für p_{34} in (2) beeinflusst. Gelingt dies in solcher Weise, dass noch eine zweite Leitgerade herauskommt, so bekommt man sogar die Maximalzahl von $(r-1)(n-r-1)$ Doppelerzeugenden. Ist die Relation

$$a_{12}a_{34}-a_{13}a_{24}+a_{14}a_{23}=0$$

erfüllt, so bedeutet bekanntlich

$$a_{34}p_{12}+a_{12}p_{34}-a_{24}p_{13}-a_{13}p_{24}+a_{23}p_{14}+a_{14}p_{23}=0$$

einen linearen Komplex mit einer Leitgeraden. Die Bedingung für eine zweite Leitlinie ist mithin, wobei in (2) $k=0$ gesetzt werden soll, das identische Verschwinden eines Ausdruckes

$$a_{12}l_n(t)-a_{24}f_r(t)f_{n-r}(t)-a_{13}g_r(t)g_{n-r}(t)+a_{23}g_r(t)f_{n-r}(t)+a_{14}f_r(t)g_{n-r}(t).$$

Da a_{34} hier nicht vorkommt, so bedeutet dies, dass sich $l_n(t)$ linear durch die vier Funktionen $f_r(t)f_{n-r}(t)$, $g_r(t)g_{n-r}(t)$, $g_r(t)f_{n-r}(t)$ und $f_r(t)g_{n-r}(t)$ ausdrücken lassen soll.

Die endlichen linearen Substitutionsgruppen liefern uns kein höheres Beispiel einer aus lauter Involutionen bestehenden Gruppe als die Vierergruppe. Nimmt man nun an, dass sowohl Γ_r als Γ_{n-r} Vierergruppen sind, so erhält man Fälle von R_8 mit einer vierfachen Leitgeraden, für welche sowohl Doppelkurve als Doppeldeveloppable vollständig zerlegbar sind.[1]

Aus der Theorie der endlichen linearen Substitutionsgruppen wissen wir, dass für drei Werte der Grundfunktion die Lösungen mehrfach sind und zwar: für die Diedergruppe doppelt, doppelt, n-fach; füe die Tetraedergruppe doppelt, dreifach, dreifach; für die Oktaedergruppe doppelt, dreifach, vierfach; für die Ikosaedergruppe doppelt, dreifach, fünffach. In derselben Vielfachheit treten die Erzeugenden auf, welche in den entsprechenden Ebenen durch die Leitgerade liegen. Im zyklischen Fall, wo die Sache sich am einfachsten gestaltet, gibt es zwei Ebenen, die n unmittelbar auf einander folgende Erzeugende enthalten. Nehmen wir an, dass sowohl Γ_r als Γ_{n-r} zum zyklischen Fall gehören, so lässt

[1] Eine Behandlung von solchen Fällen findet sich in meiner Schrift, *Über die Regelflächen mit einer Leitgeraden* (*»Regelflächen I«*), Acta mathematica LVII (1931), S. 349. Die Behandlung gilt auch für $p=1$.

sich durch geeignete Wahl der Koordinatenebenen und des Parameters t die Relation (2) in der folgenden Weise vereinfachen, wobei wir $k = 0$ setzen:

$$(3) \qquad p_{13} : p_{14} : p_{23} : p_{24} : p_{34} = t^r (t-1)^{n-r} : (t-1)^{n-r} : t^r (t-a)^{n-r} : (t-a)^{n-r} : l_n(t).$$

Es gibt hier noch eine zweite reelle Gestalt, in welcher die ausgezeichneten Ebenen und Punkte der Leitlinie nicht länger reell sondern konjugiert imaginär sind. Im neuen reellen Parameter t_1 werden t, 1, $t-1$, $t-a$ durch bzw. $t_1 + i$, $t_1 - i$, $t_1 + a + bi$, $t_1 + a - bi$ ersetzt. Will man als Linienkoordinaten reelle Grössen einführen, so kann man setzen

$$q_1 = \frac{1}{2}(p_{13} + p_{24}),\ q_2 = \frac{i}{2}(p_{13} - p_{24}),\ q_3 = \frac{1}{2}(p_{14} + p_{23}),\ q_4 = \frac{i}{2}(p_{14} - p_{23}),$$

wodurch (1) in

$$p_{12} p_{34} - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 0$$

übergeht. Bei dieser reellen Gestalt der Regelfläche schneidet jede reelle Ebene durch die Leitgerade lauter reelle Erzeugende aus, und in jedem reellen Punkte der Leitlinie stossen lauter reelle Erzeugende zusammen. Hieraus folgt, dass die Teildoppelkurven und Teildoppeldeveloppabeln sämtlich reell sind und nirgends isoliert verlaufen. Man sieht ohne Schwierigkeit ein, dass diese Eigenschaft noch bestehen bleibt, wenn für eine oder beide Gruppen Γ_r und Γ_{n-r} Diedergruppen genommen werden.

Die (2, 2)-Korrespondenz zwischen den Erzeugenden, welche durch eine Teildoppelkurve vermittelt wird, die von den Erzeugenden in je zwei Punkten getroffen wird, braucht ja im allgemeinen nicht in zwei zu einander inverse (1, 1)-Korrespondenzen zerlegbar sein. Doch muss dies der Fall sein, wenn die Doppelkurve in solcher Weise zusammengesetzt wird wie hier, wenn die bestimmende Gruppe die Ikosaedergruppe, Oktaedergruppe oder eine Diedergruppe ist, weil die involutorischen Operationen hinreichen um diese Gruppen zu erzeugen. Dasselbe scheint für die Tetraedergruppe zu gelten, wenn auch nicht aus demselben Grunde. Dagegen dürfte eine vollständige Auflösung der Involution I_{n-r} keine notwendige Bedingung für eine ähnliche Zerlegung der Doppelkurve wie im zyklischen Fall sein. Eine solche Zerlegung der Doppelkurve findet man nämlich, wenn für $n - r = \nu$ die Involution

$$(4) \qquad f_\nu(t) + \lambda g_\nu(t)$$

1) zwei Glieder, welche ν^{te} Potenzen sind, enthält, wo wir also im zyklischen Falle sind;

2) das eine von diesen Gliedern durch zwei Glieder ersetzt wird, welche für ν ungerade beide von der Gestalt $\left[\varphi_{\frac{\nu-1}{2}}(t)\right]^2 \varphi_1(t)$ sind; dagegen soll für ν gerade ein Glied die Gestalt $\left[\varphi_{\frac{\nu}{2}}(t)\right]^2$ und das andere die Gestalt $\left[\varphi_{\frac{\nu}{2}-1}(t)\right]^2 \varphi_2(t)$ haben;

3) man hat in (4) für ν ungerade vier Glieder von der Gestalt $\left[\varphi_{\frac{\nu}{2}-1}(t)\right]^2 \varphi_1(t)$ und für ν gerade zwei Glieder von der Gestalt $\left[\varphi_{\frac{\nu}{2}}(t)\right]^2$ sowie zwei andere von der Gestalt $\left[\varphi_{\frac{\nu}{2}-1}(t)\right]^2 \varphi_2(t)$.

Dass es bei allgemeiner Ordnung ν Involutionen (4) gibt, die den Bedingungen 2) oder 3) genügen, erscheint uns nicht zweifelhaft. Doch dürfte ihre wirkliche Herstellung im Falle (3) mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden sein.

Betrachten wir bei vollständig zerfallender Hauptkorrespondenz eine Teildoppelkurve, welche von den Erzeugenden in zwei Punkten getroffen wird. Durch die zugeordneten zu einander inversen (1, 1)-Korrespondenzen werden in zwei Weisen die Erzeugenden der Regelfläche und die Punkte der Doppelkurve einander birational zugeordnet. Die Involutionen, welche die Ebenen durch die Leitgerade einerseits zwischen den Erzeugenden der Regelfläche und andererseits zwischen den Punkten der Doppelkurve vermitteln, können mithin als identisch betrachtet werden. Ziehen wir nun von der Leitlinie aus die Bisekanten zur Doppelkurve, so entsprechen diese offensichtlich birational den Punkten der Doppelkurve, wobei hier die vollständige Doppelkurve der Regelfläche gemeint wird. *Man hat also eine birationale Abbildung der Doppelkurve auf die Bisekantenregelfläche, und letztere muss in genau der entsprechenden Weise zerfallen wie die Doppelkurve.* Für dieses Resultat ist übrigens nicht die vollständige Zerlegung der Hauptkorrespondenz sondern nur die Auflösung der zur gewählten Teildoppelkurve gehörigen (2, 2)-Korrespondenz erforderlich.

5. Für ein elliptisches Gebilde gibt es einen Parameter u, durch welchen das Gebilde sich eindeutig mit den Perioden ω_1 und ω_2 darstellen lässt. Vermittelst dieses Parameters hat man für die birationalen Transformationen des Gebildes in sich den allgemeinen Ausdruck

$$u' \equiv \pm u + c. \tag{5}$$

Im harmonischen und äquianharmonischen Falle gibt es noch andere derartige Transformationen. Da aber unter diesen keine Involutionen vorkommen, so wollen wir hier auf dieselben keinen Bezug nehmen. Die Substitutionen in (5) mit dem oberen Zeichen haben schon für sich die Gruppeneigenschaft. Will man aber durch eine endliche Untergruppe von (5) eine rationale Involution auf das Gebilde definieren, so müssen noch Operationen mit dem unteren Zeichen hinzukommen. Alle Substitutionen mit dem Zeichen — sind involutorisch, und man kann durch Kombination mit einer beliebigen solchen die Ordnung einer Gruppe, deren Operationen sämtlich das Zeichen + haben, verdoppeln. Dagegen gibt es mit dem oberen Zeichen ausser der Identität nur drei involutorische Operationen, nämlich

$$u' \equiv u + \frac{\omega_1}{2},\ u + \frac{\omega_2}{2},\ u + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}. \tag{6}$$

Eine Untergruppe von (5) mit lauter involutorischen Operationen kann mithin höchstens die Ordnung 8 haben. Verlangt man hier, dass die Hauptkorrespondenz für eine R_n sich in lauter quadratische Involutionen auflösen soll, so hat man für n den höchsten Wert 16, und in diesem Falle muss $r = n - r = 8$ sein. Die beiden Gruppen von der Ordnung 8, die den Punkten und Ebenen der Leitlinie zugeordnet sind, müssen dann die Operationen (6), also eine gemeinsame Untergruppe von der Ordnung 4 enthalten. Hieraus folgt, dass die acht Mäntel längs der Leitlinie einander zu je vier berühren müssen, und die Regelfläche hat, wenn von der Leitgeraden abgesehen wird, vier rationale Teildoppelkurven und vier rationale Teildoppeldeveloppabeln.[1] Es gilt übrigens allgemein, wenn für $r = n - r$ Γ_r und Γ_{n-r} die durch Operationen erster Art erzeugten Untergruppen gemeinsam haben, dass die Doppelgebilde vom Geschlechte 1 sich mit der Leitgeraden vereinigt haben und nur die rationalen übrig bleiben.

Da sowohl Γ_r als Γ_{n-r} gleich viele Operationen erster und zweiter Art haben müssen, so sind hier r und $n - r$ gerade Zahlen. Wir schreiben $r = 2m_1$, $n - r = 2m$, so dass $n = 2m + 2m_1$ ist. Wenn für eine von diesen Gruppen die Untergruppe aus Operationen erster Art gegeben ist, so lässt sich die vollständige Gruppe durch Kombination mit einer beliebigen Operation zweiter Art erhalten. Hieraus folgt, dass, wie auch m und m_1 gewählt worden sind, es zulässig ist anzunehmen, dass die Gruppen keine gemeinsamen Operationen mit dem Zeichen — haben. Für die Operationen erster Art lässt sich, wie das oben angegebene

[1] Sieh die von LUNELL in seiner Diss., Kap. V § 1 angeführten Beispiele. Den Fall einer R_{10} mit $r = 2$, $n - r = 8$ habe ich in »Regelflächen I», S. 385—387 ausführlich untersucht. Die Behandlungsweise in der vorliegenden Abhandlung im Falle einer Leitgeraden ist als eine weitere Verfolgung desselben Grundgedankens zu betrachten, der in den drei letzten Nummern meiner soeben zitierten Arbeit skizziert wird.

Beispiel zeigt, ähnliches nicht behaupten. Sind aber m und m_1 relative Primzahlen, so kann nur die Identität gemeinsam sein. Dasselbe gilt, wenn für sowohl Γ_{2m} als Γ_{2m_1} die Untergruppen aus Operationen erster Art beide zyklisch sind und von der Gestalt

$$u' \equiv u + \frac{h\omega}{m} \text{ bzw} \equiv u + \frac{h_1\omega'}{m_1}$$

$$(h = 0, \ldots m - 1;\ h_1 = 0, \ldots m_1 - 1),$$

wo ω und ω' verschiedene Perioden bezeichnen.

Wenn wir mit den Ergebnissen in der vorhergehenden Nummer für $p = 0$ vergleichen, so sind hier die rationalen Funktionen in (2) durch Produkte von σ-Funktionen zu ersetzen. Die Gruppe Γ_{2m} lässt sich immer in die Gestalt

$$u' \equiv \pm u + c_i \ (i = 1, \ldots m) \tag{7}$$

überführen, wo für die Grössen c_i geeignete Periodenquotienten zu schreiben sind. Man sieht leicht ein, dass, falls in (7) für einen u-Wert zwei Grössen rechts gleich sind, ihre Zeichen verschieden sein und sämtliche diese $2m$ Grössen sich in m gleiche Paare verteilen müssen. Die entsprechende Ebene enthält mithin m Paare von unmittelbar auf einander folgenden Erzeugenden. Nun ist bekanntlich $4m$ die Anzahl der Koinzidenzen bei einer elliptischen Involution von der Ordnung $2m$, und diese müssen sich hier auf vier Ebenen verteilen.

Wenn von den Punkten, die auf der Leitgeraden liegen, abgesehen wird, so hat eine Teildoppelkurve, für welche die Erzeugenden einfache Sekanten sind, in einer Ebene durch die Leitlinie m Punkte. Sind aber die Erzeugenden Bisekanten, so ist die Anzahl dieser Punkte $2m$. Die Anzahl der Punkte auf der Leitgeraden ist davon abhängig, wie viele Paare zwei Substitutionen (5) gemeinsam haben. Nun ist diese Anzahl Null, wenn die Zeichen gleich sind. Die Anzahl ist 2, wenn die Substitution mit dem Zeichen + involutorisch ist. Wenn aber letztere nicht involutorisch ist, so bekommt man vier gemeinsame Paare, welche wiederkehren, wenn man u' und u vertauscht, d. h. bei der inversen Substitution. Nun hat Γ_{2m_1} m_1 Substitutionen mit dem Zeichen — und, von der Identität abgesehen, $m_1 - 1$ mit dem Zeichen +. Eine rationale Teildoppelkurve hat somit $2(m_1 - 1)$ Punkte auf der Leitlinie und ist von der Ordnung $2(m_1 - 1) + m$. Dagegen ist die Anzahl der Punkte einer elliptischen Teildoppelkurve auf der Leitlinie $2m_1$ bzw. $4m_1$, je nachdem dieselbe von den Erzeugenden in einem oder zwei Punkten getroffen wird. Für die Ordnung der Kurve findet man also $2m_1 + m$ bzw. $4m_1 + 2m$.

6. Unter den Regelflächen ohne Leitgerade bieten diejenigen mit einem Leitkegelschnitt besondere Angriffspunkte für die Untersuchung dar, und dieser Fall spielt auch eine Hauptrolle in unseren Untersuchungen über die Regelflächen sechsten Grades.[1] Ohne aber noch weiter zu spezialisieren ist es wohl nicht zu hoffen hier Resultate von Bedeutung zu erhalten, welche für beliebig hohe Gradzahlen gelten. Ein naheliegender Ausweg, der auch zu einer grossen Vereinfachung führt, ist, dass man zwei Leitkegelschnitte annimmt, die mit einander zwei gemeinsame Punkte haben. In der Tat bilden die beiden Kegelschnitte zusammen die Basiskurve eines Büschels von Flächen 2. Grades F_2, und jede gerade Linie, die Sekante beider Kegelschnitte ist, gehört zu einer von diesen F_2. Da nun zwei Erzeugende von verschiedenen F_2 des Büschels einander nur in einem von den beiden Leitkegelschnitten treffen können, so erhält man die Doppelkurve, wenn von den Leitkegelschnitten und etwaigen Doppelerzeugenden abgesehen wird, aus den Schnittpunkten solcher geraden Linien, die zu verschiedenen Erzeugendensystemen einer und derselben F_2 gehören. Den dualistisch entsprechenden Fall bekommt man, wenn man den Erzeugenden der Regelfläche die Bedingungen auferlegt, dass sie zwei Kegel 2. Grades mit zwei gemeinsamen Tangentenebenen berühren sollen. Es gibt noch einen Zwischenfall zwischen den beiden oben angegebenen, indem man von jeder Art je eine Bedingung annimmt; dabei sollen der Kegelschnitt und der Kegel einander zweimal berühren.

Wir wollen uns aber hier auf einen Fall beschränken, der als gemeinsamer Unterfall der obigen drei Möglichkeiten betrachtet werden kann. Zwischen dem Kegelschnitt und dem Kegel soll nämlich jetzt nicht nur zweifache Berührung sondern vollständige Inzidenz gelten. Die Gleichung des Kegels sei

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Als Kegelschnitt sei der Schnitt dieses Kegels mit $z = 0$ genommen. Die Flächen F_2

$$x^2 + y^2 - 1 - \lambda^2 z^2 = 0 \tag{8}$$

berühren den Kegel längs des Kegelschnittes, und jede berührende gerade Linie bestimmt eine Fläche des Büschels (8). Für die Regelscharen einer Fläche (8)

[1] Sieh, *Über die Regelflächen sechsten Grades ohne Leitgerade* (»*Regelflächen* II»), Acta mathematica LIX (1932). Diese Arbeit sowie grosse Teile von »Regelflächen I» können als eine Fortsetzung und Ergänzung meiner Dissertation, *Klassifikation af regelytorna af sjette graden* (Lund, 1892), betrachtet werden.

bekommt man

$$(9_1) \qquad (x - \lambda z) - \mu(1 - y) = 0;\ \mu(x + \lambda z) - (1 + y) = 0.$$

$$(9_2) \qquad (x + \lambda z) - \mu_1(1 - y) = 0;\ \mu_1(x - \lambda z) - (1 + y) = 0.$$

Zwei einander begleitende Regelscharen werden mithin durch entgegengesetzte Parameter λ, $-\lambda$ charakterisiert. Für den Schnittpunkt einer Linie (9_1) oder (9_2) mit $z = 0$ erhalten wir

$$x = \frac{2\mu}{1 + \mu^2};\quad y = \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1}.$$

Der Kongruenz von geraden Linien, welche den aufgestellten Bedingungen genügt, werden also zwei Parameter λ und μ zugeordnet. Von diesen bestimmt λ die Regelschar und μ den Schnittpunkt mit dem Leitkegelschnitt. Für eine zur Kongruenz gehörende Regelfläche gilt sonach eine Relation

$$(10) \qquad F(\lambda, \mu) = 0,$$

durch welche eine Abbildung der Regelfläche auf eine Kurve definiert wird. Hierbei ist es bequem anzunehmen, dass die Parameter λ und μ den Erzeugendensystemen einer gewissen Grundfläche 2. Grades zugeordnet sind, auf welche also die Kongruenz birational abgebildet wird. Die Regelschar $\lambda = c$ bezeichnen wir mit R und die begleitende Schar $\mu = c_1$ mit $\bar{R}$. Nach dieser Deutung ist, wenn in (10) $F(\lambda, \mu)$ eine ganze rationale Funktion vom Grade m_2 in λ und m_1 in μ bezeichnet, die Bildkurve von der Ordnung $m_1 + m_2 = m$. Da die Erzeugenden der Schar $\bar{R}_2$ den Punkten des Leitkegelschnittes zugeordnet sind, so ist dieser m_2-fach für die Regelfläche. Da aber sämtliche m_2 Mäntel längs des Leitkegelschnittes den Kegel und also einander berühren müssen, so findet man $m_1 + 2m_2 = n$ für den Grad der Regelfläche. Der Faktor der Hauptkorrespondenz, der zum Leitkegelschnitte gehört und übrigens in zweiter Potenz auftritt, wird hier auf die Involution I_{m_2} übergeführt, die aus der Bildkurve durch die Regelschar $\bar{R}_2$ ausgeschnitten wird. Soll nun diese Involution vollständig zerlegbar sein, so muss die Bildkurve eine Gruppe Γ_{m_2} von m_2 birationalen Transformationen in sich zulassen, bei welcher die Erzeugenden der Schar $\bar{R}_2$ ungeändert bleiben.

Bei der Abbildung werden die Schnittpunkte der zu zwei Scharen λ und $-\lambda$ gehörenden Erzeugenden der Regelfläche auf die Verbindungsgeraden der auf je zwei Erzeugenden λ und $-\lambda$ der Schar R_2 liegenden Punkte übergeführt. Der entsprechende Faktor der Hauptkorrespondenz muss also eine involutorische Beziehung zwischen diesen Gruppen von je m_1 Punkten ausdrücken. Nun ist die Bedingung für die vollständige Auflösbarkeit dieses Faktors, dass die Bildkurve m_1 birationale Transformationen in sich besitzt, welche je Erzeugende λ und $-\lambda$ vertauschen. Dann muss es auch m_1 derartige Transformationen geben, die jede Erzeugende der Schar R_2 in sich überführen, und diese Transformationen bilden eine Gruppe Γ_{m_1}, welche sich also in der angegebenen Weise zu einer Gruppe Γ_{2m_1} erweitern lassen soll. *Die Bedingung für die vollständige Zerlegbarkeit der Hauptkorrespondenz ist also die Existenz der oben charakterisierten Gruppen Γ_{m_1} und Γ_{2m_1}.* Man ersieht ohne Schwierigkeit, dass diese Bedingungen sich in mannigfacher Weise genügen lassen. Wir beschränken uns hier auf den Fall, wo Γ_{2m_1} eine Diedergruppe ist und Γ_{m_1} die zugehörige zyklische Untergruppe.[1] Die Operationen, welche Erzeugende λ und $-\lambda$ vertauschen, sind dann sämtlich involutorisch, und die Doppelkurve der Regelfläche lässt sich in Teilkurven auflösen, die von den Erzeugenden nur einmal getroffen werden.

In der Tat steht die hier eingeschlagene Untersuchungsmethode in vollständiger Übereinstimmung mit derjenigen, welche wir in unserer Dissertation sowie in »Regelflächen II» entwickelt haben. Es wurde dort von der bekannten Beziehung ausgegangen, welche zwischen einem Komplexe mit Leitkegelschnitt und einem allgemeinen linearen Komplexe besteht, indem den Komplexgeraden des einen Raumes die Punkte des anderen Raumes birational entsprechen. Durch die Regelschar $\bar{R}_2$ und die Geraden $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ der Leitschar wird ja ein linearer Komplex bestimmt, und zu diesem Komplexe sind zwei Gerade λ, $-\lambda$ konjugiert, so dass ihre gemeinsame Sekanten dem Komplexe angehören. Die ausgezeichnete Rolle spielt hier die Linie $\lambda = \infty$, indem ihr die ganze Kegelschnittebene entspricht. Den einzelnen Punkten dieser Ebene werden die quadratischen Involutionen auf $\lambda = \infty$ zugeordnet.

7. Es kann Vorteile darbieten durch eine lineare Substitution die Involution $\lambda' = -\lambda$ durch $\lambda_1' = \frac{1}{\lambda_1}$ zu ersetzen, weil es dadurch ermöglicht werden kann gewisse singuläre Punkte der Bildkurve auf den Linien $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_1 = \infty$ zu verlegen. Als nötige Substitution können wir

[1] Doch wird in Nr. 9 ein Fall behandelt, wo Γ_{m_1} eine Vierergruppe und Γ_{2m_1} eine Abelsche Gruppe vom Typus (2, 2, 2) bedeutet.

$$(11) \qquad \lambda_1 = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}$$

wählen. Es entsprechen dann $\lambda_1 = 1$ dem Leitkegelschnitt und $\lambda_1 = -1$ dem für $\lambda = 0$ zum Büschel (8) gehörenden Kegel. Auch über die Linien $\mu_1 = 0$ und $\mu_1 = \infty$ der Schar $\bar{R}_2$ können wir in ähnlicher Weise frei verfügen. Wir wollen so mit dem Beispiel anfangen, wo die Gleichung der Bildkurve auf die einfache Gestalt

$$(12) \qquad \lambda_1^{m_2} - \mu_1^{m_1} = 0$$

gebracht werden kann, wo m_1 und m_2 relative Primzahlen sein sollen. Man erhält für λ_1 und μ_1 vermittelst eines Parameters t den Ausdruck

$$(13) \qquad \lambda_1 = t^{m_1}; \; \mu_1 = t^{m_2}.$$

Bezeichnet

$$(13_1) \qquad x_1 w_1 - y_1 z_1 = 0$$

die Gleichung der F_2, auf welcher die Kurve liegt, und setzen wir

$$(13_2) \qquad x_1 : y_1 = z_1 : w_1 = \mu_1; \; x_1 : z_1 = y_1 : w_1 = \lambda_1,$$

so erhalten wir für die Kurve

$$(14) \qquad x_1 : y_1 : z_1 : w_1 = t^{m_1+m_2} : t^{m_1} : t^{m_2} : 1 .$$

Die Bildkurve ist also in diesem Fall eine W-Kurve, und zwar, weil der höchste Exponent die Summe der zwei anderen ist, von dem Typus, der als »ausgezeichnete» W-Kurve bezeichnet worden ist. Für die Operationen der Gruppe Γ_{m_2} ergibt sich jetzt

$$(15) \qquad \lambda_1' = \omega \lambda_1,$$

wo ω die Einheitswurzeln vom Index m_2 durchläuft. In gleicher Weise hat man für die Operationen von Γ_{m_1}

$$(16) \qquad \mu_1' = \omega_1 \mu_1$$

mit $\omega_1^{m_1} = 1$. Für die in Γ_{2m_1} hinzutretenden Operationen hat man nach (13)

$$(17) \qquad \lambda_1' = t'^{m_1} = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{t^{m_1}}.$$

Letztere Substitution löst sich aber in m_1 einzelne Substitutionen

(18) $$t' = \frac{\omega_1}{t}$$

auf. *In* (15) *und* (18) *haben wir Ausdrücke für die vollständige Zerlegung der Hauptkorrespondenz.*

Für die Koinzidenzen von (18) haben wir

(19) $$t^2 = \omega_1,$$

also $t^{2m_1} = 1$ oder $\lambda_1 = \pm 1$.

Diese Koinzidenzen bestimmen zwei Punkte der in Rede stehenden Teildoppelkurve, welche Schnittpunkte von unmittelbar auf einander folgenden Erzeugenden also Torsalpunkte sind. Aus den zugehörigen λ_1-Werten ± 1 ersieht man, dass diese Torsalen entweder Erzeugende des Leitkegelschnitts oder des Leitkegels sind. Da für die Bildkurve die Tangenten nicht mit $\lambda_1 = 1$ bzw. $\lambda_1 = -1$ zusammenfallen, so inzidiert im ersten Falle die Torsalebene nicht mit der Kegelschnittsebene und im zweiten Falle der Torsalpunkt nicht mit der Kegelspitze.

Die Lösungen von (19) verhalten sich in verschiedener Weise, je nachdem m_1 ungerade oder gerade ist. Ist m_1 ungerade, so ist eine Lösung von (19) eine m_1^{te} Einheitswurzel, die andere aber nicht. Eine Koinzidenz liegt also auf $\lambda_1 = 1$ und die andere auf $\lambda_1 = -1$. Ist aber m_1 gerade und bereits $\omega_1^{\frac{m_1}{2}} = 1$, so fallen beide Koinzidenzen auf $\lambda_1 = 1$, und in den $\frac{m_1}{2}$ übrigen Fällen liegen dieselben beide auf $\lambda_1 = -1$.

Die Punkte der Bildkurve auf einer der Geraden $\lambda_1 = \pm 1$, welche nicht Koinzidenzpunkte sind, werden einander bei (18) paarweise zugeordnet, und die Schnittpunkte der entsprechenden Erzeugenden der Regelfläche gehören zur Teildoppelkurve. Wir können demgemäss jetzt die Beiträge zu den Doppelgebilden der Regelfläche angeben, welche von den m_1 Erzeugenden des Leitkegels bzw. Leitkegelschnitts herrühren. Ist m_1 ungerade, so liegen für jeden Teil der Doppelkurve in der Kegelschnittsebene $\frac{m_1 - 1}{2}$ als Schnittpunkte von Tangentenpaaren des Leitkegelschnitts. Hierzu kommt noch der zur übrigbleibenden Tangente gehörende Torsalpunkt, so dass wir insgesamt $\frac{m_1 + 1}{2}$ Punkte in der Ebene gefunden haben. Für die zugehörige Doppeldeveloppable ist die Kegelschnittsebene eine $\frac{m_1 - 1}{2}$-fache Ebene. In dualistisch entsprechender Weise verhält es sich mit der Kegelspitze. Durch dieselbe gehen für jede der m_1 Teildoppelkurven $\frac{m_1 - 1}{2}$ Zweige. Diesen Zweigen entsprechend gehen durch die Kegelspitze gleich viele Ebenen der zugehörigen Doppeldeveloppablen. Hierzu kommt noch die Torsalebene derjenigen durch die Spitze gehenden Erzeugenden, welche an den obigen $\frac{m_1 - 1}{2}$ Zweigen nicht teilgenommen hat, so dass wir insgesamt $\frac{m_1 + 1}{2}$ Ebenen erhalten haben.

Ist andererseits m_1 gerade, so werden für $\frac{m_1}{2}$ Teildoppelkurven die Erzeugenden in der Kegelschnittsebene in $\frac{m_1}{2}$ Paare verteilt, und wir erhalten durch die Schnittpunkte dieser Paare $\frac{m_1}{2}$ Punkte der zugehörigen Doppelkurven. Der mitfolgende Teil der Doppeldeveloppablen hat dann die Ebene als $\frac{m_1}{2}$-fache Ebene. Durch die Kegelspitze gehen für eine von diesen Doppelkurven $\frac{m_1}{2} - 1$ Zweige. Ausser den zu diesen Zweigen gehörenden Ebenen gehen durch die Kegelspitze noch zwei Ebenen der zugehörigen Doppeldeveloppablen, welche Torsalebenen sind, so dass man also $\frac{m_1}{2} + 1$ solche Ebenen erhält. Für die noch übrigen $\frac{m_1}{2}$ Teildoppelkurven sind die Rollen der Kegelschnittsebene und der Kegelspitze vertauscht. In der Kegelschnittsebene liegen $\frac{m_1}{2} + 1$ Punkte einer solchen Doppelkurve, und die Ebene ist $\left(\frac{m_1}{2} - 1\right)$-fach für die Doppeldeveloppable. Durch die Kegelspitze gehen $\frac{m_1}{2}$ Zweige einer Teildoppelkurve und eben so viele Ebenen einer Teildoppeldeveloppablen.

Andere Punkte einer Teildoppelkurve in der Kegelschnittsebene als die oben berücksichtigten sind nur auf dem Leitkegelschnitte denkbar. Man bekommt jedesmal einen solchen Punkt, wo zwei Erzeugende der Regelfläche, welche einander begleitenden Regelscharen angehören, ihren Schnittpunkt auf dem Kegelschnitte haben. Im Falle mit einem einfachen Leitkegelschnitte, d. h. $m_2 = 1$, kommen also keine neuen Punkte hinzu. Für die Doppeldeveloppable lassen sich die entsprechenden Schlüsse betreffend die Ebenen durch die Spitze des Leitkegels ziehen. Durch die obigen Entwicklungen ist also die Existenz von Regelflächen R_{m_1+2} mit einem einfachen Leitkegelschnitte und einem mit diesem in zidenten Leitkegel nachgewiesen, welche die folgenden Eigenschaften besitzen.

Die Doppelkurve sowie die Doppeldeveloppable zerfallen in m_1 *verschiedene Teile. Ist* m_1 *ungerade, so ist jeder Teil der Doppelkurve von der Ordnung* $\frac{m_1+1}{2}$ *und hat in der Kegelspitze einen* $\frac{m_1-1}{2}$*-fachen Punkt. Ebenso sind alle Teile der Doppeldeveloppablen von der Klasse* $\frac{m_1+1}{2}$ *und haben die Kegelschnittsebene als* $\frac{m_1-1}{2}$*-fache Ebene. Ist* m_1 *gerade, so sind* $\frac{m_1}{2}$ *Teile der Doppelkurve von der Ordnung* $\frac{m_1}{2}+1$ *und haben in der Kegelspitze einen* $\frac{m_1}{2}$*-fachen Punkt; die entsprechenden Teile der Doppeldeveloppablen sind von der Klasse* $\frac{m_1}{2}$, *und die Kegelschnittsebene ist für dieselben eine* $\left(\frac{m_1}{2}-1\right)$*-fache Ebene. Die noch übrigen* $\frac{m_1}{2}$ *Teile der Doppelkurve sind von der Ordnung* $\frac{m_1}{2}$ *und haben einen* $\left(\frac{m_1}{2}-1\right)$*-fachen Punkt in der Kegelspitze; die entsprechenden Teile der Doppeldeveloppablen sind von der Klasse* $\frac{m_1}{2}+1$ *und haben die Kegelschnittsebene als* $\frac{m_1}{2}$*-fache Ebene.*

Aus der Existenz des vielfachen Punkts in der Kegelspitze folgt, dass *sämtliche Teile der Doppelkurve ebene Kurven sind.* Dualistisch entsprechend sind *sämtliche Teile der Doppeldeveloppablen Kegel. Die Ebenen der* m_1 *Doppelkurven gehören zu demselben Büschel und die Scheitel der* m_1 *Kegel zu derselben Punktreihe.* Ausser der Kegelspitze gibt es nämlich noch einen zweiten Punkt, durch welchen jeder Teil der Doppelkurve gehen muss. In sämtlichen Relationen (18) entsprechen ja einander die Punkte $t=0$ und $t=\infty$. Die diesen Punkten entsprechenden Erzeugenden der Regelfläche müssen also einander in einem für sämtliche Teile der Doppelkurve gemeinsamen Punkt schneiden. Ebenso wird die Linie, auf welcher die Kegelscheitel liegen, durch die Kegelschnittebene und die Ebene durch die soeben erwähnten Erzeugenden bestimmt.

8. *Für* $m_2>1$ *werden die soeben für* $m_2=1$ *erhaltenen Resultate im wesentlichen darin modifiziert, dass für jeden Teil der Doppelkurve die Ordnung und für jeden Teil der Doppeldeveloppablen die Klasse um* m_2-1 *erhöht wird.* Da die

Abbildungen der Teildoppelkurven projektiv äquivalent sind, so genügt es, wenn wir bei dem Beweise in (18) $\omega_1 = 1$ annehmen. Soll nun μ_1 für t und t^{-1} denselben Wert haben, so folgt $t^{m_2} = t^{-m_2}$ oder $t^{2m_2} = 1$. Wir erhalten also $t^{m_2} = \pm 1$ oder $\mu_1 = \pm 1$. Die Lösungen $t = \pm 1$ scheiden hier aus, und die übrigen $2(m_2 - 1)$ verteilen sich in $m_2 - 1$ Paare von zu einander inversen Lösungen, aus welchen die gesuchten Punkte der Teilkurve auf dem Leitkegelschnitte sich ergeben. Ist m_2 ungerade, so bekommt man für sowohl $\mu_1 = 1$ als $\mu_1 = -1$ $\frac{m_2 - 1}{2}$ Lösungen. Ist aber m_2 eine gerade Zahl, so erhält man für $\mu_1 = 1$ $\frac{m_2}{2} - 1$ Lösungen und für $\mu_1 = 1$ $\frac{m_2}{2}$ Lösungen. Wir beachten, dass die ausgeschiedene Lösung $t = 1$ eine Tangente des Leitkegelschnitts bedeutet. Dasselbe gilt für $t = -1$, falls m_1 eine gerade Zahl ist. Ist aber m_1 eine ungerade Zahl, so bezeichnet diese Lösung eine Erzeugende des Leitkegels. Diese beiden Linien treffen einander dann, wenn m_2 gerade ist, im Punkte $\mu_1 = 1$. Ihr Schnittpunkt als zu einer Doppelkurve gehörig liefert aber nur einen Beitrag zum Leitkegelschnitte.

Da also eine Teildoppelkurve nur zwei Schnittpunkte mit dem Leitkegelschnitte hat, so liegt die Vermutung nahe, dass diese Kurven auch für $m_2 > 1$ ebene Kurven sind. Der Beweis hierfür lässt sich aus dem Umstande erbringen, dass die Regelfläche, welche durch die Verbindungslinien der einander in (18) entsprechenden Punkte der Bildkurve erzeugt wird, zwei gerade Leitlinien besitzt. Diese müssen dann in Bezug auf den am Ende von Nr. 6 charakterisierten linearen Komplex zu einander konjugiert sein, und bei der Abbildung des linearen Komplexes auf den Punktraum des Kegelschnittes geht die von zwei konjugierten Geraden bestimmte Kongruenz in die Punkte einer Ebene über, wenn zur Kongruenz die ausgezeichnete Gerade, d. h. hier $\lambda_1 = 1$, gehört. Auf Grund der projektiven Äquivalenz brauchen wir nur den Fall zu behandeln, wo wir in (18) $\omega_1 = 1$ haben. Die Leitlinien sind in diesem Falle

$$x_1 + w_1 = y_1 + z_1 = 0; \quad x_1 - w_1 = y_1 - z_1 = 0.$$

Betrachten wir die Ebene

$$x_1 + w_1 + k(y_1 + z_1) = 0$$

durch die erste Leitlinie. Für die aus der Bildkurve ausgeschnittenen Punkte bekommen wir die Gleichung

$$t^{m_1 + m_2} + 1 + k(t^{m_1} + t^{m_2}) = 0.$$

Ausser der Lösung $t = -1$, wenn $m_1 + m_2$ ungerade ist, sind die übrigen Lösungen in Paare t, t^{-1} verteilt, und durch Wahl von k kann man ein beliebiges solches Paar als Lösung erhalten. Die Linie $x_1 + w_1 = y_1 + z_1 = 0$ ist mithin eine Leitgerade. In gleicher Weise betrachten wir für die andere Linie die Gleichung

$$x_1 - w_1 + k_1(y_1 - z_1) = 0.$$

Für die aus der Bildkurve ausgeschnittenen Punkte erhalten wir

$$t^{m_1+m_2} - 1 + k_1(t^{m_1} - t^{m_2}) = 0.$$

Wenn man $t = 1$ und für $m_1 + m_2$ gerade noch $t = -1$ ausscheidet, so kommen auch für diese Gleichung die Wurzeln in Paare t, t^{-1} vor, und durch Variation von k_1 werden alle mögliche solche Paare als Lösungen vertreten. Also ist auch diese Linie eine Leitgerade. Aus den obigen Auseinandersetzungen ersieht man auch, dass, wenn $m_1 + m_2$ ungerade ist, die Leitgeraden beide $\frac{m_1 + m_2 - 1}{2}$-fach sind; wenn aber $m_1 + m_2$ eine gerade Zahl bedeutet, so ist $x_1 + w_1 = y_1 + z_1 = 0$ $\left(\frac{m_1 + m_2}{2} - 1\right)$-fach und $x_1 - w_1 = y_1 - z_1 = 0$ $\frac{m_1 + m_2}{2}$-fach. Für die Schnittpunkte der Leitlinien mit der Fläche (13_1) erhält man

$$(x_1 - z_1)(x_1 + z_1) = 0,$$

was nach (13_2) die Linien $\lambda_1 = \pm 1$ bedeutet, welche also von den Leitgeraden getroffen werden.

Es mag hinzugefügt werden, dass für $n_1, n_2 > 1$ zur Doppelkurve der Regelfläche noch die beiden Erzeugenden gehören, welche den Punkten $t = 0, \infty$ der Bildkurve (14) entsprechen. Nun ist das Geschlecht einer Kurve auf einer F_2, welche von den Erzeugenden des einen Systems in m_1 Punkten und von denjenigen des anderen Systems in m_2 Punkten getroffen werden, im allgemeinen $(m_1 - 1)(m_2 - 1)$. Da die Bildkurve hier rational ist, und die beiden singulären Punkte projektiv äquivalent sind, so muss jeder von ihnen das Geschlecht um $\frac{(m_1 - 1)(m_2 - 1)}{2}$ erniedrigen, was übrigens auch aus der Theorie der Äquivalenz eines singulären Punktes einer Kurve in gewöhnlichen Doppelpunkten und Spitzen leicht zu ersehen ist. Dieselbe Bedeutung in Bezug auf die Reduktion des Geschlechts haben die entsprechenden singulären Erzeugenden der Regelfläche.

9. Betreffend die Gruppe Γ_{2m_1}, welche in Nr. 6 eingeführt wurde, gibt es erstens die Möglichkeit, dass zu ihr die fundamentale Involution zwischen den Regelscharen im Kegelschnittsraume gehört, welche wir jetzt wieder in der Gestalt

$$\lambda' + \lambda = 0 \tag{20}$$

annehmen. In diesem Falle ist Γ_{2m_1} das Produkt von Γ_{m_1} mit der durch (20) erzeugten G_2. Halten wir die Begrenzung in unserer Aufgabe aufrecht, dass diejenigen Operationen in Γ_{2m_1}, welche nicht in Γ_{m_1} eingehen, involutorisch sein sollen, so bleiben für Γ_{m_1} die drei Möglichkeiten: Identität, G_2, Vierergruppe, wobei im letzten Falle die Annahme, dass Γ_{m_1} zyklisch sein soll, nicht länger aufrecht erhalten wird. Im ersten Falle ist μ linear in der Grundgleichung (10) und $m_1 = 1$. Die Doppelkurve wird durch (20) und $\mu' = \mu$ charakterisiert. Dies bedeutet aber, dass zwei Erzeugende, welche zu zwei einander begleitenden Regelscharen gehören, ihren Schnittpunkt auf dem Leitkegelschnitte haben. In anderen Werten bedeutet dies, dass *die Doppelkurve sich mit dem Leitkegelschnitte vereinigt hat.* Auf Grund von (20) muss λ in (10) immer in Quadrat auftreten, also m_2 eine gerade Zahl bedeuten. Nun berühren ja die m_2 Mäntel der Regelfläche einander immer längs dem Leitkegelschnitte. In diesem Falle kommt aber noch hinzu, dass *die Mäntel sich in $\frac{m_2}{2}$ Paare verteilen, so dass die Mäntel eines Paares einander nicht nur berühren, sondern sogar oskulieren.*

Ist Γ_{m_1} eine G_2 oder Vierergruppe, so hat die Regelfläche noch eine bzw. drei ausserhalb des Leitkegelschnittes befindliche Doppelkurven. Bei jeder anderen Wahl von Γ_{m_1} müssen Doppelkurven auftreten, zu denen die Erzeugenden Bisekanten sind.

Für $m_2 = 2$ spielt hier der Leitkegelschnitt die Rolle von drei unmittelbar auf einander folgenden Doppelkegelschnitten. Solche Eigentümlichkeiten der Doppelkurve treten bereits bei Regelflächen 5. und 6. Grades auf, und zwar für $m_1 = 1$ und $m_1 = 2$. Im Falle einer R_6 kann dabei das Geschlecht sowohl 1 als 0 sein.[1]

10. Wir betrachten jetzt einen Fall, wo (20) nicht zu Γ_{2m_1} gehört. Als Gleichung der Bildkurve nehmen wir

$$F(\lambda, \mu) = G(\lambda)\mu^{m_1} + H(\lambda) = 0. \tag{21}$$

[1] Diese Fälle sind von mir in meiner Dissertation gefunden. Man sehe auch »Regelflächen II«, S. 17, 34, 35, 49.

Als Operationen von Γ_{m_1} erhalten wir

(22) $$\mu' = \omega\mu;\quad \lambda' = \lambda,$$

wo ω die Wurzeln von $\omega^{m_1} = 1$ durchläuft. Als noch hinzukommende Operationen in Γ_{2m_1} nehmen wir

(23) $$\mu' = \frac{\omega}{\mu};\quad \lambda' = -\lambda.$$

Man findet, dass eine Bedingung erforderlich ist, welche sich in der folgenden Weise befriedigen lässt

(24) $$G(-\lambda) = H(\lambda);\quad H(-\lambda) = G(\lambda).$$

$G(\lambda)$ und $H(\lambda)$ stimmen mithin in den Gliedern mit paaren Exponenten überein; dagegen haben die Glieder mit unpaaren Exponenten verschiedene Zeichen. Setzen wir

$$G(\lambda) + H(\lambda) = g(\lambda);\quad G(\lambda) - H(\lambda) = h(\lambda),$$

so geht (21) in

(25) $$g(\lambda)(\mu^{m_1} + 1) + h(\lambda)(\mu^{m_1} - 1) = 0$$

über, wo $g(\lambda)$ und $h(\lambda)$ nur Glieder mit paaren bzw. unpaaren Exponenten enthalten. *Sämtliche* m_1 *durch* (23) *definierte Doppelkurven sind, unabhängig von den besonderen Gestalten von* $g(\lambda)$ *und* $h(\lambda)$, *ebene Kurven.* Es lässt sich dies in derselben Weise beweisen wie im speziellen in Nr. 8 behandelten Falle. Wir wollen aber hier direkt von den Relationen (9_1) und (9_2) ausgehen. Durch Elimination von z ergibt sich

$$2\mu x + (\mu^2 - 1)y - (\mu^2 + 1) = 0;$$
$$2\mu_1 x + (\mu_1^2 - 1)y - (\mu_1^2 + 1) = 0.$$

Man erhält hieraus

(26) $$y = \frac{\mu\mu_1 - 1}{\mu\mu_1 + 1}.$$

Nimmt man jetzt

(27) $$\mu_1 = \frac{a}{\mu}$$

als Ausdruck für die Abhängigkeit zwischen μ und μ_1, so bekommt man

(28) $$y = \frac{a-1}{a+1}.$$

Berücksichtigen wir hier (23), so erhalten wir

$$(29)\qquad y = \frac{\omega - 1}{\omega + 1}$$

für die m_1 Ebenen der Doppelkurven, wo ω die m_1 Wurzeln von $\omega^{m_1} = 1$ durchläuft. Für $\omega = 1$ bekommen wir $y = 0$ und für $\omega = -1$, wobei m_1 eine gerade Zahl sein muss, $y = \infty$. Die noch übrigen Werte für y in (29) sind rein imaginär. Man bekommt ja durch Verlängerung mit $\omega^{-\frac{1}{2}}$

$$(30)\qquad y = \frac{\omega^{\frac{1}{2}} - \omega^{-\frac{1}{2}}}{\omega^{\frac{1}{2}} + \omega^{-\frac{1}{2}}} = i \operatorname{tg} \frac{h\pi}{m_1} \qquad (h = 0, \dots m_1 - 1).$$

Schreibt man hier $y = i\bar{y}$, welches bedeutet, dass in (8) y^2 durch $-\bar{y}^2$ zu ersetzen ist, so erhält man

$$(31)\qquad \bar{y} = \operatorname{tg} \frac{h\pi}{m_1} \qquad (h = 0, \dots m_1 - 1).$$

Die Ebenen der Doppelkurven sind mithin reell in der Veränderlichen $\bar{y}$. Aus den Relationen, welche bei der Herleitung von (26) benutzt wurden, folgt noch

$$(32)\qquad x = \frac{\mu + \mu_1}{\mu\mu_1 + 1} = \frac{\mu + \mu^{-1}\omega}{\omega + 1} = \frac{\mu\,\omega^{-\frac{1}{2}} + \mu^{-1}\omega^{\frac{1}{2}}}{\omega^{\frac{1}{2}} + \omega^{-\frac{1}{2}}}.$$

Setzen wir hier $\mu = e^{\theta i}$, so ergibt sich

$$(33)\qquad x = \frac{e^{\theta i - \frac{\pi h i}{m_1}} + e^{-\theta i + \frac{\pi h i}{m_1}}}{e^{\frac{\pi h i}{m_1}} + e^{-\frac{\pi h i}{m_1}}} = \frac{\cos\left(\theta - \frac{\pi h}{m_1}\right)}{\cos\frac{\pi h}{m_1}}.$$

Aus (9_1) lässt sich jetzt λz bestimmen, und zwar erhalten wir, wenn $\lambda = i\bar{\lambda}$ gesetzt wird,

$$(34)\qquad z = -\frac{1}{\bar{\lambda}} \frac{\sin\left(\theta - \frac{\pi h}{m_1}\right)}{\cos\frac{\pi h}{m_1}}.$$

Nun ist die Relation (25) von der Art, dass man eine reelle Gleichung in den hier eingeführten Grössen $\bar{\lambda}$ und θ bekommt, und dies für alle m_1 Doppelkurven. Es ist ja

$$(35)\qquad \frac{\mu^{m_1}-1}{\mu^{m_1}+1}=\frac{e^{\frac{m_1\theta i}{2}}-e^{-\frac{m_1\theta i}{2}}}{e^{\frac{m_1\theta i}{2}}+e^{-\frac{m_1\theta i}{2}}}=i\,\mathrm{tg}\,\frac{m_1\theta}{2}.$$

Andererseits können wir schreiben

$$(36)\qquad g(\lambda)=g_1(\lambda^2)=g_1(-\bar{\lambda}^2);$$

$$(37)\qquad h(\lambda)=\lambda h_1(\lambda^2)=i\bar{\lambda}h_1(-\bar{\lambda}^2).$$

Zwischen λ und θ besteht mithin die Relation

$$(38)\qquad \frac{g_1(-\bar{\lambda}^2)}{\bar{\lambda}h_1(-\bar{\lambda}^2)}+\mathrm{tg}\,\frac{m_1\theta}{2}=0.$$

In (31), (33) und (34) haben wir für jede der m_1 Doppelkurven reelle Ausdrücke der Koordinaten $\bar{y}$, x und z in θ und $\bar{\lambda}$, und aus (38) ist $\bar{\lambda}$ reell bestimmbar in θ. *In bezug auf θ und $\bar{\lambda}$ sind also sämtliche m_1 Doppelkurven reell.* Die reelle Gestalt der Gleichung des Büschels (8) ist jetzt

$$(39)\qquad x^2-\bar{y}^2-1+\bar{\lambda}^2z^2=0.$$

Will man die Relationen (9_1) und (9_2), in denen jetzt imaginäre Grössen auftreten, durch reelle ersetzen, so erhält man

$$(40_1)\qquad x=\cos\theta+\bar{y}\sin\theta;\quad \bar{\lambda}z=-\sin\theta+\bar{y}\cos\theta.$$

$$(40_2)\qquad x=\cos\left(\frac{2\pi h}{m_1}-\theta\right)+\bar{y}\sin\left(\frac{2\pi h}{m_1}-\theta\right);\quad \bar{\lambda}z=\sin\left(\frac{2\pi h}{m_1}-\theta\right)-\bar{y}\cos\left(\frac{2\pi h}{m_1}-\theta\right).$$

Nach (33) ist x immer reell bestimmbar in θ, und in vielen Fällen sind für jeden Wert von θ sämtliche Wurzeln $\bar{\lambda}$ in (38) reell. *Es sind also dann auch für jeden reellen θ-Wert sämtliche Zweige der Doppelkurven reell.*

Ist m_1 eine gerade Zahl, so liegt die Doppelkurve für $h=\frac{m_1}{2}$ in der unendlich entfernten Ebene. Doch erhält man aus (31), (33) und (34) die Darstellung

$$(41)\qquad \bar{y}:x:z=1:\sin\theta:\frac{\cos\theta}{\bar{\lambda}}.$$

Das Geschlecht der Regelfläche oder, was dasselbe besagt, der entsprechenden Bildkurve ist ja im allgemeinen $(m_2-1)(m_1-1)$. Es ist vorteilhaft hier von der Gleichung (21) den Ausgangspunkt zu nehmen. Für die Erniedrigung des Geschlechts ist erforderlich, dass $G(\lambda)$ oder $H(\lambda)$ einen mehrfachen Faktor erhält. Auf Grund der Relationen (24) trifft dies gleichzeitig für beide Funktionen ein. Wir betrachten besonders den Fall, wo $G(\lambda)$ und $H(\lambda)$ vollständige Potenzen sind. Es sei also $m_2 = r\overline{m}_2$ und

$$G(\lambda) = [G_1(\lambda)]^r; \quad H(\lambda) = [H_1(\lambda)]^r,$$

wo r keinen gemeinsamen Faktor mit m_1 hat, und zwischen $G_1(\lambda)$ und $H_1(\lambda)$ Relationen vom Typus (24) bestehen. Setzen wir hier

$$H_1(\lambda) = \varkappa\, G_1(\lambda),$$

so geht (21) in

$$\varkappa^r + \mu^{m_1} = 0 \tag{42}$$

über. Dies ist aber die Gleichung für eine rationale Kurve, und es lassen sich $\varkappa$ und μ rational durch einen Parameter t ausdrücken, wobei man etwa $\varkappa = -t^{m_1}$ setzen kann. Die Gleichung der Kurve (21) lässt sich hiermit birational in

$$G_1(\lambda)\, t^{m_1} + H_1(\lambda) = 0 \tag{43}$$

überführen. Unter der Voraussetzung, dass $G_1(\lambda)$ und $H_1(\lambda)$ keine mehrfache Faktoren besitzen, erhält man jetzt $(\overline{m}_2 - 1)\ (m_1 - 1)$ für das Geschlecht des Gebildes. Hat man $\overline{m}_2 = 1$, so ist in (42) $r = m_2$, und wir gelangen zu den bereits in den Nummern (7) und (8) behandelten rationalen Fällen.

11. Bei der Definition der m_1 Doppelkurven in (23) wurden die Doppelkurven den verschiedenen m_1^{ten} Einheitswurzeln zugeordnet. Wenn wir die Doppelkurven näher untersuchen wollen, so sind vier Fälle zu unterscheiden: a) m_1 ungerade, m_2 ungerade; b) m_1 ungerade, m_2 gerade; c) m_1 gerade, m_2 ungerade; d) m_1 gerade, m_2 gerade. Die ersten drei Fälle waren bereits bei dem in Nr. 8 behandelten rationalen Fall vertreten, und die Resultate im nicht rationalen Falle stimmen mit den dort erhaltenen überein.

Die Punkte einer Doppelkurve auf dem Leitkegelschnitte müssen einer von den Relationen

$$g_1(\lambda^2) = \mu^{m_1} - 1 = 0; \tag{44$_1$}$$

$$h_1(\lambda^2) = \mu^{m_1} + 1 = 0 \tag{44$_2$}$$

genügen, wobei für μ noch

$$\mu^2 - \omega = 0 \tag{45}$$

gilt. Ist m_1 ungerade, so gehört eine Lösung von (45) zu (44_1) und die andere zu (44_2), und jede Wurzel von $g_1(\lambda^2)\, h_1(\lambda^2) = 0$ liefert somit einen Punkt auf dem Leitkegelschnitt. Also erhalten wir insgesamt $m_2 - 1$ solche Punkte. Ist m_1 gerade, so gehören für $\frac{m_1}{2}$ Doppelkurven beide Lösungen von (45) zu (44_1), und für die noch übrigen m_1 Doppelkurven gehören die Lösungen zu (44_2). Im ersten Falle liefert jede Lösung von $g_1(\lambda^2) = 0$ und im zweiten Falle jede Lösung von $h_1(\lambda^2) = 0$ zwei Punkte auf dem Leitkegelschnitt. Ist nun m_2 ungerade, so sind sowohl $g_1(\lambda^2)$ als $h_1(\lambda^2)$ von der Ordnung $\frac{m_2 - 1}{2}$, so dass also auch im Falle c) $m_2 - 1$ Punkte auf dem Leitkegelschnitte herauskommen. Wenn aber m_2 gerade ist, so hat $g_1(\lambda^2)$ die Ordnung $\frac{m_2}{2}$ und $h_1(\lambda^2)$ die Ordnung $\frac{m_2}{2} - 1$, so dass man für die Hälfte der Doppelkurven m_2 Punkte und für die andere Hälfte $m_2 - 2$ Punkte auf dem Leitkegelschnitt erhält. Wenn wir zusammenfassen, so bekommen wir den Satz, dass *in den Fällen a), b) und c) jede Doppelkurve $m_2 - 1$ Punkte auf dem Leitkegelschnitt besitzt, im Falle d) dagen $\frac{m_1}{2}$ Doppelkurven m_2 Punkte und die übrigen $\frac{m_1}{2}$ Doppelkurven $m_2 - 2$ Punkte.*

Auch in anderen Hinsichten weicht der Fall d) wesentlich von den drei anderen ab. Es bezeichne π das Geschlecht einer Doppelkurve, die für die Regelfläche einfache Leitkurve ist, und p das Geschlecht der Regelfläche. Koinzidieren nun für k Punkte der Doppelkurve die einander begegnenden Erzeugenden, so besteht die bekannte Relation

$$2\pi = p + 1 - \frac{k}{2}. \tag{46}$$

Für eine Koinzidenz muss (45) gelten und überdies $\lambda' = -\lambda$ sein, was entweder $\lambda = 0$ oder $\lambda = \infty$ erfordert. In (25) ist $\lambda = 0$ immer eine Lösung von $h(\lambda) = 0$. Dagegen ist $\lambda = \infty$ als eine Lösung von $g(\lambda) = 0$ zu betrachten, wenn m_2 gerade ist, und von $h(\lambda) = 0$, wenn m_2 ungerade ist. In den drei Fällen a), b) und c) erhält man nun stets $k = 2$, so dass nach (46) sämtliche Doppelkurven hier das Geschlecht $\pi = p/2$ haben müssen. Diese Koinzidenzen bekommt man folgendermassen:

a) $\lambda = 0$ und eine Lösung von $\mu^{m_1} + 1 = 0$, $\lambda = \infty$ und eine Lösung von $\mu^{m_1} - 1 = 0$;

b) sowohl $\lambda = 0$ als $\lambda = \infty$ in Kombination mit einer Lösung von $\mu^{m_1} + 1 = 0$;

c) für $\frac{m_1}{2}$ Doppelkurven $\lambda = 0$ und zwei Lösungen von $\mu^{m_1} + 1 = 0$, und für die übrigen $\frac{m_1}{2}$ Doppelkurven $\lambda = \infty$ und zwei Lösungen von $\mu^{m_1} - 1 = 0$.

Im Falle d) bekommen wir keine Koinzidenz, wenn $\omega^{\frac{m_1}{2}} = 1$ oder $\mu^{m_1} = 1$, aber vier Koinzidenzen für $\omega^{\frac{m_1}{2}} = -1$ oder $\mu^{m_1} + 1 = 0$, also für $\frac{m_1}{2}$ Doppelkurven keine Koinzidenz und für die $\frac{m_1}{2}$ übrigen vier Koinzidenzen.

Unser Resultat ist also, dass *in den Fällen a), b) und c) jede Doppelkurve das Geschlecht* $\frac{p}{2}$ *hat, im Falle d) dagegen* $\frac{m_1}{2}$ *Doppelkurven das Geschlecht* $\frac{p+1}{2}$ *und* $\frac{m_1}{2}$ *Doppelkurven das Geschlecht* $\frac{p-1}{2}$.

Wir wollen zuletzt für die m_1 Doppelkurven und die ihnen entsprechenden Doppeldeveloppablen die Ordnung bzw. Klasse bestimmen. Wir erinnern daran, dass unter den Regelscharen $\lambda = \infty$ die Tangenten des Leitkegelschnitts und $\lambda = 0$ die Erzeugenden des Leitkegels bezeichnen. Da, wie wir gesehen haben, in den Fällen a), b) und d) für jede Doppelkurve $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ eine gleichartige Rolle spielen, so können wir sofort schliessen, dass in diesen Fällen die Ordnung einer Doppelkurve und die Klasse der entsprechenden Doppeldeveloppablen stets gleich sind. In den Fällen a) und b) muss diese Ordnung für sämtliche m_1 Doppelkurven dieselbe sein, im Falle d) dagegen nur für $\frac{m_1}{2}$ Doppelkurven von demselben Geschlecht. Die Ordnung ermittelt man nun am leichtesten durch Bestimmung der Punkte der Doppelkurve in der Ebene des Kegelschnittes. Diese Punkte sind von dreierlei Art: Punkte auf dem Leitkegelschnitte, Torsalpunkte von für $\lambda = \infty$ koinzidierenden Erzeugenden und endlich die Schnittpunkte der übrigen Erzeugenden für $\lambda = \infty$ bei paarweise Zuordnung nach (23). In den Fällen a) und b) ergibt sich demgemäss für die Ordnung $m_2 - 1 + 1 + \frac{m_1 - 1}{2}$. *Also hat man, wenn* m_1 *ungerade ist,* $\frac{m_1 - 1}{2} + m_2$ *als Ordnung für jede der* m_1 *Doppelkurven und als Klasse für jede der* m_1 *Doppeldeveloppablen. Für die Doppelkurven ist die*

Kegelspitze ein $\frac{m_1 - 1}{2}$-*facher Punkt und für die Doppeldeveloppablen die Kegelschnittsebene eine* $\frac{m_1 - 1}{2}$-*fache Ebene.*

Im Falle c) erhält man für $\frac{m_1}{2}$ Doppelkurven die Ordnung $m_2 - 1 + 2 + \frac{m_1}{2} - 1$ und für die übrigen $\frac{m_1}{2}$ Doppelkurven die Ordnung $m_2 - 1 + \frac{m_1}{2}$, und die Klassen der entsprechenden Doppeldeveloppablen verhalten sich in umgekehrter Weise. *Also hat man, wenn* m_1 *gerade und* m_2 *ungerade ist,* $\frac{m_1}{2} + m_2$ *als Ordnung für* $\frac{m_1}{2}$ *Doppelkurven und* $\frac{m_1}{2} - 1 + m_2$ *als Ordnung der übrigen Doppelkurven. Umgekehrt erhält man* $\frac{m_1}{2} - 1 + m_2$ *für die Klasse der den ersten* $\frac{m_1}{2}$ *Doppelkurven entsprechenden Doppeldeveloppablen und* $\frac{m_1}{2} + m_2$ *für die Klasse der den letzten* $\frac{m_1}{2}$ *Doppelkurven entsprechenden Doppeldeveloppablen. Die Kegelspitze ist für die ersten Doppelkurven* $\frac{m_1}{2}$-*facher Punkt und für die letzten Doppelkurven* $\left(\frac{m_1}{2} - 1\right)$-*facher Punkt. Umgekehrt ist die Kegelschnittsebene* $\left(\frac{m_1}{2} - 1\right)$-*fache Ebene für die ersten Doppeldeveloppablen und* $\frac{m_1}{2}$-*fache Ebene für die letzten Doppeldeveloppablen.*

Im Falle d) haben wir für Doppelkurven mit dem höheren Geschlecht $\frac{p + 1}{2}$ m_2 Punkte auf dem Leitkegelschnitte und keine Koinzidenzen und für Doppelkurven mit dem niedrigeren Geschlecht $\frac{p - 1}{2}$ $m_2 - 2$ Punkte auf dem Kegelschnitte und zwei Koinzidenzen für $\lambda = \infty$. *Ordnung der Doppelkurve und Klasse der Doppeldeveloppablen ist also in den* $\frac{m_1}{2}$ *Fällen mit dem höheren Geschlechte* $m_2 + \frac{m_1}{2}$ *und in den* $\frac{m_1}{2}$ *Fällen mit dem niedrigeren Geschlechte* $m_2 - 2 + 2 + \frac{m_1}{2} - 1 =$ $= m_2 + \frac{m_1}{2} - 1$. *Die Kegelspitze ist für eine Doppelkurve vom höheren Geschlecht ein* $\frac{m_1}{2}$-*facher Punkt und für eine Doppelkurve vom niedrigeren Geschlecht ein* $\left(\frac{m_1}{2} - 1\right)$-*facher Punkt. In entsprechender Weise verhält sich die Kegelschnittsebene in bezug auf die Doppeldeveloppablen.*

Wir wollen die vorhergehenden Entwicklungen mit dem Beispiel $m_2 = 2$ beleuchten. Es wird sich dabei um Regelflächen R_{m+4} handeln, welche nebst einem Doppelkegelschnitt mit einander berührenden Mänteln m verschiedene Doppelkurven besitzen. Für das Geschlecht der R_{m+4} hat man $p = m - 1$. Es sind hier die Fälle b) und d) zu unterscheiden, je nachdem m ungerade oder gerade ist. *Ist m ungerade, so hat man $\frac{m+3}{2}$ als Ordnung für jede der m Doppelkurven und Klasse für jede der m Doppeldeveloppablen, und das gemeinsame Geschlecht für sämtliche diese Gebilde ist $\pi = \frac{m-1}{2}$. Die Kegelspitze ist $\frac{m-1}{2}$-facher Punkt für die m Doppelkurven und die Kegelschnittsebene $\frac{m-1}{2}$-fache für die m Doppeldeveloppablen.* Für $m = 3$ erhalten wir hier R_7 vom Geschlechte $p = 2$ mit drei elliptischen C_3 als Doppelkurven. Als nächstes Beispiel bekommen wir R_9 mit $p = 4$, welche fünf C_4 vom Geschlechte $\pi = 2$ als Doppelkurven besitzen.

Ist m gerade, so haben $\frac{m}{2}$ Doppelkurven die Ordnung $\frac{m}{2} + 2$, das Geschlecht $\frac{m}{2}$ und einen $\frac{m}{2}$-fachen Punkt in der Kegelspitze. Die übrigen $\frac{m}{2}$ Doppelkurven haben die Ordnung $\frac{m}{2} + 1$, das Geschlecht $\frac{m}{2} - 1$ und einen $\left(\frac{m}{2} - 1\right)$-fachen Punkt in der Kegelspitze. Die Doppeldeveloppablen haben die genau reziproken Eigenschaften. Als Beispiel sei der Fall $m = 4$ hervorgehoben. Man erhält hier R_8 vom Geschlecht $p = 3$, welche zwei Doppelkurven 3. Ordnung mit $\pi = 1$ und zwei Doppelkurven 4. Ordnung mit $\pi = 2$ besitzen.