LIE-GRUPPEN MIT BANACHRÄUMEN ALS PARAMETERRÄUME

VON

BERNHARD MAISSEN

Zürich, Schweiz(1)

I. Einleitung

Sei E ein Banachraum, $L(E)$ der Raum der stetigen Endomorphismen $E \to E$ und $GL(E)$ die Gruppe der stetigen Automorphismen $E \to E$. Es gilt:

a) $GL(E)$ ist in der Normtopologie von $L(E)$ offen in $L(E)$. Ist nämlich $\alpha \in GL(E)$, so gehört die ganze offene Kugel $\|\varphi - \alpha\| < \|\alpha^{-1}\|^{-1}$ mit Zentrum α zu $GL(E)$, denn man hat für jedes φ aus dieser Kugel

$$1 > \|\alpha - \varphi\| \|\alpha^{-1}\| \geq \|(\alpha - \varphi)\alpha^{-1}\| = \|\iota - \varphi\alpha^{-1}\|$$

(ι identischer Automorphismus), und wenn man hier $\psi = \iota - \varphi\alpha^{-1}$ setzt, so ist die Reihe $\sum_0^\infty \psi^\nu$ konvergent und gleich $(\iota - \psi)^{-1} = (\varphi\alpha^{-1})^{-1}$. $\varphi\alpha^{-1}$ besitzt also ein Inverses und somit auch φ.

b) Betrachtet man Differenzierbarkeit von Abbildungen zwischen Banachräumen im Sinne von Fréchet, wonach also eine Abbildung $f: E \to F$ differenzierbar ist, wenn gilt

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + |h| r(x,h)$$

$x, h \in E$, $f'(x)$ ein (in h) stetiger linearer Operator $E \to F$ und $r(x,h) \to 0$ für $h \to 0$, so sind die Abbildungen $\lambda_\alpha: \varphi \to \alpha\varphi$ und $\varrho_\alpha: \varphi \to \varphi\alpha$ trivialerweise differenzierbare Abbildungen von $GL(E)$ auf $GL(E)$. Weiterhin ist aber auch die Abbildung $\varphi \to \varphi^{-1}$ von $GL(E)$ auf $GL(E)$ differenzierbar. Zum Beweis dürfen wir den Argumentzuwachs ξ so einschränken, dass

(1) Ich erwähne in Dankbarkeit, dass ich bei der Ausführung dieser Arbeit aus der Fritz Hoffmann – La Roche-Stiftung zur Förderung wissenschaftlicher Arbeitsgemeinschaften in der Schweiz unterstützt worden bin.

$\varphi+\xi$ in einer in $GL(E)$ enthaltenen Kugel liegt, denn für ein beliebiges ξ gibt es ja immer eine passende Zahl λ, so dass $\lambda\xi$ in einer solchen Kugel liegt. Wir nehmen $\|\xi\| < \|\varphi^{-1}\|^{-1}$ wodurch nach a) $\varphi+\xi \in GL(E)$, da ja $\|\varphi+\xi-\varphi\| = \|\xi\| < \|\varphi^{-1}\|^{-1}$. Somit wird $(\varphi+\xi)^{-1} = \varphi^{-1}(\iota+\xi\varphi^{-1})^{-1} = \varphi^{-1}\sum_0^\infty(-\xi\varphi^{-1})^\nu$, denn es ist $\|-\xi\varphi^{-1}\| \leqslant \|\xi\|\|\varphi^{-1}\| < 1$, die Reihe konvergiert also. Daraus ergibt sich:

$$(\varphi+\xi)^{-1}-\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\xi\varphi^{-1}+\|\xi\|r(\varphi,\xi).$$

Die Feststellungen a) und b) geben zu einer Verallgemeinerung von bekannten Begriffsbildungen Anlass. Es zeigt sich nämlich, dass die $GL(E)$ alle Strukturen einer gewöhnlichen Lie-Gruppe trägt, sobald man nicht mehr verlangt, dass der Parameterraum einer Mannigfaltigkeit endlich dimensional sein soll: Jedes $\varphi \in GL(E)$ besitzt nach a) eine Umgebung, welche mit einer offenen Kugel aus einem Banachraum homöomorph ist, die Einbettung $GL(E) \to L(E)$ gibt den Homöomorphismus. Die so erhaltene, trivial parametrisierte Mannigfaltigkeit ist natürlich beliebig oft differenzierbar. Die $GL(E)$ ist in der Normtopologie eine topologische Gruppe und b) zeigt, dass die Produktbildung sowohl als auch die Inversenbildung beliebig oft differenzierbar sind.

Die $GL(E)$ liefert also ein Beispiel für eine Struktur, die bis auf die Dimensionsbeschränkung mit derjenigen einer Lie-Gruppe identisch ist, und es liegt deshalb nahe, allgemein Liesche Gruppen mit Banachräumen als Parameterräumen zu untersuchen. Dies soll für die elementareren Fragen in der vorliegenden Arbeit geschehen.

Eine solche Untersuchung macht es naturgemäss notwendig, koordinatenfreie Differentiation (im Sinne von Fréchet) und eine Theorie der Differentialgleichungen in Banachräumen zu verwenden. Die damit zusammenhängenden Bezeichnungen werden in Anschluss an [9] und [7] gewählt. Die eigentliche Theorie wird in enger Anlehnung an die von W. Graeub entwickelten Methoden (man vergleiche [5]) aufgebaut. Diese eignen sich dank ihrer geometrischen Klarheit ausgezeichnet für die hier vorgenommenen Verallgemeinerungen. Ich bin Herrn Dr. Graeub und insbesonders auch Herrn Dr. Keller für die vielen Anregungen, die sie mir während meiner Arbeit gaben, sehr zu Dank verpflichtet. Mein besonderer Dank gilt auch Herrn Prof. Nevanlinna, der mich in jeder Hinsicht unterstützt hat.

II. Mannigfaltigkeiten über Banachräumen

1. Definition

Ein Hausdorffscher Raum M bezeichnet man als eine k-mal differenzierbare Mannigfaltigkeit ($k \geqslant 1$) über dem Banachraum E, wenn es eine Überdeckung $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$(1) von M gibt, so dass gilt:

(1) A eine beliebige Indexmenge.

1. jedes $U_\alpha \in \{U_\alpha\}$ ist homöomorph einem Gebiet $G_\alpha \in E$(1)
2. ist $U_\alpha \in \{U_\alpha\}$ vermittels φ_α homöomorph zu G_α und $U_\beta \in \{U_\alpha\}$ vermittels φ_β zu G_β, und ist $U_\alpha \cap U_\beta = U_{\alpha\beta} \neq \phi$, so ist die Abbildung

$$\varphi_{\beta\alpha} = \varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1}: \ \varphi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \to \varphi_\beta(U_{\alpha\beta})$$

k-mal stetig differenzierbar.

Man bezeichnet E als den *Parameterraum* von M, das Paar $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ als eine *Karte* in M und für $p \in U_\alpha$ als eine Karte um p, die Gesamtheit aller Karten in M als einen *Atlas* auf M. Die oben definierten Abbildungen $\varphi_{\beta\alpha}$ heissen *Nachbarrelationen.*

Ganz wie im endlich dimensionalen Fall (vgl. [4]) kann man auch hier verschiedene Atlanten auf M betrachten, und unter diesen äquivalente dadurch auszeichnen, dass die Nachbarrelationen zwischen den Karten solcher Atlanten k-mal stetig differenzierbar sein sollen. In diesen Klassen von äquivalenten Atlanten lässt sich dann ein maximales Element auswählen, wodurch die betrachtete differenzierbare Struktur auf M eindeutig bestimmt wird. Diese Fragen sollen hier jedoch nicht näher erörtert werden, wir gehen im folgenden immer von einem festen Atlas aus.

2. Der Tangentialraum in einem Punkt $p \in M$

Sei $A_p \subset A$ die Menge derjenigen Indizes $\alpha \in A$, so dass $p \in U_\alpha$. Als *Tangentialvektor* ξ im Punkte p bezeichnet man eine Klasse $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in A_p}$ von Vektoren aus E, wenn für je zwei Vektoren $\xi_\alpha \in \xi$ und $\xi_\beta \in \xi$ gilt:

$$\xi_\beta = \varphi'_{\beta\alpha}(x)\,\xi_\alpha, \quad x = \varphi_\alpha(p).$$

$\varphi'_{\beta\alpha}(x)$ bezeichnet die Ableitung der Nachbarrelation $\varphi_{\beta\alpha}$ nach dem Argument $x = \varphi_\alpha(p)$. $\varphi'_{\beta\alpha}(x)$ ist dank $\varphi_{\alpha\beta}(\varphi_{\beta\alpha}(x)) = x$ regulär und es gilt $\varphi'_{\alpha\beta}(\varphi_{\beta\alpha}(x)) = (\varphi'_{\beta\alpha}(x))^{-1}$ ξ_α bezeichnet man als Repräsentanten von ξ in der Karte α.

Die Menge aller Tangentialvektoren im Punkte p bildet mit den Definitionen

$$\xi + \eta = \{\xi_\alpha + \eta_\alpha\}, \quad \xi = \{\xi_\alpha\}, \quad \eta = \{\eta_\alpha\}$$
$$\lambda\xi = \{\lambda\xi_\alpha\}$$

einen linearen Raum, den man als den *Tangentialraum* T_p im Punkte p bezeichnet.

T_p ist isomorph zu E, denn man sieht leicht, dass für eine feste Karte α um p die Abbildung

$$\Phi_\alpha : \xi = \{\xi_\alpha\} \to \xi_\alpha$$

(1) Dabei lässt sich E unter Umständen auch durch einen zu E isomorphen Raum ersetzen.

ein Isomorphismus von T_p auf E ist. Vermittels eines solchen Isomorphismus Φ_α lässt sich auch die Norm von E nach T_p übertragen, und man sieht, dass zwei verschiedene Isomorphismen Φ_α und Φ_β äquivalente Normen erzeugen, denn die identische Abbildung von T_p ist bezüglich der verschiedenen Normen stetig, da sie durch $\Phi_\alpha^{-1}\varphi'_{\alpha\beta}(x)\Phi_\beta$, $x=\varphi_\beta(p)$ gegeben wird, wo $\varphi'_{\alpha\beta}(x)$ ein stetiger Automorphismus ist. Somit wird T_p zu einem normierten Vektorraum.

3. Differenzierbare Abbildungen

Seien M und $\bar{M}$ zwei k-mal differenzierbare Mannigfaltigkeiten über Parameterräumen E, resp. $\bar{E}$ und f eine Abbildung von M in $\bar{M}$. f heisst im Punkte p r-mal differenzierbar $(r<k)$, wenn in Karten $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$, resp. $(U_{\bar\alpha},\varphi_{\bar\alpha})$ um p, resp. $f(p)$ die Abbildung

$$f_{\bar\alpha\alpha}=\varphi_{\bar\alpha}f\varphi_\alpha^{-1}.$$

r-mal differenzierbar ist an der Stelle $x=\varphi_\alpha(p)$. Diese Definition ist von der Wahl der Karten unabhängig.

Der in p differenzierbaren Abbildung f kann man eine lineare Abbildung von T_p in $T_{f(p)}$ zuordnen, die man die Ableitung von f an der Stelle p nennt und mit $f'(p)$ bezeichnet. Ist nämlich $\xi\in T_p$ und ξ_α der Repräsentant von ξ in der Karte α, so wird, wie man leicht zeigt, durch die Klasse

$$\bar\xi=\{\xi_{\bar\alpha}:\ \xi_{\bar\alpha}=f'_{\bar\alpha\alpha}(x)\,\xi_\alpha,\ \bar\alpha\in A_{f(p)},\ x=\varphi_\alpha(p)\}$$

ein von α unabhängiger Tangentialvektor $\bar\xi\in T_{f(p)}$ bestimmt.

4. Vektorfelder auf M

Von einem Vektorfeld $\xi(p)$ auf M spricht man, wenn jedem $p\in M$ durch eine Abbildung, die wir der Kürze halber ebenfalls mit ξ bezeichnen, ein Vektor $\xi(p)\in T_p$ zugeordnet wird. Ein solches Vektorfeld heisst r-mal differenzierbar $(r\leqslant k-1,\ k\geqslant 2)$ im Punkte p, wenn in einer Karte α um p die Abbildung $x\to\xi_\alpha(x)$, $x=\varphi_\alpha(p)$ von E in E r-mal differenzierbar ist. Die Einschränkung $r\leqslant k-1$ ist notwendig, da diese Definition wegen $\xi_\beta(y)=\varphi'_{\beta\alpha}(x)\xi_\alpha(x)$ sonst nicht von der Wahl der Karte unabhängig wäre.

Bildet man die Ableitungen $\xi'_\alpha(x)$ in Richtung eines Tangentialvektors $\eta=\{\eta_\alpha\}$, so erhält man zwar eine Klasse von Vektoren $\{\xi_\alpha(x)\eta_\alpha\}$, die aber keinen Tangentialvektor bildet, denn leitet man

$$\xi_\beta(y)=\varphi'_{\beta\alpha}(x)\,\xi_\alpha(x)$$

auf beiden Seiten nach x in Richtung η_α ab, so erhält man

$$\xi'_\beta(y)\eta_\beta = \varphi'_{\beta\alpha}(x)\xi'_\alpha(x)\eta_\alpha + \varphi''_{\beta\alpha}(x)(\eta_\alpha, \xi_\alpha(x)),$$

wo die zweite Ableitung der Nachbarrelation als Störglied auftritt. Hingegen lässt sich zu zwei r-mal differenzierbaren Vektorfeldern $\xi(p)$ und $\eta(p)$ durch die Definition

$$[\xi(p),\ \eta(p)] = \{\xi'_\alpha(x)\,\eta_\alpha(x) - \eta'_\alpha(x)\,\xi_\alpha(x)\}_{\alpha\in A_p}$$

ein neues $(r-1)$-mal differenzierbares Vektorfeld, das *Liesche Produkt* der Felder zuordnen. Das Störglied in obiger Formel verschwindet nämlich bei dieser Bildung wegen der Symmetrie der zweiten Ableitung.

Durch Anwendung der Definition zeigt man leicht, dass für das Lie-Produkt zweier Felder gilt:

1. die Linearität von $[\xi(p), \eta(p)]$ in beiden Argumenten
2. die schiefe Symmetrie:

$$[\xi(p), \eta(p)] + [\eta(p), \xi(p)] = 0$$

3. die Jacobische Identität:

$$[\xi(p), [\eta(p), \zeta(p)]] + [\eta(p), [\zeta(p), \xi(p)]] + [\zeta(p), [\xi(p), \eta(p)]] = 0$$

5. Tensorfelder

Als (kovarianten) *Tensor* n-ter Stufe mit Werten in einem linearen Raum F im Punkte $p\in M$ bezeichnet man eine n-fach multilineare Abbildung Φ von $T_p \times T_p \times \dots \times T_p$ in F. Ist jedem Punkt $p\in M$ ein solcher Tensor $\Phi(p)$ zugeordnet, so spricht man von einem (kovarianten) *Tensorfeld* n-ter Stufe auf M. Ein Tensorfeld heisst r-mal differenzierbar ($r \leqslant k-1$, $k \geqslant 2$), wenn in Karten die Abbildungen $p_\alpha \to \Phi_\alpha(p_\alpha)$ von E in den Raum der n-fach multilinearen Abbildungen von E in F differenzierbar sind. Da im folgenden nur sehr wenig Tensoranalysis gebraucht wird, soll hier nur ein wichtiger Spezialfall behandelt werden. Einem r-mal differenzierbaren Tensorfeld 1-ter Stufe $\Phi(p)$ lässt sich ein $(r-1)$-mal differenzierbares Tensorfeld zweiter Stufe $\delta\Phi(p)$ zuordnen, indem man die *äussere Ableitung* bildet, gemäss der Definition ($x = \varphi_\alpha(p)$)

$$\delta\Phi(p)\,(\xi, \eta) = \Phi'_\alpha(x)\,(\xi_\alpha, \eta_\alpha) - \Phi'_\alpha(x)\,(\eta_\alpha, \xi_\alpha).$$

Diese Definition ist von der verwendeten Karte unabhängig.

6. Produkte von Mannigfaltigkeiten

Zu zwei k-mal differenzierbaren Mannigfaltigkeiten M und $\bar{M}$ über den Parameterräumen E und $\bar{E}$ lässt sich in natürlicher Weise das Produkt $M \times \bar{M}$ als k-mal differenzierbare Mannigfaltigkeit über dem Parameterraum $E \times \bar{E}$ bilden. Auf die Konstruktion wird hier nicht näher eingegangen, da sie sich in nichts von der endlich dimensionalen unterscheidet.

7. Untermannigfaltigkeiten

Bei der Definition dieses Begriffes ergeben sich zum ersten Male tiefliegende Unterschiede zum endlichdimensionalen Fall. Will man nämlich erreichen, dass eine Untermannigfaltigkeit im vorliegenden Falle analoge Eigenschaften hat, wie die klassischen Bildungen, so muss man die definierenden Bedingungen verschärfen. In diesem Sinne lässt sich die Definition aus [4] etwa wie folgt übertragen:

DEFINITION A: *Seien M^* und M zwei k-mal differenzierbare Mannigfaltigkeiten über E^*, resp. E, so dass $M^* \subset M$. M^* heisst eine Untermannigfaltigkeit von M, wenn gilt:*

A_1. *Für jede Karte (φ, U) in M ist die Restriktion $\varphi^* = \varphi \mid U \cap M^*$ k-mal stetig differenzierbar.*

A_2. *Zu jeder Karte (φ, U) in M und zu jedem $p \in U \cap M^*$ gibt es eine Umgebung $U^* \subset U \cap M^*$ von p in M^*, einen topologisch direkten Summanden $\bar{E}$ von E und eine Projektion $P: E \to \bar{E}$, so dass $\bar{E}$ topologisch isomorph E^*, und für $\bar{\varphi} = \varphi \mid U^*(P\bar{\varphi}, U^*)$ eine Karte um p in M^* ist.*

Damit äquivalent ist folgende Übertragung der Definition aus [3]:

DEFINITION B: *Seien M^* und M zwei k-mal differenzierbare Mannigfaltigkeiten, so dass $M^* \subset M$. M^* heisst eine Untermannigfaltigkeit von M, wenn gilt:*

B_1. *Die Einbettung $j: M^* \to M$ ist k-mal stetig differenzierbar.*

B_2. *Die Ableitung $j'(p): T_p^* \to T_p$ ist regulär und $j'(p) T_p$ ist ein topologisch direkter Summand von T_p für jedes $p \in M^*$.*

Beweis der Äquivalenz von A *und* B:

1) $A \Rightarrow B$. Die Bedingung A_1 besagt, dass für je zwei Karten (φ^*, U^*), (φ, U) um $p \in M^*$ in M^* resp. M die Abbildung $\varphi\, \varphi^{*-1}$ auf $\varphi^*(U \cap U^*)$ differenzierbar ist. Das ist trivialerweise auch die Aussage B_1, denn $\varphi\, \varphi^{*-1} = j_{\varphi\varphi^*}$ ist ja die Koordinatendarstellung von j.

Da $P\bar{\varphi}$ eine Karte um p in M^* ist, gibt die Ableitung $(P\bar{\varphi}\, \varphi^{*-1})'(x) = P(\bar{\varphi}\, \varphi^{*-1})'(x) = P j'_{\varphi\varphi^*} \mid j'_{\varphi\varphi^*}(x), \varphi^*(p) = x$, einen topologischen Isomorphismus $E^* \to \bar{E}$. Daraus folgt aber, dass $j'_{\varphi\varphi^*}(x)$ ein (trivialerweise stetiger) Isomorphismus $E^* \to E$ ist und zudem, dass $P \mid j'_{\varphi\varphi^*}(x) E^*$ ein topologischer Isomorphismus $j'_{\varphi\varphi^*}(x) E^* \to E$ ist. $j'_{\varphi\varphi^*}(x) E^*$ ist somit ein topologisch direkter Summand von E, woraus vermittels der natürlichen Isomorphien von T_p^* resp. T_p mit $\bar{E}$ resp. E^* folgt, dass A_2 die Bedingung B_2 impliziert.

2) $B \Rightarrow A$. Die Bedingungen B_1 und A_1 wurden schon als äquivalent erkannt.

Jede Karte (φ, U) um $p \in M^*$ in M gibt einen natürlichen, topologischen Isomorphismus $T_p \to E$. Sei $\tilde{E}$ das Bild von $j'(p)T_p^*$ unter diesem Isomorphismus. $\tilde{E}$ ist dann nach Voraussetzung ein topologisch direkter Summand von E. Wir wollen zeigen, dass es eine stetige Projektion $P: E \to \tilde{E}$ gibt, so dass $(P\bar{\varphi}, U^*)$, $\bar{\varphi} = \varphi \mid U^*$, U^* eine passend gewählte Umgebung von p in M^*, eine Karte um p in M^* ist. Wir brauchen dazu folgenden

Hilfssatz: *Seien E und F Banachräume und f eine auf einer offenen Umgebung V von $x_0 \in E$ definierte Abbildung $E \to F$, so dass f dort stetig differenzierbar, und die Ableitung $f'(x_0)$ ein Isomorphismus auf einen topologisch direkten Summanden $\bar{F} = f'(x_0)E$ ist.*

Dann gibt es eine offene Umgebung $U \subset V$ von x_0, so dass f ein Homeomorphismus $U \to f(U)$ ist, und ausserdem $f'(x)E$ topologisch isomorph $\bar{F}$ ist, für $x \in U$.

Zudem gibt es eine stetige Projektion $P: F \to \bar{F}$, so dass Pf auf U topologisch und in beiden Richtungen differenzierbar ist.

Man überzeugt sich leicht, dass für eine Karte (φ^*, U^*) in M^* um p die Abbildung $\varphi\,\varphi^{*-1} = j_{\varphi\varphi^*}$ gerade den im Hilfssatz geforderten Bedingungen genügt, und dass die Aussagen des Hilfssatzes gerade bedeuten, dass $(P\bar{\varphi}, U^*)$ eine Karte um p in M^* ist.

Auf einen Beweis des Hilfssatzes soll hier verzichtet werden. Er ergibt sich als Verallgemeinerung des Umkehrsatzes (vgl. [2]) etwa analog zu den in [9] befolgten Methoden.

Man erkennt leicht, inwiefern die in A_2, resp. B_2 aufgestellte Forderung nach topologisch direkten Summanden wesentlich ist: Da für Karten (φ^*, U^*), (φ, U) um $p \in M^*$ in M^* resp. M das Bild $\bar{\varphi}(U \cap M^*)$ keine Umgebung in E zu sein braucht, ist es sinnlos, von der Differenzierbarkeit der Abbildung $\varphi^*\bar{\varphi}^{-1}$ zu sprechen. So lässt sich also keine Karte in M definieren. $\bar{\varphi}(U \cap M^*)$ muss auf einen Unterraum projiziert werden. Um so differenzierbare Abbildungen zu erhalten, braucht man aber stetige Projektionen. Verlangt man, dass die Tangentialvektoren einer in M^* verlaufenden und in M differenzierbaren Kurve auch in den Bildern $j'(p)T_p^*$ liegen, so ist die Äquivalenz von A und B wesentlich, denn nur so lässt sich beweisen, dass eine solche Kurve auch in M^* differenzierbar ist. Für diese Äquivalenz braucht man aber den angegebenen Hilfssatz, zu dessen Beweis also wiederum die Forderung nach topologisch direkten Summanden essentiell ist.

Nichts desto trotz werden wir bei den Lie-Gruppen Unterstrukturen treffen, wo man ohne die skizzierten Eigenschaften auskommt. Dort wird dann eine gesonderte Definition am Platze sein (vgl. III.12).

III. Lie-Gruppen über Banachräumen

1. Definition: *Ein topologischer Raum G mit der Topologie T heisst eine k-mal differenzierbare Lie-Gruppe über dem Banachraum E, wenn gilt:*

1. *G ist bezüglich der Topologie T eine topologische Gruppe.*
2. *G ist bezüglich der Topologie T eine k-mal differenzierbare Mannigfaltigkeit über dem Banachraum E.*
3. a) *Die Abbildung* $(p,q)\to pq$, $p\in G$, $q\in G$ *von* $G\times G$ *auf G ist k-mal stetig differenzierbar.*
   b) *Die Abbildung* $p\to p^{-1}$, $p\in G$, *von G auf G ist k-mal stetig differenzierbar.*

Die in dieser Definition geforderten Eigenschaften sind keineswegs unabhängig voneinander. Es wird im nächsten Abschnitt z. B. gezeigt werden, dass 3.b) aus 3.a) folgt. Weiter wird dort auch noch ein Kriterium für eine Lie-Gruppe angegeben werden, welches 1. und 2. in Verbindung bringt. Die obige Definition mag also eher als Zusammenfassung der wesentlichen Eigenschaften aufgefasst werden.

Die Mindestvoraussetzungen über k, die Differenzierbarkeitsklasse der auftretenden Abbildungen, werden jeweils zu Beginn eines Abschnitts gegeben. Es wird nie notwendig sein, $k>3$ vorauszusetzen.

Neben den „vollen" Lie-Gruppen spielen auch die lokalen Lie-Gruppen eine wichtige Rolle. Um solche zu definieren, schwächt man einfach in der Definition der Lie-Gruppe die Bedingung 1. ab zu:

1.* G ist bezüglich der Topologie T eine lokale topologische Gruppe.

Es ist unmittelbar, dass z.B. jede Umgebung der e (Einheitselement der Gruppe) einer Lie-Gruppe G eine lokale Lie-Gruppe ist.

2. Die Verschiebungsoperatoren

Es sei $k\geqslant 1$. Die rechts-, resp. links-Translationen in einer Lie-Gruppe G

$$\varrho_q : p\to pq$$
$$\lambda_p : q\to pq$$

sind nach Voraussetzung differenzierbare Abbildungen $G\to G$. Ihre Ableitungen nennen wir Verschiebungsoperatoren und führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\varrho_q'(p) = A(p,q)\text{(1)}$$
$$\lambda_p'(q) = B(p,q).$$

$A(p,q)$ ist ein linearer Operator von T_p in T_{pq} und $B(p,q)$ ein solcher von T_q in T_{pq}; es wird sich im folgenden zeigen, dass beides Isomorphismen sind.

Wählt man in p, q, pq Karten $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$, (U_β,φ_β), $(U_\gamma,\varphi_\gamma)$, so lässt sich die Produktbildung als Funktion

$$\pi_{\alpha\beta\gamma}(x, y) = \varphi_\gamma(\varphi_\alpha^{-1}(x)\,\varphi_\beta^{-1}(y)),\ x=\varphi_\alpha(p),\ y=\varphi_\beta(q)$$

(1) In Analogie zu [5].

darstellen. Die Indizierung mit α,β,γ wirp im folgenden weggelassen, solange die Karten festbleiben. Man erhält dann:

$$\left.\begin{aligned} a(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\pi(x,y), \\ b(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\pi(x,y), \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

wo a und b die Repräsentanten von A und B in den festgewählten Karten bedeuten.

Da $\varrho_e p = p$, $\lambda_e q = q$ gilt:

$$A(p,e) = B(e,q) = \iota \quad \text{(identischer Operator).} \tag{2.2}$$

Aus der Assoziativität der Gruppenoperation folgen die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} A(p,qr) &= A(pq,r)\,A(p,q), \\ B(p,qr)\,A(q,r) &= A(pq,r)\,B(p,q), \\ B(p,qr)\,B(q,r) &= B(pq,r). \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

Setzt man in der ersten Formel $r = q^{-1}$ und in der dritten $p = q^{-1}$, so folgt die oben erwähnte Isomorphieeigenschaft von $A(p,q)$ und $B(p,q)$. Diese beiden Gleichungen zeigen ebenfalls, dass die Verschiebungsoperatoren die Eigenschaften eines Fernparallelismus besitzen: Das Resultat einer Verschiebung von T_p nach T_{pqr} hängt nicht davon ab, ob diese direkt geschieht oder über T_{pq}.

Wir führen noch folgende Abkürzungen ein:

$$A(e,p) = A(p): T_e \to T_p$$
$$B(p,e) = B(p): T_e \to T_p.$$

Die Formeln (2.2) und (2.3) spezialisieren sich dann zu

$$A(e) = B(e) = \iota \tag{2.2'}$$

und

$$\left.\begin{aligned} A(pq) &= A(p,q)\,A(p), \\ B(p,q)\,A(q) &= A(p,q)\,B(p), \\ B(p,q)\,B(q) &= B(pq). \end{aligned}\right\} \tag{2.3'}$$

Beispiel: Bei der trivial parametrisierten $GL(E)$ aus I fallen alle Tangentialräume mit $L(E)$ zusammen. Da die Abbildung $(\varphi,\psi)\to\varphi\psi$ in beiden Argumenten linear ist, werden die Abbildungen $A(\varphi,\psi)$, resp. $B(\varphi,\psi)$ durch $h\to h\psi$, resp. $h\to\varphi h (h\in L(E))$ gegeben, unabhängig von φ, resp. ψ.

Satz 2.1: *Sei G eine Hausdorffsche topologische Gruppe und U_e eine Umgebung der $e \in G$, so dass gilt:*

1) *U_e ist vermittels φ homöomorph einem Gebiet $\varphi(U_e)$ aus einem Banachraum E.*
2) *Die Abbildung $(p,q) \to pq$ ist k-mal stetig differenzierbar falls $p,q,pq \in U_e$. Dann lässt sich G als eine k-mal differenzierbare Lie-Gruppe definieren.*

Beweis: Sei V' eine Umgebung von e, so dass $V'V' \subset U_e$. Für $p,q \in V'$ ist dann mit $x=\varphi(p)$, $y=\varphi(q)$ die Abbildung

$$(x, y) \to \varphi(\varphi^{-1}(x)\,\varphi^{-1}(y)) = \pi(x, y)$$

definiert und differenzierbar.

Wir wählen weiter V als Umgebung von e so, dass $VVV^{-1} \subset V'$. Durch $\{V_p : V_p = \varrho_p V, p \in G\}$ lässt sich ein Atlas auf G definieren, denn (φ_p, V_p), $\varphi_p = \varphi \varrho_p^{-1}$ ist offenbar eine Karte um p. Der Atlas ist k-mal stetig differenzierbar: Für $p \in V_{p_1}$, $p \in V_{p_2}$ und $\varphi_{p_2}(p) = x$ ist

$$\varphi_{p_1} \varphi_{p_2}^{-1}(x) = \varphi(\varphi^{-1}(x)\, p_2 p_1^{-1}) = \pi(x, \varphi(p_2 p_1^{-1})),$$

denn es ist $p_2 p_1^{-1} \in V'$ da $p = ap_1 = bp_2$ mit $a, b \in V$ und somit $p_2 p_1^{-1} = ab^{-1} \in V'$.

Wir zeigen, dass in diesem Atlas die Abbildung $(p,q) \to pq$ differenzierbar ist. Als Vorbereitung beweisen wir: Die Abbildung $\sigma_{p_0} : p \to p_0 p p_0^{-1}$, $p_0 \in G$, ist an der Stelle $p = e$ differenzierbar. Dies ist unmittelbar einzusehen, falls $p_0 \in V$ gilt. Ist weiter $p_0 \in G_0$, der Zusamenhangskomponente der e in G, so lässt sich p_0 als $p_0 = p_1 p_2 \ldots p_n$, $p_i \in V$, $i = 1 \ldots n$, darstellen und σ_{p_0} wird zu $\sigma_{p_0} = \sigma_{p_1} \sigma_{p_2} \ldots \sigma_{p_n}$ wo σ_{p_i} an der Stelle $\sigma_{p_{i+1}}(e) = e$ differenzierbar ist.

Der Satz wird im folgenden nur für G_0 bewiesen. Falls G nicht zusammenhängend ist, folgt die Differenzierbarkeit von σ_{p_0}, $p_0 \in G$, auf die es für den Beweis allein ankommt, aus Satz 10.1 und der Tatsache, dass sich hier der Satz für G_0 beweisen lässt. (Allerdings hat man dann $k \geqslant 3$ vorauszusetzen.)

Nun lässt sich zeigen, dass $(p,q) \to pq$ an jeder Stelle $p = p_0$, $q = q_0$ differenzierbar ist. In Karten (φ_{p_0}, V_{p_0}), (φ_{q_0}, V_{q_0}), (φ_{r_0}, V_{r_0}) um p_0 resp. q_0 resp. $r_0 = p_0 q_0$ ergibt sich mit $x = \varphi_{p_0}(p)$, $y = \varphi_{q_0}(q)$ diese Abbildung zu

$$(x, y) \to \varphi_{r_0}(\varphi_{p_0}^{-1}(x)\, \varphi_{q_0}^{-1}(y)) = \varphi(\varphi^{-1}(x)\, p_0 \varphi^{-1}(y)\, p_0^{-1}) = \pi(x, \varphi \sigma_{p_0} \varphi^{-1}(y))$$

und ist somit nach vorigem für $x = 0$, $y = 0$ differenzierbar.

Es bleibt noch zu zeigen, dass die Abbildung $p \to p^{-1}$ an jeder Stelle $p = p_0$ differenzierbar ist. Sie wird in Karten (φ_{p_0}, V_{p_0}), $(\varphi_{p_0^{-1}}, V_{p_0^{-1}})$ um p_0 resp. p_0^{-1} mit $x = \varphi_{p_0}(p)$ gegeben durch

$$x \to \varphi_{p_0^{-1}}((\varphi_{p_0}^{-1}(x))^{-1}) = \varphi(p_0^{-1}(\varphi^{-1}(x))^{-1} p_0^{-1}) = \varphi \sigma_{p_0^{-1}} \varphi^{-1}(\omega(x)),$$

wenn ω die Abbildung $x \to \varphi((\varphi^{-1}(x))^{-1})$ bedeutet. Da $\varphi\sigma_p\varphi^{-1}$ als differenzierbar erkannt ist, genügt es, die Differenzierbarkeit von ω an der Stelle $x=0$ zu beweisen. Nun ist aber $y=\omega(x)$ Lösung der Gleichung

$$\pi(x,y)=0$$

und da

$$\frac{\partial}{\partial y}(x,y)=b(x,y)$$

in einer Umgebung von $(0,0)$ stetig und regulär ist, folgt diese aus dem Satz über die impliziten Funktionen. (Man vergleiche Bartle, [2], aus dessen Umkehrsatz sich der Satz über die impliziten Funktionen analog zu Nevanlinna, [9], ergibt.)

Aus dem letzten Teil des Beweises ergibt sich noch, wie in III 1. angekündigt, dass allgemein die Bedingung 3 b) in der Definition der Lie-Gruppe aus 3a) folgt. Denn jede Parameterumgebung der e in einer Lie-Gruppe erfüllt die Bedingungen von Satz 2.1 und der in diesem Satz konstruierte Atlas ist sicher zum vorgegebenen äquivalent.

Die Ableitung der Abbildung $p \to p^{-1}$ ergibt sich durch Differentiation von $pp^{-1}=e$ zu

$$(p^{-1})' = -B(p^{-1})A^{-1}(p),$$

woraus schliesslich noch folgt, dass sie k-mal differenzierbar ist.

3. Invariante oder parallele Felder

Es sei wieder $k \geqslant 1$. Ein Vektorfeld $\xi(p)$ auf einer Gruppe G heisst *invariant* oder *parallel bezüglich* A, resp. B, wenn für je zwei Punkte $p,q \in G$ gilt:

$$\xi(q) = A(p,p^{-1}q)\xi(p)$$

resp.

$$\xi(q) = B(qp^{-1},p)\xi(p).$$

Wir werden im folgenden nur A-parallele Felder betrachten, alle Überlegungen lassen sich analog auch für B-parallele Felder durchführen.

Die A-parallelen Felder bilden mit den Definitionen

$$(\xi+\eta)(p) = \xi(p)+\eta(p)$$
$$(\lambda\xi)(p) = \lambda\xi(p)$$

wie man leicht sieht, einen linearen Raum, den wir mit L bezeichnen.

SATZ 3.1: *Der Raum L ist algebraisch isomorph zu T_e.*

Beweis: Einen Isomorphismus von T_e auf L erhält man durch die Zuordnung $\xi_e \in T_e \to \xi(p)=A(p)\xi_e \in L$. Das so definierte Feld ist nämlich aus L, da nach (2.3′) gilt:

$$\xi(q) = A(q)\xi_e = A(p,p^{-1}q)A(p)\xi_e = A(p,p^{-1}q)\xi(p).$$

Die Abbildung ist trivialerweise linear. Die Eineindeutigkeit folgt aus der Isomorphieeigenschaft von $A(p)$ und schliesslich ist es eine Abbildung auf L, da ja jedes Feld $\xi(p)\in L$ in T_e das Urbild $\xi_e = \xi(e)$ hat.

Mit Hilfe dieser Isomorphie lässt sich dann auch eine Norm von T_e in L übertragen, so dass L zu einem Banachraum wird.

Die invarianten Felder sind offensichtlich $(k-1)$-mal differenzierbar. Es lässt sich also für $k>1$ zu $\xi(p)$ und $\eta(p)\in L$ das Lie-Produkt $[\xi(p), \eta(p)]$ bilden. Die Frage, ob das so entstandene Feld wieder invariant ist, wird im nächsten Abschnitt bejahend beantwortet.

Als Hilfsmittel für die folgenden Beweise soll noch in Karten um p und e die Differentialgleichung hergeleitet werden, der ein paralleles Feld genügt. Es ist

$$h'(x)k = a'(x)(k,h_0),$$

wo $h(x)$, h_0 die Repräsentanten von $\xi(p)$ und ξ_e bedeuten. Setzt man aus $\xi_e = A^{-1}(p)\xi(p)$ hier ein, so erhält man:

$$h'(x)k = a'(x)(k, a^{-1}(x)h(x))$$

und mit der Definition

$$\Gamma(x)(k,h) = -a'(x)(k, a^{-1}(x)h) \tag{3.1}$$

lässt sich das schreiben als

$$h'(x)k + \Gamma(x)(k, h(x)) = 0. \tag{3.2}$$

Beispiel: In der $GL(E)$ wird ein A-paralleles Feld durch $h(\varphi) = A(\varphi)h_0 = h_0\varphi$ gegeben. Das Lie-Produkt zweier solcher Felder $h(\varphi)$ und $k(\varphi)$ erhält man zu $[h(\varphi), k(\varphi)] = (h_0k_0 - k_0h_0)\varphi$, es ist also wieder ein paralleles Feld.

4. Die Torsion

Es sei jetzt $k\geqslant 2$. $A^{-1}(p)$ bildet T_p auf T_e ab, lässt sich also als Tensorfeld erster Stufe mit Werten in T_e auffassen. Durch Bildung von $\delta A^{-1}(p)$ erhält man somit nach II.5 ein ebensolches Feld zweiter Stufe.

Die Bildung

$$S(p) = A(p)\,\delta A^{-1}(p)$$

bezeichnet man als die A-Torsion der Gruppe G. Die Torsion ist eine schiefsymmetrische, bilineare Selbstabbildung von T_p. Die analoge Bildung

$$\tilde{S}(p) = B(p)\,\delta B^{-1}(p)$$

führt zur B-Torsion. Über den Zusammenhang zwischen S und $\tilde{S}$ gilt folgender

SATZ 4.1: *Es ist* $\tilde{S}(p) = -S(p)$.

Beweis: Man differenziert in festen Karten die Beziehung:

$$a(x)a^{-1}(x)h = h$$

$$a'(x)(k, a^{-1}(x)h) + a(x)(a^{-1}(x))'(k,h) = 0$$

und verwendet (3.1) unter Bildung des schiefen Teiles. So erhält man

$$s(x)(k,h) = \Gamma(x)(k,h) - \Gamma(x)(h,k), \tag{4.1}$$

wo s den Repräsent von S bedeutet.

Analog erhält man

$$\tilde{s}(x)(k,h) = \tilde{\Gamma}(x)(k,h) - \tilde{\Gamma}(x)(h,k). \tag{4.1'}$$

Weiter erhält man durch Differentiation nach y von $a(x,y)a(x)h = a(\pi(x,y))h$ (vgl. (2.3')) die Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial y} a(x,y)\,(k, a(x)\,h) = a'(\pi(x,y))\,(b(x,y)\,k, h).$$

Es gilt nach (2.1)

$$\frac{\partial}{\partial y} a(x,y)\,(h,k) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\pi(x,y)\,(h,k) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\pi(x,y)\,(k,h) = \frac{\partial}{\partial x} b(x,y)\,(k,h),$$

womit wir umformen können zu

$$\frac{\partial}{\partial x} b(x,y)\,(a(x)\,h, k) = a'(\pi(x,y))\,(b(x,y)\,k, h).$$

Setzt man hier $y=0$ und dann $a(x)h = h'$, $b(x)k = k'$, so ergibt sich

$$\tilde{\Gamma}(x)(h',k') = \Gamma(x)(k',h'), \tag{4.2}$$

woraus mit (4.1) und (4.1') die Behauptung folgt.

SATZ 4.2: *Die Torsion führt parallele Felder in parallele Felder über.*

$$S(p)(A(p)\xi, A(p)\eta) = A(p)S(e)(\xi,\eta)$$

$$S(p)(B(p)\xi, B(p)\eta) = B(p)S(e)(\xi,\eta) \qquad \xi,\eta \in Te$$

Beweis: Man differenziert die Beziehung $a^{-1}(x)h = a^{-1}(\pi(x,y))a(x,y)h$ nach x:

$$(a^{-1}(x))'(k,h) = (a^{-1}(\pi(x,y)))'(a(x,y)k, a(x,y)h) + a^{-1}(\pi(x,y))\frac{\partial}{\partial x}a(x,y)(k,h).$$

Bildet man hier den schiefen Teil indem man verwendet, dass

$$\frac{\partial}{\partial x}a(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\pi(x, y)$$

in h und k symmetrisch ist, und setzt $x=0$, so erhält man

$$\delta a^{-1}(0)(k,h) = \delta a^{-1}(y)(a(y)k, a(y)h),$$

was nach beidseitigem Anwenden von $a(y)$ die erste der behaupteten Formeln ergibt. Die zweite erhält man, indem man die gleichen Rechnungen mit B durchführt und Satz 4.1 verwendet.

Satz 4.3: *Es gilt für A-parallele Felder* $\xi(p), \eta(p)$

$$[\xi(p), \eta(p)] = S(p)(\xi(p), \eta(p))$$

und für B-parallele Felder $\bar{\xi}(p), \bar{\eta}(p)$

$$[\bar{\xi}(p)\ \bar{\eta}(p)] = -S(p)(\bar{\xi}(p), \bar{\eta}(p)).$$

Beweis: In Karten findet man unter Verwendung von (3.1) und (4.1)

$$\begin{aligned}[h(x), k(x)] &= h'(x)k(x) - k'(x)h(x) = a'(x)(a(x)k_0, h_0) - a'(x)(a(x)h_0, k_0)\\ &= -\Gamma(x)(a(x)k_0, a(x)h_0) + \Gamma(x)(a(x)h_0, a(x)k_0), = s(x)(h(x), k(x)),\end{aligned}$$

was also die erste Formel beweist. Die zweite ergibt sich aus Satz 4.1. Als Korollar zu den Sätzen 4.2 und 4.3 folgt nun die im letzten Abschnitt aufgestellte Behauptung, dass das Lie-Produkt zweier paralleler Felder wieder parallel ist. Die Aussage von Satz 4.3 lässt sich jetzt nämlich als

$$[\xi(p), \eta(p)] = A(x)S(e)(\xi_e, \eta_e) \tag{4.3}$$

schreiben, L wird somit durch die Zuordnung

$$(\xi(p), \eta(p)) \to [\xi(p), \eta(p)]$$

zu einer Algebra, der *Lie-Algebra* von G.

Nun lässt sich auch das Lie-Produkt zweier Vektoren aus einem Tangentialraum definieren. Wir zeigen das für T_e. Sei also $\xi, \eta \in T_e$.

Dann definiert die Zuordnung

$$(\xi, \eta) \to [\xi, \eta] = S(e)(\xi, \eta)$$

ein Lie-Produkt in T_e. Denn aus der schiefen Symmetrie von S folgt

$$[\xi, \eta] + [\eta, \xi] = 0$$

und die Jacobische Identität

$$[\xi,[\eta,\zeta]]+[\eta,[\zeta,\xi]]+[\zeta,[\xi,\eta]]=0$$

folgt nach Satz 4.3 aus der Jacobischen Identität für das Lie-Produkt von Vektorfeldern. Somit wird T_e zu einer Lie-Algebra, und da der im Beweis von Satz 2.1 konstruierte natürliche Isomorphismus von T_e auf L nach 4.3 auch ein Algebrenisomorphismus ist, werden wir die Lie-Algebra der Gruppe oft mit T_e identifizieren.

Beispiel: In der $GL(E)$ wird wegen $A(\varphi)h=h\varphi$ die Torsion durch $S(\varphi)hk=A(\varphi)\delta A^{-1}(\varphi)hk=(hk-kh)\varphi$, also $S(\iota)hk=hk-kh$ gegeben. Die Parallelität und die Übereinstimmung mit dem Lie-Produkt (vgl. III.3) sind hier trivial.

5. Geodäten und einparametrige Untergruppen

Es sei $k\geqslant 2$. Da auf einer Lie-Gruppe Parallelismen gegeben sind, ist es sinnvoll, von Geodäten zu sprechen, als denjenigen Kurven, deren Tangentialvektoren ein paralleles Feld an die Kurve bilden. Wir haben somit:

Eine A- resp. B-Geodäte durch p_0 ist eine differenzierbare Kurve $g(t)$ resp. $f(t)$ $(-\infty<t<\infty)$ für welche gilt

$$\dot{g}(t)=A(p_0,p_0^{-1}g(t))\xi_0,\ p_0=g(0),\ \xi_0=\dot{g}(0)\in T_{p_0}, \tag{5.1}$$

$$\dot{f}(t)=B(f(t)p_0^{-1},p_0)\eta_0,\ p_0=f(0),\ \eta_0=\dot{f}(0)\in T_{p_0}. \tag{5.1'}$$

ξ_0 resp. η_0 heissen die Anfangsvektoren der Geodäten. Geodäten durch verschiedene Punkte sind nicht unabhängig voneinander, genauer: Wenn $g(t)$ eine A-Geodäte durch e ist, so ist die durch Rechtstranslation entstandene Kurve $g(t)p_0$ eine A-Geodäte durch p_0. Zum Beweis zeigt man, dass $g(t)p_0$ der Differenzialgleichung (5.1) genügt und die Anfangsbedingung befriedigt. Analog entstehen B-Geodäten durch p_0 durch Linkstranslation mit $e\,p_0$ von B-Geodäten durch e. Es sollen deshalb im Folgenden nur die Geodäten durch e untersucht werden.

Eine stetige Kurve $g(t)$ $(-\infty<t<\infty)$ in G heisst eine einparametrige Untergruppe, wenn gilt

$$g(t_1+t_2)=g(t_1)g(t_2).$$

Eine einparametrige Untergruppe ist also ein stetiger Homomorphismus der reellen Zahlen in G.

SATZ 5.1: *A- und B-Geodäten durch e sind einparametrige Untergruppen.*

Zum Beweis zeigt man, dass für eine A- resp. B-Geodäte $g(t)$, $g(0)=e$, die Kurven $s(t)=g(t)g(\tau)$ und $r(t)=g(t+\tau)$ der gleichen Differentialgleichung mit dem gleichen Anfangswert genügen. Die Umkehrung von Satz 5.1 wird im nächsten Abschnitt bewiesen.

Über einparametrige Untergruppen in topologischen Gruppen beweist man leicht einen Satz, welcher besagt, dass eine solche schon eindeutig bestimmt ist, wenn ein stetiges Kurvenstück $\bar{g}(t)$, $|t| < \delta$, gegeben ist, so dass $\bar{g}(t_1+t_2) = \bar{g}(t_1)\bar{g}(t_2)$ für $|t_1|, |t_2|, |t_1+t_2| < \delta$. Das heisst, dass sich ein solches Kurvenstück in eindeutiger Weise zu einer einparametrigen Untergruppe $g(t)$, $-\infty < t < \infty$, fortsetzen lässt, so dass $g(t) = \bar{g}(t)$ für $|t| < \delta$. Mit Hilfe dieses Satzes lässt sich nun auch die Existenz von Geodäten beweisen:

SATZ 5.2: *Zu jedem $\xi \in T_e$ gibt es eine und nur eine A-Geodäte $g(t)$ durch e, so dass ξ Anfangsvektor von $g(t)$ ist.*

Beweis: Die Differentialgleichung der Geodäten durch e

$$\dot{g}(t) = A(g(t))\,\xi, \quad g(0) = e \tag{5.2}$$

hat sicher für jedes ξ und für $|t| < \delta$ eine eindeutige Lösung, da ja $k \geqslant 2$ vorausgesetzt ist. Man erhält so nach Satz 5.1 ein Kurvenstück von der im Hilfssatz erwähnten Art, welches sich dann unbeschränkt fortsetzen lässt und dank der Homomorphieeigenschaft (5.2) überall befriedigt. Man erhält als Korollar:

SATZ 5.3: *A- und B-Geodäten durch e mit dem gleichen Anfangsvektor fallen zusammen.*

Man zeigt unmittelbar, dass eine differenzierbare einparametrige Untergruppe sowohl der Differentialgleichung für A- als auch für B-Geodäten genügt.

Nach den Bemerkungen über den Zusammenhang zwischen Geodäten durch verschiedene Punkte folgt nun, dass es zu jedem $\xi \in T_p$ eine und nur eine A- resp. B-Geodäte durch p gibt, die aber nicht mehr zusammenzufallen brauchen.

Beispiel: In der $GL(E)$ nimmt (5.2) die Form

$$\dot{\varphi}(t) = h\varphi(t), \quad \varphi(0) = \iota, \quad h \in L(E)$$

an. Die Lösung wird durch $\varphi(t) = e^{th} = \sum \frac{1}{h!} t^n h^n$ gegeben.

Die gleiche Kurve ist auch Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{\psi}(t) = \psi(t)\,h, \quad \psi(0) = \iota, \quad h \in L(E)$$

der B-Geodäten durch ι, was also eine Illustration von Satz (4.3) gibt.

6. Kanonische Koordinaten

Bemerkung: In den folgenden Abschnitten müssen die Lösungen von Differentialgleichungen untersucht werden. Um dabei eine nicht übermässig komplizierte Theorie verwenden zu können, wird es nötig, die Voraussetzungen an Lie-Gruppen etwas zu verschärfen:

Wir verlangen nicht mehr bloss stetige Differenzierbarkeit, sondern lokal gleichmässig stetige Differenzierbarkeit der auftretenden Abbildungen. Dabei heisst eine Abbildung f zwischen zwei Banachräumen E und F lokal gleichmässig stetig differenzierbar, wenn jedes x des Definitionsbereiches von f eine Umgebung U besitzt, auf welcher $f'(x)$ existiert und gleichmässig stetig ist. Lokal gleichmässig stetige differenzierbare Abbildungen sind gleichmässig differenzierbar auf U_x im Sinne von [7], wenn U_x beschränkt ist. Die Forderung nach gleichmässig stetiger Differenzierbarkeit ist ein natürlicher Ersatz für die lokale Kompaktheit, denn f ist auf U_x beschränkt falls U_x beschränkt ist.

Es sei nun also $k \geqslant 2$ und die Ableitungen lokal gleichmässig stetig. Berücksichtigt man bei der Lösung von (5.2) die Abhängigkeit vom Anfangsvektor ξ, so lässt sich eine Geodäte durch e als $g(t,\xi)$ schreiben. Für festes t ist g somit eine Abbildung von T_e in G. Wir setzen als Definition

$$g(1,\xi) = \exp\xi, \quad \exp: T_e \to G.$$

SATZ 6.1: *Die durch* $\xi \to g(1,\xi)$ *definierte Abbildung* exp *ist auf eine Umgebung von* $0 \in T_e$ *topologisch auf eine Umgebung* N_e *von* $e \in G$ *und* $(k-1)$*-mal gleichmässig stetig differenzierbar.*

Die somit auf N_e *existierende Umkehrabbildung* log *ist dort ebenfalls* $(k-1)$ *mal gleichmässig stetig differenzierbar.*

Beweis: Es soll zuerst gezeigt werden, dass $\exp\xi$ die Behauptung über die Differenzierbarkeit erfüllt, d. h. dass in einer Karte (U_e,φ) um e die Zuordnung

$$\xi \to \varphi(\exp\xi)$$

$(k-1)$-mal gleichmässig stetig differenzierbar ist. Es gilt für eine Geodäte $g(t,\xi)$

$$g(\tau t,\xi) = g(t,\tau\xi),$$

denn die beiden Kurven genügen der gleichen Differentialgleichung mit der gleichen Anfangsbedingung. Wir haben also insbesonders

$$g(t,\xi) = g(1,t\xi) = \exp t\xi. \tag{6.1}$$

Nun wird die Geodäte $\exp t\xi$ durch $\varphi^{-1}(x(t,h))$ gegeben, wo $x(t,h)$ Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t,h) = a(x(t,h))h, \quad x(0,h) = 0 \tag{6.2}$$

ist, und $h = \Phi\xi$ der Repräsentanten von ξ in der gewählten Karte bedeutet. Die Zuordnung $\xi \to \varphi\exp\xi$ lässt sich somit aufspalten in

$$\xi \to \Phi\xi = h \to x(1,h).$$

Die erste Abbildung ist stetig linear, also trivialerweise beliebig oft gleichmässig stetig differenzierbar. Auf die Abbildung

$$h \to x(1,h)$$

soll nun Satz 3 von [7] angewendet werden. (6.2) genügt nämlich den dort geforderten Bedingungen: $a(x)h$ ist in x nach Voraussetzung und in h wegen der Linearität mindestens einmal stetig differenzierbar. Daraus folgt die Differenzierbarkeit im Produkt. Weiterhin folgt aus der vorausgesetzten lokalen gleichmässig stetigen Differenzierbarkeit der Produktfunktion gerade die gleichmässige Stetigkeit der Zuordnungen $(x,h) \to a'(x)\circ h$ resp. $(x,h) \to a(x)\circ$ für x und h aus gewissen Umgebungen von 0. Es bleiben also noch die Voraussetzungen A), B) und C) des Satzes zu verifizieren. Von denen ist A) trivial und B) und C) folgen für beschränkte Umgebungen aus der gleichmässigen Stetigkeit von $a'(x)$ resp. $a(x)$. $\exp(\xi) = \varphi^{-1}(x(1,\Phi\xi))$ ist somit für geeignet beschränkte ξ einmal stetig differenzierbar. Die Existenz und gleichmässige Stetigkeit der höheren Ableitungen bis zur Stufe $k-1$ erhält man durch Wiederholung dieses Schlusses, denn durch Differentiation nach h von (6.2) erhält man

$$(\dot{x}(t,h))'k = a'(x(t,h))(x'(t,h)k,h) + a(x(t,h))k,$$

woraus sich wegen $(\dot{x}(t,h))'k = (x'(t,h)k)^{\cdot}$ eine Differentialgleichung für $x'(t,h)k$ ergibt, die wiederum den Bedingungen von Satz 3 aus [7] genügt.

Die Ableitung $\exp'(\xi)_{\xi=0}$ erhält man nun unter Anwendung der Kettenregel durch Differentiation von (6.1) nach t:

$$A(g(t,\xi))\xi = \exp'(t\xi)\xi$$

$$\xi = \exp'(0)\xi.$$

Dies besagt, dass $x'(1,0) = \iota$ (identische Abbildung von E). Die Abbildung $h \to x(1,h)$ genügt somit den Voraussetzungen des Umkehrsatzes in [2], ist also eine Abbildung auf eine gewisse Umgebung von $0 \in E$ und es existiert eine Abbildung $k \to h$, so dass $k = x(1,h)$. Geht man zur Gruppe zurück, so besagt das, dass $\exp\xi = \varphi^{-1}(x(1,\Phi(\xi))$ eine Abbildung auf eine gewisse Umgebung N_e von e ist und dass in diese Umgebung die Abbildung log: $p \to \varphi(p) = k \to h \to \Phi^{-1}(h)$ existiert. Diese Abbildung erfüllt die Differenzierbarkeitsbehauptungen, da ihre Ableitung in der Karte durch $(x'(t,h))^{-1}$ gegeben wird und die Abbildung $\alpha \to \alpha^{-1}$ von $GL(E)$ auf $GL(E)$ beliebig oft gleichmässig stetig differenzierbar ist, wie die in der Einleitung angegebene Entwicklung zeigt. Damit ist Satz (6.1) bewiesen.

Satz 6.1 zeigt, dass $(N_e, \log)$ eine, als kanonisch bezeichnete, Karte um e in der Gruppe ist. $\log p$ heisst die kanonische Koordinate von p. Es ist zu beachten, dass die kanonische Karte im Falle $k < \infty$ nicht zum auf der Gruppe vorgegebenen Atlas zu gehören braucht, da die Nachbarrelationen mit den Karten dieses Atlas i. a. nur $(k-1)$-mal differenzierbar sind.

Weiterhin ist zu beachten, dass die Abbildung exp zwar auf ganz T_e definiert ist, ihr Bild keineswegs die ganze Gruppe zu sein braucht. Beispiele dafür liefern schon die endlich dimensionalen Gruppen, man vergleiche etwa [6].

SATZ 6.2: a) *Die Geodäten $g(t,\xi)$ durch e werden in kanonischen Karten durch*

$$\log g(t,\xi) = t\xi$$

gegeben.

b) *Bezeichnen $\alpha(\xi)$ resp. $\beta(\xi)$ die Verschiebungsoperatoren $A(p)$ resp. $B(p)$, $\log p = \xi$, in kanonischen Koordinaten so gilt*

$$\alpha(t\xi)\xi = \xi,$$

$$\beta(t\xi)\xi = \xi.$$

Beweis: Die Behauptung a) folgt direkt aus 6.1. Da somit t Lösung der Differentialgleichung $\dot{\xi}(t) = \alpha(\xi(t))\xi$ und nach Satz 4.3 auch von $\dot{\xi}(t) = \beta(\xi(t))\xi$ ist, folgt auch b). Die Eigenschaften a) und b) können übrigens unabhängig voneinander zur Charakterisierung von kanonischen Koordinaten herbeigezogen werden.

Es lässt sich jetzt die Umkehrung von Satz 4.1 beweisen:

SATZ 6.3: *Eine einparametrige Untergruppe $g(t)$ ist eine Geodäte durch e und somit differenzierbar.*

Beweis: Da $g(0) = e$ und $g(t)$ stetig ist, gibt es ein $\tau > 0$, so dass $g(t) \in N_e$ für $|t| \leqslant \tau$. Wir zeigen, dass dieses Kurvenstück mit einer Geodäten durch e zusammenfällt. Es lässt sich ein $\xi_1 \in T_e$ so bestimmen, dass

$$g(\tau) = \exp(\tau\xi_1).$$

Allgemein lässt sich für $n = 1, 2, 3, \ldots$ je ein ξ_n so finden, dass

$$g\left(\frac{\tau}{n}\right) = \exp\left(\frac{\tau}{n}\xi_n\right).$$

Erhebt man diese Gleichung in die m-te Potenz, so ergibt sich

$$g\left(m\frac{\tau}{n}\right) = \exp\left(m\frac{\tau}{n}\xi_n\right),$$

da ja auch $\exp(t\tau\xi_n)$ eine einparametrige Untergruppe ist. Für $m=n$ erhält man

$$\exp(\tau\xi_n)=\exp(\tau\xi_1),$$

also wegen der Eindeutigkeit von $\exp: \xi_n=\xi_1$.

Somit ergibt sich
$$g\left(\frac{m}{n}\tau\right)=\exp\left(\frac{m}{n}\xi_1\right),$$

was besagt, dass $g(t)$ für alle rationalen t mit einer Geodäten zusammenfällt, wegen der Stetigkeit also sogar mit dieser identisch ist.

Beispiel: Da in der $GL(E)$, wie schon gezeigt, die Geodäten durch e als $\varphi(t)=e^{th}$, $h\in L(E)$ gegeben werden, erhält man die Abbildung $\exp: L(E)\to GL(E)$ durch $\exp h=e^h$. Daher kommt natürlich die Bezeichnung exp resp. log für die kanonische Parametrisierung.

Bemerkung: Da im folgenden ständig mit kanonischen Koordinaten gearbeitet wird, setzen wir jetzt allgemein voraus, dass alle in Zukunft betrachteten Gruppen mindestens 3 mal gleichmässig stetig differenzierbar seien.

7. Bemerkungen zur Analytizität der Gruppen

Man kann ganz wie im endlich dimensionalen Fall analytische Abbildungen zwischen Banachräumen betrachten, etwa mit der folgenden

DEFINITION: *Eine Abbildung $f: E\to F$ zwischen zwei Banachräumen E und F heisst analytisch im Punkte x, wenn für jedes $n\geqslant 0$ ein n-fach multilinearer Operator $\Phi_n(x)$ mit Argumenten aus E und Werten in F gegeben ist, so dass die Reihe $\sum_{h=0}^{\infty}\Phi_n(x)\,h^n$ absolut konvergiert für $|h|<\delta$, $(\delta>0)$, und gilt*

$$f(x+h)=\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n(x)\,h^n.$$

H. R. Fischer hat mit dieser Definition alle wesentlichen elementaren Sätze, die im endlich dimensionalen Fall für analytische Funktionen gelten, in einer vervielfältigten Arbeit bewiesen. Da diese Arbeit, in welcher übrigens auch die meisten der hier bewiesenen Sätze über Lie-Gruppen enthalten sind, recht umfänglich ist, und sich weder die Sätze noch die Beweise wesentlich vom klassischen Fall unterscheiden, sei hier auf eine ausführliche Wiedergabe derselben verzichtet. Es gilt vor allem:

LEMMA 1: *Die Potenzreihenentwicklung einer analytischen Abbildung ist eindeutig. Eine in x analytische Funktion ist in einer Umgebung von x unbeschränkt differenzierbar, und die $\Phi_n(x)$ sind im wesentlichen die n-te Ableitung von f an der Stelle x.*

Lemma 2: *Die Komposition analytischer Abbildungen ist analytisch.*

Lemma 3: *Sei $f: E \to F$ Lösung der Differentialgleichung*

$$f' = A(x,f) \quad f(x_0) = y_0$$

und A in einer Umgebung $U \times V$ von (x_0, y_0) eine in (x,f) analytische Abbildung $E \times F \to L(E,F)$. Dann gibt es Umgebungen $U_0 \subset U$, $V_0 \subset V$, so dass f in $U_0 \times V_0$ analytisch ist in (x, y_0).

Mit diesen Hilfsmitteln lässt sich nun der für das folgende wesentliche Satz beweisen:

Satz 7.1: *Sei G eine 3mal gleichmässig stetig differenzierbare Lie-Gruppe. Dann ist die Produktfunktion in kanonischen Koordinaten analytisch.*

Beweis: Das wesentliche Hilfsmittel des Beweises ist Lemma 3, d. h. man versucht zu zeigen, dass die Produktfunktion $\varkappa(\xi,\eta) = \log(\exp\xi \exp\eta)$ einer Differentialgleichung genügt, die die in Lemma 3 geforderten Eigenschaften hat. Durch Differentiation von $\varkappa$ nach ξ findet man unter Verwendung der Bezeichnungen von Satz 6.2 und den Formeln (2.3)

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \varkappa(\xi,\eta) = \alpha(\xi,\eta) = \alpha(\varkappa(\xi,\eta))\, \alpha^{-1}(\xi).$$

Die Lösung der Differentialgleichung

$$f'(\xi) = \alpha(f(\xi))\, \alpha^{-1}(\xi) \quad f(0) = \eta \tag{7.1}$$

muss also die Produktfunktion liefern: $f(\xi,\eta) = \varkappa(\xi,\eta)$. Es ist nun zu zeigen, dass (7.1) den Voraussetzungen von Lemma 3 genügt. Dazu zeigt man zuerst, dass $\alpha(f)$ und $\alpha^{-1}(\xi)$ analytisch sind. Die Analytizität von $(f,\xi) \to \alpha(f)\alpha^{-1}(\xi)$ folgt dann daraus, dass das Produkt von Automorphismen in diesen linear ist. Um zu zeigen, dass $\alpha(f)$ und $\alpha^{-1}(\xi)$ analytisch sind, kann man sich auf eine dieser Abbildungen beschränken, denn die in der Einleitung gegebenen Entwicklungen zeigen, dass die Abbildung $\alpha^{-1} \to \alpha$, $(\alpha \in GL(E))$, analytisch ist, aus der Analytizität von $\xi \to \alpha^{-1}(\xi)$ folgt also mit Lemma 2 diejenige von $\xi \to \alpha^{-1}(\xi) \to \alpha(\xi)$.

Um jetzt schliesslich noch die Analytizität von $\alpha^{-1}(\xi)$ zu beweisen, ist es notwendig $\alpha^{-1}(\xi)$ zu differenzieren. Deshalb musste in Satz 7.1 $k \geqslant 3$ vorausgesetzt werden, da wir ja für kanonische Koordination nur $(k-1)$-fache Differenzierbarkeit beweisen konnten. Man betrachtet für festes ξ und $\eta \in T_e$ die Kurve

$$\varphi(t)\eta = t\alpha^{-1}(t\xi)\eta.$$

Durch Differentiation ergibt sich

$$(\varphi(t)\eta)^{\cdot} = \alpha^{-1}(t\xi)\eta + t(\alpha^{-1}(t\xi))'(\xi,\eta).$$

Berücksichtigt man die Definition von S, und die Sätze 4.2 und 6.2 mit $\sigma(t(\xi)) = S(\exp t\xi)$, also die Formel

$$(\alpha^{-1}(t\xi))'(\xi,\eta) - (\alpha^{-1}(t\xi))'(\eta,\xi) = \sigma(t\xi)(\xi,\eta) = \sigma(0)(\xi,\alpha^{-1}(t\xi)\eta),$$

so ergibt sich:

$$(\varphi(t)\eta)^{\cdot} = \alpha^{-1}(t\xi)\eta + (\alpha^{-1}(t\xi))'(t\eta,\xi) + \sigma(0)(\xi,\varphi(t)\eta).$$

Durch Differentiation von $\alpha^{-1}(t\xi)\xi = \xi$ nach ξ mit einem Zuwachs η ergibt sich schliesslich noch

$$\alpha^{-1}(t\xi)\eta + (\alpha^{-1}(t\xi))'(t\eta,\xi) = \eta,$$

somit

$$(\varphi(t)\eta)^{\cdot} = \eta + \sigma(0)(\xi,\varphi(t)\eta),$$

was sich mit $\sigma(0) = S$ und $S_\xi\eta = S(\xi,\eta)$ auch als

$$\varphi(t)^{\cdot} = \iota + S_\xi\varphi(t) \quad \varphi(0) = 0 \tag{7.2}$$

schreiben lässt.

(7.2) lässt sich explizit lösen, etwa mit dem Picardschen Approximationsverfahren. Wir setzen $\varphi_0(t) = \varphi(0) = 0$, $\varphi_n(t) = \int_0^t(\iota + S_\xi\varphi_{n-1}(\tau))\,d\tau$ und erhalten so

$$\varphi_n(t) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{t^n}{\nu!} S_\xi^{\nu-1}, \quad S^0 = \iota,$$

so dass sich $\varphi(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t)$ ergibt zu

$$\varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} S_\xi^{n-1} \tag{7.3}$$

und daraus für $t = 1$

$$\alpha^{-1}(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} S_\xi^{n-1}. \tag{7.4}$$

Es ist unmittelbar, dass die durch $|t|\ e^{|t|\,\|S\|}$ absolut mayorierte Reihe (7.3) überall konvergiert, (7.4) somit für alle ξ die Potenzreihenentwicklung von $\alpha^{-1}(\xi)$ ist, wenn man durch die Bildung

$$\Phi_{n-1}(\xi_1 \ldots \xi_n) = \frac{1}{n!} \sum S_{\xi i_1} S_{\xi i_2} \ldots S_{\xi i_n},$$

über alle Permutation von $1 \ldots n$ summiert, die multilinearen Funktionen symmetrisiert. Damit wäre also zum Schluss noch die Analyzität von $\alpha^{-1}(\xi)$ bewiesen.

Aus Satz 2.1 und Satz 7.1 ergibt sich nun als Korollar unmittelbar

SATZ 7.2: *Auf einer 3 mal gleichmässig stetig differenzierbaren Lie-Gruppe lässt sich bezüglich der vorgegebenen Topologie eine analytische Struktur definieren.*

8. Konstruktion einer lokalen Lie-Gruppe zu einer vorgegebenen Lie-Algebra

Zu einer zweimal differenzierbaren Lie-Gruppe gehört eine Lie-Algebra, die durch jede Umgebung von $e \in G$, also durch jede in G offene lokale Lie-Gruppe schon eindeutig bestimmt ist. Umgekehrt lässt sich nun auch zu einer vorgegebenen Lie-Algebra $\mathfrak{L}$ eine lokale Lie-Gruppe G konstruieren, so dass $\mathfrak{L}$ die Lie-Algebra von G ist. Es ist zu bemerken, dass über die Existenz einer „vollen" Gruppe nichts ausgesagt wird.

SATZ 8.1: *Sei $\mathfrak{L}$ eine Lie-Algebra, d. h. $\mathfrak{L}$ ist ein Banachraum, in welchem eine stetige bilineare Abbildung $\mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ so definiert ist, dass gilt:*

1. $S(x,y) = -S(y,x)$
2. $S(x,S(y,z)) + S(y,S(z,x)) + S(z,S(x,y)) = 0.$

Dann existiert eine lokale Lie-Gruppe G, so dass $\mathfrak{L} = T_e(G)$.

Zur Konstruktion verwendet man die genau gleichen Überlegungen wie sie im letzten Abschnitt gemacht wurden, aber jetzt umgekehrt: Vom (7.2) ausgehend konstruiert man über (7.1) eine Funktion $f: \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$, welche lokal Produkteigenschaften hat.

Sei also $\varphi(t,x)$ die trivialerweise existierende Lösung der (7.2) entsprechenden Differentialgleichung

$$\dot{\varphi} = \iota + S_x \varphi, \quad \varphi(0,x) = 0, \quad \varphi \in L(\mathfrak{L}). \tag{8.1}$$

Wir setzen:

$$\alpha^{-1}(x) = \varphi(1,x).$$

Die Abbildung $\alpha^{-1}(x) \in L(\mathfrak{L})$ hat folgende Eigenschaften:

a) $\alpha^{-1}(0) = \iota$

b) $\alpha^{-1}(x)x = x$

c) $\delta\alpha^{-1}(x)(h,k) = S(\alpha^{-1}(x)h, \alpha^{-1}(x)k).$

Zum Beweis von a) hat man nur im explizierten Ausdruck (7.4) für $\alpha^{-1}x = 0$ zu setzen. Um b) zu beweisen, betrachtet man für festes x die Kurve $\varphi(t,x) - tx = \psi(t,x)$. Es ist $\psi(0,x) = 0$ und

$$\dot{\psi}(t,x) = \dot{\varphi}(t,x)x - x = S_x \varphi(t,x)x.$$

Indem man rechts $S_x tx = 0$ subtrahiert, erhält man

$$\dot{\psi}(t,x) = S_x \psi(t,x),$$

was zusammen mit $\psi(0,x) = 0$ $\psi(t,x) \equiv 0$ ergibt. Die Bildung c) ist sinnvoll, denn nach Satz 4 aus [7] ist $\varphi(t,x)$ in x lokal gleichmässig stetig differenzierbar. Ihr Beweis erfordert etwas längere Rechnungen: Man setzt für feste h, k, x

$$\chi(t)=\frac{d}{dx}\varphi(t,x)(h,k)-\frac{d}{dx}\varphi(t,x)(k,h)-S(\varphi(t,x)h,\varphi(t,x)k).$$

Durch Differentiation nach t erhält man mit

$$\left(\frac{d}{dx}\varphi(t,x)\right)^{\cdot}=\frac{d}{dx}\varphi^{\cdot}(t,x)$$

$$\dot{\chi}(t)=\frac{d}{dx}\varphi^{\cdot}(t,x)(h,k)-\frac{d}{dx}\varphi^{\cdot}(t,x)(k,h)-S(\dot{\varphi}(t,x)h,\varphi(t,x)k)-S(\varphi(t,x)h,\dot{\varphi}(t,x)k)$$

$$=S(h,\varphi(t,x)k)+S(x,\frac{d}{dx}\varphi(t,x)(h,k))-S(k,\varphi(t,x)h)-S(x,\frac{d}{dx}\varphi(t,x)(k,h))$$

$$-S(h,\varphi(t,x)k)-S(S(x,\varphi(t,x)h),\varphi(t,x)k)-S(\varphi(t,x)h,k)-S(\varphi(t,x)h,S(x,\varphi(t,x)k)).$$

Vier dieser Glieder heben sich gegenseitig auf, wenn man Voraussetzung 1) benützt. Die beiden letzten übrigen Glieder zusammen ergeben unter Verwendung von Voraussetzung 1) und 2) gerade $-S(x,S(\varphi(t,x)h,\varphi(t,x)k))$, so dass sich zusammengefasst ergibt

$$\dot{\chi}(t)=S_x\left[\frac{d}{dx}\varphi(t,x)(h,k)-\frac{d}{dx}\varphi(t,x)(k,h)-S(\varphi(t,x)h,\varphi(t,x)k)\right]=S_x\chi(t).$$

Nun ist aber $\chi(0)=0$, so dass sich wieder $\chi(t)\equiv 0$ ergibt, was c) beweist.

Da $\alpha^{-1}(x)$ stetig von x abhängt, existiert wegen a) in einer gewissen Umgebung der Null $\alpha(x)=(\alpha^{-1}(x))^{-1}$, und ist dort nach x differenzierbar. Es ist also sinnvoll, die 7.1 entsprechende Differentialgleichung

$$f'(x)=\alpha(f(x))\,\alpha^{-1}(x),\quad f(0)=y \tag{8.2}$$

zu betrachten. Die Krümmung des Operators $\alpha(z)\alpha^{-1}(x)$ wird gegeben durch

$$\begin{aligned}R(x,z)(h,k)&=\alpha'(z)(\alpha(z)\alpha^{-1}(x)h,\alpha^{-1}(x)k)-\alpha'(z)(\alpha(z)\alpha^{-1}(x)k,h)\\&\quad+\alpha(z)((\alpha^{-1}(x))'(h,k)-(\alpha^{-1}(x))'(k,h)).\end{aligned}$$

Hier ist das letzte Glied nach c) gleich $\alpha(z)S(\alpha^{-1}(x)h,\ \alpha^{-1}(x)k)$ und durch Differentiation von $\alpha^{-1}(z)\,\alpha(z)\,k=k$ nach x ergibt sich

$$\alpha'(z)(h,k)=-\alpha(z)(\alpha^{-1}(z))'(h,\alpha(z)k).$$

Dies eingesetzt ergibt

$$\begin{aligned}R(x,z)(h,k)=&-\alpha(z)[(\alpha^{-1}(z))'(\alpha(z)\alpha^{-1}(x)h,\alpha(z)\alpha^{-1}(x)k)\\&-(\alpha^{-1}(z))'(\alpha(z)\alpha^{-1}(x)k,\alpha(z)\alpha^{-1}(x)h)+\alpha(z)S(\alpha^{-1}(x)h,\alpha^{-1}(x)k).\end{aligned}$$

Die Glieder in der eckigen Klammer ergeben nun nach c) gerade wieder

$$S(\alpha^{-1}(x)h, \alpha^{-1}(x)k)$$

so dass gilt:
$$R(x,z)(h,k) = 0.$$

Die Differentialgleichung (8.2) genügt somit den Voraussetzungen des Korollars zum Hauptsatz von Keller [7], es existiert also eine in x und y gleichmässig stetig differenzierbare Abbildung $f(x,y)$ von $\mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ auf einer gewissen Umgebung der Null.

Es ist nun noch zu zeigen, dass f die Eigenschaften einer Produktfunktion hat, womit dann U zu einer lokalen Gruppe wird. Es existiert ein linksseitiges Einselement, da $f(0,y) = y$.

Das Assoziativgesetz $f(x,f(y,z)) = f(f(x,y)z)$ ist erfüllt, denn die beiden Abbildungen genügen derselben Differentialgleichung mit derselben Anfangsbedingung:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, f(y,z)) = \alpha(f(x, f(y,z)))\,\alpha^{-1}(x), \quad f(0, f(0,z)) = f(y,z)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} f(f(x,y),z) &= \alpha(f(f(x,y),z))\,\alpha^{-1}(f(x,y))\,\alpha(f(x,y))\,\alpha^{-1}(x)\\ &= \alpha(f(f(x,y),z))\,\alpha^{-1}(x), \quad f(f(0,y),z) = f(y,z).\end{aligned}$$

Es existiert ein linksseitiges Inverses, da wegen

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)_{x=0} = \iota$$

$f(x,y)$ dem Satz über die impliziten Funktionen genügt (wiederum nach Bartle resp. Nevanlinna). Damit ist für f die Gültigkeit der Gruppenaxiome bewiesen, und da wegen c) $\mathfrak{L}$ trivialerweise die Lie-Algebra von U ist, auch Satz 8.1.

Die Eigenschaft b) von $\alpha^{-1}(x)$ zeigt, dass die identische Abbildung von U in $\mathfrak{L}$ die kanonische Parametrisierung von U gibt. Zudem folgt, mit Satz 7.1 dass $(x,y) \to f(x,y)$ analytisch ist.

9. Die Produktfunktion in kanonischen Koordinaten

Die in den letzten beiden Abschnitten verwendeten Methoden sollen nun noch etwas expliziter zur Anwendung kommen mit dem Ziel, für die Produktfunktion in natürlichen Koordinaten die nach Satz 7.1 existierende Potenzreihenentwicklung anzugeben, was für das Folgende ein sehr bequemes Hilfsmittel liefert.

Sei also G eine Lie-Gruppe. Mit den Bezeichnungen von 7 besagt dann Satz 7.1 dass die Abbildung $(\xi,\eta) \to \varkappa(\xi,\eta)$ analytisch ist an der Stelle $(0,0)$. Es ist also insbesonders auch die Abbildung $t \to \varkappa(t\xi, t\eta)$ analytisch für $t = 0$, und es soll nun die Entwicklung

$$\varkappa(t\xi, t\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \varkappa_n(\xi, \eta), \tag{9.1}$$

wo
$$\varkappa_n(\xi, \eta) = \frac{d^n}{dt^n} \varkappa(t\xi, t\eta)_{t=0},$$

angegeben werden. Es gilt also die Ableitungen von $\varkappa(t\xi, t\eta)$ nach t zu bestimmen. Aus (2.3) und Satz 6.2 folgt

$$\varkappa(t\xi,t\eta)^{\cdot} = \alpha(t\xi,t\eta)\xi + \beta(t\xi,t\eta)\eta$$

$$\varkappa(t\xi,t\eta)^{\cdot} = \alpha(\varkappa(t\xi,t\eta))\xi + \beta(\varkappa(t\xi,t\eta))\eta \tag{9.2}$$

Die Ableitungen von $\varkappa$ lassen sich also aus denjenigen von $\alpha(\xi)$ und $\beta(\xi)$ berechnen. Für $\alpha(\xi)$ lässt sich aber ein explizierter Ausdruck angeben, denn $\alpha(\xi)$ ist in ξ analytisch, und die Reihenentwicklung lässt sich somit aus derjenigen von $\alpha^{-1}(\xi)$ die durch (7.4) gegeben wird, durch Einsetzen finden. Ein Ansatz

$$\alpha(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\xi^2 + \dots$$

liefert
$$\begin{aligned} \alpha(\xi)\,\alpha^{-1}(\xi) = \iota = \alpha_0 &+ \alpha_1\xi + \alpha_2\xi^2 + \alpha_3\xi^3 + \dots \\ &+ \frac{1}{2!}(S_\xi + \alpha_1\xi S_\xi + \alpha_2\xi^2 S_\xi + \dots \\ &+ \frac{1}{3!}(S_\xi^2 + \alpha_1\xi S_\xi^2 + \dots \\ &+ \frac{1}{4!}(S_\xi^3 + \dots, \end{aligned}$$

woraus man

$$\alpha_0 = \iota, \quad \alpha_1\xi + \frac{1}{2!}S_\xi = 0, \quad \alpha_2\xi^2 + \frac{1}{2!}\alpha_1\xi S_\xi + \frac{1}{3!}S_\xi^2 = 0$$

und allgemein

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{(\nu+1)!}\alpha_{n-\nu}\xi^{n-\nu} S_\xi^\nu = 0, \quad n \geq 1,$$

abliest. Es gilt $\alpha_1\xi = -\frac{1}{2}S_\xi$ und nimmt man als Induktionsvoraussetzung $\alpha_\mu\xi^\mu = k_\mu S_\xi$ für $\mu = 1 \dots \nu$, so erhält man

$$\alpha_{\nu+1}\xi^{\nu+1} = k_{\nu+1}S_\xi^{\nu+1}$$

und daraus die Rekursionsformel

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{k_{n-\nu}}{(\nu+1)!} = 0, \quad k_0 = 1, \quad n \geq 1.$$

Setzt man hier $k_\mu = B_\mu/\mu\,!$, so erhält man

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{B_{n-\nu}}{(\nu+1)\,!\,(n-\nu)\,!} = 0, \quad B_0 = 1,$$

und nach Multiplikation mit $(n+1)\,!$

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+1}{\nu+1} B_{n-\nu} = 0, \quad B_0 = 1,$$

und dies gerade ist die Rekursionsformel für die Bernoullischen Zahlen. Es gilt $B_{2n+1} = 0$ für $n > 1$, wir erhalten somit

$$\alpha(\xi) = \iota - \frac{1}{2} S + \sum_{n=1}^{\infty} k_{2n} S_\xi^{2n}, \quad k_n = \frac{B_n}{n\,!}. \tag{9.3}$$

Dass an dieser Stelle die Bernoullischen Zahlen auftreten, ist natürlich, denn diese sind ja die Koefizienten bei der Reihenentwicklung der Funktion $f(x)$

$$f(x) = x(e^x - 1)^{-1}, \quad xf^{-1}(x) = e^x - 1$$

und aus 7.4 folgt unmittelbar

$$S_\xi \alpha^{-1}(\xi) = e^{S_\xi} - \iota.$$

Für $\beta(\xi)$ hat man ganz analoge Resultate: $t\beta^{-1}(t\xi)$ genügt der Differentialgleichung (7.2) wenn man S durch $\tilde{S}$ ersetzt. Demzufolge ist

$$\beta^{-1}(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,!} \tilde{S}_\xi^{n-1} \tag{9.4}$$

und

$$\beta(\xi) = \iota - \frac{1}{2} \tilde{S}_\xi + \sum_{n=1}^{\infty} k_{2n} \tilde{S}^{2n}.$$

Mit Satz 4.1 ergibt sich daraus

$$\beta(\xi) = \eta + \frac{1}{2} S_\xi + \sum_{n=1}^{\infty} k_{2n} S^{2n}. \tag{9.5}$$

Ersetzt man in (9.5) ξ durch $-\xi$ so ergibt sich

$$\beta(-\xi) = \alpha(\xi), \tag{9.6}$$

und durch Subtraktion von (9.3) von (9.5) erhält man die etwas seltsame Formel

$$\beta(\xi) - \alpha(\xi) = S_\xi, \tag{9.7}$$

die allerdings keinen invarianten Sinn auf der Gruppe hat. Wir werden in III.11 darauf zurückkommen.

Mit den Formeln (9.3) und (9.5) kann man das durch (9.1) gestellte Problem explizit lösen, d. h. wenigstens eine Rekursionsformel für die Koeffizienten $\varkappa_n(\xi,\eta)$ angeben. Eine solche ist aber nicht einfach, da sich die höheren Ableitungen von H nach (9.2) sehr rasch komplizieren. Wir verzichten deshalb darauf, da wir im folgenden nur dem allgemeinen Bau der Glieder $\varkappa_n$ brauchen, den man wie folgt ersieht:

Die Ableitungen von $\alpha(\xi)$ resp. $\beta(\xi)$ an der Stelle $\xi=0$ mit Differentialen $\xi_1\ldots\xi_n$ ergeben sich aus (9.3) und (9.5) zu

$$\alpha'(0)(\xi_1,\eta) = -\tfrac{1}{2}S_{\xi_1}\eta$$

$$\beta'(0)(\xi_1,\eta) = \tfrac{1}{2}S_{\xi_1}\eta$$

$$\alpha^{(n)}(0)(\xi_1,\ldots,\xi_n,\eta) = \beta^{(n)}(0)(\xi_1,\ldots,\xi_n,\eta) = \frac{B^n}{n!}\sum S_{\xi_{i_1}}S_{\xi_{i_2}}\ldots S_{\xi_{i_n}}\eta$$

wo über alle Permutationen von $1\ldots n$ summiert wird. Diese Ableitungen sind somit alles Linearkombinationen von Lie-Produkten der Vektoren $\xi_1,\ldots,\xi_n$, η.

Die Ableitungen von $\varkappa$ für $t=0$ werden aus (9.1) rekursiv bestimmt.

$$\begin{aligned}
\dot\varkappa(0) &= \xi+\eta,\\
\ddot\varkappa(0) &= \{\alpha'(\varkappa)(\dot\varkappa,\xi)+\beta'(\varkappa)(\dot\varkappa,\eta)\}_{t=0} = \alpha'(0)(\dot\varkappa(0),\xi)+\beta'(0)(\varkappa(0),\eta),\\
\dddot\varkappa(0) &= \{\alpha''(\varkappa)(\dot\varkappa,\dot\varkappa,\xi)+\alpha'(\varkappa)(\ddot\varkappa,\xi)+\beta''(\varkappa)(\dot\varkappa,\dot\varkappa,\xi)+\beta'(\varkappa)(\ddot\varkappa,\xi)\}_{t=0}.
\end{aligned}$$

Für $\varkappa^{(n)}(0)$ usw. treten also in den Ableitungen von α und β die Ableitungen $\varkappa^{(m)}(0)$, $m<n$, als Differentiale auf. Man berechnet $\dot\varkappa(0)=[\xi,\eta]$ und nimmt als Induktionsvoraussetzung, dass $\varkappa^{(m)}(0)$, $m<n$, eine Linearkombination von Lie-Produkten sei. Dann folgt dies auch für $\varkappa^{(n)}(0)$. Wir haben somit:

SATZ 9.1: *Die Produktfunktion in kanonischen Koordinaten wird durch*

$$\varkappa(t\xi,t\eta) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}l_n(\xi,\eta)$$

gegeben, wo $l_n\ (\xi,\eta)\,(n>1)$ *eine Linearkombination von Lie-Produkten von* ξ *und* η *ist, wenn* $|t\xi|$ *und* $|t\eta|$ *genügend klein gewählt werden. Es ist:*

$$l_1(\xi,\eta)=\xi+\eta,\quad l_2(\xi,\eta)=[\xi,\eta],\quad l_3(\xi,\eta)=-\tfrac{1}{2}[[\xi,\eta],\xi-\eta].$$

Das Ergebnis von Satz 9.1 kann auch als

$$\exp t\xi\ \exp t\eta = \exp\,[t(\xi+\eta)+t^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^{n-2}}{n!}l_n(\xi,\eta)] \tag{9.7}$$

geschrieben werden, was illustriert, wie sich das Produkt zweier Geodäten verhält.

Wir geben noch eine in Satz 9.1 enthaltene Formel, welche direkt aus der Differenzierbarkeit von $\varkappa(t\xi, t\eta)$ folgt und für alle $t\xi, t\eta \in \log N_e$ gilt:

$$\varkappa(t\xi, t\eta) = t(\xi + \eta) + |t| r(t, \xi, \eta) \tag{9.8}$$

oder

$$\exp t\xi \, \exp t\eta = \exp(t(\xi + \eta) + |t| r(t, \xi, \eta)), \tag{9.9}$$

wo $r(t, \xi, \eta) \to 0$ für $t \to 0$.

Schliesslich brauchen wir noch die analoge Formel für den Kommutator $Q(t)$ zweier Geodäten $g(t) = \exp t\xi$ und $f(t) = \exp t\eta$. Differenziert man die Identität $g(t) f(t) Q(t) = f(t) g(t)$ zweimal in natürlichen Koordinaten unter Verwendung von Satz 9.1 und den Ableitungsformeln für α und α^{-1}, so ergibt sich

$$Q(t) = \exp(t^2[\xi, \eta] + |t|^2 r(t, \xi, \eta)). \qquad 9.11$$

10. Homomorphismen in Lie-Gruppen

Seien G und $\bar{G}$ zwei Lie-Gruppen und Φ eine Abbildung von G in $\bar{G}$. Φ heisst ein Homomorphismus $G \to \bar{G}$ wenn gilt:

1) Φ ist ein Homomorphismus $G \to \bar{G}$ bezüglich der algebraischen Strukturen von G und $\bar{G}$.
2) Φ ist eine stetige Abbildung $G \to \bar{G}$.

Satz 10.1: *Ein Homomorphismus Φ einer Lie-Gruppe G in eine Lie-Gruppe G ist mindestens zweimal differenzierbar.*

Beweis: Man wählt $U_e \subset G$ so, dass auf U_e und $\Phi(U_e)$ kanonische Koordinaten definiert sind. Sei φ die durch

$$\varphi(\xi) = \overline{\log}\, \Phi \, \exp \xi \tag{10.1}$$

auf $\log U_e \subset T_e$ definierte Abbildung in $\log \Phi(U_e) \subset T_e$. Wir zeigen, dass φ stetig linear ist.

φ ist trivialerweise stetig.

Die Homogenität von φ folgt daraus, dass das Bild unter Φ einer Geodäten von G nach Satz 6.3 eine Geodäte in $\bar{G}$ ist, so dass also

$$\varphi(t\xi) = \overline{\log}\, \Phi \, \exp t\xi = t\bar{\xi}, \quad \bar{\xi} = \varphi(\xi) \in T_e$$

für $t\xi \in \log U_e$.

Schliesslich ist für $t\xi, t\eta$, $t(\xi + \eta) \in \log U_e$

$$\log \Phi(\exp t\xi \exp t\eta) = \log(\Phi \exp t\xi)(\Phi \exp t\eta)$$

und Formel (9.8) ergibt für die linke Seite

$$\log \Phi \, \exp(t(\xi + \eta) + |t| r(t, \xi, \eta)) = t\varphi(\xi + \eta \pm r(t, \xi, \eta)),$$

und für die rechte Seite:

$$\log(\Phi \exp t\xi) + \log(\Phi \exp t\eta) + |t|\bar{r}(t,\varphi(\xi),\varphi(\eta)) = t\varphi(\xi) + t\varphi(\eta) + |t|\bar{r}(t,\varphi(\xi),\varphi(\eta)),$$

also:

$$t\varphi(\xi+\eta \pm r(t,\xi,\eta)) = t\varphi(\xi) + t\varphi(\eta) + |t|\bar{r}(t,\varphi(\xi),\varphi(\eta)),$$

woraus sich nach Division durch t für $t\to 0$ die Behauptung ergibt.

Die Linearität von φ besagt nun, dass in natürlichen Koordinaten die Abbildung Φ in einer Umgebung von e beliebig oft differenzierbar ist. Sie ist es also dort in einer beliebigen Karte mindestens zweimal, und aus der Homomorphieeigenschaft folgt die Differenzierbarkeit überhaupt.

SATZ 10.2: *Seien G und $\bar{G}$ zwei Lie-Gruppen und $\Phi: G\to\bar{G}$ ein Homomorphismus. Dann ist Φ' ein stetiger Homomorphismus der Lie-Algebra L von G in die Lie-Algebra $\bar{L}$ von $\bar{G}$ bezüglich der Algebren Strukturen.*

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass Φ' eine Abbildung $L\to\bar{L}$ ist, d. h. dass Φ' parallele Felder in parallele Felder überführt. Man erhält durch Differentiation nach p von

$$\Phi(pq) = \Phi p \Phi q$$

$$\Phi'(pq)A(p,q) = \bar{A}(\Phi p,\Phi q)\Phi'(p),$$

und für $q = p^{-1}$ nach (2.3) die Formel

$$\Phi'(p) = \bar{A}(\Phi p)\Phi'(e)A^{-1}(p). \tag{10.2}$$

Für ein invariantes Feld $\xi(p) = A(p)\xi_0$ ergibt sich somit

$$\Phi'(p)\xi(p) = A(\Phi p)\Phi'(e)\xi_0,$$

also wieder ein invariantes Feld.

Φ' ist trivialerweise linear und stetig. Es bleibt noch zu zeigen, dass Φ' das Lie-Produkt erhält. (10.2) ergibt

$$\bar{A}^{-1}(\Phi p)\Phi'(p) = \Phi'(e)A^{-1}(p),$$

und daraus erhält man durch äussere Differentiation unter Berücksichtigung von $\delta\Phi = 0$:

$$\delta\bar{A}^{-1}(\Phi p)(\Phi'(p)\xi,\Phi'(p)\eta) = \Phi'(e)\,\delta A^{-1}(p)(\xi,\eta),$$

und für $p = e$

$$S(e)(\Phi'(e)\xi,\Phi'(e)\eta = \Phi'(e)S(e)(\xi,\eta),$$

was also die Behauptung ergibt.

Einem Gruppenhomomorphismus entspricht also ein Homomorphismus der zugehörigen Lie-Algebren. Man bemerkt übrigens, dass $\Phi'(e)$ gerade die durch (10.1) gegebene Abbildung φ resp. deren lineare Fortsetzung ist, da ja $\varphi' = \varphi$ wegen der Linearität von φ gilt. Man erhält somit

$$\Phi'(e)\xi = \overline{\log}\,\Phi \exp \xi,$$

oder ohne Einschränkung des Definitionsbereiches:

$$\overline{\exp}\,\Phi'(e)\xi = \Phi \exp \xi. \tag{10.3}$$

Zur Umkehrung des Satzes 10.2 führen wir den Begriff des lokalen Homomorphismus ein, für eine auf einer Umgebung $U_e \subset G$ definierte Abbildung Φ mit Bildern in $\bar{G}$, wenn Φ auf U_e die Homomorphismuseigenschaften hat. Damit gilt:

SATZ 10.3: *Seien T_e und $\bar{T}_{\bar{e}}$ die Tangentialräume an die Einheiten der Lie-Gruppen G resp. $\bar{G}$. Ist ein stetiger Homomorphismus φ bezüglich der Algebrenstrukturen $\varphi: T_e \to \bar{T}_{\bar{e}}$ gegeben, so gibt es einen lokalen Homomorphismus $\Phi: U_e \subset G \to \bar{G}$, so dass $\Phi'(e) = \varphi$. Ist weiter G einfach zusammenhängend, so gibt es einen Homomorphismus $\Phi: G \to \bar{G}$, so dass $\Phi'(e) = \varphi$.*

Beweis: Es gibt eine Umgebung $U_e \subset G$, so dass für $\xi, \eta \in \log U_e$ die in Satz 9,1 gegebene Reihenentwicklung von $\varkappa(t\xi, t\eta)$ sowohl als auch von $\bar{\varkappa}(t\varphi\xi, t\varphi\eta)$ für $t = 1$ konvergiert. Dies folgt aus der Stetigkeit von φ. Wir betrachten die auf U_e gegebene Abbildung

$$\Phi = \overline{\exp}\,\varphi \log: U_e \to \bar{G},$$

von welcher wir behaupten, dass sie der gesuchte lokale Homomorphismus ist. Φ ist trivialerweise stetig. Es ist für $\xi = \log p$, $\eta = \log q$

$$\Phi(pq) = \exp\,\varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} l_n(\xi, \eta)\right) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} l_n(\varphi\xi, \varphi\eta) = \exp\,\varphi\xi \exp\,\varphi\eta = \Phi p \Phi q$$

da ja der Bau der Glieder $l_n(\xi, \eta)$ garantiert, dass $\varphi l_n(\xi, \eta) = l_n(\varphi\xi, \varphi\eta)$. Das ist aber schon was zu beweisen war.

Der Zusatz über einfach zusammenhängende Gruppen folgt aus einem allgemeinen Satz über topologische Gruppen, welcher besagt, dass sich in diesem Fall jeder lokale Homomorphismus global fortsetzen lässt. (Man vergleiche etwa [10], Th. 63).

Ein lokaler Homomorphismus $\Phi: G \to \bar{G}$ heisst *lokal eineindeutig* resp. *lokal topologisch*, wenn es eine Umgebung U_e von $e \in G$ gibt, so dass die Restriktion Φ / U_e eineindeutig resp. topologisch auf $\Phi(U_e)$ ist. Im letzteren Fall wird natürlich $\Phi(U_e)$ in der von G induzierten Topologie betrachtet.

Satz 10.4: *Ein (lokaler) Homomorphismus* $\Phi: G \to \bar{G}$ *ist dann und nur dann lokal eineindeutig resp. lokal topologisch, wenn* $\Phi'(e)$ *eine eineindeutige resp. topologische Abbildung von* T_e *auf* $\Phi'(e)(T_e)$ *ist.*

Der Beweis folgt unmittelbar aus der oben benützten Tatsache, dass für $\log p$ aus einer gewissen Umgebung von $0 \in T_e$ die Abbildung $\Phi p = \exp \Phi'(e) \log p$ ist.

Man bemerkt hier wieder einen Unterschied gegenüber einer endlichdimensionalen Theorie: In einer solchen würde nämlich aus der lokalen Eineindeutigkeit von Φ folgen, dass Φ lokal topologisch ist, da ja dann eine eineindeutige Abbildung $\Phi'(e)$ automatisch topologisch ist.

11. Die adjungierte Darstellung einer Lie-Gruppe

Einen stetigen Homomorphismus einer Lie-Gruppe G in die Automorphismengruppe $GL(F)$ eines Banachraumes F bezeichnet man als Darstellung von G in F, F heisst der Darstellungsraum. Zu jeder Lie-Gruppe G lässt sich in natürlicher Weise eine Darstellung mit T_e als Darstellungsraum angeben:

Satz 11.1: *Ist* $\sigma_p: q \to pqq^{-1}$ *der zu* p *gehörige innere Automorphismus* $G \to G$, *und bezeichnet man die durch*

$$p \to \sigma_p'(e)$$

gegebene Abbildung mit ad, *so ist*

$$\mathrm{ad}: \quad G \to GL(T_e)$$

eine Darstellung von G *in* T_e. ad *heisst die adjungierte Darstellung von* G.

Beweis: Es ist $\mathrm{ad}\,(p) \in GL(T_e)$. Das folgt aus den Sätzen 10.2 und 10.4, da σ_p ein stetiger Automorphismus von G ist. Man sieht es aber auch durch explizite Berechnung von ad (p):

$$\sigma_p'(q) = A(pq, p^{-1}) . B(p, q),$$

woraus sich für $q = e$ mit $A(p, p^{-1}) = A^{-1}(p)$ ergibt.

$$\mathrm{ad}\,(p) = A^{-1}(p)\, B(p). \tag{11.1}$$

Daraus ergibt sich auch die Stetigkeit von ad. Schliesslich ist ad ein Homomorphismus, denn es ist $\sigma_{pq} = \sigma_p \sigma_q$, also auch $\sigma_{pq}' = \sigma_p' \sigma_q'$.

Nach (10.3) gilt zudem $\exp(\mathrm{ad}\,(p)\xi) = \sigma_p \exp \xi$, also

$$\exp(\mathrm{ad}\,(p)\xi) = p \exp \xi p^{-1}. \tag{11.2}$$

Aus der Homomorphie-Eigenschaft von ad folgt nun nach Satz 10.2, dass die Ableitung $\mathrm{ad}(p)$ ein Homomorphismus $T_p \to L(T_e)$ ist, wenn die Tangentialräume an die $G\,L(T_e)$, wie üblich, mit $L(T_e)$ identifiziert werden. In Karten ($\varphi(p)=x$) erhält man durch Differentiation der Identität

$$a(x)\,\mathrm{ad}(x)\,h = b(x)\,h,$$

die aus (11.1) folgt:

$$a'(x)(k, \mathrm{ad}(x)\,h) + a(x)\,\mathrm{ad}'(x)(k,h) = b'(x)(k,h),$$

was unter Verwendung von (3.1) und (4.2) ergibt

$$\Gamma(x)(k, b(x)\,h) + a(x)\,\mathrm{ad}'(x)(k,h) = -\Gamma(x)(k, b(x)\,h) = \Gamma(x)(b(x)\,h, k).$$

Das lässt sich mit (4.1) und Satz 4.2 invariant schreiben als:

$$\mathrm{ad}'(p)\xi = A^{-1}(p)\, S(p)_\xi B(p) = S_{A^{-1}(p)\xi}\, \mathrm{ad}(p), \tag{11.3}$$

wenn, wie früher, $S(p)_\xi \eta = S(p)(\xi,\eta)$, $S=S(e)$ gesetzt wird.

Für $p=e$ ergibt sich

$$\mathrm{ad}'(e)\xi = S_\xi. \tag{11.4}$$

Man beachte: Die Eigenschaft von $\mathrm{ad}'(e)$ ein Algebrenhomomorphismus $T_e \to L(T_e)$ zu sein, ist gerade die Jacobische Identität für S.

Betrachtet man die Abbildung ad längs einer Geodäten $g(t)$, $\dot{g}(t) = A(g(t))\,\xi$, so ergibt sich für die Ableitung

$$\mathrm{ad}\,(g(t))^{\cdot} = \mathrm{ad}'\,(g(t))\,\dot{g}(t) = S_A - 1_{(g(t))\dot{g}(t)}\,\mathrm{ad}\,(g(t)) = S\ \ \mathrm{ad}\,(g(t)).$$

Diese Differentialgleichung ($\mathrm{ad}(g(0)) = \iota$) lässt sich sofort lösen:

$$\mathrm{ad}(g(t)) = e^{tS_\xi}, \quad \xi = \dot{g}(0) \tag{11.5}$$

oder mit $g(t) = \exp(t\xi)$

$$\mathrm{ad}(\exp(t\xi)) = e^{tS_\xi}. \tag{11.5'}$$

(Das ist übrigens eine Formel die sich direkt aus 10.3 ergibt.)

Damit lässt sich nun die Formel (9.7) invariant schreiben. Es gilt:

$$B(\exp\xi) - A(\exp\xi) = A(\exp\xi)(\mathrm{ad}(\exp\xi) - \iota)$$

$$B(\exp\xi) - A(\exp\xi) = A(\exp\xi)(e^{S_\xi} - \iota). \tag{11.6}$$

Dass dies schon die gesuchte Übertragung von (9.7) ist, ergibt sich daraus, dass für kanonische Koordinaten nach (7.4) gilt: $\alpha^{-1}(\xi)\,S_\xi = e^{S_\xi} - \iota$ also $S_\xi = \alpha(\xi)(e^{S_\xi} - \iota)$, so dass sich (11.6) gerade als (9.7) schreibt, wenn man zu kanonischen Koordinaten übergeht.

12. Untergruppen von Lie-Gruppen

DEFINITION 12.1: *Sei G eine Lie-Gruppe und $G^* \subset G$. G^* heisst differenzierbare Untergruppe von G, wenn gilt:*

1. *G^* ist Untergruppe von G (bezüglich der algebraischen Struktur).*
2. *G^* ist Untermannigfaltigkeit von G.*

Eine differenzierbare Untergruppe ist bezüglich der durch die Forderung 2) gegebenen Topologie eine Lie-Gruppe: Es ist zu zeigen, dass die Abbildung $(p,q) \to pq$ in G^* differenzierbar ist. Seien x^*, y^*, z^* resp. x,y,z Koordinaten von p,q,pq in G^* resp. G. Dann ist nach A.1 aus II.7 die Abbildung $(x^*,y^*) \to (x,y)$ differenzierbar. Nach A.2 aus II.7 existiert eine Projektion P, so dass aus der um pq in G definierten Parameterabbildung $\varphi : pq \to z$ mit $P\bar{\varphi}, \bar{\varphi} = \varphi \mid U^*$, eine Parameterabbildung in G gegeben wird. Da aber P stetig linear ist, ist auch die Abbildung $(x,y) \to Pz$ differenzierbar. Schliesslich ist noch $Pz \to z^*$ differenzierbar, wodurch die Abbildung $(x^*,y^*) \to z^*$ in differenzierbare Schritte zerlegt ist.

Es existiert eine Umgebung U_e^* von e in G^*, so dass $j \mid U_e^*$ topologisch ist. Dies ist gerade die Aussage des Hilfssatzes aus II.7. Deswegen braucht G^* keineswegs lokal topologisch eingebettet zu sein, wie das Standardbeispiel der Geraden mit irrationaler Steigung im zweidimensionalen Torus zeigt.

Da j aber sicher stetig ist, lässt sich S 10.1 anwenden, was einen Teil der in Definition 12.1 aufgestellten Forderungen ersetzt. Das legt folgende Definition nahe:

DEFINITION 12.2: *Sei G eine Lie-Gruppe und $G^* \subset G$. G^* heisst Lie-Untergruppe von G, wenn gilt:*

1. *G^* ist eine Lie-Gruppe.*
2. *Die Einbettung $j : G^* \to G$ ist ein stetiger Homomorphismus und es existiert eine Umgebung U_e^* von e in G^*, so dass $j \mid U_e^*$ topologisch ist.*

Bemerkung: Satz 10.1 liefert für j nur $(k-1)$-malige Differenzierbarkeit $(k \geqslant 3)$. Um hier nicht ständig unwesentliche zusätzliche Voraussetzungen machen zu müssen, sollen im folgenden auf den Lie-Gruppen unbeschränkt differenzierbare Atlanten angenommen werden, solche existieren ja nach Satz 7.2. Dann ist auch j unbeschränkt differenzierbar.

SATZ 12.1: *Eine differenzierbare Untergruppe ist eine Lie-Untergruppe.*

Eine Lie-Untergruppe ist dann und nur dann eine differenzierbare Untergruppe, wenn $j'(e)\,T_e^*$ ein topologisch direkter Summand von T_e ist, wo T_e^* und T_e die Lie-Algebra von G^* resp. G bedeuten.

Die erste Aussage ist schon bewiesen, denn es wurde oben gezeigt, dass eine differenzierbare Untergruppe eine Lie-Gruppe ist. Die zweite folgt aus den Sätzen 10.1 und 10.4 und den Isomorphieeigenschaften der Tangentialräume in verschiedenen Punkten. Satz 12.1 zeigt, dass die Definition 12.2 im allgemeinen schwächer ist als 12.1, aber auch, dass die beiden Definitionen schon im Falle eines Hilbertschen Parameterraumes zusammenfallen.

SATZ 12.2: *Sei G^* eine Lie-Untergruppe von G und T_e^*, resp. T_e die Lie-Algebra von G^*, resp. G. Dann ist $j'(e)T_e^* = \overline{T}_e$ eine zu T_e^* topologisch isomorphe abgeschlossene Unteralgebra von T_e.*

Beweis: Nach Satz 10.2 und Satz 10.4 ist es klar, dass $\overline{T}_e$ eine zu T_e algebraisch isomorphe Unteralgebra von T_e ist. Weiter ist aber für eine Umgebung der 0 in T_e $j'(e)$ nach (10.3) durch

$$j'(e) = \log j \exp^*$$

gegeben; da diese Abbildung nach Definition 12.2 auf $\overset{*}{\log}(U^*)$ topologisch ist, ist $j'(e)$ somit überhaupt eine topologische Abbildung, und $j'(e)T_e$ ist abgeschlossen.

SATZ 12.3: *Sei G eine Lie-Gruppe, T_e die Lie-Algebra von G und T_e^* eine abgeschlossene Unteralgebra von T_e. Die von $\exp(T_e^*)$ erzeugte Gruppe G^* lässt sich als zusammenhängende Lie-Gruppe über T_e^* definieren, so dass G^* eine Lie-Untergruppe von G wird.*

Beweis: Sei ϱ so gewählt, dass für $|\xi|$, $|\eta| < \varrho$ und $t=1$ die in Satz 9.1 gegebene Potenzreihe konvergiert. Sei weiter K_ϱ die offene Kugel um $0 \in T_e$ mit Radius ϱ, $K_\varrho^* = K_\varrho \cap T_e^*$, $U = \exp(K_\varrho)$ und $U^* = \exp(K_\varrho^*)$. Wir behaupten:

a) U^* ist mit der von G induzierten Topologie und Gruppenoperation eine lokale Gruppe, wenn das Produkt $(p,q) \to pq$ als definiert erklärt wird, falls $pq \in U^*$. Assoziativität und Stetigkeit dieser Gruppenoperation sind trivial, ebenso die Existenz eines Einheitselementes und des Inversen, denn $0 \in K_\varrho^*$ und mit $\xi \in K_\varrho^*$ ist auch $-\xi \in K_\varrho^*$. Es bleibt noch zu zeigen, dass es zu $p,q \in U^*$ Umgebungen V_p^*, V_q^* in U^* gibt, so dass $(\bar{p},\bar{q}) \to \bar{p}\bar{q}$ definiert ist für $\bar{p} \in V_p^*$, $\bar{q} \in V_q^*$ sobald $(p,q) \to pq$ definiert ist. Letzteres ist der Fall für $pq \in U^*$, also insbesonders $pq \in U$. Es gibt in G Umgebungen V_p, V_q von p und q, so dass $V_p V_q \subset U$. Sei $V_p^* = V_p \cap U$, $V_q^* = V_q \cap U$ und $\bar{p} \in V_p^*$, $\bar{q} \in V_q^*$. Dann ist nach 9.1

$$\log(\bar{p}\bar{q}) = \sum \frac{1}{n!} l_n(\xi,\eta), \quad \xi = \log p, \ \eta = \log q,$$

also $\log(\bar{p}\bar{q}) \in T_e$, da $l_n(\xi,\eta) \in T_e^*$ und T_e abgeschlossen. Es ist aber auch $\log(\bar{p}\bar{q}) \in K_\varrho$, somit $\log(\bar{p}\bar{q}) \in K_\varrho^*$, also $\bar{p}\bar{q} \in U^*$.

b) Wenn G^* die von $\exp T_e^*$ erzeugte Gruppe ist, so wird G^* von U^* erzeugt, denn U^* erzeugt trivialerweise $\exp T_e^*$.

Dank den Eigenschaften a) und b) lässt sich G^* zu einer Topologischen Gruppe machen. Man erhält nämlich eine offene Umgebungsbasis für $e \in G^*$, wenn man dafür alle Mengen V^* nimmt, für welche $V^* \cap {}^*$ offen ist. Für die Einzelheiten sei z. B. auf [4] verwiesen.

G^* ist nun eine topologische Gruppe, und es ist klar, dass U^* den im Satz 2.1 geforderten Bedingungen genügt. G^* lässt sich also zu einer Lie-Gruppe machen, welche trivialerweise Lie-Untergruppe von G ist.

Die Sätze 12.2 und 12.3 stellen eine eindeutige Beziehung zwischen zusammenhängenden Lie-Untergruppen und abgeschlossenen Unteralgebren dar. Wir sagen, dass $\overline{T}_e$ (in Satz 12.2) die zu G^* gehörige Unteralgebra ist, und dass G^* in Satz (12.3) von T_e^* erzeugt wird. $\overline{T}_e$ erzeugt offenbar die Zusammenhangskomponente der e von G^*. Folgender Satz ergibt sich als Korollar:

SATZ 12.4: *Die zu einer differenzierbaren Untergruppe G^* von G gehörige Unteralgebra T_e^* ist ein topologisch direkter Summand von T_e. Ein topologisch direkter Summand T_e^* von T_e erzeugt eine differenzierbare Untergruppe G^* von G.*

Für die endlich dimensionalen Gruppen lässt sich ein Satz beweisen, wonach jede abgeschlossene Untergruppe als Lie-Untergruppe definiert werden kann. Dies scheint hier nicht möglich, oder zumindest nicht so einfach zu sein. Wir geben eine Analyse des Problems.

Sei also G^* eine abgeschlossene Untergruppe von G. Wir betrachten die Menge X aller Vektoren $\xi \in T_e$, für welche $\exp \xi \in G^*$ gilt. Für ein $\xi \in X$ gibt es zwei Möglichkeiten:

a) Es gibt ein $\tau, 0 < \tau \leqslant 1$, so dass $\tau\xi \in X$, aber $t\xi \notin X$ für $0 < t < \tau$.

b) Zu jedem $\tau, 0 < \tau \leqslant 1$, so dass $\tau\xi \in X$, gibt es ein t, $0 < t < \tau$, so dass $t\xi \in X$.

Sei Y die Menge der Vektoren $\xi \in X$ mit der Eigenschaft a) und Z diejenige mit der Eigenschaft b).

Z ist eine abgeschlossene Unteralgebra von T_e. Beweis: Die Bedingung b) impliziert, dass es zu $\xi \in Z$ eine Folge $t_n, n = 1, 2, \ldots, t_{n+1} < t_n, 0 < t_n \leqslant 1$, gibt, so dass $t_n\xi \in Z$, also $\exp t_n\xi \in G^*$. Dann ist aber auch $\exp (t_n - t_m)\xi = \exp t_n\xi (\exp t_m\xi)^{-1} \in G^*$, also $(t_n - t_m)\xi \in Z$. Daraus folgt, dass die Punkte $\exp t\xi$, welche in G^* liegen, auf der Geodäte $\exp t\xi$ überall dicht sind. Da aber G^* abgeschlossen ist, folgt daraus $t\xi \in Z$, $-\infty < t < \infty$. Mit $\xi \in Z$ ist also $t\xi \in Z$, und Z ist gerade die Menge derjenigen Vektoren $\xi \in T_e$, für welche $\exp (t\xi) \in G^*$, $-\infty < t < \infty$.

Sei nun $\xi, \eta \in Z$. Dann ist

$$\exp (t\xi) \exp (t\eta) = \exp (t(\xi + \xi) + tr(t)) \in G^*$$

(vgl. (9.8)). Sei τ beliebig, und $k(t, \tau) = \tau/t - (\tau/t \bmod 1)$. Dann ist

$$\exp (k(t, \tau)(t(\xi + \eta) + tr(t))) = \exp (t(\xi + \eta) + tr(t))^{k(t,\tau)} \in G^*.$$

Da G^* abgeschlossen ist, gilt das auch für den Limes $t \to 0$, welcher wegen $\lim k(t,\tau)t = \tau$ existiert und gleich $\exp(\tau(\xi+\eta))$ ist. Es ist somit $\tau(\xi+\eta) \in Z$ für jedes τ, mit $\xi,\eta \in Z$ ist also auch $\xi+\eta \in Z$.

Da mit $\exp(t\xi)$ und $\exp(t\eta)$ auch der Kommutator $Q(t) = \exp(t^2[\xi,\eta]+t^2r(t))$ dieser Kurven in G liegt, (vgl. (9.11)) lässt sich mit $t^2 = u$ und $k(u,\tau) = \tau/u - (\tau/u \bmod 1)$ der genau gleiche Schluss wiederholen, was zeigt, dass mit $\xi,\eta \in Z$ auch $[\xi,\eta] \in Z$.

Z ist somit eine Unteralgebra von T_e. Es bleibt noch zu zeigen, dass Z abgeschlossen ist. Sei $\xi_n, n=1,2,\ldots$ eine Folge in Z und $\lim \xi_n = \xi$. Dann ist diese Folge beschränkt, und es lässt sich ein τ wählen, so dass $t\xi_n, n=1,2,..$ und $t\xi$ für $0<t<\tau$ in derjenigen Umgebung von $0 \in T_e$ liegen, auf welcher exp topologisch ist. Da nun $t\xi_n \to t\xi$ gilt auch exp $t\xi_n$ exp $t\xi$, und $\exp t\xi \in G^*$, da G^* abgeschlossen. Das besagt aber gerade wieder, dass $t\xi \in Z$ und somit $\xi \in Z$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Z erzeugt eine Lie-Untergruppe H^*, welche offenbar in G_0^* der e-Komponente von G^* liegt. Um zu sehen, unter welchen Umständen $H^* = G_0^*$ ist, betrachtet man die Menge Y.

Falls $\xi \in Y$, so gibt es offenbar einen „primitiven Vektor" $\eta = (1/n)\xi$, so dass die Geodäte $\exp t\eta$ die Untergruppe G^* nur in den Punkten $t=0, \pm 1, \pm 2\ldots$ berührt. Dieser Fall ist durchaus denkbar, er kann dann auch eintreten, wenn $G_0^* = H^*$, denn um $G_0^* = H^*$ zu beweisen, braucht man nur zu wissen, dass gilt $\inf|\xi| = \varrho > 0, \xi \in Y$. In diesem Fall ist nämlich $G_0^* \cap \exp K_\varrho = H^* \cap \exp K_\varrho$ (K_ϱ die offene Kugel mit Radius ϱ um $0 \in T_e$) eine Umgebung von e sowohl in H^* als auch in G_0^*, also $H^* = G_0^*$. Diese Beschränktheit lässt sich im endlich dimensionalen Fall mit Hilfe der lokalen Kompaktheit beweisen. Zusammengefasst ergibt sich

SATZ 12.5: *Sei G^* eine abgeschlossene Untergruppe der Lie-Gruppe G; G_0^* die Einheitskomponente von G^*; X die Menge aller $\xi \in T_e$, so dass* $\exp\xi \in G^*$; *Z die Menge aller $\xi \in T_e$, so dass* $\exp(t\xi) \in G^*$, $-\infty < t < \infty$. *Dann ist Z eine abgeschlossene Unteralgebra von T_e. Z erzeugt G_0^*, wenn gilt* $\inf|\xi| = \varrho > 0, \xi \in X, \xi \notin Z$. *In diesem Fall ist G_0^* eine Lie-Untergruppe von G.*

Ein Unterraum I einer Lie-Algebra L heisst ein Ideal, wenn mit $\xi \in I$ und $\eta \in L$ gilt $[\xi,\eta] \in I$. Ein Ideal ist immer zweiseitig, d. h. es ist dann auch $[\eta,\xi] \in I$.

SATZ 12.6: *Sei N eine Lie-Untergruppe von G, welche Normalteiler ist. Dann ist die zu N gehörige Unteralgebra I ein abgeschlossenes Ideael in T_e.*

Sei I ein abgeschlossenes Ideal in T_e, dann ist die von I erzeugte Lie-Untergruppe N Normalteiler in G, wenn G zusammenhängend ist.

Beweis: Sei N Normalteiler in $G, \xi \in I, \eta \in T_e$. Dann ist der Kommutator $Q(t) = \exp(t^2[\xi,\eta]+t^2r(t))$ von $\exp(t\xi)$ und $\exp(t\eta)$ (vgl. 9.11) nach Voraussetzung für alle η in N. Wiederholt man den Schluss, der zum Beweis von Satz 12.5 verwendet wurde, so findet man, dass dann auch $\exp(\tau[\xi,\eta]) \in N$ für alle τ. Somit $[\xi,\eta] \in I$, was zu beweisen war, denn I ist ja von vornherein eine abgeschlossene Unteralgebra von T_e.

Anderseits zeigt die Formel (10.2) unmittelbar, dass eine Unteralgebra I dann einen Normalteiler in N in G erzeugt, wenn I unter den Abbildungen $\mathrm{ad}(p)$, $p \in G$ invariant ist, denn dann ist

$$\exp(\mathrm{ad}(p)\xi) = p \exp \xi p^{-1} \in \exp I, \quad p \in G,$$

und N wird von $\exp I$ erzeugt. Diese Bedingung ist aber erfüllt, wenn I ein abgeschlossenes Ideal ist, denn dann ist nach (11.5′)

$$\mathrm{ad}(\exp\xi)\eta = e^{S_\xi}\eta \in I, \quad \xi \in T_e, \eta \in I,$$

und da G von $\exp T_e$ erzeugt wird, sogar

$$\mathrm{ad}(p)\eta \in I, \quad p \in G, \quad \eta \in I.$$

Es ist übrigens, in Übereinstimmung mit dem ersten Teil des Satzes, leicht direkt aus (11.4) zu sehen, dass die Invarianz einer Unteralgebra unter $\mathrm{ad}(p)$, $p \in G$ gerade mit der Ideal-Eigenschaft äquivalent ist.

SATZ 12.7: *Seien G und $\bar{G}$ zwei Lie-Gruppen und $\Phi: G \to \bar{G}$ ein Homomorphismus. Dann ist die e-Komponente N_0 von Kern Φ eine Lie-Untergruppe von G, welche von Kern $\Phi'(e)$ erzeugt wird. N_0 ist abgeschlossener Normalteiler.*

Die $\bar{e}$-Komponente des Bildes $\Phi(G) = G^*$ ist genau dann eine Lie-Untergruppe, wenn $T^*_{\bar{e}} = \Phi'(e)\, T_e$ abgeschlossen ist in $\bar{T}_{\bar{e}}$.

Beweis: Kern $\Phi'(e) = I$ ist offenbar ein abgeschlossenes Ideal in T_e; erzeugt somit nach Satz 12.7 einen Normalteiler N_0 in G. Sei $\xi \in I$. Es ist dann nach (10.3) $\Phi \exp \xi = \overline{\exp}(\Phi'(e)\xi) = \bar{e}$, und somit auch $\Phi p = \bar{e}, p \in N_0$, da N_0 von $\exp I$ erzeugt wird, also $N_0 \subset$ KernΦ. Anderseits wird die e-Komponente von KernΦ durch $U_e \cap$ KernΦ erzeugt, wo U_e eine Umgebung von e ist, so dass sowohl auf U_e als auch auf ΦU_e kanonische Koordinaten definiert sind. Sei dann $p = \exp \xi \in U_e$. Dann ist wiederum nach (10.3) $\Phi \exp \xi = \overline{\exp}(\Phi'(e)\xi) = \bar{e}$, also $\Phi'(e)\xi = 0$, $\xi \in I$, was besagt, dass N_0 und Kern Φ in einer Umgebung der e zusammenfallen. Daraus ergibt sich die Behauptung. Sei weiter $\Phi'(e)\, T_e = T^*_{\bar{e}}$ abgeschlossen und G^* die von $T^*_{\bar{e}}$ erzeugte Untergruppe von $\bar{G}$; dann ergibt sich die zweite Behauptung des Satzes ganz analog zur ersten aus der Formel (10.3).

13. Faktorgruppen

Während sich bis anhin alle Sätze über Untergruppen für Lie-Untergruppen (Definition 12.2) formulieren liessen, scheint der wesentliche Satz über Faktorgruppen nur für differenzierbare Untergruppen (Definition 12.1) zu gelten:

SATZ 13.1: *Sei G eine Lie-Gruppe und N eine differenzierbare Untergruppe, welche abgeschlossener Normalteiler in G ist.*

Dann lässt sich G/N als Lie-Gruppe definieren mit T_e/I als Lie-Algebra (T_e: Lie-Algebra von G, I: das zu N gehörige Ideal, vergl. Satz 12.6).

Beweis: G/N ist eine topologische Gruppe, auf welche Satz 2.1 angewendet werden soll. Sei ϱ so gewählt, dass für $|\xi|, |\eta| < \varrho$, $t=1$ die in Satz 9.1 gegebene Reihe konvergiert, und dass auf $U_e = \exp K_\varrho$ (K_ϱ: Kugel mit Radius ϱ um $0 \in T_e$) kanonische Koordinaten definiert sind. Mit Φ resp. φ bezeichnen wir die Projektionen $G \to G/N$ resp. $T_e \to T_e/I$. $\Phi(U_e) = \bar{U}_{\bar{e}}$ resp. $\varphi(K_\varrho) = \bar{K}_\varrho$ sind dann offene Umgebungen von $\bar{e}$ in G/N resp. $\bar{o}$ in T_e/I. Wir zeigen, dass man durch die Zuordnung

$$\bar{p} \to p \to \log p = \xi \to \bar{\xi},$$

wo $\bar{p} \to p$ die Wahl eines Repräsentanten von $\bar{p} \in \bar{U}_{\bar{e}}$ in U_e bedeutet, eine von dieser Wahl unabhängige topologische Abbildung $\overline{\log}: \bar{p} \to \bar{\xi}$ von $\bar{U}_{\bar{e}}$ auf $\bar{K}_\varrho$ erhält. Ist nämlich $p' = pa$, $a = \exp \eta \in N$ ein weiter Repräsentant, so ergibt Satz 9.1 in der Form (9.8) angewendet

$$p' = \exp \xi \exp \eta = \exp\left(\xi + \eta + \sum \frac{1}{n!} l_n(\xi, \eta)\right) = \exp(\xi + \eta^*),\ \eta^* \in I,$$

da $l_n(\xi,\eta) \in I$, $n = 2, 3, \ldots$, wegen der Idealeigenschaft. Es ist somit $\log p' - \log p = \eta^* \in I$.

Um zu sehen, dass $\overline{\log}$ topologisch auf ist, betrachten wir die Zuordnung

$$\bar{\xi} \to \xi \to \exp \xi = p \to \bar{p},$$

wo $\bar{\xi} \to \xi$ wiederum die Wahl eines Repräsentanten bedeutet, und zeigen, dass dadurch eine von dieser Wahl unabhängige Abbildung $\overline{\exp}: \bar{\xi} \to \bar{p}$ von $\bar{K}_\varrho$ in $\bar{U}_{\bar{e}}$ ist. Ist $\xi' = \xi + \eta$, $\eta \in I$ ein anderer Repräsentant von $\bar{\xi}$ so folgt wiederum aus (9.8) $\exp \xi' (\exp \xi)^{-1} \in N$.

Weiter stellt man wiederum mit (9.8) unmittelbar fest, dass $\overline{\exp}\,\overline{\log} = \jmath$, $\overline{\log}\,\overline{\exp} = \iota$, die identischen Abbildungen sind.

Schliesslich folgt aus der Stetigkeit und Offenheit von Φ und φ noch, dass sowohl $\overline{\log}$ als auch $\overline{\exp}$ offen, somit topologisch sind.

Bis anhin wurde die Voraussetzung, dass I in T_e einen topologisch direkten Summanden D hat, nicht verwendet. Ohne diese Voraussetzung lässt sich aber über die Differenzierbarkeit der Abbildung

$$\bar{\pi}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = \overline{\log}\,(\overline{\exp}\ \bar{\xi}\ \overline{\exp}\ \bar{\eta})$$

kaum etwas aussagen. Es existiert ein topologischer Isomorphismus $\omega: T_e/I \to D$. Damit wird

$$\overline{\exp}\ \bar{\xi} = \Phi \exp \omega(\bar{\xi}).$$

Bezeichnet man mit Ω die Abbildung, die jedem $\bar{p} \in \bar{U}_{\bar{e}}$ den Repräsentanten in $\exp D$ zuordnet, so wird

$$\overline{\log}\ \bar{p} = \varphi \log \Omega(\bar{p}).$$

Damit erhält man für die Produktfunktion

$$\bar{\pi}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = \varphi \log \Omega \Phi\ (\exp \omega(\bar{\xi}) \exp \omega(\bar{\eta}))$$

Dabei ist $\Omega\Phi = \exp P \log$, wo P die Projektion $T_e \to D$ bedeutet. Dies ergibt

$$\bar{\pi}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = \varphi P \pi(\omega(\bar{\xi}), \omega(\bar{\eta})),$$

was wegen der Linearität und Stetigkeit von φ, P, ω, die Differenzierbarkeit von $\bar{\pi}$ garantiert.

Zugleich zeigt diese Formel, dass durch T_e in T_e/I induzierte Lie-Produkt mit dem von G/N induzierten übereinstimmt, denn die Produktfunktionen in G und G/N unterscheiden sich nur durch Projektionen.

Bemerkung: Wenn in T_e ein topologisch direkter Summand X gegeben ist, lassen sich sog. kanonische Koordinaten 2. Art ganz wie im endlich dimensionalen Fall durch die Abbildung

$$\xi \to (\exp P\xi)(\exp Q\xi)$$

definieren, wenn P und Q die entsprechenden Projektionen bedeuten. Mit diesem Hilfsmittel lässt sich dann auch der Satz beweisen, dass der Faktorraum nach einer abgeschlossenen differenzierbaren Untergruppe eine Mannigfaltigkeit ist. Auf Einzelheiten gehen wir hier nicht ein, da sich der klassische Beweis (vgl. z. B. [4]) ohne weiteres übertragen lässt.

14. Vertauschbarkeit

Der folgende Satz ist eine unmittelbare Folge aus Satz 9.1.

SATZ 14.1: *Notwendig und hinreichend dafür, dass gilt*

$$\exp t\xi \exp t\eta = \exp t\eta \exp t\xi, \ -\infty < t < \infty,$$

ist $[\xi, \eta] = 0$.

Man beachte, dass dies kein Kriterium für die Vertauschbarkeit zweier beliebiger Elemente p und q ist, denn solche brauchen nicht von der Form $\exp \xi$ resp. $\exp \eta$ zu sein (auch wenn die Gruppe zusammenhängend ist) und zudem folgt aus $\exp \xi \exp \eta = \exp \eta \exp \xi$ nicht $[\xi, \eta] = 0$.

SATZ 14.2: *Ist G eine Abelsche Gruppe, so ist $S = 0$. Ist anderseits G zusammenhängend und $S = 0$, so ist G abelsch.*

Dieser Satz ist ein Korollar aus Satz 14.1.

SATZ 14.3: *Sei Z das Zentrum der Lie-Gruppe G. Dann gilt:*

1. $Z = Kern\,\mathrm{ad}$.
2. *Z ist Lie-Untergruppe von G.*
3. *Die zu Z gehörige Lie-Algebra ist*

$$\{\xi \mid \xi \in T_e,\ S_\xi = 0\}.$$

Beweis: Es ist $Z \subset \mathrm{Kern\,ad}$, denn für $q \in Z$ folgt $pq = qp$, identisch in $p \in G$, also $A(q) = B(q)$ und somit nach 11.1 $\mathrm{ad}(q) = \iota$. Anderseits folgt aus (11.5′) für $\exp \xi \in \mathrm{Kern\,ad}$ $e^{tS_\xi} = \iota$, also $S_\xi = 0$ und somit $\exp \xi \subset Z$ Da aber $\exp T_e$ eine Umgebung von e in G ist, folgt die erste Behauptung. 2. und 3. folgen daraus nach Satz 12.7 und (11.4).

Es ist zu beachten, dass $\mathrm{ad}(G)$ im Gegensatz zum endlich dimensionalen Fall keine Lie-Untergruppe von $GL(T_e)$ zu sein braucht, da $\mathrm{ad}'(e)\,T_e = \{h \mid h \in L(T_e),\ h = S_\xi,\ \xi \in T_e\}$ nicht abgeschlossen zu sein braucht in $L(T_e)$. Hingegen zeigt Satz 14.3, dass die Darstellung ad genau dann treu ist, wenn $Z = e$ gilt.

Literatur

[1]. S. BANACH, *Théorie des opérations linéaire.* Monografje Mathematyczne, Warsaw 1932.
[2]. R. C. BARTLE, On the openess and inversion of differentiable mappings. *Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I Math.*, (1958) 257.
[3]. C. CHEVALLEY, *Theory of Lie-Groups.* Princeton University Press, 1946.
[4]. P. M. COHN, *Lie Groups.* Cambridge University Press, 1957.
[5]. W. GRAEUB, Lie-Gruppen und affiner Zusammenhang. (Erscheint demnächst in den *Acta Math. Scand.*)
[6]. H. HOPF, Über den Rang geschlossener Liescher Gruppen. *Comment. Math. Helv.*, 13 (1941).
[7]. H. KELLER, Über die Differentialgleichung erster Ordnung in normierten linearen Räumen. *Rend. Circ. Math. Palermo* (1959) II, VIII.
[8]. D. LAUGWITZ, Über unendliche kontinuierliche Gruppen I. *Math. Ann.*, 130 (1955).
[9]. R. u. F. NEVANLINNA, *Absolute Analysis.* Spinger Verlag, 1959.
[10]. L. PONTRJAGIN, *Topological Groups.* Princeton University Press, 1946.

Eingegangen am 23. Februar 1962