DIE METHODE DER GEODÄTISCHEN ÄQUIDISTANTEN UND DAS PROBLEM VON LAGRANGE.

VON

C. CARATHÉODORY

in MÜNCHEN.

Einleitung.

1. Auf den folgenden Seiten soll auf das allgemeine Problem der Variationsrechnung in einem $(n+1)$-dimensionalen Raum mit p gewöhnlichen Differentialgleichungen als Nebenbedingungen die Methode der geodätischen Äquidistanten angewandt werden, die ich schon bei verschiedenen Gelegenheiten benutzt habe.[1]

Bei diesem sogenannten *Lagrangeschen Problem* bietet die Methode der geodätischen Äquidistanten ausser der geometrischen grösseren Durchsichtigkeit verschiedene andere Vorzüge. Z. B. ist die Aufstellung der WEIERSTRASS'schen E-Funktion, die bei der gewöhnlichen Behandlung hier auf eine schwierige Konstruktion führen würde, fast unmittelbar. Ferner erhält man fast ohne Rechnung das HILBERT'sche Unabhängigkeitsintegral. Endlich ist man in der Lage alle Relationen aus denen die HAMILTON-JACOBI'sche Theorie besteht aufzustellen, ohne von vorn herein ein Extremalenfeld konstruieren zu müssen. Mann kann im Gegenteil die ziemlich komplizierte Feldkonstruktion bis *nach* der Einführung von kanonischen Koordinaten zurückstellen, und alle Schwierigkeiten, die aus den Nebenbedingungen entstehen, sind dann von selbst eliminiert.

---

[1] Über die diskontinuierlichen Lösungen in der Variationsrechnung, Diss. Gött. 1904, p. 63. — Über das allgemeine Problem der Variationsrechnung. Gött. Nachr. 1905 p. 83/90. — Sur une méthode directe du Calcul des Variations. Rend. d. Circ. Matem. di Palermo 25 (1908) p. 36/49. — RIEMANN-WEBER, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik (7e Aufl.) (Braunschweig, Vieweg 1925), S. 170—212.

KAPITEL I.

Die geodätischen Äquidistanten.

2. **Einleitende Bemerkungen.** Wir werden, um unsere Darstellung zu vereinfachen, folgende Bezeichnungen benutzen. Wir geben uns zwei positive ganze Zahlen p und n von denen die zweite die grössere ist; dann sollen die gewöhnlichen Indizes $i, j, \ldots$ stets alle Zahlen von 1 bis n, die einmal gestrichenen Indizes $i', j', \ldots$ dagegen die Zahlen $1, 2, \ldots, p$ und endlich die zweimal gestrichenen Indizes $i'', j'', \ldots$ die Zahlen $(p+1), (p+2), \ldots, n$ durchlaufen.

3. Nach diesen Vorbereitungen betrachten wir p Funktionen

$$G_{k'}(t, x_i, \dot{x}_i)$$

von $(2n+1)$ Veränderlichen $t, x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n$. Diese Funktionen und alle übrigen, die wir betrachten werden, nehmen wir als analytisch an. Der Leser kann aber — wenn er Wert darauf legt — sich überzeugen, dass alle folgenden Schlüsse noch gelten, wenn man annimmt, dass die von uns betrachteten Funktionen stetige partielle Differentialquotienten der drei ersten Ordnungen besitzen sollen.

Ausserdem nehmen wir an, dass in einem Punkte P_0^* mit den Koordinaten $t^0, x_i^0, \dot{x}_i^0$ die Gleichungen

$$G_{k'}(t, x_i, \dot{x}_i) = 0 \tag{1}$$

sämtlich erfüllt sind und die Matrix

$$\left(\frac{\partial G_{k'}}{\partial \dot{x}_i}\right), \tag{2}$$

die aus p Zeilen und n Kolonnen besteht, den Rang p besitzt. Wir können sogar ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass die Veränderlichen von vorn herein derart beziffert worden sind, dass unsere Voraussetzung über den Rang von (2) in der Gestalt

$$\left|\frac{\partial G_{k'}}{\partial \dot{x}_{j'}}\right| \neq 0 \tag{3}$$

geschrieben werden kann.

3. Unter diesen Voraussetzungen können die Gleichungen

$$G_{k'}(t, x_i, \dot{x}_i) = \varepsilon_{k'} \tag{4}$$

nach den $\dot{x}_{j'}$ aufgelöst werden, wenn nur die Grössen $|t-t^0|$, $|x_i - x_i^0|$ $|\dot{x}_{j''} - \dot{x}_{j''}^0|$ und $\varepsilon_{k'}$, hinreichend klein genommen werden. Wir erhalten auf diese Weise Gleichungen der Gestalt

$$\dot{x}_{j'} = \varphi_{j'}(t, x_i, \dot{x}_{m''}, \varepsilon_{k'}). \tag{5}$$

Wir bezeichnen jetzt mit $\overline{G}(t, x_i, \dot{x}_i)$ eine Funktion unserer $(2n+1)$ Veränderlichen, die für alle Werte dieser Veränderlichen, für welche die p Gleichungen (1) erfüllt sind, verschwinden soll. Setzen wir in $\overline{G}$ statt der $\dot{x}_{j'}$ ihre Werte (5) ein, so erhalten wir eine Relation

$$\overline{G}(t, x_i, \dot{x}_i) = \Phi(t, x_i, \dot{x}_{m''}, \varepsilon_{k'}) \tag{6}$$

und unsere Voraussetzung über $\overline{G}$ besagt, dass die Funktion Φ verschwinden muss, wenn alle $\varepsilon_{k'}$ gleich Null sind.

Man wird aber in diesem Falle analytische Funktionen $B_{k'}$ der $(2n+1)$ Veränderlichen $t, x_i, \dot{x}_{m''}, \varepsilon_{k'}$ bestimmen können, für welche die Indentität

$$\Phi \equiv \sum_{k'} B_{k'} \varepsilon_{k'} \tag{7}$$

erfüllt ist. Für $p > 1$ gibt es sogar unendlich viele verschiedene Funktionssysteme $B_{k'}$, die die letzte Relation befriedigen. Wir setzen jetzt, indem wir die Gleichungen (4) benutzen,

$$B_{k'}(t, x_i, \dot{x}_{m''}, G_{j'}) = \beta_{k'}(t, x_i, \dot{x}_i);$$

es folgt dann aus (6) und (7) die Identität

$$\overline{G} \equiv \sum_{k'} \beta_{k'} G_{k'}. \tag{8}$$

Da nun umgekehrt jede Funktion $\overline{G}$ die der Bedingung (8) genügt gleichzeitig mit den $G_{k'}$ verschwindet, können wir den Satz aussprechen:

Satz 1. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Funktion $\overline{G}(t, x_i, \dot{x}_i)$ gleichzeitig mit allen $G_{k'}$ verschwinde, besteht darin, dass man $\overline{G}$ als lineare Form in den $G_{k'}$ mit regulären analytischen Koeffizienten darstellen kann.

4. Wir betrachten nun zwei Systeme von p Gleichungen

$$G_{k'}=0, \qquad \overline{G}_{m'}=0, \tag{9}$$

für welche die Matrizen

$$\left(\frac{\partial G_{k'}}{\partial x_i}\right) \text{ und } \left(\frac{\partial \overline{G}_{m'}}{\partial x_i}\right) \tag{10}$$

beide in dem von uns betrachteten Punkt den Rang p besitzen.

Wir wollen zeigen, dass es für die Äquivalenz der beiden Systeme (9) genügend ist, wenn jedes der $\overline{G}_{m'}$ in allen Punkten verschwindet in denen die Gleichungen $G_{k'}=0$ sämmtlich erfüllt sind.

Wegen des Satzes des vorigen Paragraphen gibt es nämlich in dem von uns betrachteten Punkte reguläre analytische Funktionen $\beta_{m'k'}$, für welche die Gleichungen

$$\overline{G}_{m'} = \sum_{k'} \beta_{m'k'} G_{k'} \tag{11}$$

identisch befriedigt sind, und für die Äquivalenz der beiden Gleichungssysteme (9) muss nur noch gezeigt werden, dass in unserem Punkte P_0^* die Relation

$$|\beta_{m'k'}| \neq 0 \tag{12}$$

besteht. Nach Voraussetzung ist der Rang der zweiten Matrix (10) gleich p; es gibt also p Indizes $n_1, n_2, \ldots, n_p$, sodass mit der Bezeichnung

$$S_{i'j'} = \frac{\partial \overline{G}_{i'}}{\partial x_{n_{j'}}}$$

die Determinante

$$|S_{i'j'}| \neq 0 \tag{13}$$

ist.

Nun folgt aus (11), wenn man noch berücksichtigt, dass in P_0^* alle $G_{k'}=0$ sind

$$S_{i'j'} = \sum_{k'} \beta_{m'k'} \frac{\partial G_{k'}}{\partial x_{n_{j'}}},$$

und hieraus entnimmt man nach dem Multiplikationsgesetz der Determinanten

$$|S_{i'j'}| = |\beta_{m'k'}| \cdot \left|\frac{\partial G_{k'}}{\partial x_{n_{j'}}}\right|. \tag{14}$$

Diese letzte Relation zeigt uns, dass die Relation (12) eine Folge von (13) ist, und wir haben den Satz:

Satz 2. Dafür, dass die Gleichungssysteme (9), deren Matrizen (10) beide den Rang p haben, einander äquivalent seien, ist notwendig und hinreichend, dass die Gleichungen (11) bestehen, wobei dann von selbst die Determinante $|\beta_{m'k'}| \neq 0$ *ist.*

5. Setzt man insbesondere, indem man von den Gleichungen (5) ausgeht

$$\psi_{j'}(t, x_i, \dot{x}_{m''}) = \varphi_{j'}(t, x_i, \dot{x}_{m''}, 0)$$

und

$$\Gamma_{j'}(t, x_i \dot{x}_i) = \dot{x}_{j'} - \psi_{j'}(t, x_i \dot{x}_{m''}), \tag{15}$$

so zeigen die Ausführungen des § 3, dass die Gleichungssysteme $G_{k'} = 0$ und $\Gamma_{j'} = 0$ einander äquivalent sind; man kann also die $\Gamma_{j'}$ als homogene lineare Formen der $G_{k'}$ schreiben, und umgekehrt.

6. **Stellung des Problems.** Wir betrachten in einem $(n+1)$-dimensionalen Raum der (t, x_i) eine beliebige Kurve C, die durch die Gleichungen

$$x_i = x_i(t) \tag{16}$$

definiert ist, und setzen längs dieser Kurve

$$\dot{x}_i = \frac{d x_i}{d t}.$$

Die Gleichungen $G_{k'} = 0$ stellen dann ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen dar, die längs aller Kurven, die wir im Folgenden betrachten wollen, befriedigt sein sollen.

Es ist klar, dass wir in unseren Bedingungen das System der Differentialgleichungen (1) durch jedes äquivalente System $\overline{G}_{m'} = 0$, insbesondere auch durch das System der Gleichungen

$$\Gamma_{j'} = \dot{x}_{j'} - \psi_{j'} = 0 \tag{17}$$

ersetzen können.

7. Es sei nun eine Funktion $L(t, x_i, \dot{x}_i)$ gegeben; wir betrachten das Kurvenintegral

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(t, x_i, \dot{x}_i)\, d t, \tag{18}$$

das wir längs eines Kurvenbogens C nehmen, für welches die Bedingungsgleichungen (1) befriedigt sind, und deren Endpunkte mit P_1 und P_2 bezeichnet werden.

Die Gesamtheit der Kurven, die in P_1 beginnen und den Gleichungen $G_{k'}=0$ genügen, überdecken eine Punktmenge A des Raumes der (t, x_i) deren Rand wir im § 43 definieren und bestimmen werden. Im Allgemeinen wird diese Punktmenge ein $(n+1)$-dimensionales Gebiet enthalten, aber die Dimensionenzahl kann, wie wir es sehen werden (§ 45) auch kleiner sein.

Liegt der Punkt P_2, der nach Voraussetzung in A enthalten ist, nicht auf dem Rande dieser Punktmenge, so gibt es unendlich viele Kurven, die P_1 mit P_2 verbinden und die Gleichungen (1) befriedigen. Man kann dann fragen, ob unter diesen Kurven einzelne gefunden werden können, für die das Integral (18) einen kleineren Wert besitzt als für die benachbarten.

Mann kann noch auf viele Weisen dieses Problem der Variationsrechnung variieren, indem man die Randbedingungen ändert. Man kann z. B. anstatt von den Punkten P_1 und P_2 zu fordern, dass sie fest sein sollen, verlangen, dass sie sich auf gegebene Kurven oder Hyperflächen befinden müssen.

Wollte man nun alle diese Probleme gesondert behandeln und dazu jedesmal die singulären Fälle berücksichtigen, so würde ein derart kompliziertes Lehrgebäude entstehen, dass man sich nur mit Mühe in ihm zurechtfinden würde. Glücklicherweise kann man aber der Behandlung dieser Fragen eine viel einfachere Theorie voranstellen, bei der die genannte Punktmenge A keine Rolle spielt, und deren Ergebnisse ein Universalinstrument liefern, das alle Probleme, die wir erwähnt haben, und noch viele andere zu behandeln erlaubt.

8. **Äquivalente Probleme.** Es gibt von L verschiedene Funktionen $\overline{L}(t, x_i, \dot{x}_i)$ für welche die Gleichung

$$\int_{t_1}^{t_2} \overline{L}\, d\, t = \int_{t_1}^{t_2} L\, d\, t$$

besteht, wenn diese Kurvenintegrale längs Kurven genommen sind, die den Nebenbedingungen (1) genügen.

Dazu ist notwendig und hinreichend, dass die Differenz $(\overline{L}-L)$ auf jedem Kurvenelement verschwindet für den die Gleichungen $G_{k'}=0$ erfüllt sind. Nach dem Satze 1 des § 3 ist dazu wiederum notwendig und hinreichend, dass man schreiben kann

$$\overline{L} = L + \sum_{k'} \alpha_{k'} G_{k'}, \tag{19}$$

wobei die $\alpha_{k'}$ beliebige analytische Funktionen der $(2n+1)$ Veränderlichen $(t, x_i, \dot{x}_i)$ bedeuten. Insbesondere wird man mit Hülfe der Gleichungen (17) diese Funktionen so wählen können, dass $\overline{L}$ nur von den $(2n+1-p)$ Veränderlichen $(t, x_i, \dot{x}_{m''})$ abhängt. (Cf. §§ 31—33).

9. **Geodätischer Gradient.** Wir betrachten im Raume der (t, x_i) eine einparametrige Schar von n-dimensionalen Flächen, die ein gewisses Gebiet V dieses $(n+1)$-dimensionalen Raumes einfach überdeckt und durch die Gleichung

$$S(t, x_i) = \lambda \tag{20}$$

dargestellt wird.

Wir nehmen nun an, dass unsere Kurve (16) die Flächenschar (20) durchsetzt und keine dieser Flächen berührt. Setzen wir zur Abkürzung

$$\varDelta(t, x_i, \dot{x}_i) = S_t + \sum_i S_{x_i} \dot{x}_i, \tag{21}$$

so drückt sich diese letzte Tatsache durch die Relation

$$\frac{d\lambda}{dt} = \varDelta \neq 0 \tag{22}$$

aus; wir können sogar — indem wir gegebenenfalls in der Gleichung (20) die Grösse λ durch $-\lambda$ ersetzen — ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass längs unserer Kurve die Ungleichheit

$$\varDelta > 0 \tag{23}$$

stattfindet.

10. Wir betrachten nun das Integral (18) zwischen einem festen Punkt unseres Kurvenbogens, der dem Parameterwert t_1 entspricht, und einem Veränderlichen Punkt vom Parameterwert t. Da wegen (22) und (23) längs der ganzen Kurve

$$\frac{d\lambda}{dt} > 0$$

ist, können wir λ als unabhängige Veränderliche wählen, und die Gleichung (18) in der Form

$$I(\lambda) = \int_{\lambda_1}^{\lambda} \frac{L}{\Delta}\, d\lambda$$

schreiben. Die Ableitung dieser letzten Funktion nach λ d. h. der Ausdruck

$$\frac{dI}{d\lambda} = \frac{L}{\Delta}$$

hängt in jedem Punkte des Gebietes V allein von der *Richtung* der Kurve (16) in diesem Punkte ab.

Wir definieren nun als geodätischen Gradienten unserer Flächenschar $S=\lambda$ im betrachteten Punkte diejenige unter diesen Richtungen für welche der Ausdruck $L:\Delta$ bei Berücksichtigung der Nebenbedingungen $G_{k'}=0$ möglichst klein ist. Dieser Minimalwert von $L:\Delta$ soll der Betrag des geodätischen Gradienten genannt werden.

11. Für den geodätischen Gradienten muss hiernach der Rang der Matrix

$$\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\frac{L}{\Delta}, \frac{\partial G_{k'}}{\partial \dot{x}_i}\right),$$

die aus n Zeilen und $(p+1)$ Kolonnen besteht, höchstens gleich p sein. Wäre nämlich dieser Rang gleich $(p+1)$ so könnte man die $(p+1)$ Gleichungen

$$\frac{L}{\Delta} = u,\; G_{k'} = 0,$$

nach $(p+1)$ der Veränderlichen $\dot{x}_i$ auflösen und auf diese Weise Werte der $\dot{x}_i$ bestimmen, die denjenigen, die man betrachtet, beliebig benachbart sind, und für welche einerseits die Bedingungsgleichungen $G_{k'}=0$ erfüllt sind und andererseits $L:\Delta$ einen kleineren Wert besitzt als derjenige, der der kleinstmögliche hätte sein sollen.

Zwischen den $(p+1)$ Kolonnen unserer Matrix besteht also eine lineare Abhängigkeit; es gibt m. a. W. $(p+1)$ Konstanten $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_p$, die nicht sämtlich verschwinden, derart, dass die n Gleichungen

$$\nu_0 \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\left(\frac{L}{\Delta}\right) + \sum_{k'} \nu_{k'} \frac{\partial G_{k'}}{\partial \dot{x}_i} = 0$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

sämtlich befriedigt werden. Wir hatten nun vorausgesetzt, dass die Matrix (2) den Rang p haben sollte, und hieraus folgt, dass in den letzten Gleichungen $\nu_0 \neq 0$ ist. Wenn wir also die Differentiation von $L : \Delta$ ausführen nachdem wir Δ durch seinen Wert (21) ersetzt haben, so erhalten wir Gleichungen, die mit der nicht verschwindenden Grösse $\Delta^2 : \nu_0$ multipliziert und nach Einführung der Bezeichnung

$$\frac{\nu_{k'} \Delta}{\nu_0} = \mu_{k'}$$

folgendermassen lauten:

$$\Delta \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{k'} \mu_{k'} \frac{\partial G_{k'}}{\partial \dot{x}_i} \right) - L S_{x_i} = 0 .$$

Wir setzen jetzt zur Abkürzung

$$M(t, x_i, \dot{x}_i, \mu_{k'}) = L + \sum_{k'} \mu_{k'} G_{k'} \tag{24}$$

und bemerken, dass für jedes Linienelement in welchem die Nebenbedingungen (1) erfüllt sind, die Gleichung $M = L$ besteht. Unsere letzten Gleichungen können also geschrieben werden

$$\Delta \frac{\partial M}{\partial \dot{x}_i} - M S_{x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{25}$$

Dieses Gleichungssystem verbunden mit den Nebenbedingungen $G_{k'} = 0$ stellt die notwendigen Bedingungen dar, denen der geodätische Gradient in jedem Punkte des Gebietes V genügen muss.

12. **Die Weierstrasssche E-Funktion.** Wir denken uns die Bedingungen (25) für das Linienelement $(t, x_i, \dot{x}_i)$ erfüllt und betrachten ein zweites Linienelement (t, x_i, x'_i), das durch denselben Punkt des Raumes der (t, x_i) hindurchgeht und für welches die Nebenbedingungen $G_{k'} = 0$ erfüllt sind. Wir führen nun die Bezeichnungen ein:

$$\begin{cases} L' = L(t, x_i, x'_i), \\ M' = L' + \sum_{k'} \mu_{k'} G_{k'}(t, x_i, x'_i), \\ \Delta' = S_t + \sum_i S_{x_i} x'_i, \end{cases} \tag{26}$$

bei denen die $\mu_{k'}$ ihre alten Werte beibehalten.

Es ist nun hinreichend dafür, dass das Linienelement $(t, x_i, \dot{x}_i)$ einen geodätischen Gradienten darstelle, dass für ein hinreichend kleines positives ε und für alle Werte x'_i, die der Bedingung $|x'_i - \dot{x}_i| < \varepsilon$ genügen, die Relation

$$\frac{L'}{\Delta'} - \frac{L}{\Delta} \geqq 0$$

stets erfüllt sei. Da wir $\Delta > 0$ angenommen haben, können wir uns auf solche Werte der x'_i beschränken für welche ebenfalls $\Delta' > 0$ ist und dann statt der letzten Relation schreiben

$$L' - \frac{\Delta'}{\Delta} L \geqq 0.$$

Ferner bestehen aber nach unseren Voraussetzungen die Gleichungen $L = M$ und $L' = M'$; wir können also unsere Bedingung auch in der Form schreiben:

$$M' - \frac{\Delta'}{\Delta} M \geqq 0. \tag{27}$$

Nun besteht aber die Identität:

$$M' - \frac{\Delta'}{\Delta} M = M' - M - \frac{\Delta' - \Delta}{\Delta} M, \tag{28}$$

und wir entnehmen andererseits aus (21) und (26)

$$\Delta' - \Delta = \sum_i S_{x_i}(x'_i - \dot{x}_i).$$

Setzen wir diesen letzten Ausdruck in (28) ein und ersetzen $M S_{x_i} : \Delta$ durch seinen Wert, der aus (25) folgt, so erhalten wir schliesslich

$$M' - \frac{\Delta'}{\Delta} M = M' - M - \sum_i M_{\dot{x}_i}(x'_i - \dot{x}_i).$$

Führen wir also mit Weierstrass die Bezeichnung ein:

$$E(t, x_i, \dot{x}_i, x'_i, \mu_{k'}) = M' - M - \sum_i M_{\dot{x}_i}(x'_i - \dot{x}_i), \tag{29}$$

so nimmt schliesslich die Bedingung (27) die Gestalt an

$$E(t, x_i, \dot{x}_i, x'_i, \mu_{k'}) \geqq 0. \tag{30}$$

Diese Relation ist deshalb bemerkenswert, weil die Funktion $S(t, x_i)$ durch welche unsere Flächenschar bestimmt worden war in ihr gar nicht mehr vorkommt.

13. **Die Legendresche Bedingung.** Die durch die Gleichung (29) definierte Weierstrass'sche E-Funktion, kann angesehen werden als der Rest der Taylorschen Entwickelung der Funktion $M(t, x_i, x'_i, \mu_{k'})$ nach Potenzen der $(x'_i - \dot{x}_i)$, wenn man diese Entwickelung bei den linearen Gliedern abbricht. Wir könnnen also schreiben:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \tilde{M}_{\dot{x}_i \dot{x}_i} (x'_i - \dot{x}_i)(x'_j - \dot{x}_j), \tag{31}$$

wenn wir mit $\tilde{M}_{\dot{x}_j \dot{x}_j}$ die zweiten partiellen Ableitungen von M für einen Mittelwert $\vartheta x'_i + (1 - \vartheta)\dot{x}_i$ bezeichnen, wobei $0 < \vartheta < 1$ ist. Andererseits haben wir nach Voraussetzung die Gleichungen $G_{k'}(t, x_i, x'_i) = 0$ und $G_{k'}(t, x_i, \dot{x}_i) = 0$ zu berücksichtigen, aus denen auf ähnliche Weise folgt:

$$\sum_i \frac{\partial \tilde{G}_{k'}}{\partial \dot{x}_i} (x'_i - \dot{x}_i) = 0; \tag{32}$$

hierbei sind die Ableitungen der $G_{k'}$ für Mittelwerte $\vartheta_{k'} x'_i + (1 - \vartheta_{k'}) \dot{x}_i$ genommen, wobei die $\vartheta_{k'}$ den Relationen $0 < \vartheta_{k'} < 1$ genügen.

14. Wir bezeichnen nun mit $\xi_{j''}$ eine Folge von $(n-p)$ beliebigen reellen Zahlen, die nicht alle verschwinden sollen, und setzen

$$x'_{j''} = \dot{x}_{j''} + s\,\xi_{j''}. \tag{33}$$

Wir können dann, wegen der Bedingung (3), für hinreichend kleine Werte von s aus den p Gleichungen

$$G_{k'}(t, x_i, x'_i) = 0,$$

in die wir die Werte (33) der $x'_{j''}$ einsetzen, die übrigen $(n-p)$ Funktionen $x'_{j'}$ als Funktionen von s berechnen. Diese Funktionen werden von der Gestalt sein

$$x'_{j'} = \dot{x}_{j'} + s\,\xi_{j'} + ((s^2)). \tag{34}$$

Setzt man nun die Werte (33) und (34) in unsere E-Funktion ein, so wird diese als Funktion von s betrachtet, wegen der Relation (31), der Bedingung genügen.

(35)
$$\lim_{s=0} \frac{2E}{s^2} = \sum_{i,j} M_{\dot{x}_i \dot{x}_j} \xi_i \xi_j .$$

Setzt man andererseits die Werte (33) und (34) von x'_i in die Gleichungen (32) ein, so sind diese für hinreichend kleine Werte von s identisch befriedigt, und man erhält, wenn man s gegen Null konvergieren lässt, die Bedingungen

(36)
$$\sum_i \frac{\partial G_{k'}}{\partial \dot{x}_i} \xi_i = 0 .$$

15. Nun betrachten wir die quadratische Form

(37)
$$Q = \sum_{i,j} M_{\dot{x}_i \dot{x}_j} \xi_i \xi_j .$$

Wäre diese für gewisse Werte ξ_i^0 der ξ_i, die den linearen Gleichungen (36) genügen negativ, so bemerke man, dass wegen (3) nicht alle $\xi_{j''}^0$ verschwinden können. Setzt man diese letzten Werte in (33) ein und berechnet nach (34) die $x'_{j'}$, wobei die dort vorkommenden $\xi_{j'} = \xi_{j'}^0$ sein müssen, so folgt aus (35), dass für hinreichend kleine Werte von s die E-Funktion ebenfalls negativ sein muss.

Wir können demnach folgenden Satz aussprechen:

Dafür, dass nicht in jeder Umgebung des Anfangselements $(t, x_i, \dot{x}_i)$ Linienelemente (t, x_i, x'_i) existieren, für welche die E-Funktion negativ ist, ist notwendig, dass für alle ξ_i, die den linearen Bedingungen (36) genügen, die quadratische Form $Q \geqq 0$ sei.

16. Bekanntlich ist das Minimum der quadratischen Form (37), wenn man zu den linearen Bedingungen (36) noch die Relation $\Sigma \xi_i^2 = 1$ hinzufügt, gleich der kleinsten Wurzel ϱ_0 der Gleichung in ϱ

(38)
$$D(\varrho) = \begin{vmatrix} M_{\dot{x}_i \dot{x}_j} - \delta_{ij} \varrho, & \dfrac{\partial G_{k'}}{\partial \dot{x}_i} \\ \dfrac{\partial G_{m'}}{\partial \dot{x}_j}, & 0 \end{vmatrix} = 0.\text{[1]}$$

Der Satz des vorigen Paragraphen liefert uns die notwendige Bedingung $\varrho_0 \geqq 0$. Ist aber $\varrho_0 = 0$ so kann man vor der Hand gar nichts bestimmtes über das Vorzeichen von E aussprechen. Man kann leicht Beispiele bilden für welche das Vorzeichen von E wechselt und andere für welche $E \geqq 0$ ist. Es handelt

[1] Hierbei bedeutet δ_{ij} die Zahl Null oder Eins je nachdem $i \neq j$ oder $i = j$ ist.

sich um einen Grenzfall für welchen keine allgemeine Theorie möglich ist, und den wir prinzipiell bei Seite lassen werden.

Ist dagegen $\varrho_0 > 0$, so gibt es — weil die Wurzeln der algebraischen Gleichungen stetige Funktionen ihrer Koeffizienten sind — eine positive Grösse η, derart, dass für

$$\left|\tilde{M}_{\dot{x}_i \dot{x}_j} - M_{\dot{x}_i \dot{x}_j}\right| < \eta, \quad \left|\frac{\partial \tilde{G}_{k'}}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial G_{k'}}{\partial \dot{x}_i}\right| < \eta,$$

die kleinste Wurzel von $D(\varrho)=0$ ebenfalls positiv ist, wenn man in (38) die $M_{\dot{x}_i \dot{x}_j}$ durch $\tilde{M}_{\dot{x}_i \dot{x}_j}$ und die $\dfrac{\partial G_{k'}}{\partial \dot{x}_i}$ durch $\dfrac{\partial \tilde{G}_{k'}}{\partial \dot{x}_i}$ ersetzt.

Bemerkt man nun, dass E, in der Gestalt (31) geschrieben, als quadratische Form der $(x'_i - \dot{x}_i)$ erscheint, und berücksichtigt man, dass die Bedingungen $G_{k'}(t, x_i, x'_i)=0$ mit (32) äquivalent sind, so folgt hieraus, dass es eine Grösse ε gibt, so dass für alle x'_i die den Nebenbedingungen genügen und für welche $|x'_i - \dot{x}_i| < \varepsilon$ ist, die Relation $E \geqq 0$ besteht. Ausserdem verschwindet E nur dann, wenn die Linienelemente x'_i und $\dot{x}_i$ zusammenfallen.

Die Bedingung $\varrho_0 > 0$, die man die *Legendresche Bedingung* nennt, ist also *hinreichend* dafür, dass in einer gewissen Umgebung des betrachteten Linienelements $E \geqq 0$ sei. Im Folgenden werden wir stets annehmen, dass diese Legendresche Bedingung erfüllt ist.

Aus der Tatsache, dass sämtliche Wurzeln von $D(\varrho)=0$ positiv sind, folgt die Relation

$$D(0) = \begin{vmatrix} M_{\dot{x}_i \dot{x}_j}, & \dfrac{\partial G_{k'}}{\partial \dot{x}_i} \\ \dfrac{\partial G_{m'}}{\partial \dot{x}_j}, & 0 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{39}$$

die im Folgenden eine wichtige Rolle spielen wird.

17. **Bemerkung über die äquivalenten Probleme.** Die geodätischen Gradienten einer Flächenschar $S(t, x_i)=\lambda$, die Weierstrass'sche E-Funktion und die im letzten Paragraphen betrachtete Grösse ϱ_0 müssen nach ihrer Definition bei Ersetzung unseres Problems durch ein äquivalentes unverändert bleiben. Dies wird auch durch die Rechnung bestätigt.

Setzen wir z. B. nach den §§ 4 und 8

$$(40)\qquad \begin{cases} \bar{L} = L + \sum_{k'} \alpha_{k'} G_{k'} \\ \bar{G}_{m'} = \sum_{k'} \beta_{m'k'} G_k \qquad |\beta_{m'k'}| \neq 0 \\ \bar{M} = \bar{L} + \sum_{m'} \bar{\mu}_{m'} \bar{G}_{m'} \end{cases}$$

und bestimmen die $\bar{\mu}_{m'}$ durch die Relationen

$$(41)\qquad \mu_{k'} = \alpha_{k'} + \sum_{m'} \beta_{m'k'} \bar{\mu}_{m'},$$

so erhalten wir für jedes Linienelement, für welches die $G_{k'} = 0$ sind, nicht nur

$$\bar{M} = M$$

sondern auch

$$\bar{M}_{\dot{x}_i} = M_{\dot{x}_i}$$

$$\bar{M}_{\dot{x}_i \dot{x}_j} = M_{\dot{x}_i \dot{x}_j} + \sum_{k', n'} \left(\frac{\partial \alpha_{k'}}{\partial \dot{x}_j} + \bar{\mu}_{n'} \frac{\partial \beta_{n'k'}}{\partial \dot{x}_j} \right) \frac{\partial G_{k'}}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{m', l'} \left(\frac{\partial \alpha_{m'}}{\partial \dot{x}_i} + \bar{\mu}_{l'} \frac{\partial \beta_{l'm'}}{\partial \dot{x}_i} \right) \frac{\partial G_{m'}}{\partial \dot{x}_j}.$$

Die Gleichungen (25) für den geodätischen Gradienten werden also für dasselbe Linienelement befriedigt, wenn nur die Multiplikatoren $\mu_{k'}$, die, wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, eine ganz untergeordnete Rolle spielen, mit Hülfe von (41) linear transformiert werden.

Ebenso bleibt die E-Funktion nach (29) invariant. Berücksichtigt man endlich, dass, wegen $G_{k'} = 0$, die Gleichungen

$$\frac{\partial \bar{G}_{m'}}{\partial \dot{x}_i} = \sum_{k'} \beta_{m'k'} \frac{\partial G_{k'}}{\partial \dot{x}_i}$$

bestehen, und setzt

$$\bar{D}(\varrho) = \begin{vmatrix} \bar{M}_{\dot{x}_i \dot{x}_j} - \delta_{ij}\varrho, & \dfrac{\partial \bar{G}_{m'}}{\partial \dot{x}_i} \\ \dfrac{\partial \bar{G}_{n'}}{\partial \dot{x}_j}, & 0 \end{vmatrix},$$

so entnimmt man aus unseren Relationen

$$\overline{D}(\varrho) = |\beta_{m'k'}|^2 D(\varrho),$$

woraus die Invarianz von ϱ_0 ebenfalls folgt.

18. **Geodätische Gefällkurven.** Wir nehmen nun für einen Augenblick an, dass im betrachteten Linienelement die Bedingung $L > 0$ befriedigt ist. Da in diesem Falle nach (24) die Relation $M > 0$ besteht, können wir die Bedingungen (25) des geodätischen Gradienten symmetrischer schreiben. Zu diesem Zwecke definieren wir eine Grösse σ durch die Relation

$$\Delta = \sigma M; \tag{42}$$

Da nun $M \neq 0$ folgt jetzt aus (25)

$$S_{x_i} = \sigma M_{\dot{x}_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{43}$$

und die beiden letzten Gleichungen liefern in Verbindung mit (21)

$$S_t = \sigma\left(M - \sum_i M_{\dot{x}_i} \dot{x}_i\right). \tag{44}$$

Diese Gleichungen zeigen, dass die Verhältnisse der Grössen S_{x_i}, S_t durch die $(2n+p+1)$ Grössen $(t, x_i, \dot{x}_i, \mu_{k'})$, oder, wenn man die Nebenbedingungen $G_{k'} = 0$ berücksichtigt, schon durch die $(2n+1)$ unabhängige Grössen $(t, x_i, \dot{x}_{j''}, \mu_{k'})$ bestimmt werden. Diese Grössen sollen die Koordinaten eines *vollständigen Linienelements* genannt werden, das die Flächenschar $S = \lambda$ *transversal* schneidet.

19. Kennt man in irgend einem Punkte P_0 des Raumes ein transversales vollständiges Linienelement unserer Flächenschar $S = \lambda$, so können wir mit Hülfe der Gleichungen (43) und (44) die benachbarten transversalen vollständigen Linienelemente berechnen, wenn nur die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial\left(\sigma M_{\dot{x}_j},\ G_{k'},\ \sigma\left(M - \sum_k \dot{x}_k M_{\dot{x}_k}\right)\right)}{\partial(\dot{x}_i, \mu_{l'}, \sigma)} \neq 0 \tag{45}$$

ist. Eine elementare Rechnung zeigt aber, dass diese Determinante gleich $M\sigma^n D(0)$ gesetzt werden kann. Wegen unserer letzten Voraussetzungen und der Relation (39) ist also die Bedingung (45) erfüllt.

Hieraus folgt, dass die transversalen vollständigen Linienelemente unserer Flächenschar in einer gewissen Umgebung von P_0 zu Kurven vereinigt werden können, die in jedem Punkte den entsprechenden geodätischen Gradienten von $S=\lambda$ berühren; diese Kurven sollen die *geodätischen Gefällkurven* der Flächenschar genannt werden. Gleichzeitig können in dieser selben Umgebung von P_0 die $\mu_{k'}$ als Funktionen der (t, x_i) berechnet werden.

20. **Geodätisch äquidistante Flächen.** Setzen wir die soeben berechneten Werte der $\dot{x}_i$ als Funktionen der (t, x_i) in den Ausdruck $L : \varDelta$ ein, so erhalten wir in allen Fällen eine Relation der Form

$$\frac{L}{\varDelta} = \chi(t, x_i). \tag{46}$$

Wir stellen nun folgende Definition auf:

Die Flächen der Schar $S=\lambda$ sollen geodätisch äquidistant genannt werden, wenn die Funktion $\chi(t, x_i)$, die in der Gleichung (46) *erscheint, längs jeder Fläche unserer Schar konstant bleibt, d. h. wenn man schreiben kann*

$$\frac{L}{\varDelta} = \omega(S(t, x_i)). \tag{47}$$

Die Eigenschaft einer Schar aus geodätisch äquidistanten Flächen zu bestehen, hängt natürlich vom betrachteten Problem der Variationsrechnung ab, bleibt aber nach den Ausführungen des § 17 bestehen, wenn man ein Problem durch ein äquivalentes ersetzt. Sie ist eine *geometrische* Eigenschaft unserer Flächenschar; hiermit ist folgendes zu verstehen:

Ist $\varphi(u)$ eine monotone, stetige, differentiierbare Funktion, so können wir unsere Flächenschar $S=\lambda$ auch durch die Gleichung

$$\bar{S}(t, x_i) = \varphi(S(t, x_i)) = \bar{\lambda}$$

darstellen. Da aber hieraus folgt

$$\bar{S}_t = \varphi'(S)\, S_t, \quad \bar{S}_{x_i} = \varphi'(S)\, S_{x_i},$$

wird, wenn man in den Gleichungen (43) und (44) die Grössen S_{x_i}, S_t durch $\bar{S}_{x_i}$, $\bar{S}_t$ ersetzt, lediglich σ einen anderen Wert bekommen, *die geodätischen Gefällkurven bleiben unverändert.*

Der Ausdruck $L:\Delta$ bleibt dagegen nicht invariant; man muss ihn durch $L:\overline{\Delta}$ ersetzen, wobei

$$\overline{\Delta}=\overline{S}_t+\sum_i \overline{S}_{x_i}\dot{x}_i=\varphi'(S)\,.\,\Delta$$

ist. Dennoch bleibt $L:\overline{\Delta}$ auf jeder Fläche der Schar konstant, wenn (47) erfüllt ist, denn es gilt:

$$\frac{L}{\overline{\Delta}}=\frac{1}{\varphi'(S)}\cdot\frac{L}{\Delta}=\frac{\omega(S)}{\varphi'(S)}.$$

21. Diese letzte Formel erlaubt die Bedingung der geodätischen Äquidistanz besonders einfach zu schreiben. Bemerkt man nämlich, dass, wegen $L>0$ und $\Delta>0$ auch $\omega(S)>0$ ist, so folgt, dass mann $\varphi'(u)=\omega(u)$ setzen kann, da die aus dieser Gleichung berechnete Funktion $\varphi(u)$ monoton wachsend ist. In diesem Falle ist aber $L=\overline{\Delta}$. Man kann m. a. W. die Scharen geodätisch äquidistanten Flächen dadurch *definieren*, dass man verlangt, dass in den Gleichungen (43) und (44) die Grösse $\sigma=1$ sei.

Die Bedingung der geodätischen Äquidistanz lässt sich also schreiben:

$$(48)\qquad \begin{cases} S_{x_i}=M_{\dot{x}_i} \\ S_t=M-\sum_j \dot{x}_j M_{\dot{x}_j} \\ G_{k'}=0 \end{cases}$$

Wir werdem nun im Folgenden auch dann von geodätisch äquidistanten Flächen sprechen, wenn die Gleichungen (48) erfüllt sind, aber die Bedingung $L>0$, die wir bisher wesentlich benutzt haben, nicht stattfindet.

Eliminiert man die $(n+p)$ Grössen $\dot{x}_i$, $\mu_{k'}$ aus den Gleichungen (48), so erhält man die Bedingung für die geodätische Äquidistanz der Flächenschar $S=\lambda$ in Gestalt einer partiellen Differentialgleichung für S, die ihrerseits — wie wir im nächsten Kapitel sehen werden — dazu dienen kann alle Elemente unseres Problems zu berechnen.

22. **Das Hilbertsche unabhängige Integral.** Wir betrachten eine Schar geodätisch äquidistanter Flächen, für welche die Gleichungen (48) erfüllt sind, und die ein gewisses Gebiet des Raumes der (t, x_i) einfach überdeckt. Zweitens betrachten wir eine willkürliche Kurve

(49) $$x_i = x_i(t),$$

die die Flächen unserer Schar durchsetzt, und den Nebenbedingungen $G_{k'}=0$ genügt. Setzt man dann

$$\frac{d x_i}{d t} = x'_i(t)$$

und bezeichnet mit P_1 und P_2 zwei Punkte der Kurve (49), die den Werten t_1 und t_2 der Koordinate t entsprechen, wobei $t_2 > t_1$ sein soll, und mit S_1 und S_2 die Werte der Funktion $S(t, x_i)$ in diesen Punkten, so besteht die Relation

$$S_2 - S_1 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d S(t, x_i)}{d t} d t$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ S_t + \sum_j S_{x_j} x'_j \right\} d t$$

Nun kann aber mit Hülfe der Gleichungen (48) die letzte Relation in der Gestalt geschrieben werden:

(50) $$S_2 - S_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left(M + \sum_j M_{\dot{x}_j} (x'_j - \dot{x}_j) \right\} d t.$$

Der Wert $(S_2 - S_1)$ dieses Linienintegrals hängt nur von den Endpunkten der Kurve ab längs welcher es genommen wird und ist nichts anderes als das *unabhängige Integral von* Hilbert. In der Formel (50) sind die Grössen $\dot{x}_i$, $\mu_{k'}$, die in der Funktion M und ihren Ableitungen $M_{\dot{x}_i}$ vorkommen, die Koordinaten des vollständigen Linienelements, das unsere geodätisch äquidistante Flächenschar im betreffenden Punkte transversal durchsetzt.

Nun haben wir, wegen der vorausgesetzten Gleichungen $G_{k'}(t, x_i, x'_i) = 0$ die Relationen

$$M' = M(t, x_i, x'_i, \mu_{k'}) = L(t, x_i, x'_i)$$

und das Kurvenintegral über L längs der Kurve (49) lautet:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} M' \, d t$$

Ziehen wir von dieser letzten Gleichung die Gleichung (50) gliedweise ab, und erinnern uns an die Definition (29) der Weierstrasschen E-Funktion, so erhalten wir schliesslich:

$$J-(S_2-S_1)=\int_{t_1}^{t_2} E(t, x_i, \dot{x}_i, x'_j, \mu_{k'})\, dt. \tag{51}$$

23. **Lösung einiger spezieller Probleme.** Die Relation (51) ist die Grundgleichung, aus welcher die Lösung aller Probleme, die wir im § 7 erwähnt haben, entspringt.

Nehmen wir z. B. an, dass P_1 und P_2 beide auf derselben geodätischen Gefällkurve C unserer Schar geodätisch äquidistanter Flächen liegen.

Fällt dann zunächst die Kurve (49) mit C zusammen, so werden wir in jedem Punkte dieser Kurve $x'_i=\dot{x}_i$ und folglich $E=0$ setzen müssen und das Kurvenintegral längs C, das wir mit I bezeichnen, genügt der Relation

$$I=S_2-S_1. \tag{52}$$

Für jede andere Kurve γ, die P_1 mit P_2 verbindet, ohne das Gebiet, das durch die Flächen $S=\lambda$ überdeckt wird, zu verlassen, und die in jedem ihrer Punkte einen hinreichend kleinen Winkel mit der durch eben diesen Punkt gehenden geodätischen Gefällkurve macht, ist nach unseren Voraussetzungen $E>0$, sodass nach (51) die Relation $J>(S_2-S_1)$ gilt. Hieraus und aus (52) folgt $J>I$, womit das erste Problem des § 7 gelöst ist.

24. Für die meisten Randbedingungen, die sich gewöhnlich darbieten, entstehen aber gewisse Schwierigkeiten dadurch, dass man oft gezwungen ist als Anfangsfläche S_1 ein Gebilde von kleinerer als n^{ter} Dimension zu wählen. Das Gebiet in dem die Flächen $S=\lambda$ regulär sind überdeckt in diesem Falle nur einen Teil einer jeden Umgebung von P_1 und es ist gewöhnlich unmöglich von der Vergleichskurve γ festzustellen, ob sie in der Nähe von P_1 im Inneren des eben erwähnten Gebietes bleiben oder nicht.

Man bedient sich dann am einfachsten eines Kunstgriffes, den Herr L. Tonelli vor kurzem erfunden hat.[1] Er besteht kurz gesagt darin, dass man auf der Vergleichskurve γ einen Punkt Q zwischen P_1 und P_2 wählt, so dass der

[1] Sul problema isoperimetrico con un punto terminale mobile. (Mem. R. Accad. Bologna (7) Vol. 10, 1922—23.)

Teil von γ zwischen Q und P_2 im Inneren des Gebietes verläuft, der durch die Flächen $S=\lambda$ überdeckt wird. Durch den Punkt Q geht dann eine Gefällkurve e_Q dieser Flächenschar und man beweist, dass, wenn Q hinreichend nahe an P_1 gewählt worden ist, das Stück von γ zwischen P_1 und Q in eine Schar von geodätisch äquidistanten Flächen $\overline{S}(t, x_i)=\lambda$ eingebettet werden kann, die eine volle Umgebung von P_1 enthält, deren eine Gefällkurve gerade e_Q ist und für welche ausserdem die Funktion $\overline{S}(t, x_i)$ längs der singulären Fläche S_1 konstant ist. Behandelt man dann, mit Hülfe der Formel (51) jedes der beiden Stücke der Vergleichskurve γ getrennt, so erhält man schliesslich das Resultat, auf welches es ankommt.

KAPITEL II.

Die kanonischen Koordinaten.[1]

25. **Definition.** Wir setzen, wie früher:

$$M(t, x_i, \dot{x}_i, \mu_{k'}) = L(t, x_i, \dot{x}_i) + \sum_{k'} \mu_{k'} G_{k'}(t, x_i, \dot{x}_i)$$

und betrachten ein vollständiges Linienelement unseres Problems, für welches die Nebenbedingungen $G_{k'}=0$ erfüllt sind, und die Determinante

$$D(0)=\begin{vmatrix} M_{\dot{x}_i\dot{x}_j}, & \dfrac{\partial G_{k'}}{\partial \dot{x}_i} \\ \dfrac{\partial G_{m'}}{\partial \dot{x}_j}, & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{53}$$

ist, woraus übrigens schon folgt, dass der Rang der Matrix (2) gleich p sein muss.

Die Determinante (53) ist die Funktionaldeterminante der $(n+p)$ Funktionen $M_{\dot{x}_i}$, $G_{m'}$ nach den $\dot{x}_j$ und $\mu_{k'}$; aus der Ungleichheit (53) folgt also, dass das Gleichungssystem

$$y_i = M_{\dot{x}_i},\ z_{m'} = G_{m'} = M_{\mu_{m'}} \tag{54}$$

nach den $\dot{x}_j$ und $\mu_{k'}$ aufgelöst werden kann. Wir erhalten auf diese Weise die Gleichungen

$$\begin{cases} \dot{x}_j = \Phi_j(t, x_i, y_i, z_{m'}) \\ \mu_{k'} = X_{k'}(t, x_i, y_i, z_{m'}) \end{cases} \tag{55}$$

[1] Die meisten Resultate dieses Kapitals hat schon Herr J. HADAMARD in seinen Leçons sur le Calcul des Variations (Paris. Hermann, 1910) p. 217—280 in einem etwas verschiedenen Zusammenhang entwickelt.

Um die Nebenbedingungen $G_{m'}=0$ auszudrücken, brauchen wir blos die $z_{m'}=0$ zu setzen, und die Gleichungen (55) lehren uns dann, dass wir unser vollständiges Linienelement mit Hülfe der $(2n+1)$ Grössen (t, x_i, y_i) charakterisieren können, die wir die *kanonischen Koordinaten* dieses Linienelements nennen wollen.

Die Ausführungen des § 17 zeigen ausserdem, dass die Werte der kanonischen Koordinaten eines vollständigen Linienelements unverändert bleiben, falls wir unser Variationsproblem durch ein äquivalentes ersetzen.

26. **Die Hamiltonsche Funktion.** Wir bilden jetzt mit Hülfe der Gleichung

$$\mathsf{H}(t, x_i, y_i, z_{m'}) = -M + \sum_j \dot{x}_j y_j + \sum_{k'} \mu_{k'} z_{k'} \tag{56}$$

in deren rechten Seite wir für $\dot{x}_j$ und $\mu_{k'}$ die Werte (55) einsetzen die Legendresche Transformierte von M. Nach den bekannten Formeln der Legendreschen Transformation folgt nun:

$$\mathsf{H}_t = -M_t, \quad \mathsf{H}_{x_i} = -M_{x_i}, \quad \mathsf{H}_{y_j} = \dot{x}_j, \quad \mathsf{H}_{z_{k'}} = \mu_{k'}. \tag{57}$$

Endlich definieren wir eine Funktion $H(t, x_i, y_i)$ durch die Gleichung

$$H(t, x_i, y_i) = \mathsf{H}(t, x_i, y_i, 0). \tag{58}$$

Bemerken wir dass jedes mal, wo alle $z_{k'}$ verschwinden,

$$H_t = \mathsf{H}_t, \quad H_{x_i} = \mathsf{H}_{x_i}, \quad H_{y_i} = \mathsf{H}_{y_i}$$

ist, so folgt aus den Gleichungen (57), für alle Linienelemente für welche die Nebenbedingungen $G_{k'}=0$ bestehen,

$$H_t = -M_t, \quad H_{x_i} = -M_{x_i}, \quad H_{y_i} = \dot{x}_i. \tag{59}$$

Die Funktion H hätten wir direkt berechnen können, ohne die Funktion H aufzustellen. Hierzu braucht man nur $\dot{x}_j$ und $\mu_{k'}$ aus den Gleichungen

$$y_i = M_{\dot{x}_i}, \quad 0 = G_{m'} \tag{60}$$

auszurechnen; man erhält mit Berücksichtigung von (55)

$$\begin{cases} \dot{x}_j = \Phi_j(t, x_i, y_i, 0) = \varphi_j(t, x_i, y_i), \\ \mu_{k'} = X_{k'}(t, x_i, y_i, 0) = \chi_{k'}(t, x_i, y_i). \end{cases} \tag{61}$$

Dann ist

$$H(t, x_i, y_i) = -M(t, x_j, \varphi_j, \chi_{k'}) + \sum_j y_j \varphi_j, \tag{62}$$

und die Gleichungen (59) besagen, dass die Formeln der Legendreschen Transformation auch dann erhalten bleiben, wenn die Nebenbedingungen $G_{k'}=0$ vorhanden sind, ein Resultat, das auch leicht direkt verifiziert werden kann.

Die Funktion $H(t, x_i, y_i)$ heisst die *Hamiltonsche Funktion unseres Problems;* sie bleibt invariant, wenn man das Problem durch ein äquivalentes ersetzt (§ 17). *Es ist nun sehr bemerkenswert, dass man alle Daten unseres Problems aus der Funktion H allein (und ihren Ableitungen) gewinnen kann.*

27. **Die Lengendresche Bedingung in kanonischen Koordinaten.** Wir beginnen damit die Determinante $D(\varrho)$, die wir im § 16 betrachtet haben, mit Hülfe der Ableitungen von H auszudrücken. Zu diesem Zwecke bemerken wir, dass nach der Definition der Funktionen (55) die Funktionaldeterminante (53) mit der inversen Determinante

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi_j}{\partial y_m}, & \dfrac{\partial \Phi_j}{\partial z_{h'}} \\[2ex] \dfrac{\partial X_{k'}}{\partial y_m}, & \dfrac{\partial X_{k'}}{\partial z_{h'}} \end{vmatrix} \tag{63}$$

komponiert gleich der Einheitsdeterminante

$$\begin{vmatrix} \delta_{im}, & 0 \\ 0, & \delta_{m'h'} \end{vmatrix}$$

ist. Wenn man also die Determinante (38) mit (63) komponiert, so bekommt man

$$\begin{vmatrix} \delta_{im} - \varrho \dfrac{\partial \Phi_i}{\partial y_m}, & 0 \\[2ex] 0, & \delta_{m'h'} \end{vmatrix}.$$

Bemerkt man endlich, dass wegen (55) und (59) die Relationen $\Phi_i = H_{y_i}$ bestehen, so erhält man schliesslich

$$D(\varrho) = D(0) \left| \delta_{ij} - \varrho H_{y_i y_j} \right|. \tag{64}$$

Die Legendresche Bedingung besteht also in der Aussage, dass sämtliche Wurzeln der Gleichung in ϱ

$$|\delta_{ij} - \varrho\, H_{y_i y_j}| = 0 \tag{65}$$

positiv sein sollen.

28. **Die E-Funktion in kanonischen Koordinaten.** Es seien t, x_i, y_i und t, x_i, y'_i die kanonischen Koordinaten von zwei vollständigen Linienelementen, die durch denselben Punkt gehen. Wegen der Gleichungen (59), (62) und (54) können wir schreiben:

$$M = -H + \sum_i H_{y_i} y_i$$

$$M' = -H' + \sum_i H'_{y'_i} y'_i$$

$$\sum_i M_{\dot{x}_i}(\dot{x}'_i - \dot{x}_i) = \sum_i y_i (H'_{y'_i} - H_{y_i}).$$

Durch Vergleichung mit (29) haben wir dann

$$E = H - H' - \sum_i H'_{y'_i}(y_i - y'_i). \tag{66}$$

Dieser Ausdruck ist genau wie der Ausdruck (29) gebaut und wir erhalten durch eine ähnliche Schlussweise, wie im § 13

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \tilde{H}_{y_i y_j} (y'_i - y_i)(y'_j - y_j). \tag{67}$$

Von diesem letzten Ausdruck ausgehend kann man, ähnlich wie in den §§ 14—15, schliessen, dass die Legendresche Bedingung erfüllt ist, wenn alle nicht verschwindenden Wurzeln der Gleichung in σ

$$|H_{y_i y_j} - \delta_{ij}\, \sigma| = 0 \tag{68}$$

positiv sind. Man sieht sofort ein, indem man $\sigma = \frac{1}{\varrho}$ setzt, dass diese letzte Bedingung äquivalent ist mit derjenigen, die wir im vorigen Paragraphen aufgestellt haben.

29. **Die Bedingung für die geodätische Äquidistanz.** Die Gleichungen (25), die den geodätischen Gradienten einer Flächenschar definieren, lauten in unseren kanonischen Koordinaten:

$$\Delta y_i = M S_{x_i}. \tag{69}$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit $\dot{x}_i$ und summiert über i, so erhält man mit Berücksichtigung von (21)

$$\Delta . \sum_i y_i \dot{x}_i + M . S_t = M . \Delta,$$

oder, wegen (62),

$$\Delta . H = -M . S_t. \tag{70}$$

Aus (69) und (70) folgt nun, falls man beachtet, dass $\Delta \neq 0$ ist:

$$H S_{x_i} + y_i S_t = 0. \tag{71}$$

Mit noch grösserer Leichtigkeit lassen sich die Gleichungen (48) für die geodätische Äquidistanz der Flächen der Schar $S = \lambda$ mit Hülfe der kanonischen Koordinaten aufstellen; man erhält das System

$$S_{x_i} = y_i, \quad S_t + H(t, x_i, y_i) = 0. \tag{72}$$

In den Relationen (71) *für die Bestimmung des geodätischen Gradienten und* (72) *für die geodätische Äquidistanz gehen die Nebenbedingungen* $G_{k'} = 0$ *nicht mehr ein.*

Insbesondere lässt sich die Integration der Differentialgleichungen (72) genau so führen wie für den gewöhnlichen Fall ohne Nebenbedingungen. Die gewöhnliche Methode der Charakteristiken von Cauchy führt hier auch zum Ziel.[1] Das Hauptresultat besteht darin, dass unsere Gefällkurven mit den Cauchyschen Charakteristiken zusammenfallen, und Lösungen der kanonischen Differentialgleichungen

$$\dot{x}_i = H_{y_i}, \quad \dot{y}_i = -H_{x_i} \tag{73}$$

[1] Siehe z. B. die Darstellung, die ich in der von R. v. MISES herausgegebenen 7ten Auflage der Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik von RIEMANN-WEBER (Braunschweig, Vieweg, 1925), p. 189—198 von diesen Dingen gegeben habe.

sind, die in der Mechanik eine so bedeutende Rolle spielen. Wir brauchen bei diesen bekannten Dingen nicht länger zu verweilen. Dagegen wollen wir sehen, wie sich bei der Funktion H die Tatsache ausdrückt, dass wir von einem Variationsproblem mit p Differentialgleichungen als Nebenbedingungen ausgegangen sind.

30. **Eigenschaften der Hamiltonschen Funktion.** Wir gehen von der Bemerkung aus, dass die Determinante (63), die mit $D(0)$ multipliziert gleich Eins ist (§ 27), sicher von Null verschieden ist. Dies können wir schreiben, indem wir $\Phi_i = H_{y_i}$ beachten,

$$\begin{vmatrix} H_{y_j y_m}, & \dfrac{\partial \Phi_j}{\partial z_{h'}} \\ \dfrac{\partial X_{k'}}{\partial y_m}, & \dfrac{\partial X_{k'}}{\partial z_{h'}} \end{vmatrix} \neq 0;$$

aus der letzten Relation folgt aber sofort, dass der Rang der Determinante

$$(74) \qquad \left| H_{y_i y_j} \right|$$

mindestens $(n-p)$ ist.

Anderseits folgt aus den Ausführungen des § 26, dass

$$G_{k'}(t, x_i, H_{y_i}) \equiv 0$$

ist; wenn wir diese Gleichung nach y_j differenziieren erhalten wir die Gleichungen

$$\sum_i \frac{\partial G_{k'}}{\partial x_i} H_{y_i y_j} = 0.$$

Da die Matrix der $\dfrac{\partial G_{k'}}{\partial x_i}$ nach Voraussetzung den Rang p hat, lehren uns die letzten Gleichungen, dass zwischen den Zeilen der Determinante (74) p von einander unabhängige, lineare, homogene Beziehungen bestehen, und dass infolgedessen der Rang dieser Determinante *höchstens* gleich $(n-p)$ ist.

Aus diesen Betrachtungen folgt, dass der Rang von (74) *genau* gleich $(n-p)$ ist und wir wollen nunmehr zeigen, dass diese Eigenschaft charakteristisch dafür ist, dass die Funktion H die Hamiltonsche Funktion eines Variationsproblems mit p Differentialgleichungen als Nebenbedingungen sei.

31. Dazu wollen wir beweisen, dass wenn H eine beliebige Funktion der t, x_i, y_i bedeutet, für welche die Hessesche Determinante (74) den Rang $(n-p)$

besitzt, wir Funktionen L und Nebenbedingungen $G_{k'}=0$ konstruieren können, deren Hamiltonsche Funktion mit der gegebenen zusammenfällt. Da alle äquivalenten Probleme dieselbe Hamiltonsche Funktion besitzen, wird es genügen, ein bestimmtes unter diesen Problemen aufzufinden.

In der Algebra wird nun bewiesen, dass eine *symmetrische* Determinante vom Range $(n-p)$ mindestens eine nicht verschwindende Hauptunterdeterminante von der Ordnung $(n-p)$ enthält.[1] Eine Hauptunterdeterminante ist bekanntlich eine Unterdeterminante, die man durch wegstreichen von Zeilen und Kolonnen, die sich auf der Hauptdiagonale kreuzen, erhält.

Nach unseren Voraussetzungen über den Rang von (74) können wir also die Bezeichnungen derart wählen, dass die Relation

$$|H_{y_{i''} y_{j''}}| \neq 0 \tag{75}$$

erfüllt sei. Infolgedessen können wir die $(n-p)$ Gleichungen

$$\dot{x}_{j''} = H_{y_{j''}}(t, x_i, y_i) \tag{76}$$

nach den $(n-p)$ Grössen $y_{i''}$ auflösen und erhalten auf diese Weise die Relationen

$$y_{i''} = \omega_{i''}(t, x_i, \dot{x}_{j''}, y_{k'}). \tag{77}$$

Da nun andererseits alle $(n-p+1)$-reihigen Unterdeterminanten von (74) identisch verschwinden, werden die Funktionen, die man durch Einsetzen der Werte $\omega_{i''}$ der $y_{i''}$ in die $H_{y_{k'}}$ erhält, *unabhängig sein von den* $y_{k'}$. Führt man diese Substitutionen in den p Gleichungen

$$\dot{x}_{k'} = H_{y_{k'}}$$

aus, so erhält man p Relationen

$$\Gamma_{k'}(t, x_i, \dot{x}_i) = \dot{x}_{k'} - \psi_{k'}(t, x_i, \dot{x}_{j''}) = 0, \tag{78}$$

die die Nebenbedingungen des gesuchten Problems in der Form (15) darstellen.

32. Wir berechnen nun das totale Differential der Funktion

---

[1] S. z. B. MAX. BÔCHER, *Introduction to higher Algebra* (Macmillan, New York 1907), § 20, p. 56.

$$(79)\qquad \bar{L} = -H(t, x_i, y_{k'}, \omega_{j''}) + \sum_{k'} \psi_{k'} y_{k'} + \sum_{j''} \dot{x}_{j''} \omega_{j''}$$

und erhalten

$$(80)\qquad d\bar{L} = \left(-H_t + \sum_{k'} y_{k'} \frac{\partial \psi_{k'}}{\partial t}\right) dt + \sum_i \left(-H_{x_i} + \sum_{k'} y_{k'} \frac{\partial \psi_{k'}}{\partial x_i}\right) dx_i + \sum_{j''} \left(\omega_{j''} + \sum_{k'} y_{k'} \frac{\partial \psi_{k'}}{\partial \dot{x}_{j''}}\right) d\dot{x}_{j''},$$

wenn wir bemerken, dass die Koeffizienten der übrigen Glieder

$$\sum_{k'} (-H_{y_{k'}} + \psi_{k'}) \, dy_{k'} + \sum_{j''} (-H_{y_{j''}} + \dot{x}_{j''}) \, d\omega_{j''}$$

nach dem Vorigen identisch verschwinden müssen. Die Gleichung (80) lehrt uns nun, dass $\bar{L}$ eine Funktion der $(2n-p+1)$ Grössen $t, x_i, \dot{x}_{i''}$ allein ist, und von den p Grössen $y_{k'}$ unabhängig ist. Hieraus folgt insbesondere, dass die $\omega_{j''}$ *lineare* Funktionen der $y_{k'}$ sein müssen, denn man kann aus (80) entnehmen:

$$(81)\qquad \omega_{j''} = \bar{L}_{\dot{x}_{j''}} - \sum_{k'} y_{k'} \frac{\partial \psi_{k'}}{\partial \dot{x}_{j''}},$$

und $\bar{L}_{\dot{x}_{j''}}$, $\frac{\partial \psi_{k'}}{\partial \dot{x}_{j''}}$ sind unabhängig von $y_{k'}$. Ferner folgt dann aus (79), dass die Funktion $H(t, x_i, y_{k'}, \omega_{j''})$ ebenfalls eine lineare Funktion der $y_{k'}$ ist.[1]

33. Wir wollen nun zeigen, dass die Hamiltonsche Funktion von $\bar{L}$, wenn man die Nebenbedingungen $\Gamma_{k'} = 0$ berücksichtigt, mit der gegebenen Funktion H zusammenfällt.

Zu diesem Zwecke setzen wir

$$(82)\qquad \bar{M} = \bar{L} + \sum_{k'} \mu_{k'} \Gamma_{k'}$$

[1] Diese Tatsache besagt, dass die Figuratrix unseres Problems eine abwickelbare Fläche ist. S. HADAMARD, l. c. p. 266.

und

(83) $$\bar{y}_i = \bar{\bar{M}}_{\dot{x}_i}.$$

Hieraus folgt erstens, wenn wir bemerken, dass $\bar{L}$ von den $\dot{x}_{k'}$ nicht abhängt und wenn wir die Gestalt (78) der $\Gamma_{k'}$ berücksichtigen

(84) $$\bar{y}_{k'} = \bar{\mu}_{k'}.$$

Zweitens folgt mit Hülfe von (80) und (78)

$$\bar{y}_{j''} = \bar{\bar{M}}_{\dot{x}_{j''}} = \omega_{j''}(t, x_i, \dot{x}_{m''}, y_{k'}) + \sum_{k'} (y_{k'} - \bar{\mu}_{k'}) \frac{\partial \psi_{k'}}{\partial \dot{x}_{j''}}.$$

Nun ist aber $\bar{\bar{M}}_{\dot{x}_{j''}}$ von $y_{k'}$ unabhängig und die rechte Seite der letzten Gleichung behält ihren Wert, wenn wir für $y_{k'}$ irgendwelche Werte einsetzen. Wir schreiben z. B.

$$y_{k'} = \bar{\mu}_{k'} = \bar{y}_{k'}$$

und erhalten

(85) $$\bar{y}_{j''} = \omega_{j''}(t, x_i, \dot{x}_{m''}, \bar{y}_{k'}).$$

Die Funktionaldeterminante der $\omega_{j''}$ nach den $\dot{x}_{m''}$ ist nach der Definition der $\omega_{j''}$ gleich der Inversen von (75) und also $\neq 0$. Man kann also aus den letzten Gleichungen zu denen man (78) und (84) hinzufügt die $\dot{x}_i$ und die $\mu_{k'}$ als Funktionen der kanonischen Koordinaten $t, x_i, \bar{y}_i$ ausrechnen. Die Determinante, die in unserem Problem der Determinante (53) entspricht, ist also, wie es sein soll $\neq 0$.

Unsere Hamiltonsche Funktion $\bar{H}$ lautet nun:

$$\bar{H}(t, x_i, \bar{y}_i) = -\bar{M} + \sum_i \dot{x}_i \bar{y}_i.$$

Wegen der Nebenbedingungen $\Gamma_{k'} = 0$ können wir in der letzten Gleichung $\bar{M} = \bar{L}$, $\dot{x}_{k'} = \psi_{k'}$ setzen und erhalten

$$\bar{H} = -\bar{L} + \sum_{k'} \psi_{k'} \bar{y}_{k'} + \sum_{j''} \dot{x}_{j''} \bar{y}_{j''}$$

oder, mit Hülfe von (79)

$$\overline{H} = H(t, x_i, y_{k'}, \omega_{j''}) + \sum_{k'} \psi_{k'}(\overline{y}_{k'} - y_{k'})$$

$$+ \sum_{j''} \dot{x}_{j''}(\overline{y}_{j''} - \omega_{j''}).$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist aber unabhängig von den $y_{k'}$; wir können also in der rechten Seite $y_{k'} = \overline{y}_{k'}$ setzen, und wir haben endlich, wenn wir (85) berücksichtigen:

$$\overline{H} = H(t, x_i, y_i),$$

d. h. genau die Formel, die wir beweisen wollten.

34. **Die Formeln der Theorie für die Probleme in Parameterdarstellung.** Unsere früheren Ergebnisse lassen sich fast ohne jede neue Rechnung auf Probleme in Parameterdarstellung anwenden, deren Bedeutung für die Variationsrechnung Weierstrass besonders hervorgehoben hat. Hierbei zeigt sich, dass die Behandlung der Variationsprobleme in Parameterdarstellung nur dann als komplizierter gelten könnte, wenn man nicht schon vorher die nötigen Formeln der gewöhnlichen Theorie entwickelt hat.

Wir nehmen also an, dass unsere Funktionen L und $G_{k'}$ nicht von t abhängen und dass L homogen von der ersten Ordnung, die $G_{k'}$ homogen von einer beliebigen Ordnung $\varrho_{k'}$ in den $\dot{x}_i$ seien. Es sollen also für jeden *positiven* Wert eines Parameters λ die Formeln gelten

$$L(x_i, \lambda \dot{x}_i) = \lambda L(x_i, \dot{x}_i), \tag{86}$$

$$G_{k'}(x_i, \lambda \dot{x}_i) = \lambda^{\varrho_{k'}} G_{k'}(x_i, \dot{x}_i); \tag{87}$$

wenn man nach (24)

$$M = L + \sum_{k'} \mu_{k'} G_{k'}$$

setzt, ist also

$$M(x_i, \lambda \dot{x}_i, \lambda^{1-\varrho_{k'}} \mu_{k'}) = \lambda M(x_i, \dot{x}_i, \mu_{k'}). \tag{88}$$

Diese letzte Gleichung liefert, nach $\dot{x}_j$ differentiiert, die Bedingung

$$M_{\dot{x}_j}(x_i, \lambda \dot{x}_i, \lambda^{1-\varrho_{k'}} \mu_{k'}) = M_{\dot{x}_j}(x_i, \dot{x}_i, \mu_{k'}). \tag{89}$$

Ferner erhält man, wenn man (87), (88) und (89) partiell nach λ differentiiert und λ nachträglich gleich Eins setzt,

$$\sum_i \frac{\partial G_{k'}}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i = \varrho_{k'} G_{k'} \tag{90}$$

$$\sum_i M_{\dot{x}_i} \dot{x}_i + \sum_{k'} (1 - \varrho_{k'}) \mu_{k'} G_{k'} = M \tag{91}$$

$$\sum_i M_{\dot{x}_i \dot{x}_j} \dot{x}_i + \sum_{k'} (1 - \varrho_{k'}) \mu_{k'} \frac{\partial G_{k'}}{\partial \dot{x}_i} = 0. \tag{92}$$

35. Aus den Gleichungen (90) und (92) folgt nun sofort, dass die Determinante (53) *identisch* Null ist, sodass unsere ganze bisherige Theorie hinfällig zu werden scheint. Wir bemerken aber, dass wegen der Homogeneitätsbedingungen (86) und (87) der Wert unseres Linienintegrals nur von der Gestalt der Kurve im Raume der x_i, nicht aber von der Wahl des Parameters t abhängt. Das Variationsproblem bleibt also dasselbe, wenn wir z. B. die Länge der Kurve als Parameter wählen, oder, was auf das Gleiche hinauskommt, wenn wir zu den Nebenbedingungen $G_{k'} = 0$ noch die weitere

$$\sum_i \dot{x}_i^2 - 1 = 0 \tag{93}$$

hinzufügen.

Führen wir jetzt die Funktion

$$M^* = M + \frac{\sigma}{2} (\Sigma \dot{x}_i^2 - 1) \tag{94}$$

ein, ebenso wie die kanonischen Koordinaten

$$y_i = M^*_{\dot{x}_i} = M_{\dot{x}_j} + \sigma \dot{x}_i, \tag{95}$$

so können wir aus den Gleichungen (95), (93) und $G_{k'} = 0$ die $\dot{x}_i$, $\mu_{k'}$ und σ als Funktionen von x_i, y_i berechnen. Bezeichnen wir mit $\overline{H}(x_i, y_i)$ die zugeordnete Hamiltonsche Funktion, die nach (62) durch die Gleichung

$$\overline{H} = -M^* + \Sigma \dot{x}_i M^*_{\dot{x}_i}$$

definiert wird, und berücksichtigen sämtliche letzten Gleichungen, sowohl wie die Gleichung (91), so erhalten wir

$$\overline{H}(x_i,\, y_i) = \sigma. \tag{96}$$

36. Wir könnten mit diesem Ergebnis zufrieden sein; wir wollen aber die Bedingung (93), die wir künstlich in unser Problem hineingetragen haben, wieder entfernen. Dazu bemerken wir, dass wenn wir die $\dot{x}_i$ wie üblich durch die Gleichungen

$$\dot{x}_i = \overline{H}_{y_i}$$

berechnen, alle unsere Nebenbedingungen, insbesondere die Gleichung (93), befriedigt sein müssen. Wir erhalten auf diese Weise die Identität

$$\sum_i \overline{H}_{y_i}^2 = 1\,, \tag{97}$$

und ausserdem durch Differentiation nach y_j die Gleichungen

$$\sum_i \overline{H}_{y_i y_j} \overline{H}_{y_i} = 0. \tag{98}$$

Nun folgt aus unserer früheren Theorie, dass die Determinante $|\overline{H}_{y_i y_j}|$ den Rang $(n-p-1)$ besitzt, da wir mit (93) im Ganzen $(p+1)$ Nebenbedingungen berücksichtigen müssen. Hieraus folgt nun weiter, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} \overline{H}_{y_i y_j} & 0 & \overline{H}_{y_i} \\ \overline{H}_{y_j} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

den Rang $(n-p+1)$ hat. Multiplizieren wir nun erstens die n ersten Kolonnen mit $\overline{H}_{y_j}$ und addieren sie zu der vorletzten, und addieren wir zweitens die Summe der n ersten Zeilen, jede mit $\overline{H}_{y_i}$ multipliziert, zu der letzten Zeile, so ändert sich nicht der Rang. Wir erhalten aber, wegen (97) und (98)

$$\begin{vmatrix} \overline{H}_{y_i y_j} & 0 & \overline{H}_{y_i} \\ \overline{H}_{y_j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Wir können jetzt in dieser letzten Formel die Zeile und die Kolonne, die aus lauter Nullen bestehen, streichen, ohne den Rang zu vermindern und sehen, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} \overline{H}_{y_i y_j} & \overline{H}_{y_i} \\ \overline{H}_{y_j} & 0 \end{vmatrix} \tag{99}$$

den Rang $(n-p+1)$ besitzt. Da wir auch alle diese Operationen rückwärts machen können, schliessen wir, dass wenn bei Bestehen der Gleichungen (97) und (98) die Determinante (99) den Rang $(n-p+1)$ besitzt, die Determinante $|\overline{H}_{y_i y_j}|$ den Rang $(n-p-1)$ besitzen muss.

37. Da der Parameter t für unser Problem nur eine Hülfsvariable sein soll, genügt es solche Scharen von geodätisch äquidistanten Flächen zu betrachten, die von t unabhängig sind, d. h. die die Gestalt $S(x_1, \ldots, x_n)=\lambda$ besitzen. Es muss demnach $S_t=0$ sein, und dies in die letzte Gleichung (72) eingesetzt, zeigt, dass wir nur solche vollständige Linienelemente zu betrachten brauchen, für welche die kanonischen Koordinaten die Bedingung

$$\overline{H}(x_i, y_i)=0 \tag{100}$$

erfüllen.

Wir wollen nun zeigen, dass schon die Bedingung (100) allein, nicht etwa die Funktion $\overline{H}$ selbst, charakteristisch für das homogene Variationsproblem des § 34 ist.

Es sei nämlich $H(x_i, y_i)$ eine beliebige Funktion, die gleichzeitig mit $\overline{H}$ verschwindet, ohne dass auf der Fläche $\overline{H}=0$ alle H_{y_i} verschwinden. Nach dem § 3 haben wir dann identisch

$$\overline{H}(x_i, y_i)=A(x_i, y_i) \,.\, H(x_i, y_i), \tag{101}$$

wobei A in allen Punkten in denen H verschwindet $\neq 0$ ist (cf. § 4). Für alle Punkte, in denen (100) gilt, erhält man ferner durch Differentiation von (101)

$$\begin{cases} \overline{H}_{y_i} \;=A \,.\, H_{y_i}, \quad \overline{H}_{x_i}=A \,.\, H_{x_i} \\ \overline{H}_{y_i y_j}=A\, H_{y_i y_j}+A_{y_i} H_{y_j}+A_{y_j} H_{y_i} \end{cases} \tag{102}$$

Wir bemerken nun zunächst, dass die partielle Differentialgleichung für die geodätisch äquidistanten Flächen $\overline{H}(x_i, S_{x_i}) = 0$ stets durch die Gleichung $H(x_i, S_{x_i}) = 0$ ersetzt werden kann.

Ebenso stellen die kanonischen Differentialgleichungen (73) dieselben Kurven im Raume der x_i dar, wenn man $\overline{H}$ durch H ersetzt *und wenn ausserdem das Vorzeichen von H so gewählt worden ist, dass $A > 0$ ist.* Diese letzte Bedingung, die auch bei der Legendreschen Bedingung von Bedeutung ist, soll im Folgenden stets berücksichtigt werden; dann bedeutet einfach der Übergang von $\overline{H}$ zu H, dass man nicht mehr die Länge der Kurven als Parameter nimmt, sondern einen anderen Parameter benutzt, der natürlich von der Wahl von A abhängt.

38. Wir wollen noch kurz die Eigenschaften der Funktionen H besprechen. Die Relationen (102) zeigen in Verbindung mit $A \neq 0$, dass die Determinanten (99) und

$$\begin{vmatrix} H_{y_i y_j} & H_{y_i} \\ H_{y_j} & 0 \end{vmatrix} \tag{103}$$

denselben Rang $(n+1-p)$ haben müssen. Ist umgekehrt H eine Funktion der x_i, y_i, für welche die Determinante (103) den Rang $(n+1-p)$ besitzt, so kann man sie als Hamiltonsche Funktion eines *homogenen* Variationsproblems mit p Differentialgleichungen als Nebenbedingungen ansehen. Man bestimme zunächst die Lösung $\overline{H}(x_i, y_i)$ der partiellen Differentialgleichung

$$\sum_i \left(\frac{\partial U}{\partial y_i}\right)^2 = 1,$$

die gleichzeitig mit H verschwindet, und deren Vorzeichen so gewählt ist, dass in der Gleichung (101), die hier stattfinden muss, $A > 0$ ausfällt.[1] Dann ist nach dem Vorhergehenden der Rang der Determinante (99) gleich $(n+1-p)$ und der Rang der Determinante $|\overline{H}_{y_i y_j}|$ gleich $(n-p-1)$. Die Funktion $\overline{H}$ ist nach den §§ 31—33 die Hamiltonsche Funktion eines Variationsproblems $\overline{L}(x_i, \dot{x}_i)$ mit $(p+1)$ Nebenbedingungen, die man, weil hier die Gleichung (97) nach Konstruktion gilt, ersetzen kann durch p Nebenbedingungen von der Form $\overline{G}_{k'}(x_i, \dot{x}_i) = 0$

[1] Die Funktion $\overline{H}$ kann mit Hülfe von blossen Eliminationen ohne jede Integration berechnet werden.

zugleich mit der Gleichung (93). Nun hat das äquivalente *homogene* Variationsproblem

$$L = \overline{L}\left(x_i, \frac{\dot{x}_i}{\sqrt{\sum_j \dot{x}_j^2}}\right)\sqrt{\Sigma \dot{x}_i^2}$$

mit den äquivalenten homogenen Nebenbedingungen

$$G_{k'}(x_i, \dot{x}_i) = \overline{G}_{k'}\left(x_i, \frac{\dot{x}_i}{\sqrt{\sum_j \dot{x}_j^2}}\right) = 0$$

und der Nebenbedingung (93) dieselbe Hamiltonsche Funktion $\overline{\overline{H}}$. Folglich hat das homogene Variationsproblem mit der Funktion L und den Nebenbedingungen $G_{k'} = 0$ als Hamiltonsche Funktion die gegebene Funktion $H = 0$.

39. Zum Schluss wollen wir die Legendresche und die Weierstrass'sche Bedingung ausrechnen. Nach (64) können wir für das Problem mit der Hamiltonschen Funktion $\overline{\overline{H}}$ setzen:

$$D(\overline{\varrho}) = D(0)\,|\,\delta_{ij} - \varrho\,\overline{\overline{H}}_{y_i y_j}\,|;$$

hieraus entnehmen wir die Formel

$$D(\overline{\varrho}) = -D(0)\begin{vmatrix} \delta_{ij} - \overline{\varrho}\,\overline{\overline{H}}_{y_i y_j}, & 0 \\ \overline{\overline{H}}_{y_j}, & -1 \end{vmatrix}$$

und aus dieser folgt, wegen (97) und (98)

$$D(\overline{\varrho}) = -D(0)\begin{vmatrix} \delta_{ij} - \overline{\varrho}\,\overline{H}_{y_j y_j}, & \overline{H}_{y_j} \\ \overline{\overline{H}}_{y_j}, & 0 \end{vmatrix}.$$

Für das homogene Variationsproblem mit der Hamiltonschen Funktion $H = 0$ haben wir also nach (102)

$$D(\overline{\varrho}) = -D(0)\,A^2\begin{vmatrix} \delta_{ij} - \overline{\varrho}\,A\,H_{y_i y_j}, & H_{y_i} \\ H_{y_i}, & 0 \end{vmatrix}.$$

Da nun nach dem Vorhergehendem $A > 0$ ist, können wir, indem wir $A\overline{\varrho} = \varrho$ setzen, die Legendresche Bedingung in der Weise formulieren, dass wir verlangen, *alle Wurzeln der Gleichung in* ϱ

(104) $$\begin{vmatrix} \delta_{ij}-\varrho H_{y_i y_j}, & H_{y_i} \\ H_{y_j}, & 0 \end{vmatrix}=0$$

sollen positiv sein.

Die Weierstrass'sche E-Funktion für das Problem mit der Hamiltonschen Funktion $\overline{H}$ lautet nach (66)

$$\overline{E}=\overline{H}-\overline{H}'-\sum_i \overline{H}'_{y'_i}(y_i-y'_i).$$

Setzen wir also $\overline{E}=A\,.\,E$, so folgt aus den Gleichungen (102), wenn wir noch berücksichtigen, dass $H=H'=0$ sein muss,

(105) $$E=\sum_i H'_{y'_i}(y'_i-y_i).$$

Die Lengendresche Bedingung, die wir oben aufgestellt haben, kann man ähnlich wie im § 13 ableiten, indem man von (105) ausgeht, und die Nebenbedingungen $H=H'=0$ berücksichtigt.

40. Bei gegebenem homogenen Variationsproblem kann man die Hamiltonschen Funktionen H oder besser die Bedingung $H=0$ berechnen, ohne den Umweg über $\overline{H}$ zu nehmen. Dazu genügt es in den Gleichungen (95) die Grösse $\sigma=0$ zu setzen. Man erhält die Gleichungen $y_i=M_{\dot{x}_i}$ und braucht nur die $\dot{x}_i$ und $\mu_{k'}$ zwischen diesen Gleichungen und den Bedingungen $G_{k'}=0$ zu eliminieren. Dieses ist stets möglich, weil sowohl die $M_{\dot{x}_i}$ wie auch die $G_{k'}$ nur von den Verhältnissen der $\dot{x}_i$ abhängen.

41. **Das Mayersche Problem.** Wenn im homogenen Variationsproblem des § 34 die Funktion L von der Form ist,

(106) $$L=\sum_i \xi_{x_i}\,.\,\dot{x}_i,$$

haben wir ein *Mayersches Problem* vor uns, für welches die vorangehende Theorie zweckmässig ein wenig modifiziert werden muss; hierbei bedeuten die ξ_{x_i} die partiellen Differentialquotienten einer Funktion $\xi(x_i)$ nach den Veränderlichen x_i. Die Gleichungen (95) sind nämlich hier von der Gestalt

(107) $$y_i=\xi_{x_i}+\sum_{k'}\mu_{k'}\frac{\partial G_{k'}}{\partial \dot{x}_i}+\sigma\,\dot{x}_i.$$

Setzt man nun

$$\eta_i = y_i - \xi_{x_i} \tag{108}$$

und berechnet nach dem § 35 die Funktion $\overline{H} = \sigma$, so erhält man

$$\overline{H}(x_i, y_i) = \overline{K}(x_i, \eta_i); \tag{109}$$

ausserdem folgt aus (107), dass die Funktion $\overline{K}$ der Bedingung

$$\overline{K}(x_i, \lambda\eta_i) = \lambda\overline{K}(x_i, \eta_i) \tag{110}$$

genügen muss. Hieraus folgt durch Differentiation nach λ

$$\sum_i \overline{K}_{\eta_i} \cdot \eta_i = \overline{K}; \tag{111}$$

ist nun eine Funktion $K(x_i, \eta_i)$ durch die Gleichung $\overline{K} = A \cdot K$ definiert, wobei wieder $A > 0$ sein möge, so entnimmt man aus (111) für alle Punkte des Raumes der (x_i, η_i) in denen $\overline{K} = 0$ ist,

$$\sum_i K_{\eta_i} \cdot \eta_i = 0. \tag{112}$$

42. Die partielle Differentialgleichung $H(x_i, S_{x_i}) = 0$ für die geodätisch äquidistanten Flächen kann hier mit Berücksichtigung von (108) geschrieben werden:

$$K(x_i, S_{x_i} - \xi_{x_i}) = 0. \tag{113}$$

Setzt man nun $T(x_i) = S - \xi$, so erhalten wir statt (113) eine partielle Differentialgleichung

$$K(x_i, T_{x_i}) = 0, \tag{114}$$

die durch die Nebenbedingungen $G_{k'} = 0$ allein bestimmt wird, und von der Wahl der Funktion ξ ganz unabhängig ist.

Die kanonischen Differentialgleichungen für die Cauchyschen Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung (114) lauten

$$\dot{x}_i = K_{\eta_i}, \qquad \dot{\eta}_i = -K_{x_i}. \tag{115}$$

Sie fallen mit den Extremalen unseres Mayerschen Variationsproblems für ein beliebig vorgeschriebenes ξ zusammen; diese erhält man nämlich aus (113) mit Hülfe der Gleichungen

$$\dot{x}_i = H_{y_i} = K_{\eta_i},$$

$$\dot{y}_i = -H_{x_i} = -K_{x_i} + \sum_j K_{\eta_j} \xi_{x_i x_j},$$

und diese letzten Gleichungen können geschrieben werden:

$$\dot{y}_i - \frac{d}{dt}\xi = -K_{x_i}.$$

Die Extremalen (115) unseres Variationsproblems liegen auf den Flächen T=const. Längs dieser Extremalen ist nämlich $\eta_i = T_{x_i}$, $\dot{x}_i = K_{\eta_i}$, sodass die Gleichung (112) die Gestalt annimmt:

$$\sum_i T_{x_i} \dot{x}_i = 0,$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

43. Nun sei P irgend ein Punkt einer der Flächen T=const, z. B. der Fläche $T=0$; wir bezeichnen mit $S(x_1, \ldots, x_n)=0$ eine Fläche, die die Fläche $T=0$ im Punkte P schneidet aber nicht berührt. Setzen wir nun $\xi = S - T$, so sind die Flächen $S=\lambda$ für unser Variationsproblem geodätisch äquidistant. Ist nun die Legendresche Bedingung für dieses Variationsproblem befriedigt, so folgt aus den Überlegungen des ersten Kapitels, dass für alle Vergleichskurven, die den Nebenbedingungen $G_{k'}=0$ genügen, und den Punkt P mit einem Punkte Q einer Fläche $S=S_2$ verbinden $\xi(Q)$ einen grösseren Wert hat als im Punkte der Extremalen, der auf S_2 liegt. Da aber diese Extremale auf $T=0$ verläuft, können wir schreiben

$$\xi(Q) = S(Q) - T(Q) > S_2,$$

und da $S(Q)=S_2$ ist, folgt hieraus $T(Q)<0$. *Die Vergleichskurven verlaufen also stets auf der einen Seite der Fläche $T=0$, und man kann die Extremalen (115) benutzen, um die Begrenzung des Gebietes A zu bestimmen, das wir im § 7 erwähnt haben.*

44. Jede Funktion $K(x_i, \eta_i)$, die homogen erster Ordnung in den η_i ist, ist für ein Mayersches Variationsproblem charakteristisch. Die Anzahl p der Differentialgleichungen $G_{k'}=0$, kann nämlich berechnet werden, wenn man bemerkt, dass der Rang der Determinante

$$\begin{vmatrix} K_{\eta_i \eta_j}, & K_{\eta_i} \\ K_{\eta_j}, & 0 \end{vmatrix}$$

gleich $(n+1-p)$ sein muss, und die Legendresche Bedingung ist erfüllt, wenn alle Wurzeln der Gleichung in ϱ

$$\begin{vmatrix} \delta_{ij}-\varrho K_{\eta_i \eta_j}, & K_{\eta_i} \\ K_{\eta_j}, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

positiv sind.

45. Die von einem Punkt P ausgehenden Extremalen eines Mayerschen Problems füllen höchstens, wie es sein soll, eine $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit B aus. In der Tat stellen, wegen der Homogeneitätsbedingung (110) für K, aus welcher eine ähnliche Bedingung für die K_{x_i} folgt, die Lösungen des Gleichungssystems (115) dieselbe Kurve dar, wenn man bei Festhalten der Anfangswerte der x_i, die Anfangswerte der η_i mit einem beliebigen Parameterwert λ multipliziert.

Die Dimension der Mannigfaltigkeit B kann aber niedriger sein. Dies findet z. B. statt, wenn die Differentialgleichungen $G_{k'}=0$ durch äquivalente $\overline{G}_{k'}=0$ ersetzt werden können, unter welchen sich *vollständige Differentiale* befinden.

Inhaltsverzeichnis.