DER SATZ VON LOOMAN-MENCHOFF UND SEINE AUSDEHNUNG AUF DEN n-DIMENSIONALEN EUKLIDISCHEN RAUM R_n.

VON

ERNST MOHR

Technische Universität, Berlin

§ 1. Vorbereitungen, Formulierung der Sätze und Beweisanordnung

Punkte des n-dimensionalen euklidischen Raumes mit den Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bezeichnen wir oft durch $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{x}_0, \ldots$. A, B, E bedeuten Punktmengen im R_n; $A \subseteq B$ bzw. $A \subset B$ haben die bekannte Bedeutung, ebenso die Zeichen $\cup$ und $\cap$ für Vereinung und Durchschnitt; $A - B$ bedeutet die Differenz der Mengen A und B; $\emptyset$ ist stets die leere Menge. Ist E beschränkt und meßbar, so bedeutet mE das Maß von E. $\mathfrak{N}$ bedeutet stets eine Menge vom Maß Null: $m\mathfrak{N} = 0$; ist $\mathfrak{N}$ in einem echten Unterraum $R_p (0 < p < n)$ von R_n enthalten, und dort vom Maß 0, so schreiben wir deutlicher $m^p \mathfrak{N} = 0$. $G, G_1, \ldots$ bedeuten stets offene Mengen, $F, F_1, \ldots$ stets Mengen, die abgeschlossen bzw. relativ zu einer offenen Menge abgeschlossen sind. I bedeutet ein Intervall: $a_\nu < x_\nu < b_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, $\bar{I}$ die Abschließung, I' den Rand; analoge Bezeichnungen werden für ein Quadrat $(Q, \overline{Q}, Q')$, Rechteck oder Würfel benutzt, von denen stets angenommen wird, daß ihre Kanten parallel zu den (festen) Koordinatenachsen sind. $\mathfrak{A}$ bedeutet bis zum Lemma 3.4. einschliesslich eine höchstens abzählbare Menge.

Funktion bedeutet stets eine endliche Funktion. Ist die Funktion

$$f = f(\mathfrak{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

n der offenen Menge G definiert, so bedeutet $f \in C^0$, daß f dort stetig ist, ebenso $f \in C^1$, daß die partiellen Ableitungen $\partial f / \partial x_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ existieren und stetig sind, $\ldots$. Existieren von einer Funktion $f = f(\mathfrak{x})$, definiert in G, lediglich die ersten Ableitungen, so schreiben wir:

$$\exists\, \partial f / \partial x_\nu \ (\nu = 1, \ldots, n) \text{ in } G.$$

3 – 622906. *Acta mathematica*. 108. Imprimé le 19 décembre 1962.

Die auftretenden Integrale sind im Lebesgueschen Sinne zu verstehen, bei Integrationen z.B. zweifachen wird das Integrationselement $dx_1\,dx_2$ oder $dx\,dy$ oft unterdrückt.

K bedeutet stets eine eine offene Kugel, $\bar{K}$ ihre Abschließung, K' ihren Rand.

DEFINITION 1.1. Sei $f(\mathfrak{x}) \in C^0$ in $\bar{K}$. Dann bedeutet $\hat{f}_K(\mathfrak{x})$ die zu f bezüglich K gehörige harmonische Funktion, welche sich ergibt, wenn man für K mit den Randwerten von f auf K' das Poissonsche Integral bildet.

Nach Carathéodory [1] gilt speziell das

LEMMA 1.1. *Aus*

1) $f = f(\mathfrak{x}) \in C^1$ *in* G,

2) $\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_\nu^2}\ (\nu = 1, 2, \ldots, n)$ *in* G,

3) $\Delta f \equiv \sum_{\nu}^{1,n} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_\nu^2} = 0$ *in* G

folgt: f ist harmonisch in G, d.h. für jede Kugel K mit $\bar{K} \subset G$ ist $f(\mathfrak{x}) = \hat{f}_K(\mathfrak{x})$.

$\{u_\nu\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ bedeutet stets ein stetiges Vektorfeld in einer offenen Menge G: $\{u_\nu\} \in C^0$ in G.

Wir beweisen in dieser Arbeit den folgenden Satz, der für $n = 2$ in den Satz von Looman-Menchoff übergeht. „Fast überall" heißt dabei, wie üblich, für alle $\mathfrak{x} \in G - \mathfrak{N}$, wo $m\mathfrak{N} = 0$ ist; der Zeigerbereich für auftretende Zeiger $\nu, \mu, \ldots$ ist stets der Bereich $1, 2, \ldots, n$, und wird, wo er sich von selbst versteht, nicht mitgeführt.

HAUPTSATZ (H_n). *Voraussetzungen:*

1) $\{u_\nu\} \in C^0$ *in* G *(offene Menge).*

2) $\exists \dfrac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu}$ *für alle* $\mathfrak{x} \in G - \mathfrak{A}\ (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n)$.

3) $\dfrac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu} - \dfrac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu} = 0$ *fast überall in* G.

4) $\sum_{\nu}^{1,n} \dfrac{\partial u_\nu}{\partial x_\nu} = 0$ *fast überall in* G.

Behauptung: $\{u_\nu\}$ ist harmonisch in G, d.h. jede Koordinate u_ν ist harmonisch in G.

Wir übernehmen von H. Weyl [6] die

DEFINITION 1.2. Voraussetzung: $\{u_\nu\} \in C^0$ in G. Dann heißt $\{u_\nu\}$ wirbelfrei in G, wenn gilt: zu jedem Punkt $\mathfrak{x}_0 \in G$ existiert eine Umgebung $U = U_{\mathfrak{x}_0}$ in Form eines

(n-dimensionalen) Würfels um $\mathfrak{x}_0$ derart, daß für jedes (zweidimensionale) Quadrat (Kanten parallel zu den Achsen!) $\overline{Q} \subset U$ die sogenannte „Umströmung" verschwindet:

$$\oint_{Q'} \sum_{\nu}^{1,n} u_\nu \, dx_\nu = 0 \quad (Q' \text{ Rand von } Q).$$

Es existiert dann in U eine Funktion $\omega(\mathfrak{x}) \in C^1$ so daß in U

$$u_\nu = \frac{\partial \omega}{\partial x_\nu} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

gilt, und von selbst ist dann das obige Linienintegral, erstreckt über irgend eine geschlossene rektifizierbare Kurve aus U, gleich Null.

Der Satz ($\mathbf{H}_n$) ist bewiesen, wenn die beiden folgenden Sätze ($\mathbf{H}_n'$) und ($\mathbf{H}_n''$) bewiesen sind, in denen G ein n-dimensionaler Würfel ist, der samt Rand in der in Satz ($\mathbf{H}_n$) mit G bezeichneten Menge liegt.

Satz ($\mathbf{H}_n'$). *Voraussetzungen:*

1) $\{u_\nu\} \in C^0$ *in* G (*n-dimensionaler Würfel*).

2) $\exists \dfrac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu}$ *für alle* $\mathfrak{x} \in G - \mathfrak{A}$ $(\nu, \mu = 1, 2, \ldots, n)$.

3) $\dfrac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu} - \dfrac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu} = 0$ *fast überall in* G.

Behauptung: $\{u_\nu\}$ *ist in* G *wirbelfrei.*

Satz ($\mathbf{H}_n''$). *Voraussetzungen:*

1) $\omega = \omega(\mathfrak{x}) \in C^0$ *in* G (*n-dimensionaler Würfel*).

2) $\exists \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial x_\nu^2}$ *für alle* $\mathfrak{x} \in G - \mathfrak{A}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$.

3) $\Delta\omega \equiv \sum\limits_{\nu}^{1,n} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial x_\nu^2} = 0$ *fast überall in* G.

Behauptung: ω *ist harmonisch in* G.

Der Satz ($\mathbf{H}_n'$) ist für $n \geqslant 3$ induktiv sofort auf den entsprechenden Satz ($\mathbf{H}_2'$) zurückführbar: ist z. B. $n = 3$, G der Würfel $-\frac{1}{2}\lambda < x_\nu < \frac{1}{2}\lambda$ $(\nu = 1, 2, 3)$ $\mathfrak{N}$ die betreffende Ausnahmemenge mit $m^3 \mathfrak{N} = 0$ und — unter Auszeichnung der dritten Achse — $\tilde{\mathfrak{N}}(\xi_3)$ der Durchschnitt von $\mathfrak{N}$ mit der Ebene $x_3 = \text{const.} = \xi_3$, so ist $m^2 \tilde{\mathfrak{N}}(\xi_3) = 0$ für alle ξ_3 mit $-\frac{1}{2}\lambda < \xi_3 < \frac{1}{2}\lambda$ bis auf eine Ausnahmemenge $\mathfrak{N}^*$ von ξ_3-Zahlen mit $m^1 \mathfrak{N}^* = 0$;

daraus und aus der Stetigkeit von $\{u_\nu\}$ folgt aber dann sofort, wenn man alle drei Achsenrichtungen berücksichtigt, daß $(\mathbf{H}_3')$ gilt, wenn $(\mathbf{H}_2')$ gilt. Es genügt daher, $(\mathbf{H}_2')$ zu beweisen.

Der Beweis für $(\mathbf{H}_n'')$ wird ebenfalls für $n=2$ durchgeführt und zwar so, daß er mit geringfügigen sinngemäßen Abänderungen für jedes n gilt.

Die allein noch zu beweisenden Sätze $(\mathbf{H}_2')$ und $(\mathbf{H}_2'')$ formulieren wir nochmals und bezeichnen dabei wie üblich die Koordinaten mit x, y, das Vektorfeld mit $\{u, v\}$. $\mathfrak{x}$ bedeutet wieder den Punkt (x, y).

Satz $(\mathbf{H}_2')$. *Voraussetzungen:*

1) $\{u, v\} \in C^0$ *in* G *(Quadrat).*

2) $\exists \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$ *für alle* $\mathfrak{x} \in G - \mathfrak{A}$.

3) $\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ *für alle* $\mathfrak{x} \in G - \mathfrak{N}$, *wo* $m\mathfrak{N} = 0\ (m = m^2)$.

Behauptung: $\{u, v\}$ *ist wirbelfrei in* G.

Satz $(\mathbf{H}_2'')$. *Voraussetzungen:*

1) $\omega = \omega(\mathfrak{x}) = \omega(x, y) \in C^1$ *in* G *(Quadrat).*

2) $\exists \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}$ *für alle* $\mathfrak{x} \in G - \mathfrak{A}$.

3) $\Delta\omega \equiv \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0$ *für alle* $\mathfrak{x} \in G - \mathfrak{N}$, *wo* $m\mathfrak{N} = 0$ $(m = m^2)$.

Behauptung: ω *ist harmonisch in* G.

In beiden Fällen wird die Behauptung mit Hilfe des nachstehenden Lemmas aus Carathéodory [2] auf eine einfachere Form gebracht.

Lemma 1.2. *Voraussetzungen:*

1) S *sei eine Menge* $\neq \emptyset$, *und* $G_k\ (k = 1, 2, \ldots)$ *eine Folge offener Mengen, deren jede überall dicht auf* S *ist.*

2) S *sei in der Form darstellbar*

$$S = \bigcap_j^{1,\infty} U,$$

wo U_j *offen.*

Behauptung: Der Durchschnitt $\bigcap_k^{1,\infty} G_k$ *ist ebenfalls überall dicht auf* S.

§ 2 enthält einen vereinfachten Beweis des Satzes ($\mathbf{H}_2'$) (Satz von Looman-Menchoff): die Vereinfachung besteht darin, daß eine von Weyl gegebene Charakterisierung eines stetigen wirbelfreien Feldes benutzt wird. § 3 bringt den Beweis für den Satz ($\mathbf{H}_2''$).

Lemmata, die bekannt sind, bzw. deren Beweis auf der Hand liegt, werden ohne Beweis mitgeteilt.

§ 2. Beweis des Satzes ($\mathbf{H}_2'$) (Satz von Looman-Menchoff)

Mit den Bezeichnungen

$$\left.\begin{aligned}\Delta_x^h u(\mathfrak{x}) &= \Delta_x^h u(x, y) = u(x+h, y) - u(x, y)\\ \Delta_y^h u(\mathfrak{x}) &= \Delta_y^h u(x, y) = u(x, y+h) - u(x, y)\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

und den analogen für v werden gewisse Teilmengen F_l (wobei ohne Einschränkung l von 1 an läuft, ($l=1, 2, \ldots$)) wie folgt definiert.

Definition 2.1. F_l besteht aus den Punkten $\mathfrak{x}=(x, y) \in G$, welche die Eigenschaft haben:

$$\left\{\begin{matrix}|\Delta_x^h u(\mathfrak{x})|, & |\Delta_y^h u(\mathfrak{x})|\\ |\Delta_x^h v(\mathfrak{x}), & \Delta_y^h v(\mathfrak{x})|\end{matrix}\right\} \leqslant l|h| \text{ für alle } h \text{ mit } |h| \leqslant 1/l \quad (l=1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Wegen Voraussetzung 1) im Satz ($\mathbf{H}_2'$) ist F_l relativ zu G abgeschlossenen. Wegen Voraussetzung 2) ist

$$G - \mathfrak{A} \subseteq \bigcup_l^{1,\infty} F_l \subseteq G, \text{ also mit } \mathfrak{A} = \{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots\}$$

$$G = \bigcup_l^{1,\infty} [F_l \cup \{\mathfrak{a}_l\}]. \tag{3}$$

2.1. I sei ein Intervall, das durch eine Parallele zur x-Achse (bzw. y-Achse) in zwei Intervalle I_1 und I_2 zerlegt werde. Aus 1) $\{u, v\} \in C^0$ in I; 2) $\{u, v\}$ wirbelfrei in I_1; 3) $\{u, v\}$ wirbelfrei in I_2, folgt: $\{u, v\}$ wirbelfrei in I.

Definition 2.2. $\{u, v\}$ heißt im Punkte $\mathfrak{x}_0 \in G$ wirbelfrei, wenn $\{u, v\}$ in einer Umgebung $U_{\mathfrak{x}_0}$ um $\mathfrak{x}_0$ gemäß Definition 1.2. (für $n=2$) wirbelfrei ist. $\hat{G}$ sei die Menge der $\mathfrak{x} \in G$, in denen $\{u, v\}$ wirfelfrei ist. Falls $\hat{G} \neq \emptyset$, so ist $\hat{G}$ offen.

F sei die Menge der Punkte aus G, in denen $\{u, v\}$ nicht wirbelfrei ist.

Zu zeigen ist: F ist leer, d. h. $\hat{G}=G$. Der Beweis wird indirekt geführt, und also angenommen;

$$F \neq \emptyset. \tag{4}$$

2.2. F ist relativ zu G abgeschlossen, und enthält wegen 2.1. keine isolierten Punkte.

Erster Schritt

Behauptung: Es existiert ein Punkt $\mathfrak{x}_0 \in F$, *eine quadratische Umgebung* $U_{\mathfrak{x}_0}$ *um* $\mathfrak{x}_0$ *mit* $U_{\mathfrak{x}_0} \subset G$ *und eine natürliche Zahl L, so daß gilt*

$$U_{\mathfrak{x}_0} \cap F \subseteq F_L \cup \{\mathfrak{a}_L\}. \tag{5}$$

Beweis indirekt. CE bedeute die Bildung des Komplements einer Menge E, $C_G E$ die Menge $CE \cap G$. Das Gegenteil der Behauptung besagt: für jedes $\mathfrak{x} \in F$, jede (quadratische) Umgebung $U_{\mathfrak{x}} \subset G$ um $\mathfrak{x}$ und jede natürliche Zahl l gilt

$$(U_{\mathfrak{x}} \cap F) \cap C_G[F_l \cup \{\mathfrak{a}_l\}] \neq \emptyset. \tag{6}$$

$$G_l = C_G[F_l \cup \{\mathfrak{a}_l\}] = C[F_l \cup \{\mathfrak{a}_l\}] \cap G$$

ist offen. (6) sagt dann aus: G_l ist überall dicht auf F, wo $F \neq \emptyset$. Wegen 2.2. gilt eine Darstellung $F = \bigcap_j^{1,\infty} U_j$, U_j offen. Nach Lemma 1.2. ist also $\bigcap_l^{1,\infty} G_l$ überall dicht auf F und speziell

$$\bigcap_l^{1,\infty} G_l \neq \emptyset. \tag{7}$$

Anderseits gilt (3), woraus folgt

$$CG = \bigcap_l^{1,\infty} C[F_l \cup \{\mathfrak{a}\}]$$

$$\emptyset = CG \cap G = \left\{ \bigcap_l^{1,\infty} C\,[F_l \cup \{\mathfrak{a}_l\}] \right\} \cap G$$

$$= \bigcap_l^{1,\infty} \{C\,[F_l \cup \{\mathfrak{a}_l\}] \cap G\} = \bigcap_l^{1,\infty} G_l$$

im Widerspruch zu (7).

Zwei Fälle in (5) sind jetzt möglich.

Erster Fall: $\mathfrak{x}_0 \neq \mathfrak{a}_L$. Dann ist $U_{\mathfrak{x}_0}$ so wählbar, daß $\mathfrak{a}_L \notin U_{\mathfrak{x}_0}$ und es folgt

$$U_{\mathfrak{x}_0} \cap F \subseteq F_L \quad (\mathfrak{x}_0 \in F).$$

Zweiter Fall: $\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{a}_L$. Da $\mathfrak{x}_0 \in F$ und F nach 2.2. keine isolierten Punkte enthält, so existiert ein $\mathfrak{x}_0^* \neq \mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{x}_0^* \in U_{\mathfrak{x}_0} \cap F$ und eine (quadratische) Umgebung $U_{\mathfrak{x}_0^*} \subset U_{\mathfrak{x}_0}$ um $\mathfrak{x}_0^*$ mit $\mathfrak{x}_0 \notin U_{\mathfrak{x}_0}$. Es ist dann

$$U_{\mathfrak{x}_0^*} \cap F \subseteq F_L \quad (\mathfrak{x}_0^* \in F).$$

In beiden Fällen kann die Kantenlänge λ von $U_{\mathfrak{x}_0}$ bzw. $U_{\mathfrak{x}_0^*}$ als $< 1/2L \leqslant 1/2$ gewählt werden. In neuer Schreibung ergibt sich so

2.3. *Es existiert ein $\mathfrak{x}_0 \in F$, ein Quadrat $\mathfrak{Q}$ um $\mathfrak{x}_0$ mit der Kantenlänge $\lambda < 1/2L \leqslant 1/2$, so daß mit den Abkürzungen*

$$\mathfrak{Q} \cap F = \mathfrak{F}, \quad \mathfrak{Q} \cap F_L = \mathfrak{F}_L,$$

gilt:

$$\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_L \subseteq \mathfrak{Q}, \quad \mathfrak{F} \neq \emptyset. \tag{8}$$

Dabei ist $\mathfrak{F}$ nach 2.2. relativ zu $\mathfrak{Q}$ abgeschlossen.

Zweiter Schritt

Lemma 2.4 stammt von H. Weyl [6], zusammen mit der

Definition 2.3. $\mathfrak{G}$ sei eine offene Menge; dann bedeutet $\Gamma(\mathfrak{G})$ die Klasse aller Funktionen φ in $\mathfrak{G}$ mit der Eigenschaft: $\varphi \in C^1$ in $\mathfrak{G}$ und $\varphi = 0$ in einem Randstreifen von $\mathfrak{G}$, d. h. außerhalb eines (beschränkten) Kompaktums von $\mathfrak{G}$.

Lemma 2.6 steht bei Saks [4], ebenso das aus ihm folgende Lemma 2.7.

Lemma 2.4. *Ist $\{u, v\} \in C^0$ in G und*

$$\iint_G \left(v \frac{\partial \varphi}{\partial x} - u \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = 0 \quad \textit{für alle} \quad \varphi \in \Gamma(G),$$

so ist $\{u, v\}$ wirbelfrei in G.

2.5. *Aus $\{u, v\} \in C^0$ in einem abgeschlossenen Rechteck $\bar{R}$ und $\{u, v\}$ wirbelfrei in R, folgt für jede Funktion $\psi(\mathfrak{x}) \in C^1$ in $\bar{R}$ (R' Rand von R)*

$$\iint_R \left(v \frac{\partial \psi}{\partial x} - u \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \oint_{R'} \psi \, (u dx + v dy).$$

Lemma 2.6. *Es sei $g(x)$ eine Funktion von x in $a \leqslant x \leqslant b$, $a < b$, die fast überall differenzierbar ist. $F_1 \neq \emptyset$ sei eine abgeschlossene Menge in $\langle a, b \rangle$, und $C > 0$ eine Konstante, so daß gilt*

$$|g(x_2) - g(x_1)| \leqslant C \, |x_2 - x_1|$$

für alle $x_1 \in F_1$ und alle $x_2 \in \langle a, b \rangle$. Dann gilt

$$\left| \{g(b) - g(a)\} - \int_{F_1} dx \cdot g'(x) \right| \leqslant C \, \{(b-a) - mF_1\}; \quad (m = m^1).$$

LEMMA 2.7. *Es sei $g(x, y)$ eine Funktion von (x, y) in einem abgeschlossenen Quadrat $\overline{Q}$, deren partielle Ableitungen $\partial g/\partial x$, $\partial g/\partial y$ in jedem Punkt $(x, y) \in Q$, abgesehen von den Punkten einer abzählbaren Menge existieren. $F_2 \neq \emptyset$ sei eine abgeschlossene Menge in $\overline{Q}$ und $C > 0$ eine Konstante, so daß gilt*

$$|g(x_2, y_1) - g(x_1, y_1)| \leqslant C|x_2 - x_1|$$
$$|g(x_1, y_2) - g(x_1, y_1)| \leqslant C|y_2 - y_1|$$

für alle $(x_1, y_1) \in F_2$, $(x_2, y_1) \in \overline{Q}$, $(x_1, y_2) \in \overline{Q}$.

Ist dann $\bar{I} : a_1 \leqslant x \leqslant a_2$, $b_1 \leqslant y \leqslant b_2$ das kleinste F_2 enthaltende abgeschlossene Intervall (das auch entartet sein kann), so gilt ($m = m^2$, I' der Rand von I)

$$\left| \oint_{I'} dy \cdot g - \iint_{F_2} \frac{\partial g}{\partial x} \right| \leqslant 5C \cdot \{mQ - mF_2\} \tag{9}$$

$$\left| \oint_{I'} dx \cdot g + \iint_{F_2} \frac{\partial g}{\partial y} \right| \leqslant 5C \cdot \{mQ - mF_2\}. \tag{10}$$

Wir zeigen jetzt mit Hilfe des Lemmas 2.4, daß $\{u, v\}$ in $\mathfrak{Q}$ wirbelfrei ist, im Widerspruch zu der Tatsache, daß nach (8) $\mathfrak{F} = F \cap \mathfrak{Q} \neq \emptyset$ ist. Durch diesen Widerspruch ist dann die Annahme (4) ad absurdum geführt und der Satz ($\mathbf{H}_2'$) bewiesen.

Sei im Sinne der Definition 2.3 $\varphi \in \Gamma(\mathfrak{Q})$ beliebig und dann fest. Wir setzen

$$u(\mathfrak{x})\,\varphi(\mathfrak{x}) = U(\mathfrak{x}), \quad v(\mathfrak{x})\,\varphi(\mathfrak{x}) = V(\mathfrak{x}) \tag{11}$$

$$M = \max\left\{|u|, |v|, |\varphi|, \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right|\right\} \quad \text{für} \quad \mathfrak{x} \in \overline{\mathfrak{Q}}. \tag{12}$$

Mit $L^* = LM + M^2$ gelten dann, da $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_L$ für $\mathfrak{x} \in \overline{\mathfrak{F}}$ die zu (2) analogen Beziehungen für $\{U, V\}$:

$$\left\{\begin{matrix} |\Delta_x^h U(\mathfrak{x})|, |\Delta_y^h U(\mathfrak{x})| \\ |\Delta_x^h V(\mathfrak{x})|, |\Delta_y^h V(\mathfrak{x})| \end{matrix}\right\} \leqslant L^*|h| \text{ für alle } h \text{ mit } |h| \leqslant 1/L \text{ und alle } \mathfrak{x} \in \overline{\mathfrak{F}}. \tag{13}$$

Sei jetzt $\varepsilon > 0$ beliebig und fest, und $\delta > 0$ gemäß

$$\varepsilon = (10\,L^* + 2\,M^2) \cdot \delta \tag{14}$$

festgelegt.

Wir teilen die Kanten $\overline{\mathfrak{Q}}$ durch fortgesetzte Halbierung in 2^k gleiche Teile und behalten in der dadurch gegebenen Rasterung von $\overline{\mathfrak{Q}}$ die abgeschlossenen Quadrate

$\bar{Q}_\nu$ (ihre Anzahl sei r) bei, welche Punkte von $\bar{\mathfrak{F}}$ enthalten. Da $\bar{\mathfrak{F}}$ abgeschlossen ist, kann k so gewählt werden, daß

$$\bar{\mathfrak{F}} \subseteq \bigcup_{\nu}^{1,r} \bar{Q}_\nu \subseteq \bar{\mathfrak{Q}}, \qquad \begin{array}{l} Q_\nu \cap Q_{\nu'} = \emptyset \quad \text{für} \quad \nu \neq \nu' \\ \bar{\mathfrak{F}}_\nu \cap \bar{Q}_\nu \neq \emptyset \end{array}$$

$$\sum_{\nu}^{1,r} m\, Q_\nu \leqslant m\, \mathfrak{F} + \delta$$

wird. Mit

$$\mathfrak{F}_\nu = Q_\nu \cap \mathfrak{F}$$

ist dann auch

$$\sum_{\nu}^{1,\nu} \{m\, Q_\nu - m\, \mathfrak{F}_\nu\} \leqslant \delta. \tag{15}$$

$\bar{I}_\nu$ sei das kleinste abgeschlossene Intervall in $\bar{Q}_\nu$, das $\bar{\mathfrak{F}}_\nu$ enthält. Auf $\bar{Q}_\nu$, $\bar{\mathfrak{F}}_\nu$, $U(\mathfrak{x})$, $V(\mathfrak{x})$ ist dann 2.6. mit $C = L^*$ anwendbar, und es ergibt sich durch Addition von (9), angewandt auf V, und (10), angewandt auf U:

$$\left| \oint_{I'_\nu} (U dx + V dy) - \iint_{\mathfrak{F}_\nu} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right| \leqslant 10\, L^* \cdot \{m\, Q_\nu - m\, \mathfrak{F}_\nu\}. \tag{16}$$

Auf $\mathfrak{F}_\nu$ gilt — man beachte (11) — bis auf die Stellen von $\mathfrak{A}$

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = \varphi \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + v \frac{\partial \varphi}{\partial x} - u \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Weiter ist fast überall auf $\mathfrak{F}_\nu$ nach Voraussetzung 3) von $(\mathbf{H}_2')$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

und somit

$$\iint_{\mathfrak{F}_\nu} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) = \iint_{\mathfrak{F}_\nu} \left(v \frac{\partial \varphi}{\partial x} - u \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right).$$

Damit lautet (16)

$$\left| \oint_{I'_\nu} \varphi(u\, dx + v\, dy) - \iint_{\mathfrak{F}_\nu} \left(v \frac{\partial \varphi}{\partial x} - u \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \right| \leqslant 10\, L^* \cdot \{m\, Q_\nu - m\, \mathfrak{F}_\nu\}. \tag{17}$$

Die Vereinigung der kohärent im positiven Sinne orientierten Intervalle $\bar{I}_\nu$ liefert einen orientierten Rand, dessen in $\mathfrak{Q}$ verlaufender Teil $\mathfrak{R}$ heiße. Summation von (17) über ν und Beachtung, daß $\varphi = 0$ auf $\mathfrak{Q}'$, liefert wegen (15)

$$\left| \oint_{\mathfrak{R}} \varphi(u\, dx + v\, dy) - \iint_{\mathfrak{F}} \left(v \frac{\partial \varphi}{\partial x} - u \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \right| \leqslant 10\, L^*\, \delta. \tag{18}$$

Denken wir uns die $\bar{I}_\nu \cap \mathfrak{Q}$ aus $\mathfrak{Q}$ ausgestanzt, so verbleibt eine offene Menge H ($H = \emptyset$ zugelassen), in welcher $\{u, v\}$ wirbelfrei ist. Verlängern wir jede Kante von I_ν durch $\mathfrak{Q}$, so erscheint H in endlich viele Rechtecke $R_\mu (\mu = 1, \ldots, s)$ zerlegt, deren jedes wieder positiv orientiert gedacht ist. Die Vereinigung der kohärent orientierten Rechtecke R_μ liefert einen orientierten Rand, dessen in $\mathfrak{Q}$ verlaufender Teil $\mathfrak{S}$ heiße. Anwendung von 2.5. auf $\bar{R}_\mu$, $\{u, v\}$ und φ ergibt

$$\oint_{R'_\mu} \varphi(u\,dx + v\,dy) = \iint_{R_\mu} \left(v \frac{\partial \varphi}{\partial x} - u \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right).$$

Summation über μ ergibt, weil $\varphi = 0$ auf $\mathfrak{Q}'$

$$\oint_{\mathfrak{S}} \varphi(u\,dx + v\,dy) = \iint_H \left(v \frac{\partial \varphi}{\partial x} - u \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right). \tag{19}$$

Infolge der kohärenten Orientierung aller soeben benutzten Rechtecke ist

$$\oint_{\mathfrak{S}} \varphi(u\,dx + v\,dy) = -\oint_{\mathfrak{R}} \varphi(u\,dx + v\,dy). \tag{20}$$

Weiter ist wegen $$\iint_{I_\nu} = \iint_{\mathfrak{F}_\nu} + \iint_{I_\nu - \mathfrak{F}_\nu}$$

und wegen (12) $$\left|\iint_{I_\nu - \mathfrak{F}_\nu} \left(v \frac{\partial \varphi}{\partial x} - u \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\right| \leqslant 2\,M^2 \cdot \{m\,Q_\nu - m\,\mathfrak{F}_\nu\}.$$

Summation über $\nu = 1, 2, \ldots, r$ liefert wegen (15)

$$\left|\sum_\nu^{1,r} \iint_{I_\nu} \left(v \frac{\partial \varphi}{\partial x} - u \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) - \iint_{\mathfrak{F}} \left(v \frac{\partial \varphi}{\partial x} - u \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\right| \leqslant 2\,M^2\,\delta. \tag{21}$$

Schließlich gilt

$$\iint_{\mathfrak{Q}} \left(v \frac{\partial \varphi}{\partial x} - u \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = \sum_\nu^{1,r} \iint_{I_\nu} \left(v \frac{\partial \varphi}{\partial x} - u \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \iint_H \left(v \frac{\partial \varphi}{\partial x} - u \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right). \tag{22}$$

Aus (22), (21), (18) sowie (19) und (20) folgt, wenn noch (14) beachtet wird:

$$\left|\iint_{\mathfrak{Q}} \left(v \frac{\partial \varphi}{\partial x} - u \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\right| \leqslant (10\,L^* + 2\,M^2)\,\delta = \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ war beliebig, somit

$$\iint_{\mathfrak{Q}} \left(v \frac{\partial \varphi}{\partial x} - u \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = 0.$$

$\varphi \in \Gamma(\mathfrak{Q})$ war beliebig, somit

$$\iint_{\mathfrak{Q}} \left(v \frac{\partial \varphi}{\partial x} - u \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in \Gamma(\mathfrak{Q});$$

gemäß 2.4. ist also $\{u, v\}$ wirbelfrei in $\mathfrak{Q}$.

§ 3. Beweis des Satzes $(\mathbf{H}_2'')$

Unter denselben Voraussetzungen wie am Anfang von § 2 beginnen wir mit der Definition von Mengen $F_l (l = 1, 2, \ldots)$ und F, welche die Rolle der gleichbenannten früheren Mengen jetzt übernehmen.

Definition 3.1. F_l besteht aus den Punkten $\mathfrak{x} = (x, y) \in G$, welche die Eigenschaft haben:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \Delta_x^h \dfrac{\partial \omega}{\partial x} \right| \\ \left| \Delta_y^h \dfrac{\partial \omega}{\partial y} \right| \end{array} \right\} \leqslant l |h| \quad \text{für alle } h \text{ mit } |h| \leqslant 1/l \quad (l = 1, 2, \ldots). \tag{23}$$

Ist auch jetzt $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots\}$, so gilt wieder (3) und es ist wieder F_l relativ zu G abgeschlossen.

Definition 3.2. $\omega = \omega(\mathfrak{x}) = \omega(x, y)$, wo $\omega(\mathfrak{x}) \in C^1$ in G, heißt im Punkte $\mathfrak{x}_0 \in G$ harmonisch, wenn folgendes gilt: es existiert eine quadratische Umgebung $U_{\mathfrak{x}_0}$ um $\mathfrak{x}_0$ mit der Eigenschaft, daß in jedem Punkt $\mathfrak{x} \in U_{\mathfrak{x}_0}$ die zweiten Ableitungen $\partial^2\omega/\partial x^2$, $\partial^2\omega/\partial y^2$ existieren und $\Delta\omega \equiv \partial^2\omega/\partial x^2 + \partial^2\omega/\partial y^2 = 0$ ist. $\hat{G}$ sei die Menge der $\mathfrak{x} \in G$, in denen ω harmonisch ist. Falls $\hat{G} \neq \varnothing$, ist $\hat{G}$ offen. Auf Grund von Lemma 1.1 ist diese Definition berechtigt.

F sei die Menge der Punkte aus G, in denen ω nicht harmonisch ist. Ist $F \neq \varnothing$, $\mathfrak{x} \in F$, so bedeutet das: in jeder Umgebung $U_{\mathfrak{x}}$ um $\mathfrak{x}$ existiert ein Punkt, in welchem entweder eine der Ableitungen $\partial^2\omega/\partial x^2$, $\partial^2\omega/\partial y^2$ nicht existiert (der betreffende Punkt gehört dann zur Ausnahmemenge $\mathfrak{A}$) oder, falls sie beide existieren, $\Delta\omega \neq 0$ ist.

Da eine beschränkte harmonische Funktion keine isolierte Singularität besitzen kann, da ferner F relativ zu G abgeschlossen ist, so hat man

3.1. *F ist relativ zu G abgeschlossen und besitzt keine isolierten Punkte.*

Die Behauptung besagt dann, daß F leer, und also $\hat{G} = G$ ist. Der Beweis wird indirekt geführt, und also angenommen:

$$F \neq \varnothing. \tag{24}$$

Erster Schritt

Dieser Schritt vollzieht sich jetzt wörtlich wie in § 2, und wir erhalten daher für unsere jetzigen Mengen F_l und F genau das frühere Ergebnis 2.3.

3.2. *Es existiert ein* $\mathfrak{x}_0 \in F$, *ein Quadrat* $\mathfrak{Q}$ *um* $\mathfrak{x}_0$ *mit der Kantenlänge* $\lambda < 1/2L \leqslant 1/2$, *so daß mit den Abkürzungen*

$$\mathfrak{Q} \cap F = \mathfrak{F}, \quad \mathfrak{Q} \cap F_L = \mathfrak{F}_L$$

gilt:

$$\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_L \subseteq \mathfrak{Q}, \quad \mathfrak{F} = \emptyset.$$

Aus $m\mathfrak{F} = m\mathfrak{Q}$ folgte $\mathfrak{F} = \mathfrak{Q}$, also $\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{F}_L$ und daraus mittels des Satzes von Fubini sofort, daß ω in $\mathfrak{Q}$ harmonisch, also $\mathfrak{F} = \emptyset$ ist, im Widerspruch zu $\mathfrak{F} \neq \emptyset$. Es ist also $m\mathfrak{F} < m\mathfrak{Q}$, also $\mathfrak{Q} - \mathfrak{F} = \mathfrak{G} \neq \emptyset$ und offen.

3.3. *Es ist*

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q} = \mathfrak{G} \cup \mathfrak{F}, \quad & \mathfrak{G} \text{ offen} \\ & \mathfrak{F} \text{ relativ zu } \mathfrak{Q} \text{ abgeschlossen} \\ & \mathfrak{G} \neq \emptyset, \ \mathfrak{F} \neq \emptyset \\ & \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_L \\ & \omega \text{ harmonisch in } \mathfrak{G}. \end{aligned}$$

Zweiter Schritt

Dieser Schritt geschieht in vier Teilschritten I, II, III, IV mit dem Ergebnis: ω ist harmonisch in $\mathfrak{Q}$ im Widerspruch zu der Tatsache, daß nach (25) $\mathfrak{F} \neq \emptyset$ ist. Durch diesen Widerspruch ist dann die Annahme (24) ad absurdum geführt und der Satz ($\mathbf{H}_2''$) bewiesen.

Teilschritt I. Ist $f(x, y) \in C^0$ in einer offenen Kreisscheibe K, so bedeute $\overline{D}_x f(x, y)$ die rechtsseitige Oberderivierte bezüglich x bei festem y und analog $\overline{D}_y f(x, y)$ die rechtsseitige Oberderivierte bezüglich y bei festem x. Entsprechend sind die Ausdrücke $\underline{D}_x f(x, y)$ und $\underline{D}_y f(x, y)$ als rechtsseitige Unterderivierte zu verstehen.

Definition 3.3. Für eine Funktion $f(\mathfrak{x}) = f(x, y) \in C^1$ in K definieren wir die Operatoren

$$\left.\begin{aligned} \bar{\theta} f &= \overline{D}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \overline{D}_y \frac{\partial f}{\partial y} \\ \underline{\theta} f &= \underline{D}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \underline{D}_y \frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Existieren an der betreffenden Stelle die Ableitungen $\partial^2 f/\partial x^2$, $\partial^2 f/\partial y^2$, so ist dort $\bar{\theta} f = \underline{\theta} f = \Delta f$ (Laplacescher Ausdruck). Es ist

$$\underline{\theta} f = -\bar{\theta}\{-f\}$$

$$\bar{\theta}\{f+g\} = \bar{\theta} f + \bar{\theta} g = \bar{\theta} f + \Delta g,$$

falls $\partial^2 g/\partial x^2$, $\partial^2 g/\partial y^2$ existieren.

Erinnern wir uns an die Bedeutung der Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{N}$ und beachten ferner die Definition 3.1. für den Spezialfall $l = L$, so gilt:

3.4. *In dem Quadrat* $\mathfrak{Q}$ *von* 3.3. *ist*

1) $\underline{\theta}\omega = \bar{\theta}\omega = \Delta\omega$ *für alle* $\mathfrak{x} \in \mathfrak{Q} - \mathfrak{A}$.

2) $\underline{\theta}\omega = \bar{\theta}\omega = \Delta\omega = 0$ *für alle* $\mathfrak{x} \in \mathfrak{Q} - \mathfrak{N}$, *wo* $m\mathfrak{N} = 0$.

3) $-2L \leqslant \underline{\theta}\omega \leqslant \bar{\theta}\omega \leqslant 2L$ *für alle* $\mathfrak{x} \in \mathfrak{F}$.

4) ω *harmonisch in* $\mathfrak{Q}$.

Leicht einzusehen ist auch

3.5. *Die Funktionen* $\bar{\theta}\omega$ *und* $\underline{\theta}\omega$ *gehören zur ersten Klasse von Baire in* $\mathfrak{Q}$.

Ist $\mathfrak{P}$ eine perfekte Menge mit $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{Q} \neq \emptyset$, so gehören $\bar{\theta}\omega$, $\underline{\theta}\omega$, als Funktionen auf $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{Q}$ aufgefaßt, wieder zur ersten Klasse von Baire und es besitzen nach einem bekannten Satz von Baire $\bar{\theta}\omega$, $\underline{\theta}\omega$ Stetigkeitspunkte auf $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{Q}$, die auf $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{Q}$ überall dicht liegen. Wir notieren für später die spezielle Aussage:

3.6. *Ist* $\mathfrak{P}$ *eine perfekte Menge mit* $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{Q} \neq \emptyset$, *so besitzt* $\bar{\theta}\omega$, *aufgefaßt als Funktion auf* $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{Q}$, *einen Stetigkeitspunkt auf* $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{Q}$; *ebenso* $\underline{\theta}\omega$.

Teilschritt II. Es sei K eine Kreisscheibe vom Radius a, wo $0 < a < \frac{1}{2}$ und

$$K = A \cup B,$$

wo A offen, B relativ abgeschlossen, und $mB = 0$.

Dann gilt der folgende Satz, in welchem L eine Konstante > 0 ist, die später mit dem L aus 3.4. identifiziert wird, $\varepsilon > 0$ ein Parameter, der bereits genügend klein gedacht ist, und $\psi_\varepsilon(\mathfrak{x})$ eine von dem Parameter ε abhängende Funktion ist:

Satz 3.7. *Zu jedem* $\varepsilon > 0$ *existiert in* K *eine Funktion* $\psi_\varepsilon(\mathfrak{x}) = \psi_\varepsilon(x, y)$ *mit den Eigenschaften:* $\psi_\varepsilon(\mathfrak{x}) \in C^0$ *in* $\bar{K}$, $\psi_\varepsilon(\mathfrak{x}) \in C^2$ *in* K *und*

$$\begin{aligned}
\Delta\psi_\varepsilon(\mathfrak{x}) = \varrho_\varepsilon(\mathfrak{x}), \quad \textit{wo } \varrho_\varepsilon(\mathfrak{x}) &> 2L + \varepsilon && \textit{für} \quad \mathfrak{x} \in B,\\
\varrho_\varepsilon(\mathfrak{x}) &> \varepsilon && \textit{für} \quad \mathfrak{x} \in A,\\
|\psi_\varepsilon(\mathfrak{x})| &< h(\varepsilon) && \textit{für} \quad \mathfrak{x} \in \bar{K},\\
\lim h(\varepsilon) &= 0 && \textit{für} \quad \varepsilon \to 0.
\end{aligned}$$

Beweis: Wir unterdrücken beim Beweis den Suffix ε in $\psi_\varepsilon(\mathfrak{x})$ und $\varrho_\varepsilon(\mathfrak{x})$ und schreiben kurz $\psi(\mathfrak{x})$ und $\varrho(\mathfrak{x})$. $\hat{K}$ mit dem Radius $\hat{a}$ sei konzentrisch zu K und $0<a<\hat{a}<\frac{1}{2}$. Ferner sei $0<\varepsilon<\varepsilon_0=\hat{a}-a$. Alsdann existieren, wie leicht zu sehen, abgeschlossene Mengen B, $\hat{\mathrm{B}}$ in $\hat{K}$ mit

$$B\subset \mathrm{B}\subset\hat{\mathrm{B}},\quad m\hat{\mathrm{B}}<\pi\varepsilon^2,\quad \mathrm{B}\cap\hat{\mathrm{B}}'=\emptyset$$

und eine stetige Funktion $\mathrm{P}(\mathfrak{x})$ auf $\hat{\mathrm{B}}$ mit

$$0\leqslant \mathrm{P}(\mathfrak{x})\leqslant 1,\quad \mathrm{P}(\mathfrak{x})=1 \text{ für } \mathfrak{x}\in\mathrm{B},\ \mathrm{P}(\mathfrak{x})=0 \text{ für } \mathfrak{x}\in\hat{\mathrm{B}}' \text{ (Rand von } \hat{\mathrm{B}}).$$

Ist $\bar{Q}$ ein abgeschlossenes Quadrat mit $\hat{K}\subseteq\bar{Q}$, so werde $\mathrm{P}(\mathfrak{x})$ auf $\bar{Q}$ durch $\mathrm{P}(\mathfrak{x})=0$ für $\mathfrak{x}\in\bar{Q}-\hat{\mathrm{B}}$ stetig ausgedehnt. Nach Weierstraß existiert in $\bar{Q}$ ein Polynom $p(\mathfrak{x})$ mit

$$|p(\mathfrak{x})-2L\,\mathrm{P}(\mathfrak{x})|<\tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Die Funktion

$$\varrho(\mathfrak{x})=p(\mathfrak{x})+\tfrac{3}{2}\varepsilon$$

hat dann die Eigenschaften

$$\left.\begin{aligned} 2L+\varepsilon<\varrho(\mathfrak{x})&<2L+2\varepsilon && \text{für } \mathfrak{x}\in\mathrm{B}\\ \varepsilon<\varrho(\mathfrak{x})&<2L+2\varepsilon && \text{für } \mathfrak{x}\in\hat{\mathrm{B}}-\mathrm{B}\\ \varepsilon<\varrho(\mathfrak{x})&<2\varepsilon && \text{für } \mathfrak{x}\in\bar{Q}-\hat{\mathrm{B}}.\end{aligned}\right\}\tag{27}$$

Mit $\varrho(\mathfrak{x})=\varrho(x,y)$ als Belegungsdichte bilden wir das Potential $(r=\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\}^{\frac{1}{2}})$

$$\psi(x,y)=\frac{1}{2\pi}\iint_{\hat{K}}d\xi\,d\eta\,\varrho(\xi,\eta)\log r.\tag{28}$$

Für $\mathfrak{x}\in\hat{K}$ ist $\psi(\mathfrak{x})\in C^2$ und

$$\Delta\psi(\mathfrak{x})=\varrho(\mathfrak{x})>\varepsilon>0 \quad \text{für} \quad \mathfrak{x}\in\hat{K}.\tag{29}$$

Wir zerlegen das Potential $\psi(\mathfrak{x})$ in die zwei Beiträge

$$\psi_1(\mathfrak{x})=\frac{1}{2\pi}\iint_{\hat{K}-\hat{\mathrm{B}}}d\xi\,d\eta\,\varrho(\xi,\eta)\log r$$

$$\psi_2(\mathfrak{x})=\frac{1}{2\pi}\iint_{\hat{\mathrm{B}}}d\xi\,d\eta\,\varrho(\xi,\eta)\log r;$$

wir beachten noch, daß wegen $2\hat{a}<1$ und $\varrho(\mathfrak{x})>0$ die Funktionen ψ_1, ψ_2 und ψ alle <0 für $\mathfrak{x}\in\hat{K}$ sind.

Von jetzt ab beschränken wir den Aufpunkt $\mathfrak{x}=(x,y)$ in (28) auf K. Es ist dann nach (27)

$$|\psi_2(\mathfrak{x})| < (2L+2\varepsilon)\frac{1}{2\pi}\iint_{\hat{B}} d\xi\, d\eta \log\frac{1}{r}$$

und weiter das betreffende Integral nach einer klassischen Abschätzung von E. Schmidt [5]:

$$< \frac{\pi\varepsilon^2}{2}[1-\log\varepsilon^2].$$

Somit $$|\psi_2(\mathfrak{x})| < (2L+2\varepsilon)\frac{1}{2\pi}\frac{\pi\varepsilon^2}{2}[1-\log\varepsilon^2] \quad \text{für} \quad \mathfrak{x}\in K.$$

Für $\psi_1(\mathfrak{x})$ gilt nach (27)

$$|\psi_1(\mathfrak{x})| < 2\varepsilon\frac{1}{2\pi}\iint_{\hat{K}-\hat{B}} d\xi\, d\eta \log\frac{1}{r} < 2\varepsilon\frac{1}{2\pi}\iint_{\hat{K}} d\xi\, d\eta \log\frac{1}{r},$$

wo das letzte Integral wieder nach E. Schmidt $\leqslant \frac{1}{2}\pi\hat{a}^2[1-\log\hat{a}^2] = M > 0$ ist. Somit

$$|\psi_1(\mathfrak{x})| < 2\varepsilon\cdot\frac{1}{2\pi}M \quad \text{für} \quad \mathfrak{x}\in K.$$

Setzt man $$h(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi}\left\{2\varepsilon M + (2L+2\varepsilon)\frac{\pi\varepsilon^2}{2}[1-\log\varepsilon^2]\right\},$$

wo $\lim h(\varepsilon) = 0$ für $\varepsilon\to 0$, so ergibt sich die Behauptung 3.7.

Teilschritt III. Wir erinnern an die Definition 3.3 und konstatieren (K wie immer eine Kreisscheibe)

3.8. *Aus*

1) $f(x, y)\in C^0$ *in* $\bar{K}$;

2) $f(x, y)\in C^1$ *in* K;

3) $f(x, y)\geqslant f(\xi, \eta)$ *für festes* $(\xi, \eta)\in K$ *folgt:*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \bar{\theta} f \geqslant 0 \quad in \quad (x, y) = (\xi, \eta).$$

3.9. *Aus*

1) $f = f(\mathfrak{x})\in C^0$ *in* $\bar{K}$;

2) $f\in C^1$ *in* K;

3) $f = 0$ *auf* K' (*Rand von* K) *und*

4) $\bar{\theta} f < 0$ *in* K, *folgt:*

$$f \geqslant 0 \quad in \quad \bar{K}.$$

Für die folgende Definition vergleiche man F. Riesz [3].

Definition 3.4. Sei $H \neq \emptyset$ eine offene Menge und die Funktion $f = f(\mathfrak{x}) \in C^0$ in H. $f(\mathfrak{x})$ heisst in H superharmonisch, wenn zu jedem $\mathfrak{x} \in H$ eine Umgebung $U_{\mathfrak{x}}$ existiert mit folgender Eigenschaft: für jede Kreisscheibe K um $\mathfrak{x}$ mit $\bar{K} \subset U_{\mathfrak{x}}$ gilt: $f(\mathfrak{x}) \geqslant \hat{f}_K(\mathfrak{x})$.

Ist $a > 0$ der Radius von K, $(f)_0$ der Wert von $f(\mathfrak{x})$ im Mittelpunkt, so ist

$$(f)_0 \geqslant \frac{1}{\pi a^2} \iint_K dx\, dy\, f(x, y). \tag{30}$$

In den zwei folgenden Lemmata ist für die Kreisscheibe K eine Zerlegung $K = A \cup B$, A offen und B relativ abgeschlossen, zugrundegelegt.

Lemma 3.10. *Aus*

1) $f = f(\mathfrak{x}) \in C^0$ *in* $\bar{K}$;

2) $f \in C^1$ *in* K;

3) f *superharmonisch in* A *und*

4) $\bar{\partial} f < 0$ *auf* B *folgt:*

f ist superharmonisch in K.

Beweis: Sei ohne Einschränkung $B \neq \emptyset$, $\mathfrak{x}_0 \in B$ und $\mathfrak{K}$ eine Kreisscheibe um $\mathfrak{x}_0$, mit $\bar{\mathfrak{K}} \subset K$. Wir setzen $\mathfrak{K} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$, wo $\mathfrak{A} = A \cap \mathfrak{K}$, $\mathfrak{B} = B \cap \mathfrak{K} \neq \emptyset$. Sei weiter $g = f - \hat{f}_{\mathfrak{K}}$, also $g = 0$ auf $\mathfrak{K}'$. Angenommen, es gilt in $\bar{\mathfrak{K}}$ nicht $g \geqslant 0$. Dann nimmt g sein Minimum $\mu < 0$ in einem Punkt $\mathfrak{y}_0 \in \mathfrak{K}$ an.

Erster Fall: $\mathfrak{y}_0 \in \mathfrak{B}$. Dies ist unmöglich nach 3.9.

Zweiter Fall: $\mathfrak{y}_0 \in \mathfrak{A}$. Da g superharmonisch in einer Umgebung von $\mathfrak{y}_0$ ist, so folgt aus der Eigenschaft (30), daß $g \equiv \mu < 0$ auf einer gewissen Kreisscheibe um $\mathfrak{y}_0$ ist. Ist dann $\mathfrak{A}^*$ das größte Teilgebiet von $\mathfrak{A}$, das $\mathfrak{y}_0$ enthält, so können wir $\mathfrak{A}^*$ wie folgt in zwei disjunkte Mengen $\mathfrak{A}_1^*$ und $\mathfrak{A}_2^*$ zerlegen: $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}_1^*$ genau dann, wenn es eine Kreisumgebung von $\mathfrak{x}$ gibt, in der $g \equiv \mu$ ist; $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}_2^*$ genau dann, wenn $g(\mathfrak{x}) > \mu$ ist. Nach Obigem ist $\mathfrak{A}_1^* \neq \emptyset$ und offen; da aus $\mathfrak{A}_2^* \neq \emptyset$ folgte, daß auch $\mathfrak{A}_2^*$ offen wäre im Widerspruch zu der Zerlegung $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}_1^* \cup \mathfrak{A}_2^*$ und des Zusammenhangs von $\mathfrak{A}^*$, so folgt $\mathfrak{A}_2^* = \emptyset$. Somit ist $g \equiv \mu < 0$ in $\mathfrak{A}^*$. $\mathfrak{A}^*$ besitzt notwendig einen Randpunkt $\mathfrak{z}_0$ in $\mathfrak{K}$ (sonst wäre $g \equiv \mu < 0$ in $\bar{\mathfrak{K}}$, im Widerspruch zu $g' = 0$ auf $\mathfrak{K}'$) und es ist dann $\mathfrak{z}_0 \in \mathfrak{B}$, d.h. es liegt der erste Fall vor.

Beide Fälle sind somit unmöglich, und es gilt wie behauptet: $g \geqslant 0$ in $\bar{\mathfrak{K}}$, also f superharmonisch in K.

Lemma 3.11. *Aus*

1) $f = f(\mathfrak{x}) \in C^0$ *in* $\bar{K}$;

2) $f \in C^1$ *in* K;

3) *f superharmonisch in A;*

4) *$\bar{\theta} f \leqslant 2L$ ($L>0$ eine Konstante) auf B und*

5) *$mB=0$ folgt:*

$$f \text{ ist superharmonisch in } K.$$

Beweis: Sei $\varepsilon>0$ und $\psi_\varepsilon(\mathfrak{x})$ die Funktion des Lemmas 3.7. Es ist dann

$$\bar{\theta}\{f-\psi_\varepsilon\} = \bar{\theta} f - \Delta\psi_\varepsilon < 2L-(2L+\varepsilon) = -\varepsilon < 0 \quad \text{für} \quad \mathfrak{x}\in B;$$

da nach (29) $(-\psi_\varepsilon)$ superharmonisch in K ist, so ist $f-\psi_\varepsilon$ superharmonisch in A. 3.9. liefert dann: $f-\psi_\varepsilon$ ist superharmonisch in K; da diese Aussage für jedes $\varepsilon>0$ gilt, so liefert $\lim \varepsilon = 0$ die Behauptung.

3.12. *Aus*

1) *$f=f(\mathfrak{x})\in C^0$ in $\bar{K}$;*

2) *$f\in C^1$ in K;*

3) *f superharmonisch in K, folgt:*

$$f \geqslant f_K \text{ in } \bar{K}.$$

Teilschritt IV. Wir kehren zu der Funktion $\omega=\omega(\mathfrak{x})$ zurück und erinnern an 3.3: ω ist in $\mathfrak{G}$ harmonisch und $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{F}_L = F_L \cap \mathfrak{Q}$; $\mathfrak{F}\neq\emptyset$.

Definition 3.5. Unter einer χ-Funktion z.B. für das Quadrat $\mathfrak{Q}$ verstehen wir irgend eine Funktion $\chi=\chi(\mathfrak{x})$ mit den Eigenschaften:

1) $\chi\in C^0$ in $\bar{\mathfrak{Q}}$;

2) $\chi\in C^2$ in $\mathfrak{Q}$;

3) $\Delta\chi=1$ in $\mathfrak{Q}$.

Ist z.B. $\mathfrak{K}$ ein Kreis, der $\bar{\mathfrak{Q}}$ umfaßt, und $G(x,y;\xi,\eta)$ die zugehörige Greensche Funktion, so ist

$$\chi(x,y) = \frac{1}{2\pi}\iint_{\mathfrak{K}} d\xi\, d\eta\, G(x,y;\xi,\eta) \tag{31}$$

eine χ-Funktion für $\mathfrak{Q}$, und sogar für $\mathfrak{K}$; hier ist außerdem $\chi=0$ auf $\mathfrak{K}'$ (Rand von $\mathfrak{K}$).

Sei $c>0$ ein Parameter. Dann ist $\omega - c\chi$ in $\mathfrak{G}$ superharmonisch.

Definition 3.6. $G(c)$ sei die Vereinigungsmenge aller offenen Mengen in $\mathfrak{Q}$, in denen $\omega-c\chi$ superharmonisch ist, m.a.W. $G(c)$ sei die „maximale" offene Menge in $\mathfrak{Q}$, in der $\omega-c\chi$ superharmonisch ist.

Offenbar hängt die Definition nicht von der speziellen dabei benutzten Funktion χ ab.

Es ist $\mathfrak{G} \subseteq G(c)$. Wir setzen $\mathfrak{Q} - G(c) = F(c)$ und haben:

$$\mathfrak{Q} = G(c) \cup F(c),$$

wo

$$\mathfrak{G} \subseteq G(c), \quad F(c) \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_L.$$

3.13. *Es ist* $F(c) = \emptyset$, *also* $G(c) = \mathfrak{Q}$.

Beweis: Sei $F(c) \neq \emptyset$. $F(c)$ ist relativ zu $\mathfrak{Q}$ abgeschlossen.

Angenommen, es existiert ein $\mathfrak{y} \in F(c)$ mit der Eigenschaft: es gibt eine Kreisscheibe K um $\mathfrak{y}(\bar{K} \subset \mathfrak{Q})$, so daß $m\{K \cap F(c)\} = 0$ ist. Wir setzen $A = K \cap G(c)$, $B = K \cap F(c)$ und haben $K = A \cup B$, wo A offen, B relativ abgeschlossen und $mB = 0$ ist. Dann treffen auf $f = \omega - c\chi$ (beachte $\bar{\theta}\omega \leqslant 2L$ auf B) die Voraussetzungen von 3.11. zu und es folgt: $f = \omega - c\chi$ ist superharmonisch in K, im Widerspruch zur Definition von $G(c)$.

Somit ist $F(c)$ metrisch dicht d.h. es gilt für jedes $\mathfrak{y} \in F(c)$ und jede Kreisscheibe K um $\mathfrak{y}$ mit $\bar{K} \subset \mathfrak{Q}$ stets $m\{K \cap F(c)\} > 0$. Setzen wir $\mathfrak{P} = \bar{F}(c)$, so ist $\mathfrak{P}$ perfekt und $F(c) = \mathfrak{P} \cap \mathfrak{Q}$. Nach 3.6. besitzt $\bar{\theta}\omega$, aufgefaßt als Funktion auf $F(c)$ einen Stetigkeitspunkt $\mathfrak{y} \in F(c)$. Es existiert also eine Kreisscheibe K um $\mathfrak{y}$ mit der Eigenschaft

$$|\bar{\theta}\,\omega(\mathfrak{x}) - \bar{\theta}\,\omega(\mathfrak{x}')| < c \quad \text{für alle} \quad \mathfrak{x} \in K \cap F(c)$$
$$\text{und alle} \quad \mathfrak{x}' \in K \cap F(c).$$

Da $m\{K \cap F(c)\} > 0$ und fast überall $\bar{\theta}\omega = 0$ ist, existiert in $K \cap F(c)$ ein $\mathfrak{z}$ mit $\bar{\theta}\omega(\mathfrak{z}) = 0$. Für $\mathfrak{x}' = \mathfrak{z}$ liefert dann (32)

$$|\bar{\theta}\omega(\mathfrak{x})| < c \quad \text{für alle} \quad \mathfrak{x} \in K \cap F(c).$$

Setzen wir wieder $A = K \cap G(c)$, $B = K \cap F(c)$, so treffen auf $K = A \cup B$ und $f = \omega - c\chi$ die Voraussetzungen von 3.10 zu und es folgt: $\omega - c\chi$ ist in K superharmonisch im Widerspruch zur Definition von $G(c)$.

Da man in allen Überlegungen ω durch $(-\omega)$ ersetzen darf, so ergibt sich

3.14. *Für jedes* $c > 0$ *ist* $\omega - c\chi$ *und* $(-\omega) - c\chi$ *superharmonisch in* $\mathfrak{Q}$.

Sei jetzt K ein beliebiger und dann fester Kreis in $\mathfrak{Q}$. Beschränkt man sich dann auf K, und wählt χ wie in (31), unter Ersetzung von $\mathfrak{K}$ durch K, so sind $\Omega - c\chi$ und $(-\Omega) - c\chi$ superharmonisch in K, wo $\Omega = \omega - \hat{\omega}_K$ bedeutet. Da die Funktionen auf dem Rand K' gleich Null sind, so folgt nach 3.12.

$$\left.\begin{array}{r}\Omega - c\chi \geqslant 0\\ (-\Omega) - c\chi \geqslant 0\end{array}\right\} \quad \text{in} \quad \bar{K},$$

d. h.

$$c\chi \leqslant \Omega \leqslant -c\chi \quad \text{in} \quad \bar{K}.$$

(Beachte: $\chi < 0$ in K.)

Für $c \to 0$ folgt daraus

$$\Omega = 0, \quad \text{d. h.} \quad \omega = \hat{\omega}_K \quad \text{in} \quad \bar{K},$$

d. h. ω ist harmonisch in K. Da K beliebig war, ist ω harmonisch in $\mathfrak{Q}$, also $\mathfrak{F} = \emptyset$, im Widerspruch zu (25).

Literatur

[1]. C. Carathéodory, On Dirichlet's problem. *Amer. J. Math.*, 59 (1937), 709–739 Ch. I, Nr. 6 bzw. Gesammelte Mathematische Schriften, C. H. Beck, München, Dritter Band (1955), S. 317.

[2]. ——, *Reelle Funktionen, Band I: Zahlen, Punktmengen, Funktionen.* Chelsea Publishing Company, New York (1946), S. 68, Satz 6.

[3]. F. Riesz, Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel (Première Partie). *Acta Math.*, 48 (1926).

[4]. S. Saks, *Theory of the Integral.* 2. Auflage, Hafner Publishing Company, New York, S. 198.

[5]. E. Schmidt, *Bemerkung zur Potentialtheorie.* Schwarz-Festschrift, Berlin, 1914, § 1.

[6]. H. Weyl, The method of orthogonal projection in potential theory. *Math. J.*, 7 (1940), 411–444, speziell § 3, bzw. Selecta, Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart (1956) § 3, 463–472.

Eingegangen am 3. März 1961