5

RAPPORT D'ÉVALUATION DES MÉTHODES DE CALCUL DES LONGUES LIGNES DÉFINIES SUR LE SPHÉROÏDE TERRESTRE

M. Dupuy
Ingénieur Géographe, Dr. ès Sciences
Institut Géographique National, Paris

INTRODUCTION

La recommandation faite à l'Assemblée Générale de Rome, en 1954 . . . ' d'établir un guide pour les méthodes de calcul des longues lignes, en tenant compte de la latitude, de l'azimut, et de la précision globale ' . . . a provoqué une correspondance suivie des Membres du Groupe d'Etudes n° 2 (. . . de la Commission des Triangulations . . .) entre eux, et de ceux-ci avec un organisme officiel américain, l'ACIC (Aeronautical Chart and Information Center), lequel, à la même époque, entreprenait l'étude du problème par la voie de l'expérimentation numérique directe.

Le simple fait qu'une telle étude ait été entamée par un Service avant tout intéressé aux applications pratiques de cette branche de la Géodésie paraît démontrer l'opportunité de la recommandation fait à Rome; en outre, ces recherches américaines ont efficacement contribué à dégager les points sur lesquels le Groupe d'Etudes devrait porter sa particulière attention dans son propre travail.

Les buts de celui-ci pouvaient donc être définis comme il suit:

(1) réaliser une classification claire des meilleures solutions actuelles du problème des longues lignes;

(2) décrire les caractéristiques de ces solutions eu égard à . . .
   (a) la précision atteinte;
   (b) le nombre et la nature des opérations numériques nécessaires;
   (c) les possibilités d'adaptation au Calcul Electronique.

(3) aboutir à des recommandations explicites, à l'intention des usagers, les orientant dans la recherche de la (ou des . . .) méthode (s) optimum, pour chaque famille de problèmes.

Un rapport dans ce sens a été entrepris pour le Groupe d'Etudes n° 2 par M. Dupuy, qui s'est servi à cette fin des belles analyses déjà effectuées par MM. Ross, Rainsford, Dufour, et par l'ACIC, sur le même sujet.

Il paraît opportun de donner ci-après le sommaire des conclusions atteintes à la date actuelle.

RÉSULTATS GÉNÉRAUX

(1) La solution ' de référence ' est le calcul de la ' *géodésique vraie* ', qui comprend:

(a) une recherche ' d'appoint de longitude ' ψ;

(b) un calcul sphérique complet, à partir des latitudes paramétriques (ou latitudes ' réduites ') et de la longitude augmentée $(L + \psi)$;

(c) un calcul d'arc géodésique, qui revient pratiquement au calcul d'un arc d'ellipse.

Cette solution a été abondamment étudiée, et l'on peut en citer, à l'heure actuelle, au moins trois versions satisfaisantes,* qui fournissent des résultats absolument rigoureux. La plus rapide d'entre celles-ci (Sodano) comporte une centaine d'opérations numériques (en comptant les interpolations au poids *deux*) soit, pour un calculateur bien entraîné disposant d'une bonne machine à calculer de bureau moderne, environ une heure de travail ininterrompue.

Il existe, d'autre part, certains aspects simplifiés de cette solution fondamentale† qui, aux portées du Shoran, fournissent des résultats exacts en 80 opérations environ avec un schéma de calculs aisé.

(2) On connaît, à côté de la ' géodésique vraie ', diverses solutions ' approchées ', fournissant des résultats *pratiquement satisfaisants* à diverses distances. On entend par là que leurs écarts (ou erreurs), tant en distance qu'en azimuts, sont pleinement acceptables, compte tenu de la précision de mesure, et de la qualité de définition physique, de ces trois éléments.

Toutes ces solutions, pour être utilisables aux plus grandes distances, comportent, par essence, un calcul complet de trigonométrie sphérique. Aussi les nommerons-nous, dans ce rapport, d'une manière générale, ' solutions sphériques '.

Citons parmi elles:

(i) les *sections planes* (. . . de l'ellipsoïde), c'est-à-dire:

(a) la Grande Section Géocentrique, solution facile à mettre en œuvre, satisfaisante aux moyennes et faibles portées‡ en ce qui concerne le calcul de la distance seule—les azimuts sont imprécis —(soixante opérations numériques environ);

(b) *les Sections Normales*, fournissant une excellente approximation de la distance, ainsi que de bons azimuts, à ces portées.§

* Deux solutions par itération numérique; trigonométrique ou par fonctions de Wallis; solution de Sodano.

† Par exemple les solutions (4) (5) (6) du Tableau récapitulatif ci-après.

‡ Nous entendons par ' moyennes ' les portées qui correspondent à des liaisons directes de point à point physiquement réalisables, au moment présent, par des aéronefs ou des téléguidés; ainsi que les portées des aides à la Navigation classiques du type LORAN et DECCA: soit une limite supérieure de 8000 km environ (5000 miles anglais).

§ Pour donner une idée concrète de l'approximation obtenue signalons que l'écart linéaire est, par la section normale, encore *rigoureusement négligeable* à 2000 km ($<$ 1 mm); l'écart angulaire, par la section normale, est de l'ordre de $1''$ à 800 km (pour le cas le plus defavorable: $\varphi \simeq 45°$, $\alpha_1 \simeq 45°$).

Avec la grande ellipse géocentrique, la précision relative du 1 millionième sur la distance est encore obtenue à 8000 km.

Les versions ' rigoureuses ' de cette solution (qui englobent notamment un calcul complet et rigoureux de l'arc d'ellipse) ne semblent pas avoir jusqu'à présent atteint un degré suffisant de simplicité (quatre-vingt-dix-neuf opérations dans la solution de Rudoe; un nombre légèrement inférieur dans la méthode dite de ' l'angle rectifiant ' élaborée à l'Ohio State University).

L'approximation mise au point, pour le calcul de la distance, par Cole, est simple et d'une précision satisfaisante aux basses portées (inférieures à 1000 km); associée aux formules de Helmert—ou de Robbins—pour les azimuts, elle constitue une solution rapide (soixante opérations numériques) de la Section Normale—donc, une excellente approximation de la solution géodésique vraie . . . pour cette gamme de distances.

(ii) Les *représentations conformes* sur la sphère, parmi lesquelles . . .

(a) la solution dite ' de la *sphère conforme* ', très aisée d'application et précise en ce qui concerne les distances, capable de fournir aussi des azimuts très approchés (par les formules de l'Ingénieur Dufour), mais au prix d'un travail notable aux distances élevées:
(quatre-vingt opérations pour le calcul complet—quarante pour la distance seule).

(b) des solutions basées sur une correspondance conforme ellipsoïde—sphère localisée dans une zone, et, dans cette zone, très sensiblement plus ' serrée ' que la précédente. Telle est la projection dite ' 2^{me} *représentation de* Gauss ' (sur la sphère de courbure totale . . .)—dont la méthode dite de l'aposphère est un aspect particulier—ainsi qu'un nouveau procédé encore inédit:
la méthode de la *sphère trisécante*, proposée par le Géodésien français Clos-Arceduc, et qui étend la représentation conforme sur une zone plus ample, tout en conservant un schéma général de calculs voisin de celui de la méthode précédente.

La clé de l'efficacité, pour de telles solutions, est la rapidité du passage des données sphéroïdiques aux données sphériques (latitudes et angle polaire . . .) . . . correspondantes; passage pour lequel on tendra à établir des tables spéciales.

Ces méthodes, ainsi équipées, ressortiront à une somme d'environ quarante-cinq opérations numériques pour le calcul complet de la distance et des azimuts.

(iii) Les classiques formules d'Andoyer et de Lambert, donnant une distance géodésique approchée et (Lambert . . .) des évaluations des azimuts, peuvent être considérées comme une heureuse approximation des résultats de la solution ' géodésique vraie ' (dont elles sont, essentiellement, dérivées . . .). L'écart de distance, qui ne peut être exprimé par aucune formule simple, demeure pratiquement minime dans toute la gamme des portées habituelles (cet écart a été trouvé inférieur à 1 millionième, ou moins, pour trente-six (36) lignes types, comprises entre 800 et 5000 km calculées par l'ACIC).

Le calcul de la distance selon la formule de LAMBERT est particulièrement recommandable, si l'on dispose des tables spéciales qui ont été construites dans ce but (par l'Hydrographic Office des U.S.) et qui en font la méthode la plus rapide pour le calcul très approché des distances aux grandes portées: une trentaine (30) d'opérations numériques seulement.

L'application des formules complètes de LAMBERT—donnant distance et azimuts—sans recourir à des tables spéciales—implique 65 opérations numériques environ.

(3) Il convient de mentionner, pour terminer, trois groupes de solutions qui sont—(comme c'était par exemple le cas pour la solution de Cole-Robbins)—à la fois approchées (non rigoureuses . . .) par leur nature, et limitées à un rayon de validité restreint. Telles sont:

(i) les méthodes en coordonnées planes rectangulaires (représentations conformes . . .),
(ii) les méthodes spatiales (parfois appelées ' Arc-to-chord methods '),
(iii) certaines méthodes par développements limités.

Une justification générale pour ces méthodes réside dans la substitution de la formule ' Pythagoricienne ' des distances, aux formules sphériques, dont certaines perdent leur précision aux courtes portées.

Des arguments particuliers pour chaque groupe sont donnés ci-après:

(i) *Méthode par emploi de cordonnées planes rectangulaires conformes*

Ce type de solutions offre de l'attrait pour les Géodésiens, qui se trouvent ramenés à leurs pratiques accoutumées: les longues lignes étant traitées à l'instar des cotés géodésiques ordinaires. Leur emploi se recommande surtout, bien entendu, lorsque les coordonnées rectangulaires planes des extrémités sont disponibles, et connues dans un système unique, de manière à éviter des recours aux transformations de zone à zone.

C'est ainsi, par exemple, que l'obtention de *coordonnées rectangulaires UTM* d'un seul point exige vingt-sept opérations numériques avec les formules réglementaires (de l'AMS). Un passage de zone à zone coûte encore quatorze opérations. Un calcul direct de coordonnées UTM par emploi de formules étendues ayant un plus grand champ (solution étudiée par M. Rune) coûterait également une quarantaine (40) d'opérations. Il apparaît ainsi que la quantité de travail préparatoire à effectuer pour un problème posé en termes de coordonnées géographiques, éliminerait d'avance la méthode UTM, comme peu économique.

La situation est légèrement différente en ce qui concerne les projections du type ' conique ' (où nous rangeons Mercator et Stéréographique Polaire aux côtés de la projection conique conforme, dit de LAMBERT)—pour lesquelles l'obtention des coordonnées planes est relativement aisée (sept opérations par point, en Mercator; dix pour les deux autres cas). Ceci permet d'envisager l'emploi de ces méthodes pour les problèmes généraux (exprimés en données géographiques φ, λ) à cause de leur simplicité, et économie en *interpolations*. En rapidité et économie *globale* de calcul, elles ne surpassent pas les bonnes solutions sphériques, qui leur sont par ailleurs, supérieures sous le rapport de la portée efficace.

Un bilan d'ensemble de ces solutions peut être dressé comme il suit:

	1 M.T.* Σ'	I	1 M.T.** Σ'	I	2 M.T.* Σ'	I	Mercator† Σ'	I	1 Con. Conf. Σ'	I	2 Con. Conf. Σ'	I
Distance ..	15	2	32	3	64	9	47	9	25	3	47	9
Azimuts géodésiques ..	29	5	29	5	29	5	17	3	25	6	19	4
Total	44	7	61	8	93	14	64	12	50	9	66	13

1 (Partant de coordonnées rectangulaires déjà disponibles).
2 (Partant de coordonnées géographiques).
* Utilisant la formule simplifiée de l'Échelle moyenne, qui néglige les termes en X^4.
** Utilisant la formule complète, à 3 points, et en tenant compte des termes en X^4.
† Mercator: indiquée pour mémoire. En fait l'écart entre la loxodromie et l'orthodromie est, pour les grandes lignes, trop considérable, et les réductions angulaires trop difficiles à calculer pour que la méthode soit pratique.

(ii) *Méthodes spatiales: réduction ' arc/corde '*

Les méthodes basées sur le calcul de la distance rectiligne spatiale entre les extrêmes AB, et sur la réduction ultérieure de celle-ci à une distance en arc, par recours à un coefficient de réduction simple, fournissent, aux portées du SHORAN, des résultats susceptibles de donner satisfaction aux usagers qui ne recherchent pas la précision maximum. L'emploi de ces solutions doit être évité au-delà des portées susdites, sous peine de rencontrer des écarts rapidement croissants et difficiles à évaluer.

Parmi ces méthodes signalons:
(1) la méthode d'Ewing
(2) la méthode de Robbins.

La 1ère est basée sur l'emploi de tables du rayon du parallèle, et de l'arc méridien.

La réduction corde-arc y est faite très sommairement en assimilant le sphéroïde à une sphère. La distance est obtenue en seize opérations dont neuf interpolations (décompte $\Sigma' = 25$).

Dans la méthode de ROBBINS, le calcul du rayon moyen de courbure de l'arc géodésique entre A et B est fait plus soigneusement, en tenant compte des azimuts extrêmaux et appliquant le théorème d'Euler sur la courbure des sections normales.

Le bilan général de calcul pour la distance est de cinquante-deux opérations dont huit interpolations (décompte $\Sigma' = 60$).

(iii) *Méthodes par développements limités*

Dans la recherche de la rapidité, et de l'économie des interpolations, pour les lignes relativement courtes, les méthodes qui viennent d'être examinées sont concurrencées par des solutions par développements limités dont le principe revient, en fait

(a) à remplacer les formules trigonométriques donnant l'arc par une expression approchée, ne faisant intervenir que les arguments φ et λ eux-mêmes;

(b) à utiliser une méthode de représentation quasi isométrique sur la sphère (telle que la $2^{ème}$ représentation de Gauss . . .), en incorporant, dans la formule même, l'effet de cette représentation.

Telle est la formule de développement limité pour la distance, proposée par M. DUPUY, d'après JORDAN. La distance est obtenue, de cette manière, en vingt-et-une opérations, dont cinq interpolations (dont quatre interpolations de coefficients ellipsoïdaux dépendant de la latitude). (Décompte Σ': 25).

Allant dans le même sens, mais avec une plus grande économie d'interpolations, la formule de distance de l'Ingénieur DUFOUR implique vingt-quatre opérations dont quatre interpolations, où deux seulement sont de coefficients ellipsoïdaux.

Elle est complétée par un calcul d'azimuts approchés, en quatorze opérations (dont un interpolation).

On dispose donc ainsi de méthodes véritablement rapides pour le calcul précis de l'arc, et le calcul approché des azimuts, à des distances faibles.

Il est bon de remarquer, cependant, que ces économies d'opérations sont relativement petites, au prix de la perte de généralité qui les accompagne. On doit en conclure que les formules de développements limités ne peuvent offrir d'avantage pour l'usager que si elles sont laissées à leurs premiers termes, et si l'on s'abstient de vouloir prolonger leur portée par l'addition de termes correctifs toujours complexes.

INDICATIONS PRATIQUES

(a) Il apparaît directement, de ce qui précède, que la longueur des arcs à calculer est le facteur déterminant pour la somme de travail à dépenser: obtenir la rigueur maxima aux plus grandes distances oblige à consentir un supplément appréciable de travail numérique; or il est rare que l'on ait besoin de connaître de très longues lignes avec tant d'exactitude.

Il convient donc, avant d'entreprendre la mise en œuvre de l'une des méthodes ' rigoureuses ', de s'assurer que les conditions physiques du problème étudié appellent réellement ce degré de précision dans la solution.

(b) On peut remarquer, en revanche, que pour tel jeu de données s'inscrivant dans la zone d'efficacité de telles et telles méthodes approchées, on trouve parfois peu de différence, en coût opératoire, entre deux solutions dont l'une est notablement plus puissante que l'autre: ainsi en va-t-il des solutions approchées (4) ou (5) (géodésique vraie), (10_1) et (10_2) (sphère conforme). Le calculateur prudent aura, en pareil cas, intérêt à retenir la méthode la plus précise, sauf s'il possède l'absolue certitude que l'approximation de la méthode la moins précise est déjà très largement satisfaisante pour le problème examiné.

(c) Il est généralement connu, d'autre part, que les calculs de distances relativement courtes (de l'ordre du SHORAN: 250 à 450 km) introduisent leurs difficultés propres, notamment dans les calculs sphériques; cette classe de problèmes suggère donc le recours à des *solutions particulières* du type coordonnées planes rectangulaires, ou spatiales: cependant il existe certaines versions des solutions générales qui contournent ces difficultés avec succès, il importe de les connaître.

(d) La coexistence de solutions sensiblement équivalentes entre elles au point de vue de leur exactitude et de leur coût opératoire, pour traiter un cas concret, caractérisé par certaines conditions de longueur (portée . . .) et de précision dans la définition des données, ne doit pas être considérée par l'usager comme une source d'embarras, mais bien au contraire, comme un élément favorable pour lui.

Cette situation, en effet, ouvre, d'une part, la possibilité de faire porter le choix sur une méthode qui se rapproche bien des habitudes techniques de travail de chaque calculateur, par exemple en ce qui concerne le *type de formules* et le *type de tables* à employer: détail important pour la sûreté et la rapidité de marche effectivement obtenue dans les calculs.

D'autre part, elle met l'usager en mesure d'effectuer—par des voies indépendantes—des vérifications générales bien utiles—voire indispensables—de son travail.

(e) Une tabulation des documents auxiliaires (*Tables, imprimés de calculs, recueil de constantes* etc. . . .) les plus utiles dans les calculs de longues lignes, est l'un des principaux buts du présent rapport. Après avoir dressé à cet égard la liste des documents déjà disponibles et accessibles au public, on propose de stimuler la publication, ou la préparation, de telle autre table (ou imprimé) qui paraîtrait spécialement utile.

(f) Pour tenir compte des conditions particulières qui prévalent dans les calculs électroniques, on s'est efforcé, dans ce rapport, de signaler toutes variantes des méthodes fondamentales qui tendent à la réduction ou à la suppression complète des tables auxiliaires, en d'autres termes, qui tendent à la réduction ou à la suppression des interpolations tabulaires.

TABLE DES ANNEXES DE L'OUVRAGE PROJETÉ*

0. *Récapitulation des notations adoptées*
1. *Calculs de Trigonométrie Sphérique: comparaison des méthodes.*
   - 1A. Trigonométrie Sphérique: récapitulation de huit solutions types pour le nombre des opérations numériques impliquées.
   - 1B. Analyse des solutions types: (décomposition des calculs en phases successives, décomptes d'opérations . . .)
   - 1C. Calculs Sphériques: commentaires.
2. '*Solutions Sphériques*'.
   - 2A. Solution géodésique vraie
     - 2Aa. Tableau récapitulatif des formules fondamentales fournissant la valeur de l'angle polaire vrai $\lambda = L + \psi$ et de la distance géodésique S.
   - 2A. Discussions de l'approximation atteinte . . .
     - (1) pour le calcul de l'arc, en négligeant les termes d'ordre e^6 ou supérieur;
     - (2) pour le calcul de l'arc, en utilisant la formule d'intégration numérique à 3 points.

* Seule l'Annexe 2C de l'ouvrage est reproduite ci après.

2B. Autres solutions sphériques
Discussion des écarts de longueur et d'azimuts apparaissant, par rapport à la géodésique vraie, dans les autres solutions.
2C. Récapitulation générale des Calculs pour quinze Solutions sphériques types.
2D. Analyse détaillée de ces quinze solutions types (avec leurs variantes).

3. *Méthodes par emploi de coordonnées planes rectangulaires* (représentations conformes).

3A. Schéma général de calcul, valable dans les divers systèmes.

3B. Récapitulatif, pour l'obtention des éléments locaux ($XY\ K\gamma$) dans les divers systèmes

3C. Récapitulation des calculs de distance et d'azimuts, pour les diverses projections.

4. '*Méthodes spatiales*'.

4A. Récapitulation
4B. Analyses de solutions.

5. *Méthodes par développements limités.*

5A. Récapitulation
5B. Analyses de solutions.

6. *Liste des tables auxiliaires et autres documents utiles.*

7. *Jeu d'exemples numériques.*

8. *Bibliographie.*

ANNEXE 2C: RECAPITULATION GÉNÉRALE DES CALCULS POUR QUINZE 'SOLUTIONS SPHÉRIQUES' TYPES

(On a porté ci-dessous le décompte des opérations numériques élémentaires, Σ', obtenu en donnant un poids relatif double aux interpolations: les décomptes d'interpolations I sont également donnés en 2ème position dans chaque colonne.)

		Préparatn Sphéroïd.		Calcul Sphérique		Exploitn Sphéroïd.		Total	
		Σ'	I	Σ'	I	Σ'	I	Σ'	I
	Géodésique 'vraie'								
1	Itération numérique 'trigonométrique'	98	16	33	7	40	0	171	23
1bis	Itération numérique (tables de Bodemüller)	95	21	33	7	44	10	172	38
2	Itération numérique fonctions de Wallis	102	28	38	9	35	8	175	45
3	Calcul de ψ par formule de Sodano	50	12	32	7	19	0	101	19
4	Calcul de ψ par 3 points avec une itération	45	6	27	9	15	0	87	15
5	Calcul de ψ par 3 points, pas d'itération	35	5	27	9	15	0	77	14
6	Calcul de ψ et de S par développements limités	26	7	33	11	4	0	63	18
	Sections planes								
7	Grande ellipse géocentrique, *distance seule*	10	4	23	8	24	0	57	12
8	Section normale, solution Rudoe	(non décomposable . . .)						95	17
9_1	idem solution Cole, distance et Azimuts ..	24	8	5	1	30	3	59	12
9_2	idem solution Cole, *distance seule* ..	24	8	5	1	8	0	37	9
	Représentations Conformes Sphériques								
10_1	Sphère Conforme, azimuts précis*	4	2	54	15	20	6	78	23
10_2	idem azimuts de 1ère approximation	4	2	54	15	14	4	72	21
10_3	idem *distance seule* ..	4	2	23	8	11	3	38	13
11_1	Représentation de Gauss, formules directes	27	5	33	10	1	0	61	15
11_2	Représentation de Gauss, par tables auxiliaires	5	2	38	10	1	0	44	12
12	par sphère trisécante, formules directes †	43	13	21	4	1	0	65	17
	Solutions approchées								
13_1	Formules de Lambert, distance et azimuts	18	8	23	6	25	2	66	16
13_2	Formules de Lambert, *distance seule* (avec Tables)	10	5	6	1	12	2	28	8
14	Formule d'Andoyer, *distance seule* ..	0	0	32	7	16	0	48	7
15	Formule de Dupuy, *distance seule* ..	0	0	36	10	8	2	44	12

Remarques

* Décompte effectué en considérant la solution 'sphère conforme' avec un équipement complet de tables comportant: $\phi \rightarrow \psi$, et K et Γ (facteur de courbure) en fonction de sin ψ.

† La méthode de la sphère trisécante est justiciable de tabulations préalables ($\phi \rightarrow \psi'$) qui en rendraient l'exécution entièrement semblable à la méthode de Gauss selon (11_2).