

CALCUL DE GRANDES GÉODÉSIQUES SUR
L'ELLIPSOÏDE
PROCÉDÉS DE RÉOLUTION PAR L'INTERMÉDIAIRE
D'UNE SPHÈRE AUXILIAIRE

H. M. DUFOUR

Institut Géographique National, 114 Avenue Kleber, Paris, France

AVERTISSEMENT

L'article ci-dessous reproduit un certain nombre de chapitres rédigés spécialement pour diffusion au Congrès de Toronto. Dès lors, quelques modifications importantes aux méthodes de travail ont été mises au point (en particulier dans les méthodes de résolution du problème sphérique). Il nous a paru bon malgré tout de conserver à peu près totalement la rédaction initiale, nous réservant de proposer des méthodes de travail définitives dans un document complémentaire (Chapitre X) qui fera l'objet d'une diffusion ultérieure: seul un résumé succinct de ce Chapitre est fourni à la fin de l'article.

Nous nous excusons de certaines notations pas très heureuses, non conformes aux normes internationales. Pour des raisons pratiques (en particulier, existence d'imprimés qu'on utilise à chaque instant), nous avons conservé des notations traditionnelles au Bureau de Calculs de la Géodésie. Parfois une notation venant du calcul sphérique change de nom dans le calcul des termes correctifs Ellipsoïde \rightleftharpoons Sphère. Sauf exception, les anomalies apparentes peuvent être facilement interprétées. Nous indiquerons plus spécialement les cas où une confusion risque d'être possible.*

Nous nous proposons, dans une suite d'exposés, de présenter les idées générales de résolution des deux problèmes fondamentaux des grandes Géodésiques (problèmes inverse et direct), par les méthodes qui ont recours à une sphère auxiliaire.

Beaucoup des résultats exposés ne sont pas nouveaux. De nombreux développements connus ne sont pas reproduits ici, parce que pratiquement il a été jugé possible de s'en passer. . . . Cette présentation vise surtout:

Problème Inverse

- 1—A donner les idées fondamentales des méthodes de calcul utilisables (I).
- 2—A exposer plus particulièrement la méthode par la *sphère paramétrique*, seule méthode pouvant atteindre le résultat en toute rigueur . . . (II).
- 3—A exposer, plus ou moins rapidement, les méthodes utilisant d'autres sphères auxiliaires:
 - Sphère conforme (III).
 - Sphère de courbure (IV).
 - Sphère circonscrite au parallèle de latitude moyenne (V).
 - Sphère des Normales (VI).

* Nous signalons en outre que tous les calculs sont effectués dans le système centésimal—Par suite, dans tout le texte:

^a veut dire: grade

^{''} veut dire: seconde centésimale

Par exemple: 127^a 5827'' 6193 veut dire: 127 grades + 5827, 6193 secondes centésimales

CALCUL DE GRANDES GÉODÉSIIQUES

- 4—A exposer les différentes méthodes de résolution du triangle sphérique (VII).
- 5—A traiter les méthodes de résolution par calcul électronique: indications dans les différents chapitres. L'exposé complet doit être fait plutôt dans un exposé spécial traitant les méthodes de calcul électronique en Géodésie.
- 6—A un essai de composition d'imprimés complets, correspondant aux différents besoins (longueur précision), et faisant un choix dans les méthodes exposées (VIII).

Problème Direct

- 7—Résolution du problème direct (IX).
- 8—Compléments: Amélioration des Techniques de Calcul—Choix de méthodes (X).

I—ÉLÉMENTS GÉNÉRAUX DE RÉOLUTION

ÉNONCÉ DES PROBLÈMES FONDAMENTAUX

Les deux problèmes principaux envisagés sont les suivants, énoncés pour le cas de l'Ellipsoïde de révolution:

Problème inverse:

Données: latitude et longitude de A et B .

Inconnues: longueur de la géodésique AB , azimuts direct et inverse.

Problème direct:

Données: latitude et longitude de A , azimut de A vers B , longueur AB .

Inconnues: latitude et longitude de B , azimut inverse.

NOTATIONS

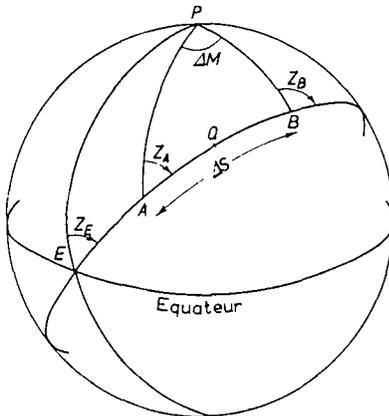


Fig. 1

A $\left\{ \begin{array}{l} \text{Longitude } M_A \\ \text{Latitude } L_A \end{array} \right.$

B $\left\{ \begin{array}{l} \text{Longitude } M_B \\ \text{Latitude } L_B \end{array} \right.$

On prendra conventionnellement dans le calcul:

B à l'Est de A

(sauf calculs électroniques)

La géodésique AB prolongée coupe l'équateur en E . L'azimut Z au point courant Q est compté dans le sens qui fait passer le méridien QP à la géodésique, orientée vers l'Est.

On a ainsi Z_E (Equateur) Z_A Z_B .

Longueur $AB = \Delta S$.

Nous parlons désormais uniquement du problème inverse, le problème direct fera l'objet du sect. IX.

PROBLÈME INVERSE: MÉTHODES GÉNÉRALES DE CALCUL
En règle très générale, toutes les méthodes connues consistent à faire une représentation de l'ellipsoïde sur une autre surface:

—*Sur le plan*: en général, on adoptera une projection conforme: Mercator, Lambert, Stéréographique, U.T.M., etc. . . . On fera ensuite des corrections de dv et d'échelle. Nous ne reparlerons pas ici de ces méthodes, qui peuvent être fort intéressantes, mais dont l'intérêt est limité pour les longues géodésiques:

—par le fait que les corrections deviennent rapidement trop laborieuses à calculer;

—par la difficulté de rester sur une projection unique (voir Sect. VIII).

—*Sur la sphère*: cette représentation a pour elle l'avantage de permettre une représentation très étendue. Les éléments initiaux: latitudes, longitudes, longueur, angles, ne peuvent pas être tous conservés; il y aura donc des corrections pour calculer les vraies valeurs sur l'ellipsoïde. La représentation couramment adoptée est *conforme*; toutefois, il n'est pas interdit de songer à des représentations non conformes.

Nous parlerons plus spécialement:

(1) *de la représentation sur la sphère de Jacobi* (ou Bessel): méthode déjà introduite par Legendre, reprise à l'I.G.N. par MM. Levallois et Dupuy et traitée numériquement, connue aux U.S.A. sous le nom de Sodano's method. . . .

conserve: les azimuts,

modifie: les latitudes et les longitudes.

C'est par ailleurs une représentation spéciale, car les 2 surfaces (ellipsoïde et sphère) ne se correspondent pas point par point; seules, deux géodésiques se représentent point à point, d'où une certaine difficulté à comprendre et exposer la méthode.

Nous l'appellerons: méthode de la *sphère paramétrique*.

(2) *la représentation conforme sur la sphère bitangente à l'équateur* (ou sphère isométrique)

conserve: les longitudes,

modifie: les latitudes et les azimuts.

C'est une représentation très claire à concevoir, qui a le mérite de créer une représentation biunivoque de l'ellipsoïde et de la sphère; elle a été fort étudiée au Bureau Technique et les procédés utilisables vont être largement diffusés ci-dessous.

Nous l'appellerons: méthode de la *sphère conforme*.

(3) *la représentation sur la sphère de courbure en un point L_0*

modifie: latitudes, longitudes,

mais conserve: azimuts et longueurs dans une bande parallèle à la latitude L_0 et d'extension variable suivant la précision désirée.

CALCUL DE GRANDES GÉODÉSQUES

Cette méthode n'aborde le calcul sphérique proprement dit qu'après des corrections préliminaires plus ou moins laborieuses; par contre, le calcul sphérique n'exige pas de corrections complémentaires (ou très faibles . . .)

(4) *la méthode sur la sphère circonscrite au parallèle de latitude moyenne* (pour mémoire).

(5) *la représentation sur la sphère de Gauss*

conserve: latitudes et longitudes,

modifie: les azimuts.

C'est une représentation *non conforme*. Les corrections d'azimut doivent tenir compte:

—de la correction de non conformité,

—de la correction de dv .

Elle ne semble pas avoir été étudiée de façon systématique; elle a l'avantage de rejeter les corrections en fin de calcul, où elles pourraient être plus ou moins développées suivant la précision demandée.

Pour le calcul uniquement des longueurs, une valeur très correctement approchée peut être obtenue en prenant une moyenne pondérée entre les valeurs obtenues en reportant la géodésique sur le méridien et sur l'équateur respectivement (méthode de M. Dupuy).

Remarques Générales sur les Calculs

A.—Tous les procédés conduisent à faire des intégrations, sur une sphère image, de termes correctifs; plusieurs remarques à propos de ces intégrations:

(1°) On peut réaliser une *intégration 'rigoureuse'* le long de la ligne considérée, prenant pour argument ω , élongation, et exprimant tous les termes en fonction de cette grandeur.

Ce procédé conduit presque toujours à des développements en fonction des puissances de e^2 (ou e'^2)—carré de l'excentricité de l'ellipsoïde—et à des intégrales de Wallis:

$$\int_0^\omega \sin^{2n} \omega \, d\omega$$

qu'on peut calculer en passant aux angles multiples . . . mais qu'il est parfois bien plus intéressant de calculer à partir de tables. . . .

ou une *intégration par points*: le procédé le plus simple et le plus efficace étant en général la méthode des 3 niveaux. . . .

(2°) La ligne d'intégration peut être une image rigoureuse de la ligne géodésique, ou simplement approchée; ce n'est que dans le premier cas qu'on obtiendra un procédé de précision extrêmement fine et seule la *méthode de la latitude paramétrique* est dans ce cas. Dans tous les autres procédés, on se heurte à une *correction de ligne d'intégration* qu'il est pratiquement impossible d'évaluer exactement. . . .

B.—Du point de vue pratique, il existe une forte différence entre les calculs en *grades* et les calculs en *degrés*, ces derniers, s'ils sont utilisés systématiquement, conduisant à perdre une grosse partie du bénéfice

des méthodes qui vont être exposées ci-après. . . . Comme beaucoup de données sont fournies en *degrés* initialement, on ne saurait trop encourager les calculateurs à travailler en *grades* au milieu des calculs, en n'utilisant les documents en degrés qu'au début du calcul (ou éventuellement en fin de calcul, pour extraire les azimuts).

Notre exposé suppose des données fournies en grades. Il appartient à chacun de transposer les résultats selon son problème particulier. . . .

II—CALCUL DE GRANDES GÉODÉSQUES PAR REPRÉSENTATION SUR LA SPHÈRE PARAMÉTRIQUE

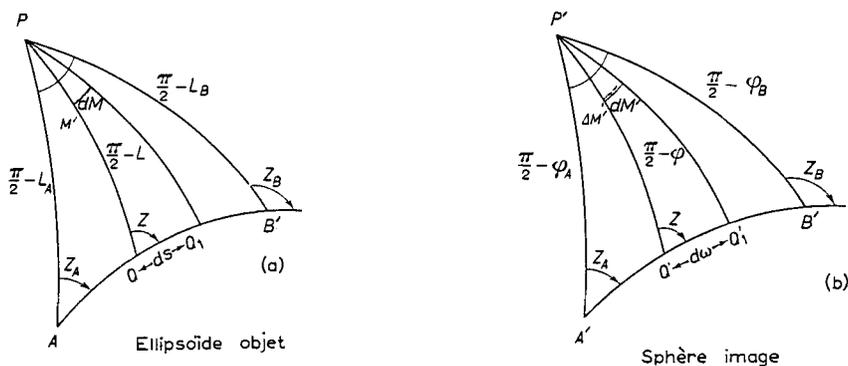


Fig. 2(a)

Fig. 2(b)

Cette représentation repose sur l'équation de Clairaut, valable pour toute géodésique des surfaces de révolution :

$$r \sin \zeta = \text{Cte}$$

r : distance du point courant Q de la géodésique à l'axe de révolution.
 ζ : azimut de ce même point courant.

De cette relation, il résulte qu'on peut faire correspondre point par point 2 géodésiques sur 2 surfaces de révolution, de telle façon que :

$$\left\| \begin{array}{l} r = kr' \\ \zeta = \zeta' \end{array} \right. \quad (k = \text{constante arbitraire})$$

La première relation définit la correspondance des latitudes; naturellement, les longitudes n'ont aucune raison d'être respectées, en général. Par ailleurs, cette correspondance est valable pour 2 lignes géodésiques, mais ne définit nullement une représentation point par point de la lère surface sur la deuxième.

CAS DE L'ELLIPSOÏDE DE RAYON ÉQUATORIAL a

Nous allons représenter ses lignes géodésiques sur la sphère de rayon 1, en faisant correspondre les grands cercles équatoriaux, ce qui est réalisé par les formules :

CALCUL DE GRANDES GÉODÉSIQUES

	<i>Ellipsoïde</i>	=	<i>Sphère</i>
à l'équateur	a	=	$a \cdot 1$
en un point quelconque	r	=	$a \cdot r'$
soit	$N \cos L$	=	$a \cdot \cos \varphi$
			(L = Latitude ellipsoïde)
			(φ = Latitude sur la sphère)

Cette relation définit la latitude φ ; cette latitude est obtenue en fait par affinité de rapport a/b à partir de l'ellipsoïde: (latitude paramétrique).

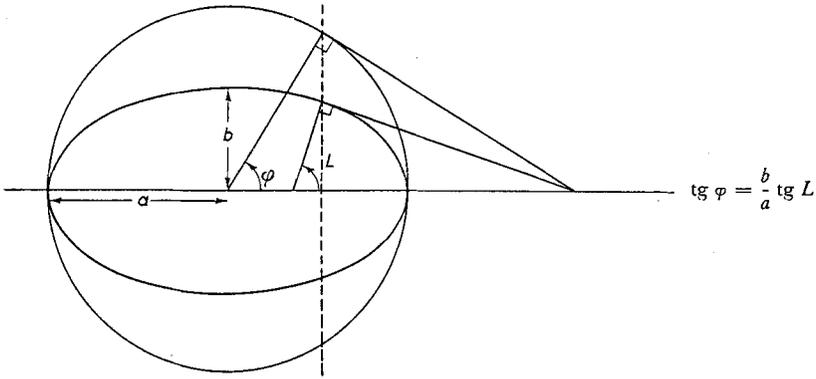


Fig. 3

CORRESPONDANCE DE DEUX ÉLÉMENTS INFINITESIMAUX

On passe de QQ_1 à $Q'Q'_1$ en exploitant les formules suivantes:

<i>Ellipsoïde</i>	<i>Sphère</i>
$\rho dL = ds \cos \zeta$	$d\varphi = d\omega \cos \zeta$
$r dM = ds \sin \zeta$	$\cos \varphi dM' = d\omega \sin \zeta$
et $a \cos \varphi = r$	

On tire de ces relations:

$$\frac{ds}{d\omega} = \frac{\rho dL}{d\varphi} = \frac{r dM}{\cos \varphi dM'} = \frac{a dM}{dM'}$$

La quantité $\frac{\rho dL}{a d\varphi}$ est une fonction de la latitude, et est égale à $\frac{1}{V}$

$$(V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 L})$$

Il vient donc finalement les formules très simples:

$a d\omega = V ds$
$dM' = V dM$

Conduite du calcul

La difficulté essentielle est de connaître $\Delta M'$, élément inconnu de l'image sphérique; le calcul peut s'effectuer:

—soit par intégration de $\Delta M' = \int_{AB} V dM$ —intégration approchée—mais pratiquement suffisante dans de nombreux cas

—soit par intégration rigoureuse le long de la ligne image approchée, en précisant cette ligne par approximations successives. . . .

MÉTHODES D'INTÉGRATIONS PAR POINTS

$$\begin{cases} a d\omega = V ds \\ dM' = V dM \end{cases}$$

(1) *Intégrale de la longitude*

La quantité V étant lentement variable et proche de 1, peut être intégrée avec une excellente approximation le long d'une ligne approchée; on prend naturellement une intégration sur la sphère de Gauss (ou sphère des normales).

Première approximation

$$\Delta M' = \frac{V_A + V_B}{2} \Delta M$$

$$\text{ou } \Delta M' = V_m \Delta M \quad \left\{ V_m = V \left(\frac{L_A + L_B}{2} \right) \right\}$$

Cette méthode reste pratiquement valable, à la précision du mm, jusqu'à 50 km. Elle peut être utilisée jusqu'à 150 km avec une précision du dm.

Deuxième approximation

(a) *Termes correctifs*

$$\Delta M' = V_1 \Delta M$$

$$V_1 = \frac{V_A + V_B}{2} - \epsilon_1$$

$$\text{ou } V_1 = V_m - \epsilon'_1$$

Des méthodes d'intégration numérique sur lesquelles il est impossible de s'étendre ici conduisent aux résultats suivants:

$$\epsilon_1 = \frac{e'^2}{12} \left[\Delta L^2 (1 - 2 \cos 2 L_m) + \Delta M^2 \frac{\sin^2 2 L_m}{4} \right] 10^{-8}$$

$$\epsilon'_1 = \frac{e'^2}{12} \left[\Delta L^2 \left(1 - \frac{\cos 2 L_m}{2} \right) + \Delta M^2 \frac{\sin^2 2 L_m}{4} \right] 10^{-8}$$

Ces termes correctifs sont relativement simples à mettre en tables (ou abaques): par des tables simples à lecture directe, on peut ainsi pousser la précision du mm jusqu'à 200 km environ.

Le calcul précis de ces termes permet de pousser la précision du cm jusqu'à 700-800 km environ; mais ce calcul est assez lourd et est sujet à erreurs. . . .

CALCUL DE GRANDES GÉODÉSIQUES

(b) *Formule des trois niveaux*

Elle donne un résultat légèrement supérieur aux précédentes, avec un calcul plus clair:

$$\Delta M' = V_1 \Delta M \text{ avec } V_1 = \frac{V_A + V_B + 4V_M}{6}$$

M étant le point milieu des longitudes, qui est fourni par la formule:

$$\operatorname{tg} L_M = \frac{\operatorname{tg} L_A + \operatorname{tg} L_B}{2 \cos \Delta M/2}$$

Remarque: On peut songer à trouver ce point milieu par graphique sur une carte; pratiquement, ce procédé est décevant, car l'erreur graphique détruit très rapidement le supplément de précision apporté par la formule des trois niveaux.

Intégrations plus poussées: Nous en sommes très peu partisans, car on se heurte simultanément à l'erreur de *courbe d'intégration*, et la formule complète est très lourde, sinon inextricable. . . .

(2) *Intégrale de la longueur*

Le calcul sphérique étant supposé effectué, nous connaissons $\Delta\omega$ et par suite:

$$\Delta S = a \int_{A'B'} \frac{d\omega}{V}$$

Cette intégration peut être effectuée de façon rigoureuse (voir ci-dessous), mais par analogie avec ci-dessus, on peut écrire:

$$a \Delta\omega = \int_{AB} V ds = V_2 \Delta S$$

V_2 étant une appréciation de l'intégrale $\frac{1}{\Delta S} \int_{AB} V ds$

Ici encore, effectuons l'intégration sur la sphère des normales; on aura la même gradation dans la précision que pour le calcul de V_1 :

Première approximation

$$V_2 = \frac{V_A + V_B}{2}$$

ou $V_2 = V_m \quad \left[V_m = V \left(\frac{L_A + L_B}{2} \right) \right]$

Deuxième approximation

(a) *Termes correctifs*

$$V_2 = \frac{V_A + V_B}{2} - \epsilon_2$$

$$V_2 = V_m - \epsilon'_2$$

H. M. DUFOUR

avec

$$\epsilon_2 = \frac{e'^2}{12} \left[\Delta L^2 (-\cos 2 L_m) + \Delta M^2 \frac{\sin^2 2 L_m}{4} \right] 10^{-8}$$

$$\epsilon'_2 = \frac{e'^2}{12} \left[\Delta L^2 \left(\frac{\cos 2 L_m}{2} \right) + \Delta M^2 \frac{\sin^2 2 L_m}{4} \right] 10^{-8}$$

(b) *Formule des trois niveaux*

$$V_2 = \frac{V_A + V_B + 4V_s}{6}$$

S'étant le point milieu de l'arc dont la latitude est fournie par :

$$\sin L_s = \frac{\sin L_A + \sin L_B}{2 \cos \Delta S / 2a}$$

calcul qui nécessite une valeur approchée de ΔS

Remarque : Entre V_1 et V_2 , il existe une relation simple :

$$V_2 = V_1 + \frac{e'^2}{6} \Delta L^2 \sin^2 L_m$$

RÉSULTATS GÉNÉRAUX OBTENUS PAR CES MÉTHODES

Jusqu'à 1000 km

La précision, excellente pour les courtes géodésiques, reste pratiquement dans tous les cas supérieure au décimètre : en conséquence, est très suffisante pour toutes les applications pratiques.

Au-delà de 1000 km

L'erreur croît assez rapidement avec la distance, et est très variable suivant l'orientation de la géodésique. Le résultat atteint est certainement suffisant pratiquement dans de nombreux cas ; en tout cas, il peut constituer une première étape vers la solution rigoureuse, par approximations.

LA MÉTHODE RIGOUREUSE—PAR APPROXIMATIONS SUCCESSIVES

Reprenant les formules rigoureuses différentielles

$$a d\omega = V ds$$

$$d.M' = V dM$$

on sait que la seule intégration rigoureuse ne peut se faire que sur la sphère image ; or, l'image sphérique nécessite la connaissance de $\Delta M'$; quantité qui elle-même ne peut être connue que par intégration rigoureuse sur cette même image sphérique ; la solution réside dans un processus itératif.

CALCUL DE GRANDES GÉODÉSIIQUES

(1) *Calcul de ΔS*

Commençons par l'intégrale des longueurs, la plus simple :

$$\Delta S = a \int \frac{d\omega}{V}$$

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 L} = \frac{a}{b} (1 + e'^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}}$$

ce qui permet d'écrire :

$$\Delta S = b \int (1 + e'^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} d\omega$$

et comme $\sin \varphi = \cos \zeta_E \sin \omega$

ω étant l'*élongation*, arc sphérique compté depuis l'équateur,
 ζ_E = azimut de la ligne géodésique à l'équateur,

$$\Delta S = b \int_{\omega_A}^{\omega_B} (1 + e'^2 \cos^2 \zeta_E \sin^2 \omega)^{\frac{1}{2}} d\omega$$

intégrale elliptique qu'on calculera pratiquement en développant par rapport à e'^2 :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta S}{b} &= \Delta\omega + \cos^2 \zeta_E \frac{e'^2}{2} \int_{\omega_A}^{\omega_B} \sin^2 \omega d\omega - \cos^4 \zeta_E \frac{e'^4}{8} \int_{\omega_A}^{\omega_B} \sin^4 \omega d\omega \\ &\quad + \cos^6 \zeta_E \frac{e'^6}{16} \int_{\omega_A}^{\omega_B} \sin^6 \omega d\omega \end{aligned}$$

En pratique, on posera :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^\omega \sin^2 \omega d\omega &= I_2 \\ \frac{1}{8} \int_0^\omega \sin^4 \omega d\omega &= I^4 \\ \frac{1}{16} \int_0^\omega \sin^6 \omega d\omega &= I^6 \quad e'^2 \cos^2 \zeta_E = u^2 \end{aligned}$$

(à des coefficients près qu'on précisera plus loin).

Il vient ainsi :

$$\frac{\Delta S}{b} = \Delta\omega + u^2 \Delta I_2 - u^4 \Delta I_4 + u^6 \Delta I_6$$

Le calcul de ΔS est donc bien accessible . . . moyennant la tabulation des intégrales de Wallis.

Remarque sur l'utilisation des Intégrales de Wallis

On est naturellement tenté de remplacer les intégrales de Wallis par leur expression analytique complète, et par suite, d'effectuer in extenso le calcul des intégrales, en faisant intervenir $\Delta\omega$, $\omega_m = (\omega_A + \omega_B)/2$ et leurs lignes trigonométriques; ce procédé nous paraît peu intéressant :

- formules moins claires
- u^2 et ses puissances vont se trouver bien moins détachés dans le calcul, d'où complication

Les Intégrales de Wallis interviennent très simplement :

- dans le calcul de la longitude
- dans le calcul direct des Grandes Géodésiques
- dans le calcul des Géodésiques par d'autres méthodes

(2) *Calcul de $\Delta M'$*

On s'attache plus précisément au calcul de l'élongation ϵ en longitude :

$$\epsilon = \Delta M' - \Delta M = \int_{A'B'} \frac{(V-1)}{V} dM'$$

or
$$dM' = \frac{d\omega \sin \zeta}{\cos \varphi} = \frac{d\omega}{\cos^2 \varphi} \sin \zeta_E$$

et par suite :

$$\epsilon = \int \frac{V-1}{V} \frac{d\omega}{\cos^2 \varphi} \sin \zeta_E = \int \left(1 - \frac{1}{V}\right) \frac{d\omega}{\cos^2 \varphi} \sin \zeta_E$$

Or, V s'exprime en fonction de φ par :

$$V = (1 - e^2 \cos^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}}$$

et par suite :

$$1 - \frac{1}{V} = \frac{e^2}{2} \cos^2 \varphi + \frac{e^4}{8} \cos^4 \varphi + \frac{e^6}{16} \cos^6 \varphi$$

et donc :

$$\frac{\epsilon}{\sin \zeta_E} = \int \left[\frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{8} \cos^2 \varphi + \frac{e^6}{16} \cos^4 \varphi \right] d\omega$$

Tenant compte maintenant que $\sin \varphi = \sin \omega \cos \zeta_E$, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon}{\sin \zeta_E} = \int \left(\frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{8} + \frac{e^6}{16} \right) d\omega - \int \frac{e^4 + e^6}{8} \cos^2 \zeta_E \sin^2 \omega d\omega \\ + \int \frac{e^6}{16} \cos^4 \zeta_E \sin^4 \omega d\omega \end{aligned}$$

ce qui s'écrit en définitive :

$$\frac{\epsilon}{\sin \zeta_E} = \alpha \Delta \omega - \beta \cos^2 \zeta_E \Delta I_2 + \gamma \cos^4 \zeta_E \Delta I_4$$

α, β, γ , constantes fonction de l'ellipsoïde seulement.

Il est remarquable de noter que cette intégrale s'exprime finalement par :

$$\frac{\epsilon}{\sin \zeta_E} = B_0[\Delta \omega] - B_2[u^2 \Delta I_2] + B_4[u^4 \Delta I_4]$$

(B_0, B_2, B_4 : constantes d'ellipsoïde)

donc de façon très simple, une fois les calculs de la longueur effectués.

Remarque

On croit très généralement que le calcul des longitudes nécessite l'usage de *tables spéciales pour chaque ellipsoïde*; la forme ci-dessus atteste clairement

CALCUL DE GRANDES GÉODÉSQUES

qu'il n'en est rien. Le calcul précis des grandes Géodésiques se signale donc en définitive par les caractéristiques suivantes:

—Utilisation des tables trigonométriques usuelles et des *Intégrales de Wallis*.
 —Utilisation de constantes, en nombre restreint, variables suivant l'ellipsoïde.

—Simplicité des formules d'intégration.

On notera que les développements font intervenir la seule grandeur $\cos \zeta_E$, toute puissance (paire) de cette grandeur étant associée à l'intégrale de Wallis de même ordre . . . (ce qui tient en fait à l'association initiale $\sin \omega \cos \zeta_E = \sin \varphi$).

RAPIDITÉ DE LA CONVERGENCE DE ϵ

On a en fait:

$$\epsilon = \sin \zeta_E B_0 \Delta \omega + \dots$$

dans lequel $B_0 = \frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{8} + \frac{e^6}{16} = \frac{a-b}{a} = \text{aplatissement} \neq \frac{1}{300}$

Cette particularité permet de prévoir une rapide convergence dans le calcul de ϵ :

Exemple: Paris-Saïgon (10 000 km)

1er calcul :	$\epsilon = 0$	erreur sur ϵ et ω de 30 km
2ème calcul :	—	—de 100 m environ
3ème calcul :	—	—de 0 m, 30 environ
4ème calcul :	—	—de 1 mm environ

En fait, la convergence est encore meilleure et trois approximations suffisent dans ce cas particulier.

FORMULES ET MÉTHODES PRATIQUES ADOPTÉES

L'imprimé I.G.N. 2305 B.T. 1953, dont nous fournissons des exemples, permet de résoudre le problème en s'aidant des deux méthodes d'intégration:

- (1) *La méthode par points donne une solution*
- (2) *La méthode par intégrales de Wallis permet:*

- de vérifier le résultat
- éventuellement, de donner des éléments plus précis pour une deuxième approximation; la décision à prendre dépend de la concordance obtenue sur la valeur de ϵ (par le calcul) comparée à la précision finale recherchée.

Dans la méthode (1), on a utilisé:

- la formule des 3 niveaux pour le calcul de $\Delta M'$
- la formule correctrice $V_2 = V_1 + K \sin^2 L_m \Delta L^2$ pour le calcul de ΔS .

Nous avons par ailleurs dissocié entièrement le problème des calculs ellipsoïde \rightleftharpoons sphère et des calculs sur la sphère: l'imprimé I.G.N. 2304 B.T. 1953 est utilisé pour le calcul 'sphérique', et par suite restera le même pour toutes les autres méthodes de calcul des grandes Géodésiques exposées ci-après. La discussion des meilleures formules de Calcul Sphérique constituera un chapitre séparé.

CONCLUSIONS SUR LA MÉTHODE DE LA REPRÉSENTATION SUR LA SPHÈRE PARAMÉTRIQUE

On peut—selon plusieurs éventualités: tables dont on dispose, extension des zones à traiter . . . —adopter telle ou telle méthode pour le calcul des grandes Géodésiques, mais il nous semble *absolument hors de doute que:*

—La méthode de représentation par azimuts conservés sur la sphère paramétrique doit être avant tout la *méthode type de référence*, qui servira de test à toutes les autres méthodes—eu égard à sa *précision pratiquement totale*, quelle que soit la longueur de la géodésique (dans la limite de 18 000 km . . .) et ce, avec des formules numériques *extraordinairement simples*.

Cette méthode est aussi la méthode la meilleure en *calcul électronique* :

—*sur le matériel actuel de l'Institut Géographique* : il est possible de monter une méthode de calcul, encore un peu longue, mais simple et élégante, appliquant la méthode dans toute sa pureté; chaque passage utilise la valeur ϵ du passage précédent ($\epsilon = 0$ au premier passage) et détermine azimuts, longueurs, augment de longitude, par les formules rigoureuses; on arrête le calcul quand les valeurs de ϵ deviennent stationnaires; on doit compter en moyenne 3 passages de 30 sec chacun* . . .

—*sur un matériel à programme enregistrable* : la méthode devient plus élégante encore, puisque la machine elle-même commandera les itérations en fonction des valeurs successives de ϵ obtenues; le programme est certainement plus simple que pour tout autre procédé, par suite de la *non correction des azimuts*, opération assez lourde dans toutes les autres méthodes que nous allons examiner.

DISCUSSION DU PROBLÈME SPHÉRIQUE— LIMITATIONS PRATIQUES

Pour résoudre le problème sphérique, on se trouve devant deux possibilités :

(1) Calcul préalable de $\Delta\omega$, puis des azimuts; cette méthode semble préférable dans le cas où on veut faire plusieurs approximations, puisqu'on n'a pas besoin de pousser jusqu'aux azimuts pour revenir au calcul de ϵ , mais :

—pratiquement, il sera rare, grâce au calcul préalable de ϵ par les 3 niveaux, d'avoir besoin de faire une itération

—cette méthode donne pratiquement de nombreux déboires :

Le calcul de $\Delta\omega$ par la formule fondamentale

$$\cos \Delta\omega = \sin \varphi_A \sin \varphi_B + \cos \varphi_A \cos \varphi_B \cos \Delta M'$$

ne convient plus pour $\Delta\omega$ petit, quelles que soient les tables auxquelles on aura recours. . . .

On peut évidemment avoir recours à la formule transformée :

$$\sin^2 \frac{\Delta\omega}{2} = \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2} + \cos \varphi_A \cos \varphi_B \sin^2 \frac{\Delta M'}{2}$$

généralisation évidente de la formule plane :

$$D^2 = \Delta X^2 + \Delta Y^2$$

* Ce calcul est actuellement mis au point et présente les caractéristiques suivantes :

— ϵ devient stationnaire au bout de 4 itérations

—Précision obtenue dans tous les cas : *erreur maxima 5 mm* (sauf le cas de géodésiques à Z_E très faibles : géodésiques voisines de l'équateur)

—Chaque itération dure 20 sec environ (soit 1,5 min pour le calcul complet d'une grande géodésique de disposition et longueur quelconques).

CALCUL DE GRANDES GÉODÉSIQUES

et qui doit être utilisée dans le même esprit, c'est-à-dire en respectant le nombre des chiffres significatifs dans toute élévation au carré ou extraction de racine carrée . . . (voir exemples), mais cette formule reste d'un usage assez lourd. . . .

Le calcul des élongations et des azimuts présente aussi des cas de très mauvaise précision dus, non à la nature des données, mais à la méthode de calcul adoptée; si on désire être à l'abri de tels déboires, il faut adopter les formules suivantes:

azimuts: les obtenir par sinus ou cosinus, suivant le cas

élongations: utiliser la formule $\text{tg } \omega = \frac{\text{tg } \varphi}{\cos \zeta}$

- (2) Il nous semble de beaucoup préférable d'adopter dans tous les cas la méthode de l'Imprimé 2304 B.T., inspiré directement des formules de Néper: calcul de ζ_A et ζ_B par $\text{tg } (\zeta_A + \zeta_B)/2$ et $\text{tg } (\zeta_B - \zeta_A)/2$, puis calcul vérifié de $\sin \Delta\omega$ à partir de $\sin \Delta M'$ et $\sin \Delta\varphi$.

Remarques: calcul de ω par $\text{tg } \omega = \frac{\text{tg } \varphi}{\cos \zeta}$ (vérification)

Les formules donnant les azimuts sont les suivantes:

$$\text{tg } \zeta_m = \text{tg } \frac{\Delta M'}{2} \frac{\cos \varphi_A + \cos \varphi_B}{\sin \Delta\varphi}$$

$$\text{tg } \frac{\Delta \zeta}{2} = \text{tg } \frac{\Delta M'}{2} \frac{\sin 2\varphi_m}{\cos \varphi_A + \cos \varphi_B}$$

Ces formules, légèrement modifiées des formules de Néper, nous ont paru les plus économiques de valeurs trigonométriques à calculer. On peut leur substituer:

$$\text{tg } \zeta_m = \text{tg } \frac{\Delta M'}{2} \frac{\cos \varphi_m}{\sin (\Delta\varphi/2)}$$

$$\text{tg } \frac{\Delta \zeta}{2} = \text{tg } \frac{\Delta M'}{2} \frac{\sin \varphi_m}{\cos (\Delta\varphi/2)}$$

(Néper)

ou encore:

$$\text{tg } \zeta_m = \text{tg } \frac{\Delta M'}{2} \left(\frac{1 - \text{tg}\{\varphi_A/2\}\text{tg}\{\varphi_B/2\}}{\text{tg}\{\varphi_B/2\} - \text{tg}\{\varphi_A/2\}} \right)$$

$$\text{tg } \frac{\Delta \zeta}{2} = \text{tg } \frac{\Delta M'}{2} \left(\frac{\text{tg}\{\varphi_A/2\} + \text{tg}\{\varphi_B/2\}}{1 + \text{tg}\{\varphi_A/2\}\text{tg}\{\varphi_B/2\}} \right)$$

Cette dernière forme s'est révélée la plus commode et la plus fidèle pour les calculs électroniques.

La vérification de $\Delta\omega$ obtenu:

—d'une part, par $\sin \Delta\omega$

—d'autre part, par $(\omega_B - \omega_A)$, ω_B et ω_A étant obtenus eux-mêmes par leurs tangentes $\left(\text{tg } \omega = \frac{\text{tg } \varphi}{\cos \zeta} \right)$ pourra donner lieu à 2 cas de non-concordance:

- (a) $\Delta\omega$ voisin de 100° (10 000 km) est alors mal défini par son sinus: utiliser alors la formule fondamentale;

- (b) *géodésiques voisines de l'équateur* (Z_E petit): en ce cas, $\text{tg } \omega_A$ et $\text{tg } \omega_B$ sont fournies par des quotients de valeurs petites, d'où mauvaise précision: la vérification disparaît alors. Dans ce cas, on sortira ω_A par $\text{tg } \omega_A$ (avec une mauvaise précision, sans conséquence fâcheuse), on calculera ω_B par $\omega_A + \Delta\omega$, $\Delta\omega$ étant sorti par $\frac{\sin \Delta\omega}{\sin \Delta M'}$, moyennant quoi les calculs de ΔS et ϵ resteront excellents . .

LIMITATION DES GÉODÉSQUES

Il semble que la seule limitation se trouve dans la longueur qui ne doit pas approcher trop de 200^g (20 000 km): la limite pratique de 18 000 km peut être adoptée.

Il n'y a aucun inconvénient pratique à ce que $\Delta M'$ soit voisin de 0 ou 200^g (géodésiques passant près du pôle).

Pour discussion plus approfondie, voir le Sect. VII. Pour les exemples numériques qui vont suivre, les calculs 'sphériques' seront toujours effectués sur l'imprimé I.G.N. 2304 B.T., sauf exceptions signalées. Nous nous attachons pour l'instant au problème Ellipsoïde \rightleftharpoons Sphère. Le Sect. VII discute le problème sphérique. Il appartient à chaque utilisateur de faire un choix pour son problème propre . . . (Sect. VIII).

RESOLUTIONS PRATIQUES DU PROBLÈME DES GRANDES GÉODÉSQUES PAR LA SPHÈRE PARAMÉTRIQUE

Tables et Constantes

- (a) Tables des lignes trigonométriques à 8 décimales
 et Tables des lignes trigonométriques à 10 décimales jusqu'à 10^g
 ou Tables des lignes trigonométriques à 10 décimales complètes.
- (b) Tables $(\varphi - L) = f(L)$
 $(\varphi - L) = f(\varphi)$ (vérification)

Il sera commode d'établir les tables ci-dessus à 10 000 entrées, de cg en cg (ou 5 400 entrées de minute sexagésimale en minute sexagésimale), de façon à réaliser des interpolations linéaires commodes, tout au moins pour les ellipsoïdes usuels.

- (c) Tables de $V(L) = (1 + e'^2 \cos^2 L)^{\frac{1}{2}}$
 Des tables à 8 décimales, de dg en dg , suffiront pratiquement (interpolation linéaire).
- (d) *Intégrales de Wallis*

Les Tables (I) du livre 'Note sur le calcul des grandes Géodésiques' de MM. Levallois et Dupuy, résolvent parfaitement la question.

Notation: nous avons appelé I_2, I_4, I_6 , ce qui est appelé dans ce document $A_2 W_2, A_4 W_4, A_6 W_6$.

Les tables sont établies de dg en dg de 0 à 100^g .

Cas où $\omega > 100^g$

On rappelle que:

$$I_n(200 - x) = 2 I_n(100) - I_n(x)$$

CALCUL DE GRANDES GÉODÉSIQUES

Ces tables correspondent exactement aux intégrales:

$$\left\{ \begin{aligned} I_2 &= \rho'' \frac{1}{2} 10^{-2} \int_0^\omega \sin^2 \omega \, d\omega \\ I_4 &= \rho'' \frac{1}{8} 10^{-4} \int_0^\omega \sin^4 \omega \, d\omega \\ I_6 &= \rho'' \frac{1}{16} 10^{-6} \int_0^\omega \sin^6 \omega \, d\omega \\ \rho &= \frac{1}{\sin 1''} = 636\,619,7724 \end{aligned} \right.$$

Elles donnent les résultats en *secondes centésimales*, moyennant de poser:

$$u^2 = 100 e'^2 \cos^2 \zeta_E$$

(e) *Documents spéciaux*

Il pourra être utile d'établir des tables spéciales (ou abaques) facilitant le calcul de V_1 et V_2 (Voir Compléments).

(f) *Constantes*

Pour le passage de V_1 à V_2 on utilise la constante K

$$V_2 = V_1 + K \sin^2 L_m \Delta L^2$$

ΔL exprimé en grades

($K \sin^2 L_m \Delta L^2$) exprimé en unités de la 8ème décimale

$$K = \frac{e'^2}{6} 10^{16} \sin^2 1'' \text{ (de l'ordre de 28)}$$

Pour le calcul de l'appoint ϵ à ΔM , par la méthode des intégrales, on utilise les constantes:

$$B_0 = 10^2 \left(\frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{8} + \frac{e^6}{16} \right) = 10^2 \frac{a-b}{a}$$

$$B_2 = 10^2 \frac{1}{e'^2} \left[\frac{e^4 + e^6}{8} \right]$$

$$B_4 = 10^2 \frac{1}{e'^4} \left[\frac{e^6}{16} \right]$$

N.B.: Toutes ces constantes sont consignées dans le document:
Constantes d'Ellipsoïdes.

Exemples Numériques

I—Calcul complet, par itérations, d'une longue géodésiques: Paris—Saïgon, la première valeur de $\Delta M'$ étant fournie par $V_1 \Delta M$ (3 niveaux) (Tables à 8 décimales).

II—Calcul, en une seule passe, d'une géodésique <1000 km.

Calcul de V_1 par les 3 niveaux

$$\text{Calcul de } V_2 \text{ par } V_2 = V_1 + \frac{e'^2}{6} \Delta L^2 \sin^2 L_m$$

Vérifications par les Intégrales

(Tables à 8 décimales et tables à 10 décimales des angles inférieurs à 10^{G}).

III—Calcul par les formules de Jordan—Vérification par les intégrales (projet d'imprimé).

I—Calcul complet d'une longue géodésique: Paris—Saigon Ellipsoïde international

La première valeur de $\Delta M'$ étant fournie par $V_1 \Delta M$ (3 niveaux)

1—Imprimé 2305 B.T. 1953

<p>I</p> <p>A PARIS B SAIGON B à l'est de A</p>	<p>$M_A =$ $M_B =$ $\Delta M =$ $\frac{1}{2} \Delta M =$</p> <p>54G 2626" 54 11 9774 69 115G 9598" 76 57 9799</p>	<p>$L_A =$ $L_B =$</p> <p>54G 2626" 54 11 9774 69</p>	<p>$\text{tg } L_A =$ $\text{tg } L_B =$ $\frac{1}{2}(\text{tg } L_A + \text{tg } L_B) =$ $\cos \frac{1}{2} \Delta M =$</p> <p>+ 1,14375 567 + 0,19039 343 + 0,66707 455 = 0,61315 602</p>	
<p>$\varphi_A = 54G 1562" 36$ $\varphi_B = 11 9380 81$</p>				
<p>II</p> <p>$\text{tg } L_m = \frac{\frac{1}{2}(\text{tg } L_A + \text{tg } L_B)}{\cos \frac{1}{2} \Delta M} =$ $L_m = 52G 6796"$</p> <p>$V_A = 1,00146 506$ $V_m = 1,00154 857$ $V_B = 1,00326 039$ $\frac{1}{2}(V_A + 4V_m + V_B) = V_1 = 1,00181 9955$</p>	<p>$\Delta M' = V_1 \Delta M = 116G 1709" 18$</p>	<p>Calcul sphérique</p> <p>$\sin \zeta_e = 0,62727 901$ $\cos^2 \zeta_e = 0,60652 105$</p>		
<p>III</p> <p>Intégrales $\epsilon = 10^{-2} \sin \zeta_e (B_0 \Delta \omega - B_2 u^2 \Delta I_2 + B_4 u^4 \Delta I_4)$ $\sigma = \Delta \omega + u^2 \Delta I_2 - u^4 \Delta I_4 + u^6 \Delta I_6 = 100 \epsilon'^2 \cos^2 \zeta_e$</p>				
<p>ω</p> <p>I_2</p> <p>I_4</p> <p>I^8</p>	<p>A</p> <p>83G 1679" 85</p> <p>1677 74</p> <p>2 68</p> <p>0</p>	<p>B</p> <p>184G 6113" 36 (15 3886 37)</p> <p>4985 19</p> <p>9 37</p> <p>0</p>	<p>B - A</p> <p>101G 4433" 51</p> <p>3307 45</p> <p>6 69</p> <p>0</p>	<p>σ</p> <p>1</p> <p>$u^2 0,4105 04$</p> <p>$u^4 0,1685$</p> <p>u^8</p> <p>ϵ</p> <p>$B_0 0,33670 034$</p> <p>$B_2 u^2 0,068992$</p> <p>$B_4 u^4 0,0566$</p>

Vérification et amélioration des longitudes

$\epsilon = 2141" 11$

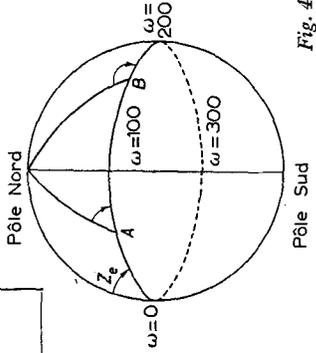
$\Delta M' = \Delta M + \epsilon = 116G 1739" 87$

CALCUL DE GRANDES GÉODÉSIQUES

2—Imprimé 2304 B. T. 1953

Trigonométrie sphérique: problème inverse

$\varphi_A = 54^{\circ} 1562'' 36$ $\varphi_B = 11\ 9380\ 81$	$\sin \varphi_A = + 0,75173\ 177$ $\sin \varphi_B = + 0,18642\ 584$	$\cos \varphi_A = + 0,65946\ 899$ $\cos \varphi_B = + 0,98246\ 904$	$\operatorname{tg} \varphi_A = + 1,13990\ 464$ $\operatorname{tg} \varphi_B = + 0,18975\ 238$
$2\varphi_m = + 66^{\circ} 0943'' 17$ $\Delta\varphi = + 42\ 2181\ 55$	$\sin 2\varphi_m = + 0,86149\ 524$ $\sin \Delta\varphi = + 0,61561\ 112$	$\cos \varphi_A + \cos \varphi_B = + 1,64193\ 803$	
$\Delta M' = + 116^{\circ} 1709'' 18$ $\frac{\Delta M'}{2} = + 58^{\circ} 0854'' 59$	$\sin \Delta M' = + 0,96791\ 199$ $\cos \Delta M' = - 0,25128\ 942$	B à l'est de A $2\varphi_m = \varphi_B + \varphi_B$ $\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A$ Mettre les signes	
$\operatorname{tg} \frac{\Delta M'}{2} = + 1,29277\ 189$	$\frac{\sin \Delta M'}{1 + \cos \Delta M'} = + 1,29277\ 189$		
$\operatorname{tg} \zeta_m = \operatorname{tg} \frac{\Delta M'}{2} \frac{\cos \varphi_A + \cos \varphi_B}{\sin \Delta\varphi}$ $\operatorname{tg} \frac{\Delta \zeta}{2} = \operatorname{tg} \frac{\Delta M'}{2} \frac{\sin 2\varphi_m}{\cos \varphi_A + \cos \varphi_B}$ $\operatorname{cotg} \zeta_m = 0,29001\ 990$	$\sin \zeta_A = + 0,95118\ 802$ $\sin \zeta_B = + 0,63847\ 204$ $\sin \zeta_A + \sin \zeta_B = + 1,58966\ 006$	$\cos \zeta_A = + 0,30861\ 197$ $\cos \zeta_B = - 0,76964\ 502$ $\cos \zeta_A + \cos \zeta_B = - 0,46103\ 305$	
$\operatorname{tg} \frac{\Delta \zeta}{2} = 0,67829\ 407$ $\zeta_m = 117^{\circ} 9702'' 34$	$\sin \Delta\omega = \sin \Delta M' \frac{\cos \varphi_A + \cos \varphi_B}{\sin \zeta_A + \sin \zeta_B} = \sin \Delta\varphi \cdot \frac{1 + \cos \Delta M'}{\cos \zeta_A + \cos \zeta_B}$ $\sin \Delta\omega^* = 0,99974\ 300$	COMPLEMENTS $\sin \zeta_e = \sin \zeta \cdot \cos \varphi$ $\sin \zeta_e = 0,62727\ 901$ $\sin \zeta_e = 0,62727\ 901$	
$\frac{\Delta \zeta}{2} = 37^{\circ} 9431'' 25$	$\cos \Delta\omega^\dagger = 0,02267\ 017$ $\Delta\omega = 101^{\circ} 4433'' 51$	$\omega_A = 83^{\circ} 1679'' 85$ $\omega_B = 184^{\circ} 6113'' 36$ $\Delta\omega = 101^{\circ} 4433'' 51$	
$\zeta_A = 80^{\circ} 0271'' 09$ $\zeta_B = 155^{\circ} 9133'' 59$	* La 1ère valeur est seule à retenir pour les géodésiques Est-Ouest. La 2ème pour les géodésiques Nord-Sud. Pour les décimales utiles, se conformer à l'exemple numérique.		



† Dans le cas particulier où $\sin \Delta\omega \neq 1$, si on veut sortir $\Delta\omega$ directement avec précision, on utilise la relation fondamentale: $\cos \Delta\omega = \sin \varphi_A \sin \varphi_B + \cos \varphi_A \cos \varphi_B \cos \Delta M'$.

3—Imprimé 2305 B. T. 1953

II

CALCUL SPHÉRIQUE

$$\begin{aligned} \zeta_{AB} &= 80^{\circ} 0247' 89 \\ \zeta_{BA} &= 355^{\circ} 9139' 83 \\ \sin \zeta_e &= 0,62727 159 \\ \cos^2 \zeta_e &= 0,60653 036 \end{aligned}$$

III

	Intégrales		$\epsilon = 10^{-3} \sin \zeta_e (B_0 \Delta \omega - B_2 u^2 \Delta I_2 + B_4 u^4 \Delta I_4)$ $\sigma = 4\omega + u^2 \Delta I_2 - u^4 \Delta I_4 + u^6 \Delta I_6$	$B - A$	σ	ϵ
ω	A 83° 1661" 80	B 184° 6114" 57 (15 3885 43)	$101^{\circ} 4452' 77$	1	B_0	0,33670 034
I_2	1677 65	4985 19	3307 54	u^2	0,4105 10	$B_2 u^2$ 0,068993
I_4	2 68	9 37	6 69	u^4	0,1685	$B_4 u^4$ 0,0566
I_6	0	0	0	u^6	0	
Vérification et amélioration des longitudes $\epsilon = 2141'' 12$			Calcul de la distance $\sigma = 101^{\circ} 5809' 42$ $S = b \cdot \sin I'' \cdot \sigma = 10.143.277^m 5$			

CALCUL DE GRANDES GÉODÉSIQUES

4—Imprimé 2340 B. T. 1953

Trigonométrie sphérique: problème inverse

$\sin 2\varphi_m = + 0,86149\ 524$ $\sin \Delta\varphi = + 0,61561\ 112$	B à l'est de A $2\varphi_m = \varphi_B + \varphi_A$ $\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A$ Mettre les signes		Fig. 5
$\Delta M' = 116^G 1739' 87$ $\frac{\Delta M'}{2} = 58\ 0869\ 935$ $\operatorname{tg} \frac{\Delta M'}{2} = + 1,29283\ 628$	$\sin \Delta M' = + 0,96789\ 988$ $\cos \Delta M' = - 0,25133\ 608$ $\frac{\sin \Delta M'}{1 + \cos \Delta M'} = + 1,29283\ 628$		
$\operatorname{tg} \zeta_m = \operatorname{tg} \frac{\Delta M' \cos \varphi_A + \cos \varphi_B}{2 \sin \Delta\varphi}$ $\operatorname{tg} \frac{\Delta \zeta}{2} = \operatorname{tg} \frac{\Delta M'}{2 \cos \varphi_A + \cos \varphi_B}$ $\operatorname{cote} \zeta_m = 0,29000\ 546$ $\operatorname{tg} \frac{\Delta \zeta}{2} = 0,67832\ 785$ $\zeta_m = 117^G 9693' 86$ $\frac{\Delta \zeta}{2} = 37^G 9445' 97$	$\sin \zeta_A = + 0,95117\ 677$ $\sin \zeta_B = + 0,63846\ 448$ $\sin \zeta_A + \sin \zeta_B = + 1,58964\ 125$ $\sin \Delta\omega = \sin \Delta M' \frac{\cos \varphi_A + \cos \varphi_B}{\sin \zeta_A + \sin \zeta_B} = \frac{1 + \cos \Delta M'}{\cos \zeta_A + \cos \zeta_B}$ $\sin \Delta\omega^* = 0,99974\ 231$	COMPLEMENTS $\sin \zeta_e = \sin \zeta \cdot \cos \varphi$ $\sin \zeta_e = 0,62727\ 159$ $\sin \zeta_e = 0,62727\ 158$	
$\zeta_A = 80^G 0247' 89$ $\zeta_B = 155^G 9139' 83$	$\cos \Delta\omega^\dagger = 0,02270\ 040$ $\Delta\omega = 101^G 4452' 76$	$\omega_A = 83^G 1661' 80$ $\omega_B = 184^G 6114' 57$ $\Delta\omega = 101^G 4452' 77$	

* La 1ère valeur est seule à retenir pour les géodésiques Est-Ouest. La 2ème pour les géodésiques Nord-Sud. Pour les décimales utiles, se conformer à l'exemple numérique.

† Dans le cas particulier où $\sin \Delta\omega \neq 1$, si on veut sortir $\Delta\omega$ directement avec précision, on utilise la relation fondamentale: $\cos \Delta\omega = \sin \varphi_A \sin \varphi_B + \cos \varphi_A \cos \varphi_B \cos \Delta M'$.

II—Calcul, en une seule passe, d'une géodésique < 1000 km

I—Imprimé 2305 B. T. 1953

I	A B B à l'est de A	$M_A = 0G$ $M_B = + 5G$ Est $\Delta M = 5$ $\frac{1}{2}\Delta M = 2,50$	$L_A = 50G$ $L_B = 48G$ $\Delta L = 2$ $\Delta L^2 = 4$	$\text{tg } L_A = + 1,00000\ 000$ $\text{tg } L_B = + 0,93906\ 251$ $\frac{1}{2}(\text{tg } L_A + \text{tg } L_B) = + 0,96953\ 125$ $\cos \frac{1}{2} \Delta M = + 0,99922\ 904$
---	--	--	--	---

$\varphi_A = 49G\ 8926''\ 4432$
 $\varphi_B = 47G\ 8928''\ 6751$

II	$\text{tg } L_m = \frac{\frac{1}{2}(\text{tg } L_A + \text{tg } L_B)}{\cos \frac{1}{2}\Delta M} = 0,97027\ 930$ $L_m = 49G\ 0397''\ 63$ $\sin^2 L_m = 0,48493$	$\Delta M' = V_1 \cdot \Delta M = 5G\ 0087''\ 1128$
	$V_A = 1,00169\ 061$ $V_m = 1,00174\ 156$ $V_B = 1,00179\ 667$ $\frac{1}{2}(V_A + 4V_m + V_B) = V_1 = 1,00174\ 22525$ $V_2 = 1,00174\ 2778$	Calcul sphérique $S = \frac{a \sin 1''}{V_2} \cdot \Delta\omega = 412,037^m,481$ $Z_{AB} = 130G\ 5037''\ 073$ $Z_{BA} = 333G\ 9846''\ 273$ $\sin Z_e = 0,62853\ 433$ $\cos^2 Z_e = 0,60494\ 460$

III	Intégrales	$\epsilon = 10^{-2} \sin Z_e (B_0 \Delta\omega - B_3 u^2 \Delta I_3 + B_4 u^4 \Delta I_4)$ $\sigma = \Delta\omega + u^2 \Delta I_3 - u^4 \Delta I_4 + u^6 \Delta I_6$	$u^2 = 100 \epsilon'^2 \cos^2 Z$			
	ω	A	B	B - A	σ	ϵ
		127G 5827" 6193 (72 4172 3807	131G 7024" 2912 (68 2975 7088	4G 1196" 6719	1	B_0 0,33670 034
	I_3	3796 0226	3960 4401	164 4175	u^2 0,4094 3680	$B_2 u^2$ 0,068812
	I_4	7 7420	8 0703	3283	u^4 0,1676 38	$B_4 u^4$ 0,0563
	I^6	0 0338	0 0352	14	u^6 0,0686	

	Vérification et amélioration des longitudes	Calcul de la distance
	$\epsilon = 87''\ 1126$ $\Delta M' = \Delta M + \epsilon = 5G\ 0087''\ 1126$	$S = b \cdot \sin I' \cdot \sigma = 412,037^m,478$

CALCUL DE GRANDES GÉODÉSIQUES

2—Imprimé 2304 B. T. 1953

Trigonométrie sphérique: problème inverse

$\varphi_A = + 49^G 8926'' 4432$ $\varphi_B = + 47 8928 6751$	$\sin \varphi_A = + 0,70591 335$ $\sin \varphi_B = + 0,68331 940$	$\cos \varphi_A = + 0,70829 820$ $\cos \varphi_B = + 0,73011 957$	$\operatorname{tg} \varphi_A = + 0,99663 300$ $\operatorname{tg} \varphi_B = + 0,93590 068$
$2\varphi_m = + 97^G 7855'' 1183$ $4\varphi = - 1 9997 7681$	$\sin 2\varphi_m = + 0,99939 506$ $\sin 4\varphi = - 0,03140 72550$	$\cos \varphi_A + \cos \varphi_B = + 1,43841 777$	
$\Delta M' = + 5^G 0087'' 1128$ $\frac{\Delta M'}{2} = + 2^G 5043'' 5564$	$\sin \Delta M' = + 0,07859 55096$ $\cos \Delta M' = + 0,99690 65883$	B à l'est de A $2\varphi_m = \varphi_B + \varphi_A$ $\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A$	
$\operatorname{tg} \frac{\Delta M'}{2} = + 0,03935 86311 =$	$\frac{\sin \Delta M'}{1 + \cos \Delta M'} = 0,03935 86310$	Mettre les signes	
$\operatorname{tg} \zeta_m = \operatorname{tg} \frac{\Delta M'}{2} \frac{\cos \varphi_A + \cos \varphi_B}{\sin 4\varphi}$ $\operatorname{tg} \frac{\Delta \zeta}{2} = \operatorname{tg} \frac{\Delta M'}{2} \frac{\sin 2\varphi_m}{\cos \varphi_A + \cos \varphi_B}$ $\operatorname{tg} \zeta_m = 1,80258 206$ $\operatorname{cotg} \zeta_m = 0,55475 9765$ $\operatorname{tg} \frac{\Delta \zeta}{2} = 0,02734 5895$	$\sin \zeta_A = + 0,88738 660$ $\sin \zeta_B = + 0,86086 492$ $\sin \zeta_A + \sin \zeta_B = + 1,74825 152$ $\sin \Delta\omega = \sin \Delta M' \frac{\cos \varphi_A + \cos \varphi_B}{\sin \zeta_A + \sin \zeta_B} = \sin 4\varphi \frac{1 + \cos \Delta M'}{\cos \zeta_A + \cos \zeta_B}$ $\sin \Delta\omega^* = + 0,06466 64259$	$\cos \zeta_A = - 0,46102 605$ $\cos \zeta_B = - 0,50883 355$ $\cos \zeta_A + \cos \zeta_B = - 0,96985 960$	COMPLEMENTS $\sin \zeta_e = \sin \zeta \cdot \cos \varphi$ $\sin \zeta_e = 0,62853 433$ $\sin \zeta_e = 0,62853 433$
$\zeta_m = 132^G 2441'' 673$ $\frac{\Delta \zeta}{2} = 1 7404 60$	$4\omega = 4^G 1196'' 6719$	$\operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg} \varphi / \cos \zeta$ $\operatorname{cotg} \omega_A = - 0,46258 357$ $\operatorname{cotg} \omega_B = - 0,54368 328$	$\omega_A = 127^G 5827'' 619$ $\omega_B = 131^G 7024'' 291$ $\Delta\omega = 4^G 1196'' 672$
$\zeta_A = 130^G 5037'' 073$ $\zeta_B = 133^G 9846'' 273$	* La 1ère valeur est seule à retenir pour les géodésiques Est-Ouest. La 2ème pour les géodésiques Nord-Sud. Pour les décimales utiles, se conformer à l'exemple numérique.		

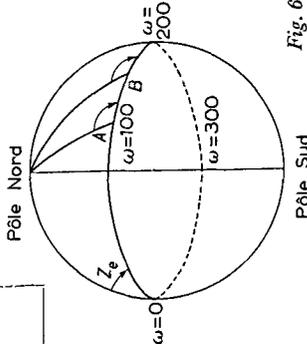


Fig. 6

III—Calcul de grande géodésique par la formule de Jordan—projet d'imprime

GRANDES GÉODÉSIQUES—PROBLÈME INVERSE
SPHÈRE PARAMÉTRIQUE—ELLIPSOÏDE

I	<p>A</p> <p>B</p> <p>B à l'Est de A</p>	<p>$M_A =$</p> <p>$M_B =$</p> <p>$\Delta M =$</p>	<p>$L_A =$</p> <p>$L_B =$</p> <p>$\Delta L =$</p>	<p>$\varphi - L =$</p> <p>$\varphi - L =$</p>
II	<p>$L_m = \frac{L_A + L_B}{2} =$</p> <p>$\Delta M^2 =$</p> <p>$\Delta L^2 =$</p> <p>$\alpha_m =$</p> <p>$\beta_m =$</p> <p>$\gamma_m =$</p>	<p>$V_m =$</p> <p>$\alpha \Delta M^2 =$</p> <p>$\beta \Delta L^2 =$</p> <p>$V_1 =$</p> <p>$\gamma \Delta L^2 =$</p> <p>$V_2 =$</p>	<p>$\varphi_A =$</p> <p>$\varphi_B =$</p> <p>$\Delta M' = V_1 \cdot \Delta M =$</p>	<p>$\varphi - L =$</p> <p>$\varphi - L =$</p>
<p>CALCUL SPHÉRIQUE</p> <p>$S = \frac{a \sin 1''}{V_2} \Delta \omega =$</p> <p>$\zeta_{AB} =$ $\zeta_{BA} =$</p> <p>$\sin \zeta_E =$ $\cos^2 \zeta_E =$</p>				

III

Intégrales

Identique à l'Imprimé 2305 B.T. 1953

Tables à utiliser

—Tables $(\varphi - L) = f(L)$ et $\varphi - L = f(\varphi)$

—Tables de V à 8 décimales

—Tables α, β, γ , en fonction de L

$$\alpha = \frac{e'^2}{12} \left(1 - \frac{\cos 2L}{2} \right) \sin^2 1'' \cdot 10^{16}$$

$$\beta = \frac{e'^2 \sin^2 2L}{12 \cdot 4} \sin^2 1'' \cdot 10^{16}$$

$$\gamma = \frac{e'^2}{6} \sin^2 L \sin^2 1'' \cdot 10^{16}$$

$\Delta L, \Delta M$ en grades

Résultats en unités de la

8ème décimale

Intégrales de Wallis

—Tables trigonométriques

III—CALCUL DE GRANDES GÉODÉSIQUES

PAR REPRÉSENTATION SUR LA SPHÈRE CONFORMÉ

La représentation que nous allons exposer maintenant consiste à faire correspondre à l'ellipsoïde, point par point, la sphère de rayon 1 :

—Latitude $L \rightarrow$ Latitude ψ définie par :

$$\int_{\mathcal{L}_{\text{croissante}}}^{\text{ellipsoïdique}} (L) = \int_{\mathcal{L}_{\text{croissante}}}^{\text{sphérique}} (\psi)$$

ou encore :

$$\text{Log tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{L}{2} \right) - \frac{e}{2} \text{Log} \frac{1 + e \sin L}{1 - e \sin L} = \text{Log tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2} \right)$$

ou encore :

$$\text{Arg th} \left(\text{tg} \frac{L}{2} \right) - \text{Arg th} \left(\text{tg} \frac{\psi}{2} \right) = \frac{e}{2} \text{Arg th} (e \sin L)$$

ou encore :

$$\frac{\text{tg} (L/2) - \text{tg} (\psi/2)}{1 - \text{tg} (L/2) \text{tg} (\psi/2)} = A (e^2, \sin L) = B (e^2, \sin \psi)$$

—Longitude $M \rightarrow$ Longitude M inchangée

—Echelle de la transformation: $\frac{K}{a}$

$$K = \frac{a \cos \psi}{N \cos L} \quad (K = 1 \text{ à l'équateur})$$

—Courbure de la transformée d'une ligne géodésique

$$\Gamma = \frac{\sin L - \sin \psi}{\cos \psi} \sin \mathcal{Z}$$

La représentation se trouve donc *simple*, *biunivoque*, et le calcul des termes correctifs particulièrement accessible. . . . La simplicité de sa définition en fait une concurrente sérieuse de la méthode des latitudes paramétriques, surtout pour le calcul pratique de tout un ensemble de lignes (réseau Shoran, par exemple).

TABEAU CONDENSE DES ÉTAPES DU CALCUL

—Ellipsoïde \rightarrow Sphère $\left\{ \begin{array}{l} L \rightarrow \psi \\ M \text{ inchangé} \end{array} \right.$

—Calcul sphérique $\rightarrow \Delta\omega(\omega_A \text{ et } \omega_B \text{ éventuellement})$

$\mathcal{Z}'_A \mathcal{Z}'_B$ azimuts sphériques

—Sphère→Ellipsoïde

$$\frac{\Delta S}{a} = \int_{\omega_A}^{\omega_B} \frac{\Delta \omega}{K} \quad \text{intégrale prise sur l'arc de grand cercle } A'B' \text{ sur la sphère image}$$

$$\begin{aligned} \zeta_A &= \zeta'_A - \rho_1 \\ \zeta_B &= \zeta'_B + \rho_2 \end{aligned} \quad \text{corrections de réduction à la corde}$$

Les angles ρ_1 et ρ_2 sont fournis par les intégrales suivantes à partir de Γ (voir *Bulletin Géodésique* n° 25, 1952, page 361, Article de M. DUFOUR)

$$\rho_1 = \frac{1}{\sin \Delta \omega} \int_{\omega_A}^{\omega_B} \Gamma \sin (\omega_B - \omega) d\omega$$

$$\rho_2 = \frac{1}{\sin \Delta \omega} \int_{\omega_A}^{\omega_B} \Gamma \sin (\omega - \omega_A) d\omega$$

Ces intégrales sont prises le long de $A'B'$ et par suite nous voyons :

—la simplicité générale du calcul

—l'impossibilité d'un calcul rigoureusement correct, par suite de l'erreur de ligne d'intégration, qu'il est pratiquement impossible de corriger, mais qui d'ailleurs est aussi pratiquement sans grosse importance. . . .

Le calcul sphérique est l'objet des mêmes remarques que dans le cas de la sphère paramétrique. Nous allons développer maintenant les méthodes relatives à la 3ème étape du calcul : Passage des résultats du calcul sphérique aux résultats de calcul sur l'ellipsoïde.

CALCUL DES CORRECTIONS SPHÈRE—ELLIPSOÏDE

Méthodes d'intégration par points

On appliquera la règle des 3 niveaux aux expressions ci-dessus, ce qui donne :

$$\frac{\Delta S}{a} = \frac{\Delta \omega}{K_m} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{K_m} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{K_A} + \frac{4}{K_{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{K_B} \right)$$

$K_{\frac{1}{2}}$ étant l'échelle au point milieu de l'arc, défini pratiquement par :

$$\sin \psi_{\frac{1}{2}} = \frac{\sin \psi_A + \sin \psi_B}{2 \cos (\Delta \omega / 2)}$$

$$\begin{cases} \rho_1 = \frac{1}{6} \left[\frac{2 \Gamma_{\frac{1}{2}}}{\cos (\Delta \omega / 2)} + \Gamma_B \right] \\ \rho_2 = \frac{1}{6} \left[\Gamma_A + \frac{2 \Gamma_{\frac{1}{2}}}{\cos (\Delta \omega / 2)} \right] \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{ou, en remplaçant } \Gamma \text{ par son expression,} \\ \text{et tenant compte que : } \sin \zeta \cos \varphi = \sin \zeta_E \end{array}$$

$$\begin{cases} \rho_1 = \frac{1}{6} \left[\frac{2 U (\psi_{\frac{1}{2}})}{\cos (\Delta \omega / 2)} + U (\psi_B) \right] \times \sin \zeta_E \\ \rho_2 = \frac{1}{6} \left[\frac{2 U (\psi_{\frac{1}{2}})}{\cos (\Delta \omega / 2)} + U (\psi_B) \right] \times \sin \zeta_E \end{cases}$$

CALCUL DE GRANDES GÉODÉSIQUES

avec $U(\psi) = \frac{\sin L - \sin \psi}{\cos^2 \psi}$ (expression uniquement fonction de la latitude).

Ces formules permettent de calculer les géodésiques jusqu'à 1000 km avec la précision de quelques centimètres sur les distances, et une précision correspondante sur les azimuts (elles ont pratiquement la portée de la méthode des 3 niveaux en sphère paramétrique).

On peut leur substituer des formules simplifiées, moins précises (par exemple $\frac{1}{K} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{K_A} + \frac{1}{K_B} \right)$ que nous n'étudierons pas ici.

Il n'y a pas lieu de chercher des formules par points plus précises: il vaut mieux utiliser les intégrales de Wallis.

Méthode par les intégrales de Wallis

L'expression de l'échelle est de la forme:

$$\frac{1}{K} = 1 - b \sin^2 \psi + c \sin^4 \psi$$

On obtient par suite:

$$\frac{\Delta S}{a} = \int \frac{d\omega}{K} = \Delta\omega - b \int_{\omega_A}^{\omega_B} \sin^2 \psi \, d\omega + c \int_{\omega_A}^{\omega_B} \sin^4 \psi \, d\omega$$

ou, en posant: $\sin \psi = \sin \omega \cos Z_E$

$$\frac{\Delta S}{a} = \Delta\omega - b \cos^2 Z_E \int_{\omega_A}^{\omega_B} \sin^2 \omega \, d\omega + c \cos^4 Z_E \int_{\omega_A}^{\omega_B} \sin^4 \omega \, d\omega$$

Supposant tabulées les expressions:

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_0^\omega \sin^2 \omega \, d\omega$$

$$I_4 = \frac{1}{8} \int_0^\omega \sin^4 \omega \, d\omega$$

(déjà utilisées pour la sphère paramétrique), on obtient finalement:

$$\frac{\Delta S}{a} = \Delta\omega - A \Delta I_2 \cos^2 Z_E + B \Delta I_4 \cos^4 Z_E$$

A, B : fonctions de l'ellipsoïde

Quant à ρ_1 et ρ_2 , leur expression rigoureuse peut se transformer et donner lieu à un calcul faisant intervenir:

— Les intégrales I_2, I_4

— Les intégrales: $\int \sin \omega \cos \omega, \int \sin^3 \omega \cos \omega \dots$ qui sont intégrables sous les formes simples: $\mathcal{J}_2 = \sin^2 \omega, \mathcal{J}_4 = \sin^4 \omega$ (à des facteurs près).

Au total, on peut écrire:

$$\begin{cases} I = C\Delta I_2 - D(\Delta I_4 \cos^2 \zeta_E) \\ \mathcal{J} = C\Delta \mathcal{J}_2 - D(\Delta \mathcal{J}_4 \cos^2 \zeta_E) \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_1 = \cos \omega_B I - \sin \omega_B \mathcal{J} & \rho_1 = \frac{\sin \zeta_E \cos \zeta_E}{\sin \Delta \omega} S_1 \\ S_2 = \cos \omega_A I - \sin \omega_A \mathcal{J} & \rho_2 = \frac{\sin \zeta_E \cos \zeta_E}{\sin \Delta \omega} S_2 \end{cases}$$

(Voir Développements fondamentaux de la sphère conforme, et exemple.)

En définitive, on notera:

—Pour les courtes géodésiques

La sphère conforme est commode par le fait qu'elle réalise une correspondance biunivoque simple de l'ellipsoïde. Elle présente l'avantage sur la sphère paramétrique de ne nécessiter que le calcul d'un point auxiliaire (point milieu de l'arc) par géodésique (au lieu de 2 : point milieu de l'arc, point milieu des longitudes). C'est une excellente méthode pour le calcul d'un réseau Shoran.

—Pour les longues géodésiques

On obtient rapidement une excellente valeur des longueurs. Les azimuts rigoureux sont difficiles à atteindre. La correction de ligne d'intégration n'est pas faite (elle est d'ailleurs négligeable pratiquement dans de nombreux cas).

En Calcul électronique

La sphère conforme réalise une méthode parfaitement viable, en tout cas précieuse pour contrôler d'autres méthodes.

Au Bureau Technique de la Géodésie Française, cette méthode a été mise au point, la première, pour calculer des distances et azimuts:

—Les distances sont calculées avec grande précision, par les intégrales de Wallis (erreur: 10 m sur Paris-Saigon, 10 000 km)

—Les azimuts ne sont pas corrigés des corrections de dv , mais on notera que, par suite de la *conformité* de la représentation, l'erreur est (grossièrement) proportionnelle à la distance: elle est par suite très souvent acceptable pour le but recherché . . . (orientation d'antennes, azimuts aéronautiques).

Ordre de grandeur de l'erreur: $\rho < 0^{\circ}02$ pour $\Delta \omega < 1000$ km

Cette erreur est par ailleurs assez rapide à calculer de façon approchée (par abaque, par exemple).*

Dans la suite de l'exposé, nous fournissons un certain nombre d'éléments pratiques du calcul:

* On pourra adopter $\rho_1 = \rho_2 = 3 \sin \zeta_E \Delta \omega U \left(\frac{\psi_A + \psi_B}{2} \right)$ comme correction approchée de d_v .

CALCUL DE GRANDES GÉODÉSQUES

- Développements fondamentaux de la sphère conforme
- Tables utilisées
- Exemples numériques

DÉVELOPPEMENTS FONDAMENTAUX DE LA
SPHÈRE CONFORMÉ

Passage de L à ψ

$$L - \psi = \sin L \cos L (A)$$

$$A = \frac{1}{\sin 1''} \left[e^2 + \left(\frac{5}{6} e^4 - \frac{e^6}{6} \right) \sin^2 L + \frac{13}{15} e^6 \sin^4 L \right]$$

$$A = a + b \sin^2 L + c \sin^4 L$$

$$a = \frac{e^2}{\sin 1''}$$

$$b = \frac{5e^4 - e^6}{6 \sin 1''}$$

$$c = \frac{13e^6}{15 \sin 1''}$$

Passage de ψ à L

$$L - \psi = \sin \psi \cos \psi (A')$$

$$A' = \frac{1}{\sin 1''} \left[(e^2 + e^4 + e^6) + \sin^2 \psi \left(-\frac{7}{6} e^4 - \frac{17}{6} e^6 \right) + \sin^4 \psi \left(\frac{28}{15} e^6 \right) \right]$$

$$A' = a + b \sin^2 \psi + c \sin^4 \psi$$

$$a = \frac{e^2 + e^4 + e^6}{\sin 1''}$$

$$b = -\frac{7e^4 + 17e^6}{6 \sin 1''}$$

$$c = \frac{28}{15} \frac{e^6}{\sin 1''}$$

$$\frac{\sin L}{\sin \psi} = C'$$

$$C' = (1 + e^2 + e^4 + e^6) - \left(e^2 + \frac{8}{3} e^4 + 5e^6 \right) \sin^2 \psi + \left(\frac{5}{3} e^4 + \frac{36}{5} e^6 \right) \sin^4 \psi - \frac{16}{5} e^6 \sin^6 \psi$$

Corrections angulaires

$$\Gamma = \frac{\sin L - \sin \psi}{\cos \psi} \sin \mathcal{Z} = \frac{\sin L - \sin \psi}{\cos^2 \psi} \sin \mathcal{Z}_E = U(\psi) \sin \mathcal{Z}_E$$

On établira en fait la fonction U définie par :

$$U = 10^4 \frac{\sin L - \sin \psi}{\cos^2 \psi}$$

$$U = \sin \psi (a + b \sin^2 \psi + c \sin^4 \psi)$$

$$a = 10^4 (e^2 + e^4 + e^6)$$

$$b = 10^4 \left(-\frac{5}{3} e^4 - 4e^6 \right)$$

$$c = 10^4 \left(\frac{16}{5} e^6 \right)$$

$$\rho_1^* = \sin \mathcal{Z}_E \left(\frac{U_m}{2 \cos \frac{\Delta\omega}{2}} + U_B \right) \Delta\omega^G$$

$$\rho_2^* = \sin \mathcal{Z}_E \left(\frac{U_m}{2 \cos \frac{\Delta\omega}{2}} + U_A \right) \Delta\omega^G$$

$$m \text{ étant défini par : } \sin \psi_m = \frac{\sin \psi_A + \sin \psi_B}{2 \cos \frac{\Delta\omega}{2}}$$

Correction d'échelle

$$\begin{aligned} \frac{1}{K} &= \frac{a \cos L}{bV \cos \psi} = 1 - \frac{e^2}{2} \sin^2 \psi + e^4 \left(-\frac{\sin^2 \psi}{2} + \frac{13}{24} \sin^4 \psi \right) \\ &= 1 - \sin^2 \psi \left(\frac{e^2 + e^4}{2} \right) + \frac{13}{24} e^4 \sin^4 \psi \end{aligned}$$

$$\frac{1}{K} = a + b \sin^2 \psi + c \sin^4 \psi$$

$$a = 1$$

$$b = -\frac{e^2 + e^4}{2}$$

$$c = \frac{13}{24} e^4$$

CALCUL DE GRANDES GÉODÉSQUES

FORMULES FONDAMENTALES DES INTÉGRALES

$$\Gamma = \frac{\sin L - \sin \psi}{\cos^2 \psi} \sin \zeta_E$$

$$\frac{1}{K} = 1 - \sin^2 \psi \left(\frac{e^2 + e^4}{2} \right) + \frac{13}{24} e^4 \sin^4 \psi$$

Correction d'échelle

$$\begin{aligned} \frac{S}{a \sin 1''} &= \int_{\omega_A}^{\omega_B} \frac{d\omega}{K} = \int_{\omega_A}^{\omega_B} d\omega \left(1 - \sin^2 \omega \cos^2 \zeta_E \frac{e^2 + e^4}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{13}{24} e^4 \sin^4 \omega \cos^4 \zeta_E \right) \\ &= \Delta\omega - \cos^2 \zeta_E \frac{e^2 + e^4}{2} \int_{\omega_A}^{\omega_B} \sin^2 \omega d\omega + \cos^4 \zeta_E \frac{13}{24} e^4 \int_{\omega_A}^{\omega_B} \sin^4 \omega d\omega \end{aligned}$$

Si on pose:

$$I_2 = \frac{10^{-2}}{2 \sin 1''} \int_0^\omega \sin^2 \omega d\omega$$

$$I_4 = \frac{10^{-4}}{8 \sin 1''} \int_0^\omega \sin^4 \omega d\omega$$

Il vient:

$$\frac{S}{a \sin 1''} = \Delta\omega - A I_2 + B I_4$$

$$\text{avec } A = 10^2(e^2 + e^4)$$

$$B = 10^4 \frac{13}{3} e^4$$

Corrections angulaires

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{1}{\sin \Delta\omega} \int_{\omega_A}^{\omega_B} \Gamma \sin (\omega_B - \omega) d\omega \\ &= \frac{1}{\sin \Delta\omega} \int_{\omega_A}^{\omega_B} (\sin \omega_B - \omega) U \sin \zeta_E d\omega \\ U &= \frac{\sin L - \sin \psi}{\cos^2 \psi} \end{aligned}$$

En remplaçant U par son expression:

$$U = \sin \psi (a + b \sin^2 \psi) = (a + b \cos^2 \zeta_E \sin^2 \omega) \sin \omega \cos \zeta_E$$

et en intégrant, on fait apparaître:

—Des intégrales I_2, I_4

—Des intégrales $\int \sin \omega \cos \omega, \int \sin^3 \cos \omega, \text{ etc. } \dots$ qui sont intégrables,

et qu'on désignera, à un facteur près, par $\mathcal{J}_2, \mathcal{J}_4$, etc. Finalement, on peut regrouper les termes de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2 &= \frac{10^{-2}}{4 \sin 1''} \sin^2 \omega & \mathcal{J}_4 &= \frac{10^{-4}}{32 \sin 1''} \sin^2 \omega \\ C &= 10^2 2(e^2 + e^4) & D &= 10^4 \frac{40}{3} e^4 \\ I &= C \Delta I_2 - D(\Delta I_4 \cos^2 \zeta_E) \\ \mathcal{J} &= C \Delta \mathcal{J}_2 - D(\Delta \mathcal{J}_4 \cos^2 \zeta_E) \\ S_1 &= \cos \omega_B I - \sin \omega_B \mathcal{J} \\ S_2 &= \cos \omega_A I - \sin \omega_A \mathcal{J} \\ \alpha &= \frac{\sin \zeta_E \cos \zeta_E}{\sin \Delta \omega} \\ \left\{ \begin{aligned} \rho_1 &= -\alpha S_1 \\ \rho_2 &= \alpha S_2 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

TABLES UTILISÉES

Passage de L à ψ

$L \rightarrow \psi$:

La table la plus commode sera une table de:

$$L - \psi = f(L)$$

Pour les ellipsoïdes courants, il est bon de posséder:

— pour L en grades: table à 10 000 entrées, de cg en cg
 — pour L en degrés: table à 5 400 entrées, de minute sexagésimale en minute sexagésimale

interpolation
linéaire

Remarque: La formule $L - \psi = \sin L \cos L \times A$

$$\text{avec } A = a + b \sin^2 L + c \sin^4 L$$

permet de travailler provisoirement avec la table A ($\sin^2 L$) à 10 entrées.

$\psi \rightarrow L$ (vérification)

On travaillera avec la table:

$$L - \psi = f(\psi)$$

mêmes entrées que ci-dessus. Provisoirement avec la table A' ($\sin^2 \psi$)

Calcul sphérique

Tables des lignes trigonométriques à 8 décimales
 et Tables des lignes trigonométriques à 10 décimales jusqu'à 10^6
 ou Tables des lignes trigonométriques à 8 décimales (géodésiques supérieures à 1000 km)

I—Calcul d'une Géodésique Inferieure a 1000 km par la Sphère Conformé

(1) Passage de l'ellipsoïde à la sphère et vice versa

SPHÈRE CONFORMÉ INTÉGRATION PAR 3 POINTS		GRANDES GÉODÉSIIQUES—PROBLÈME INVERSE		ELLIPSOÏDE: International $a \sin 1'' = 10,01914\ 844$	
I—DONNEES		$M_A = 0G\ 0000\ 00$ $M_B = 5G\ 0000\ 00$		$L_A = 50G\ 0000\ 00$ $L_B = 48G\ 0000\ 00$	
A B (B à l'est de A)		$\psi_A = 49G\ 7854''\ 101$ $\psi_B = 47G\ 7858''\ 713$		$L - \psi = 2145''\ 899$ $L - \psi = 2141''\ 287$	
II—CALCUL SPHÉRIQUE		$\Delta M = 5G\ 0000\ 00$		$L - \psi = 2145''\ 899$ $L - \psi = 2141''\ 287$	
III—CORRECTIONS		AZIMUTS		LONGUEURS	
$\Delta\omega^* = 4G\ 1191''\ 840$		U		$1/K$	
$\frac{\Delta\omega}{2} = 2G\ 0595''\ 920$		$\sin \psi_A^* = 0,704719$		0,99832 547	
$\cos \frac{\Delta\omega}{2} = 0,9999477$		$\sin \psi_B^* = 0,682091$		0,99843 092	
$\frac{\sin \psi_A + \sin \psi_B}{2 \cos \frac{\Delta\omega}{2}} =$		$\sin \psi_m = 0,693768$		0,99837 693	
$\sin \zeta_E^* = 0,62955\ 730$		$2 \frac{U_m}{\cos \frac{\Delta\omega}{2}} = 93,4517$		$\frac{1}{K} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{K_A} + \frac{1}{K_B} + \frac{4}{K_m} \right)$	
$\frac{\Delta\omega \sin \zeta_E}{6} = 0G\ 4322''\ 104$		$2 \frac{U_m}{\cos \frac{\Delta\omega}{2}} + U_A = 140,8821$		$\sigma = \left(\frac{1}{K} \right) \Delta\omega = 4G\ 1125''\ 000$	
$\rho_1 = \frac{\Delta\omega \sin \zeta_E}{6} \times \left[\frac{2U_m}{\cos(\Delta\omega/2)} + U_A \right] = 60''\ 89$		$2 \frac{U_m}{\cos \frac{\Delta\omega}{2}} + U_B = 139,3753$		$S = (\alpha \sin 1'') \sigma$	
$\rho_2 = \frac{\Delta\omega \sin \zeta_E}{6} \times \left[\frac{2U_m}{\cos(\Delta\omega/2)} + U_B \right] = 60''\ 24$		$\zeta_{AB}^S = 130G\ 5097''\ 97$		$S = 412,037^m\ 48$	
$\zeta - \rho = 130G\ 5037''\ 08 = \zeta_{AB}$		$\zeta - \rho = 130G\ 5037''\ 08 = \zeta_{AB}$			
$\zeta + \rho = 333G\ 9786''\ 04$		$\zeta + \rho = 333G\ 9786''\ 04$			
$\zeta + \rho = 333G\ 9846''\ 28 = \zeta_{BA}$		$\zeta + \rho = 333G\ 9846''\ 28 = \zeta_{BA}$			

*Résultats du calcul sphérique

CALCUL DE GRANDES GÉODÉSIQUES

(2) Calcul sphérique

Trigonométrie sphérique : problème inverse

$\psi_A = 49^{\circ} 7854'' 101$ $\psi_B = 47^{\circ} 7858'' 713$	$\sin \psi_A = 0,70471 927$ $\sin \psi_B = 0,68209 133$	$\cos \psi_A = 0,70948 625$ $\cos \psi_B = 0,73126 698$	
$2\psi_m = 97^{\circ} 5712'' 814$ $\Delta\psi = - 1^{\circ} 9995'' 388$	$\sin 2\psi_m = 0,99927 237$ $\sin \Delta\psi = 0,03140 35181$	$\cos \psi_A + \cos \psi_B = + 1,44075 323$	
$4M' = 5^{\circ}$ $\frac{4M'}{2} = 2^{\circ} 50$	$\sin \Delta M' = 0,07845 90957$ $\cos \Delta M' = 0,99691 73337$	B à l'est de A $2\psi_m = \psi_B + \psi_A$ $\Delta\psi = \psi_B - \psi_A$	
$\frac{\Delta M'}{2} = 0,03929 01070 =$	$\frac{\sin \Delta M'}{1 + \cos \Delta M'} = 0,03929 01070$	Mettre les signes	
$\operatorname{tg} \frac{\Delta M'}{2} = 0,03929 01070 =$	$\sin \zeta_A = 0,88734 250$ $\sin \zeta_B = 0,86091 306$ $\sin \zeta_A + \sin \zeta_B = 1,74825 556$	$\cos \zeta_A = 0,46111 093$ $\cos \zeta_B = 0,50875 210$ $\cos \zeta_A + \cos \zeta_B = 0,96986 303$	
$\operatorname{tg} \frac{\zeta_m}{2} = \operatorname{tg} \frac{\Delta M'}{2} \frac{\cos \psi_A + \cos \psi_B}{\sin \Delta\psi}$ $\operatorname{tg} \frac{\Delta \zeta}{2} = \operatorname{tg} \frac{\Delta M'}{2} \frac{\sin 2\psi_m}{\cos \psi_A + \cos \psi_B}$ $\operatorname{tg} \frac{\zeta_m}{2} = 1,80257 984$ $\operatorname{cotg} \frac{\zeta_m}{2} = 0,55476 045$	$\sin \Delta\omega = \sin \Delta M' \frac{\cos \psi_A + \cos \psi_B}{\sin \zeta_A + \sin \zeta_B} = \frac{1 + \cos \Delta M'}{\cos \zeta_A + \cos \zeta_B}$ $\sin \Delta\omega^* = 0,06465 88514$	COMPLEMENTS $\sin \zeta_e = \sin \zeta \cdot \cos \psi$ $\sin \zeta_e = 0,62955 730$ $\sin \zeta_e = 0,62955 729$	
$\operatorname{tg} \frac{\Delta \zeta}{2} = 0,02725 06891$	$\Delta\omega = 4^{\circ} 1191'' 840$		
$\zeta_m = 132^{\circ} 2442'' 005$	$\zeta_A = 130^{\circ} 5097'' 970$		
$\frac{\Delta \zeta}{2} = 1^{\circ} 7344'' 035$	$\zeta_B = 133^{\circ} 9786'' 040$		

* La 1ère valeur est seule à retenir pour les géodésiques Est-Ouest, la 2ème pour les géodésiques Nord-Sud. Pour les décimales utiles, se conformer à l'exemple numérique.

II—Calcul d'une Géodésique Supérieure a 1000 km par la Sphère Conformé

(1) Passage de l'ellipsoïde a la sphère et vice versa

GRANDES GÉODÉSQUES—PROBLÈME INVERSE
 SPHÈRE CONFORME
 INTÉGRALES DE WALLIS

ELLIPSOÏDE: International
 $a \sin 1'' = 10,01914844$

$$A = 10^2(e^2 + e^4) = 0,67678643$$

$$B = 10^4 \frac{13}{3} e^4 = 1,95841932$$

$$C = 10^2 2(e^2 + e^4) = 1,35357286$$

$$D = 10^4 \frac{40}{3} e^4 = 6,025906$$

$$J_2 = \frac{10^{-2}}{4 \sin 1''} \sin^2 \omega$$

$$J_4 = \frac{10^{-4}}{32 \sin 1''} \sin^4 \omega$$

$$I_2 = \frac{10^{-2}}{2 \sin 1''} \int_0^\omega \sin^2 \omega d\omega$$

$$I_4 = \frac{10^{-4}}{2 \sin 1''} \int_0^\omega \sin^4 \omega d\omega$$

I—DONNÉES A: PARIS
 B: SAIGON
 (B à l'est de A)

$M_A = 2^G 5969'' 14$
 $M_B = 118^G 5567'' 90$

$L_A = 54^G 2626'' 54$
 $L_B = 11^G 9774'' 69$

$L - \psi =$
 $L - \psi =$

II—CALCUL SPHÉRIQUE

$4M = 115^G 9598'' 76$

$\psi_A = 54^G 0499'' 06$
 $\psi_B = 11^G 8988'' 20$

$L - \psi =$
 $L - \psi =$

III—CORRECTIONS		Distances		Azimuts			
A	ω^* 83,2596 437	I_2 1682,01	I_4 2,69	\cos^* 0,2599 3694	\sin^* 0,9656 2560	J_2 1484,01	J_4 1,73
B	184,6332 792	4985,25	9,37	-0,9710 0904	0,2390 4273	90,94	0,01
B - A	101,3736 355	3303,24	6,68			-1393,07	-1,72

$\cos^2 \zeta_E = 0,60427333$
 $\Delta I_4 \cos^2 \zeta_E = 4,04$
 $R = A \Delta I_2 - B(\Delta I_4 \cos^2 \zeta_E) = 2227,68$
 $\sigma = \Delta \omega - R \cos^2 \zeta_E = 101^G 2390'' 23$
 $S = \sigma(\alpha \sin 1'') = 10,143,288 \text{ m}$
 (erreur 10 m)

$\alpha = \frac{\sin \zeta_E^* \cos \zeta_E^*}{\sin \Delta \omega^*} = 0,48912005$

$\Delta J_4 \cos^2 \zeta_E = -1,04$
 $I = C \Delta I_2 - D(\Delta I_4 \cos^2 \zeta_E) = 4446,83$
 $J = C \Delta J_2 - D(\Delta J_4 \cos^2 \zeta_E) = -1879,35$
 $S_1 = \cos \omega_B I - \sin \omega_B J = -3868,67$
 $S_2 = \cos \omega_A I - \sin \omega_A J = +2970,64$

$\zeta_{A_1}^{\Delta} = + 80^G 2139'' 32$
 $- P_1 = \alpha S_1 = - 1892'' 25$
 $\zeta_{AB} = 80^G 0247'' 07 (\Delta = 1'')$

$\zeta_{A_2}^{\Delta} = + 355^G 7687'' 83$
 $+ P_2 = \alpha S_2 = + 1453'' 00$
 $\zeta_{BA} = 355^G 9140'' 83 (\Delta = 1'')$

*Résultats du calcul sphérique

CALCUL DE GRANDES GÉODÉSIQUES

(2) Calcul sphérique (avec calcul préalable de l'arc $\Delta\omega$)

$A - \psi_A = 54^{\circ} 0' 19'' 057$	$\sin \psi_A = 0,75062\ 925$	$\cos \psi_A = 0,66072\ 364$	$\sin \zeta_E = 0,62906\ 809$	$\sin \zeta_A = 0,95208\ 958$
$B - \psi_B = 11^{\circ} 8' 988'' 198$	$\sin \psi_B = 0,18581\ 989$	$\cos \psi_B = 0,98258\ 382$	$\zeta_E = 43^{\circ} 31' 26'' 687$	$\sin \zeta_B = 0,64021\ 825$
$\Delta M = 115^{\circ} 9' 598'' 765$	$\cos \psi_A \cos \psi_B = 0,64921\ 636$		$\cos \zeta_E = 0,77735\ 020$	$\zeta_A = 80^{\circ} 21' 39'' 319$
			$\cos^2 \zeta_E = 0,60427\ 333$	$\zeta_B = 355^{\circ} 7' 687'' 825$
	$\sin \Delta M = 0,96873\ 971$	$\cos \Delta M = 0,24807\ 938$	$\sin \omega_A = 0,96562\ 560$	
	$\cos \Delta\omega = -0,02157\ 535$		$\sin \omega_B = 0,23904\ 270$	
	$\Delta\omega = 101^{\circ} 37' 36'' 360$		$\omega_A = 83^{\circ} 25' 96'' 437$	
	$\sin \Delta\omega = 0,99976\ 722$		$\omega_B = 184^{\circ} 6' 332'' 810$	
			$\Delta\omega = 101^{\circ} 37' 36'' 373$	

Calcul de la distance par les 3 niveaux:

$\frac{\Delta\omega}{2} = 50^{\circ} 6' 688'' 18$	$\sin \psi_m = 0,6694\ 3052$	$\left. \begin{array}{l} 0,9984\ 8844 \\ 0,9981\ 0110 \\ 0,9998\ 8820 \end{array} \right\} 0,9986\ 5634$
$\cos \frac{\Delta\omega}{2} = 0,6994\ 3714$	$\sin \psi_A = 0,7506\ 2925$	
	$\sin \psi_B = 0,1858\ 1989$	
		$S = 10,143^{\text{km}}\ 128$ (pour $143,278$) ($\Delta = 150\ \text{m}$)

III—Tables (Provisoires) de l'Ellipsoïde International

L : Latitude normale

ψ : Latitude réduite

Γ : Courbure de la transformée d'une ligne géodésique

$1/K$: Facteur de correction d'échelle

Ces tables permettent, moyennant quelques opérations de calculs supplémentaires, qui disparaîtront par l'usage des tables définitives décrites ci-dessus, de résoudre avec précision, sur l'Ellipsoïde International, toutes les géodésiques jusqu'à 10 000 km par représentation sur la sphère conforme.

Jusqu'à 1000 km: précision de quelques cm

Jusqu'à 10 000 km: précision suffisante pour les besoins pratiques.

$L - \psi = \sin L \cos L (A)$

$\sin^2 L$	A	Δ_1	Δ_2	n	Correc- tion Δ_2
		+	+		
0 000	4279 7847	2 3960	35	0.0	0
0 100	4282 1807	2 3995	33	0.1	- 2
0 200	4284 5802	2 4028	33	0.2	- 3
0 300	4286 9830	2 4061	34	0.3	- 4
0 400	4289 3891	2 4095	33	0.4	- 4
0 500	4291 7986	2 4128	34	0.5	- 4
0 600	4294 2114	2 4162	34	0.6	- 4
0 700	4296 6276	2 4196	33	0.7	- 4
0 800	4299 0472	2 4229	34	0.8	- 3
0 900	4301 4701	2 4263		0.9	- 2
1 000	4303 8964			1.0	0

$L - \psi = \sin \psi \cos \psi (A')$

$\sin^2 \psi$	A'	Δ_1	Δ_2	n	Correc- tion Δ_2
		-	+		
0 000	4308 7497	- 3 4079	72	0.0	0
0 100	4305 3418	- 3 4007	73	0.1	- 3
0 200	4301 9411	- 3 3934	72	0.2	- 6
0 300	4298 5477	- 3 3862	72	0.3	- 8
0 400	4295 1615	- 3 3790	72	0.4	- 9
0 500	4291 7825	- 3 3718	73	0.5	- 9
0 600	4288 4107	- 3 3645	71	0.6	- 9
0 700	4285 0462	- 3 3574	73	0.7	- 8
0 800	4281 6888	- 3 3501	72	0.8	- 6
0 900	4278 3387	- 3 3429		0.9	- 3
1 000	4274 9958			1.0	0

CALCUL DE GRANDES GÉODÉSIIQUES

$$\Gamma = U \sin Z_E = \Lambda \sin \psi \sin Z_E$$

$\sin^2 \psi$	Λ	Δ_1
0 000	67 6817	—
0 100	67 6052	— 765
0 200	67 5290	— 762
0 300	67 4529	— 761
0 400	67 3771	— 758
0 500	67 3014	— 757
0 600	67 2259	— 755
0 700	67 1507	— 752
0 800	67 0756	— 751
0 900	67 0007	— 749
1 000	66 9260	— 747

$\sin^2 \psi$	$1/K$	Δ_1	Δ_2
0 000	1,00000 0000	— 338 160	+
0 100	0,99966 1840	— 337 665	495
0 200	0,99932 4175	— 337 169	496
0 300	0,99898 7006	— 336 676	493
0 400	0,99865 0330	— 336 186	490
0 500	0,99831 4144	— 335 694	492
0 600	0,99797 8450	— 335 207	487
0 700	0,99764 3243	— 334 718	489
0 800	0,99730 8525	— 334 233	485
0 900	0,99697 4292		
1 000			

n	Correc- tion Δ_2
	—
0.0	0
0.1	— 22
0.2	— 39
0.3	— 52
0.4	— 59
0.5	— 61
0.6	— 59
0.7	— 52
0.8	— 39
0.9	— 22
1.0	0

IV—CALCUL DE GRANDES GÉODÉSIIQUES
PAR REPRÉSENTATION SUR LA SPHÈRE DE COURBURE

Cette méthode de calcul procède en 2 étapes:

1—Représentation conforme sur la sphère de courbure en un point de latitude L_0 et par suite

{	Modification des longitudes
	— des latitudes

2—Calcul de la géodésique sur cette sphère, les résultats ne nécessitant aucune correction, ni de longueur, ni d'azimut.

—Deux variantes essentielles :

—on prend $L_0 = \frac{L_A + L_B}{2}$: représentation la mieux adaptée à la géodésique à représenter

—on prend $L_0 \neq \frac{L_A + L_B}{2}$

par exemple $\begin{cases} L_0 = \text{latitude ronde (voisine de } \frac{L_A + L_B}{2}) \\ L_0 \text{ au centre de la région de calcul} \\ L_0 = L_A \text{ (ou } L_B) \end{cases}$

Nous étudierons spécialement la première hypothèse; nous dirons ensuite quelques mots de la deuxième.

FORMULES FONDAMENTALES

Représentation de l'ellipsoïde sur la sphère de courbure au parallèle L_0

Notations

Nous désignerons les latitudes transformées par ψ ; on prendra garde de ne pas confondre avec les latitudes conformes de la méthode dite 'Sphère Conforme'.

Les coordonnées géographiques aux points homologues se correspondent par :

—Au point origine : $M'_0 = M_0$ $(V_0 = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 L_0})$
 $\text{tg } \psi_0 = \frac{\text{tg } L_0}{V_0}$

—En un point quelconque :

$$(M' - M'_0) = \alpha (M - M_0)$$

$$\int_{\psi_0}^{\psi} S - \int_{L_0}^L S = \alpha \left(\int_L^E - \int_{L_0}^E \right)$$

$$\alpha = \sqrt{1 + e'^2 \cos^4 L_0}$$

\int_{ψ}^S = Latitude croissante sphérique de ψ

\int_L^E = — — — — — ellipsoïdique de L

Echelle de la représentation :

$$K = \frac{N_0 \cos L_0 \cos \psi}{N \cos L \cos \psi_0}$$

Développement en $f(\Delta L)$ (en désignant par ΔL l'écart du point à l'origine L_0 : $\Delta L = L - L_0$)

$$K = 1 - \frac{2}{3} \Delta L^3 e'^2 \sin L \cos L$$

CALCUL DE GRANDES GÉODÉSIQUES

Courbure de la transformée d'une ligne géodésique

$$\Gamma = \frac{\sin L - \alpha \sin \psi}{R \alpha \cos \psi} \sin \zeta$$

Développement en $f(\Delta L)$:

$$\Gamma = \frac{-2\Delta L^2 e'^2 \sin L \cos L \sin \zeta}{R}$$

Rayon de la sphère de courbure:

$$R_0 = \sqrt{N_0 \rho_0}$$

PRINCIPALES ÉTAPES DU CALCUL

—Calcul de $L_0 = \frac{L_A + L_B}{2}$, de α , de R_0

—Calcul de $\psi_A, \psi_B, \Delta M' = \alpha \Delta M$

—Calcul sphérique $\left\{ \begin{array}{l} \text{Azimuts} \\ \Delta \omega \rightarrow S = R_0 \Delta \omega \end{array} \right.$

En pratique, on sera amené à établir des tables:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \\ R_0 \end{array} \right\} = f(L_0) \text{ et coefficients du développement}$$

$\psi = \psi_0 + A\Delta L + B\Delta L^2 + C\Delta L^3 + \dots$ ($\Delta L = L - L_0$) permettant de passer de L à ψ .

Rémarques

(1) Pour $L_0 = \frac{L_A + L_B}{2}$, la dernière formule s'écrira plus volontiers:

$$\Delta \psi_A^B = \psi_B - \psi_A = A(L_B - L_A) + C(L_B - L_A)^3 + \dots$$

$$\psi_m = \frac{\psi_B + \psi_A}{2} = \psi_0 + B(L_B - L_A)^2 + \dots$$

(2) On peut calculer ψ_A et ψ_B par leurs formules rigoureuses, mais il vaudra mieux pratiquement travailler avec des développements en $(L - L_0)^n$

(3) En pratique, de tels développements pourront être obtenus—avec une erreur acceptable—à partir de l'expression suivante, qui indique la conservation des longueurs sur le méridien central:

$$R_0(\psi - \psi_0) = s(L) - s_0(L_0)$$

$s(L)$ = longueur de l'arc de méridien de l'équateur au point de latitude L

CONSÉQUENCES DES FORMULES

L'erreur d'échelle est en ΔL^3 , la courbure Γ en ΔL^2 , et par suite:

(1) La représentation est d'un degré plus fidèle que les représentations courantes; pratiquement, elle est de précision géodésique dans une

zone de 4^G (2^G de part et d'autre de L_0) (Zone d'extension du théorème de Legendre).

(2) Dans le cas particulier des longueurs (et si on prend $L_0 = L_A + L_B/2$) l'erreur sur les longueurs est en fait en ΔL^4 , les termes en ΔL^3 au Nord et au Sud de L_0 s'annulant pratiquement.

Rien d'équivalent pour les azimuts.

(3) On peut songer à effectuer les corrections d'échelle et d'azimut: la méthode perd alors beaucoup de son intérêt pratique. . . .

RÉSULTATS OBTENUS

Voici les étapes principales du calcul pour: Géodésique de 800 km—
Ellipsoïde de Clarke 1800

	$A \text{ — } M_A = 0^G 00$	$L_A = 50^G$	
	$B \text{ — } M_B = 10^G 00$	$L_B = 54^G 40$	
	$\Delta M = 10^G$	$L_0 = 52^G 20$	
	$\alpha = 1,00074 1803$	$\Delta M' = 10^G 0074 1803$	$\psi_0 = 52^G 1494'' 5219$
	$R_0 = 6.379.715^m 913$		$\psi_A = 49^G 9533'' 3934$
	$R_0 \sin 1'' = 10^m 02123 43$		$\psi_B = 54^G 3463'' 4026$
	<i>Calcul sphérique</i>	<i>Valeur exacte</i>	
	$Z_B = 67^G 3534'' 082$	$67^G 3533'' 984$	$\Delta = 0'' 1$
	$Z_A = 60^G 0308'' 391$	$60^G 0308'' 479$	$\Delta = 0'' 1$
	$\Delta\omega = 8^G 1154'' 0155$		
	$S = 813.263^m 406$	$813.263^m 405$	$\Delta = 0^m 001$

Nous trouvons donc pour une distance $\Delta L = 2^G 40$ du parallèle origine:

—Une erreur de $0'',1$ sur les azimuts

—Une erreur pratiquement nulle sur les distances

(conformément à la remarque (2) faite ci-dessus à l'alinéa: Conséquences des formules).

CHOIX DE LA LATITUDE ORIGINE L_0

Pour éviter le travail laborieux préparatoire de calculer les valeurs exactes pour $(L_A + L_B)/2$ des coefficients $\alpha, R_0, A, B, C \dots$, on songera évidemment à utiliser des valeurs rondes de L_0 , ce qui nous conduit aussitôt:

—Soit à faire, pour des valeurs L_0 de grade en grade (par exemple), des tables fournissant:

$$\left[\begin{array}{l} \alpha, R_0 \text{ pour } L = L_0 \\ (L - \psi) \text{ tabulées de décigrade en décigrade pour } \Delta L \text{ variant de} \\ \quad \quad \quad -3^G \text{ à } +3^G \text{ (par exemple).} \end{array} \right.$$

CALCUL DE GRANDES GÉODÉSIQUES

Les calculs préliminaires reviennent donc :

- à choisir L_0
- à lire α , R_0
- à interpoler ($L - \psi$) dans les tables pour L_A et L_B .

Ils sont donc excessivement simplifiés.

—Soit à utiliser simplement la table de la méridienne (formule de la remarque 3) de l'alinéa: Principales étapes du calcul); les calculs consisteront alors :

- à choisir L_0
- à lire α , R_0 , ψ_0 , s_0
- à calculer ψ_A et ψ_B par la formule :

$$R_0(\psi - \psi_0) = s - s_0$$

(interpolation de s dans les tables de la méridienne).

Ce procédé est légèrement plus long que le précédent, mais ne nécessite qu'une table: celle de la méridienne.

EXTENSIONS DE LA MÉTHODE

Calculs précis

La précision géodésique (quelques mm sur les longueurs, 1/100 de seconde sur les azimuts) restreint le champ d'application de la méthode à $\Delta L < 1^G 50$ (2^G maximum). La méthode des petites tables (centrées sur des latitudes L_0 rondes) apparaît donc comme tout à fait intéressante pour la Géodésie classique (. . . et peut s'étendre vraisemblablement à la Géodésie Shoran . . . car nous avons vu que les longueurs restaient excellentes tant que $L_0 \neq \frac{L_A + L_B}{2}$).

Calculs expédiés

Le champ d'application sera facile à étendre; on pourra par exemple tabuler ($L - \psi$) de 5^G en 5^G , pour ΔL variant entre -5^G et $+5^G$. La méthode est parfaitement valable pour des calculs de distances entre objectifs militaires. . . .

Calculs électroniques

Le calcul électronique désire avant tout la simplicité de formulation et l'introduction de L_0 variables suivant la région du globe est un défaut très grave de la méthode.

CONCLUSION

On se rend compte que la méthode de la sphère de courbure :

- Présente quelque avantage sur les autres procédés par le fait qu'avec des corrections préliminaires très simples elle a un champ de précision plus étendu.
- Comporte l'usage de tables variées (ou alors perd quelque peu son avantage de simplicité . . .)

—Qu'au-delà de sa zone privilégiée ($\pm 2^G$), il est difficile de la rendre très précise, sauf complication notable du calcul.

Méthode à rapprocher: méthode de M. l'I.C.G. Clos-Arceuduc

On rapprochera de la méthode de la sphère osculatrice une méthode par la sphère trisectant en 3 parties égales la géodésique: on a affaire à une sorte d' ' osculation numérique ', qui donne de très bons résultats pour les longueurs. La mise en oeuvre paraît moins simple que celle des grandes méthodes.

V—CALCUL DE GRANDES GÉODÉSQUES PAR REPRÉSENTATION SUR LA SPHÈRE CIRCONSCRITE

C'est en fait une méthode qui tient à la fois:

de la méthode SPHÈRE CONFORMÉ

de la méthode SPHERE OSCULATRICE

Elle se définit comme suit:

—Représentation conforme sur la sphère circonscrite au parallèle moyen,

et par suite $\left\{ \begin{array}{l} \text{Longitudes conservées} \\ \text{Latitude centrale conservée} \\ \text{Latitudes } L_A \text{ et } L_B \text{ modifiées} \end{array} \right.$

—Calcul sphérique

—Résultats $\left\{ \begin{array}{l} \text{corrigés par un coefficient d'échelle moyen, pour les distances} \\ \text{non corrigés pour les azimuts (. . . mais qui pourraient} \\ \text{l'être . . .)} \end{array} \right.$

Nous ne l'étudierons pas en détail ici; nous renverrons seulement à la rédaction de M. Dupuy sur la question ' Notice sur quelques méthodes de calcul rapide de distances géodésiques terrestres ' (Annexe IV, page 33). Nous ferons remarquer au lecteur les particularités suivantes:

—Seul la problème des distances est traité.

—Le calcul sphérique est simplifié, comme il peut l'être de façon analogue dans toutes les autres méthodes (utilisation de développements: voir Sect. VII).

—En fait, la méthode exposée par M. Dupuy est une simplification de celle exposée ci-dessus (représentation non rigoureusement conforme).

En fait, on peut dire sur cette méthode:

—Qu'elle ne présente pas, comme la méthode de la sphère de courbure, une zone de précision privilégiée.

—Qu'elle est de mise en oeuvre un peu plus rapide, mais moins simple par contre que les grandes méthodes: sphère paramétrique, sphère conforme.

Nous ne la recommandons pas particulièrement.

CALCUL DE GRANDES GÉODÉSQUES

VI—CALCUL DE GRANDES GÉODÉSQUES
PAR REPRÉSENTATION SUR LA SPHÈRE DE GAUSS
(OU SPHÈRE DES NORMALES)

Cette méthode consiste en deux étapes :

—Calcul sphérique, sur la sphère de rayon 1, sans modification ni des longitudes, ni des latitudes; on a en fait affaire à une représentation *non conforme*.

—Corrections:

Longueurs: par l'échelle, ou par intégrales de Wallis.

Azimuts: deux corrections.

Correction de non-conformité: au point *A* cette correction

—est fonction de la latitude de *A*

—est fonction de ζ_{AB}

—n'est pas fonction de la longueur *AB*

Correction de dv : cette correction est (grossièrement) proportionnelle à *AB*.

FORMULES FONDAMENTALES

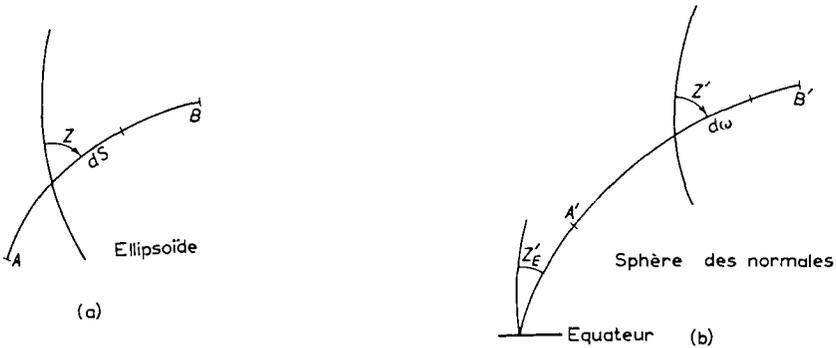


Fig. 8 (a) (b)

Expression de l'échelle de la représentation

$$K = \begin{cases} \frac{1}{N} & \text{sur un parallèle} \\ \frac{1}{\rho} & \text{sur un méridien} \end{cases} \quad \text{dans la direction d'azimut } \zeta$$

$$K = \frac{1}{N} \sin^2 \zeta + \frac{1}{\rho} \cos^2 \zeta$$

Échelle inverse :

$$\frac{1}{K} = \begin{cases} N & \text{sur un parallèle} \\ \rho & \text{sur un méridien} \end{cases} \quad \text{dans la direction d'azimut } \zeta'$$

$$\frac{1}{K} = N \sin^2 \zeta' + \rho \cos^2 \zeta'$$

Par suite, la vraie longueur S est fournie (à l'erreur de ligne d'intégration près) par:

$$S = \int_{\omega_{A'}}^{\omega_{B'}} (\mathcal{N} \sin^2 \zeta' + \rho \cos^2 \zeta') d\omega$$

Modification de l'expression $\frac{1}{K} = \mathcal{N} \sin^2 \zeta' + \rho \cos^2 \zeta'$

On posera:
$$\begin{cases} V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 L} \\ W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 L} \end{cases}$$

(avec $\frac{V}{W} = \frac{a}{b}$, $\mathcal{N} = \frac{a}{W}$, $\rho = \frac{a}{W V^2}$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{K} &= (\mathcal{N} - \rho) \sin^2 \zeta' + \rho \\ &= \rho \left[1 + \frac{\sin^2 \zeta'_E}{\cos^2 L} (V^2 - 1) \right] = \rho (1 + e'^2 \sin^2 \zeta_E) \end{aligned}$$

qu'on peut écrire encore:

$$\boxed{\frac{1}{K} = \frac{1}{W^3} \left[\frac{b^2}{a} \cos^2 \zeta'_E + a \sin^2 \zeta'_E \right]}$$

L'expression de l'échelle prend ainsi une forme intéressante, barycentrique où l'on reconnaît:

a : rayon de courbure du parallèle à l'équateur

$\frac{b^2}{a}$: — — du méridien à l'équateur

$\frac{a}{W^3}$: seule expression où intervienne la latitude

Utilisation sous la forme des 3 niveaux: elle pourra s'effectuer sans difficulté moyennant de tabuler $\frac{1}{W^3}$ (en fonction de L , ou $\sin L$, ou $\sin^2 L$)

Intégration complète

Elle est conditionnée par le développement de $\frac{1}{W^3}$:

$$\frac{1}{W^3} = (1 - e^2 \sin^2 L)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 L + \frac{15}{8} e^4 \sin^4 L + \frac{35}{16} e^6 \sin^6 L$$

On aura par suite:

$$S = \left[\frac{b^2}{a} \cos^2 \zeta'_E + a \sin^2 \zeta'_E \right] \left[\Delta\omega + \frac{3}{2} v^2 \Delta W_2 + \frac{15}{8} v^4 \Delta W_4 + \frac{35}{16} v^6 \Delta W_6 \right]$$

où l'on pose:
$$\begin{cases} v^2 = e^2 \cos^2 \zeta'_E \\ W_2, W_4, W_6 \text{ intégrales de Wallis} \end{cases}$$

Avec les notations I_2, I_4, I_6 (déjà définies), et en transformant la première parenthèse, il vient encore:

$$S = a(1 - v^2) (\Delta\omega + 3v^2 \Delta I_2 + 15v^4 \Delta I_4 + 35v^6 \Delta I_6)$$

Cette expression présente les particularités suivantes :

- Elle est facilement calculable ; toutefois, elle n'est pas de type identique aux intégrales similaires de la sphère paramétrique et de la sphère conforme ; si on effectuait, en effet, v^2 ne serait pas unique facteur de ΔI_2 , v^4 de ΔI_4 . . .
- Elle est sensiblement moins convergente que les 2 intégrales citées ci-dessus.
- Il n'en reste pas moins que la méthode de la sphère des Normales permet d'atteindre très rapidement une expression simple de la distance.
- Relations avec les longueurs méridienne et équatoriale.
Pour $v = 0$, $S = \chi = a\Delta\omega$: longueur de l'arc (ω_A, ω_B) sur l'équateur
Pour $v = e^2$, $S = M = a(1 - e^2) (\Delta\omega + 3e^2\Delta I_2 + 15e_4\Delta I_4 + 35e_6\Delta I_6)$
Longueur de l'arc (ω_A, ω_B) porté sur la méridienne.

(1^o) *On peut énoncer :*

La longueur de l'arc géodésique est sensiblement* égale à la longueur de l'arc d'ellipse définie comme suit, d'après les éléments du calcul de la ligne transposée brutalement sur la sphère des normales

- Excentricité $e_1 = e \cos \zeta'_E$
- Élément d'arc défini par ω_A, ω_B
- Grand axe a

(2^o) L'expression $S' = \chi \sin^2 \zeta'_E + M \cos^2 \zeta'_E$ constitue une valeur sensiblement approchée de S :

$$\chi \sin^2 \zeta'_E = a\Delta\omega \sin^2 \zeta'_E$$

$$M \cos^2 \zeta'_E = a(1 - e^2) (\Delta\omega \cos^2 \zeta'_E + 3v^2\Delta I_2 + 15v^2e^2\Delta I_4)$$

$$S' = a\Delta\omega(1 - v^2) + a\Delta I_2[3v^2(1 - e^2)] + a\Delta I_4[15v^2e^2(1 - e^2)]$$

$$S = a\Delta\omega(1 - v^2) + a\Delta I_2[3v^2(1 - v^2)] + a\Delta I_4[15v^4(1 - v^2)]$$

$$C = S - S' = a\Delta I_2(3v^2e^2 \sin^2 \zeta'_E) - a\Delta I_4(15v^2e^2 \sin^2 \zeta'_E)$$

$$C = 3ae^4 \sin^2 \zeta'_E \cos^2 \zeta'_E (\Delta I_2 - 5\Delta I_4)$$

Ce résultat permet de constater que dans tous les cas la correction C est inférieure à 1/60 000°.

La formule $S' = \chi \sin^2 \zeta'_E + M \cos^2 \zeta'_E$ est commode d'emploi (voir Notice sur le calcul des Grandes Géodésiques par MM. Dupuy et Levallois, Page 71 *sqq.*).

M est obtenu par la table de la Méridienne de l'ellipsoïde utilisé.

Remarques

- (1) Dans le calcul pratique, on remplace la notation ζ'_E par ζ_E , ζ'_A par ζ_A , ζ'_B par ζ_B .
- (2) Nous n'avons pas fait l'épreuve de la formule de correction encadrée ci-dessus. Cette formule doit en fait *pratiquement* s'écrire :

$$C = 3e^4 \sin^2 \zeta_E \cos^2 \zeta_E (\Delta I_2 - 500\Delta I_4) \times (a \sin 1'')$$

* N'oublions pas l'erreur de ligne d'intégration. . . .

Le coefficient $\Delta I_2 - 500\Delta I_4$ semble être petit. . . . Il semble que très rapidement l'erreur de ligne d'intégration devienne supérieure à ce terme correctif.

Azimuths

Deux corrections successives sont à apporter au résultat du calcul sphérique:

—*Correction de $d\omega$* : non-identité de la courbe image de la géodésique et de l'arc de cercle $A'B'$.

Cette correction est (grossièrement) proportionnelle à $\Delta\omega$. Elle est relativement faible jusqu'à 1000 km (de l'ordre de grandeur de la correction analogue en sphère conforme).

—*Correction de non-conformité*: la ligne image ne fait pas avec le méridien image le même angle que la géodésique avec le méridien de l'ellipsoïde.

Cette correction ne dépend que:

- de la latitude du point A (ou B)
- de l'azimut en ce point A .

En fait, on a la relation simple, entre les azimuths correspondants:



Fig. 9 (a) (b)

$$\operatorname{tg} \zeta' = \frac{d\omega \text{ parallèle}}{d\omega \text{ méridien}} = \frac{\frac{1}{N} ds \text{ parallèle}}{\frac{1}{\rho} ds \text{ méridien}} = \frac{\rho}{N} \operatorname{tg} \zeta$$

$$\operatorname{tg} \zeta = \frac{N}{\rho} \operatorname{tg} \zeta' = V^2 \operatorname{tg} \zeta' \quad V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 L$$

Ordre de grandeur :

$$\operatorname{tg} \epsilon = \operatorname{tg} (\zeta - \zeta') = \frac{(V^2 - 1) \operatorname{tg} \zeta'}{1 + V^2 \operatorname{tg}^2 \zeta'} = \frac{\operatorname{tg} \zeta'}{1 + V^2 \operatorname{tg}^2 \zeta'} \times e'^2 \cos^2 L$$

$\operatorname{tg} \epsilon$ est maximum pour $\operatorname{tg} \zeta' \neq 1$
 $\cos^2 L = 1$ $\operatorname{tg} \epsilon = \frac{1}{300}$ d'où $\epsilon = 0^g 20$

Cette correction peut être facilement mise en abaque.

CALCUL DE GRANDES GÉODÉSIQUES

CONCLUSIONS

La méthode de la sphère des normales conduit à des corrections d'azimut trop laborieuses à faire avec grande précision. Elle peut être utilisée:

- Pour calculer des distances précises
 - soit par les intégrales de Wallis
 - soit par la formule barycentrique de M. Dupuy
- Pour calculer des azimuts
 - au décigrade, sans correction de non-conformité
 - avec une précision plus grande, moyennant d'effectuer la correction de non-conformité, par un procédé rapide.

Les erreurs résiduelles sont de l'ordre de $0^G 02$ pour $S < 1000$ km.

Exemple numérique: Voir Notice sur le calcul des Grandes Géodésiques, Sect. VII, ou Quelques méthodes de calcul rapide, Exemple hors texte.

VII—CALCUL DE GRANDES GÉODÉSIQUES—PROBLÈME INVERSE LE PROBLÈME SPHÉRIQUE

CALCUL DE GRANDES GÉODÉSIQUES PAR DEVELOPPEMENTS LIMITES

Remarque préliminaire

Dans l'ensemble de l'exposé, nous avons soigneusement disjoint les deux problèmes:

- Passage de la sphère à l'ellipsoïde
- Résolution du triangle sphérique.

Cette façon de procéder permet de discuter facilement et d'éviter l'usage de tables multiples pour le calcul sphérique. A la fin du présent chapitre, nous donnerons toutefois les seules formules de *développements limités* qui nous ont semblé d'un calcul facile, et qui permettent d'obtenir des résultats directement à partir des données ellipsoïdiques.

Problème

On donne $\varphi_A, \varphi_B, \Delta M'$ (données ellipsoïdales). Calculer $\Delta\omega, \zeta_A, \zeta_B, \zeta_E, \omega_A, \omega_B \dots$ etc. . . .

Différentes méthodes sont possibles, selon les quantités voulues, la précision demandée . . .

Nous envisageons successivement:

- Le calcul complet, précis, avec calcul préalable des azimuts
- Le calcul complet, précis, avec calcul préalable de $\Delta\omega$
- Calcul des azimuts et des distances: méthode de Neper
- Calcul des azimuts et des distances: calcul préalable de $\Delta\omega$
- Calculs approchés
- Calculs électroniques

Les calculs de Trigonométrie sphérique sont sujets à de multiples variantes. Les différents cas de figures interviennent dans le choix de ces formules. Nous livrons ici les résultats d'une expérience personnelle, en indiquant rapidement les caractéristiques de chaque formule; cet exposé est avant tout destiné à éviter à d'autres calculateurs de nombreux tâtonnements, pas tous très fructueux.

Décompte des opérations élémentaires

Nous donnons pour chaque méthode opératoire un décompte approximatif des opérations à effectuer, avec les conventions suivantes:

- Addition, multiplication, division: 1 opération (2 inscriptions sur machine).
- Recherche de l'entrée d'une table: 1 opération (sauf cas d'une table à très faible nombre d'entrées).
- Interpolation elle-même: 2 opérations.

Il ne faut pas s'attacher à la lettre à de telles statistiques, beaucoup d'autres éléments très importants devant entrer en ligne de compte, tels que: simplicité des formules, vérifications, commodité des tables. . . .

Tables Trigonométriques Fondamentales. Idées Générales des Calculs

Nous rechercherons conventionnellement à conserver partout 8 chiffres significatifs, convention de travail qui nous permet d'être assurés de conserver:

- Linéairement*: le mm jusqu'à 200 km
le cm jusqu'à 1000 km
le dm jusqu'à 3000 km
le mètre jusqu'à 10 000 km (et au delà)

—*Angulairement*: le 1/100 de seconde sur les azimuts dans tous les cas (ces exigences ne nécessitant pas d'ailleurs toujours 8 chiffres significatifs, mais il est commode de prendre cette convention . . .)

8 chiffres significatifs sont assurés si on travaille:

- (1^o) Avec des tables à 8 décimales des lignes trigonométriques de 0 à 100^g.
Avec des tables à 10 décimales pour les angles inférieurs à 10^g.
- (2^o) En interpolant linéairement dans ces tables—la table de $\cos x$ (pour $x < 10^g$) nécessitant cependant l'interpolation parabolique.
- (3^o) Si on évite de sortir:
 - les angles petits par leur cosinus
 - les angles voisins de 100^g par leur sinus

I—Calcul Complet, Précis. Calcul Préalable des Azimuts

C'est l'imprimé n° 2304 B.T. qui a servi à la plupart des exemples numériques cités.

Méthode de Neper modifiée

(A) *Calcul préalable des azimuts*

$$\text{tg } \zeta_m = \text{tg } \frac{\Delta M'}{2} \times \frac{\cos \varphi_m}{\sin (\Delta \varphi / 2)} \times \frac{\cos (\Delta \varphi / 2)}{\cos (\Delta \varphi / 2)} = \text{tg } \frac{\Delta M'}{2} \times \frac{\cos \varphi_A + \cos \varphi_B}{\sin \Delta \varphi}$$

CALCUL DE GRANDES GÉODÉSIIQUES

$$\operatorname{tg} \frac{\Delta Z}{2} = \operatorname{tg} \frac{\Delta M'}{2} \times \frac{\sin \varphi_m}{\cos (\Delta \varphi / 2)} \times \frac{\cos \varphi_m}{\cos \varphi_m} = \operatorname{tg} \frac{\Delta M'}{2} \times \frac{\sin 2\varphi_m}{\cos \varphi_A + \cos \varphi_B}$$

d'où formation de Z_m , $\frac{\Delta Z}{2}$, Z_A , Z_B et leurs lignes trigonométriques.

(B) *Calcul vérifié des longueurs par :*

$$\sin \Delta \omega = \sin \Delta M' \frac{\cos \varphi_A + \cos \varphi_B}{\sin Z_A + \sin Z_B} = \sin \Delta \varphi \frac{1 + \cos \Delta M'}{\cos Z_A + \cos Z_B}$$

(C) *Compléments*

$$\sin Z_E = \sin Z_A \cos \varphi_A = \sin Z_B \cos \varphi_B$$

$$\operatorname{tg} \omega_A = \frac{\operatorname{tg} \varphi_A}{\cos Z_A} \quad \operatorname{tg} \omega_B = \frac{\operatorname{tg} \varphi_B}{\cos Z_B}$$

$$\text{d'où } \omega_A \text{ et } \omega_B \quad \Delta \omega = \omega_B - \omega_A \text{ (vérification)}$$

Remarques

(1) Les parties *A* et *B* sont relativement longues: 59 opérations. La partie complémentaire *C* est par contre rapide: 17 opérations.

(2) La précision est similaire à celle de Neper, sauf cas particuliers

— *A* et *B* près du pôle Nord (ou Sud)

$\operatorname{tg} \frac{\Delta Z}{2}$ par cette méthode est sensiblement moins précise que par la méthode de Neper; $\cos \varphi_m$ est voisin de 0.

— *A* voisin du pôle Nord, *B* du pôle Sud

$\operatorname{tg} Z_m$ perd de la précision; $\cos \frac{\Delta \varphi}{2}$ voisin de 0

— $\Delta \omega$ voisin de 100^G ($D = 10\,000$ km) est mal défini par $\sin \Delta \omega$.

Par contre, il reste très bien défini par $\cotg \omega_A$, $\cotg \omega_B$, sauf cas particulier d'une géodésique (de 10 000 km) très proche de l'équateur (Z_E voisin de 100^G) (il faut alors avoir recours à :

$$\cos \Delta \omega = \cos \varphi_A \cos \varphi_B + \sin \varphi_A \sin \varphi_B \cos \Delta M')$$

(3) *Tables utilisées*

Tables à 8 décimales des lignes trigonométriques

Tables à 10 décimales des lignes trigonométriques pour les angles inférieures à 10 grades

L'interpolation linéaire suffit pratiquement partout (sauf peut-être pour le calcul de $\operatorname{tg} \Delta M'/2$).

(4) *Utilisation*

Cet imprimé est recommandé pour tous les calculs de haute précision, les calculs expérimentaux. Il est un peu lent, mais solide.

II—Calcul complet, Précis. Calcul Préalable des Longueurs

Cette méthode de calcul s'est développée assez récemment pour les raisons suivantes:

—Dans la méthode des Grandes Géodésiques par la sphère paramétrique, à chaque itération, l'on n'a besoin que de ω_A , ω_B , $\sin \zeta_E$, à l'exclusion des azimuts

—C'est une méthode type de machine à calculer de bureau

—Usage des tables à 10 décimales de cosinus

Elle est assez rapide, mais de grosses difficultés viennent pratiquement des points suivants:

— $\cos \Delta\omega$ définit très mal $\Delta\omega$ pour les petites valeurs

—Les azimuts et les longueurs sont définis par leurs *sinus*, ce que est très imprécis au voisinage du vertex.

De là l'obligation, dans des cas particuliers, de distinguer des variantes nombreuses qui viennent alourdir sensiblement la méthode.

Nous allons tâcher de dégager des méthodes types, dont l'essentiel est consigné dans l'imprimé n° I.G.N. 2303—1953.

(i) *Cas des longues géodésiques* (. . . ou recherche de précision médiocre . . .)

On adoptera le procédé suivant, si l'on se contente de 8 *décimales sur* $\cos \Delta\omega$ (ou 10 décimales, si on exécute tous les calculs à 10 décimales).

(A) *Distances*

$$\cos \Delta\omega = \sin \varphi_A \sin \varphi_B + \cos \varphi_A \cos \varphi_B \cos \Delta M'$$

(B) *Compléments*

$$\sin \zeta_E = \cos \varphi_A \cos \varphi_B \frac{\sin \Delta M'}{\sin \Delta\omega}$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \omega_A &= \frac{\sin \varphi_A}{\cos \zeta_E} \\ \sin \omega_B &= \frac{\sin \varphi_B}{\cos \zeta_E} \end{aligned} \right\} \omega_B - \omega_A = \Delta\omega \text{ (vérification)}$$

(C) *Azimuts*

$$\sin \zeta_A = \frac{\sin \zeta_E}{\cos \varphi_A}$$

$$\sin \zeta_B = \frac{\sin \zeta_E}{\cos \varphi_B}$$

Variantes

Si ω_A est mal défini par son sinus, il en est de même de ζ_A (voisinage du vertex). On procédera alors comme suit:

$$\sin \Delta\omega \cos \zeta_A = \sin \varphi_B \cos \varphi_A - \sin \varphi_A \cos \varphi_B \cos \Delta M'$$

$$\sin \Delta\omega \cos \zeta_B = \sin \varphi_A \cos \varphi_B - \sin \varphi_B \cos \varphi_A \cos \Delta M'$$

$$\operatorname{tg} \omega_A = \frac{\operatorname{tg} \varphi_A}{\cos \zeta_A}$$

$$\operatorname{tg} \omega_B = \frac{\operatorname{tg} \varphi_B}{\cos \zeta_B}$$

(au total, méthode très proche de l'imprimé 2353 B.T. 1949).

CALCUL DE GRANDES GÉODÉSIQUES

Remarques

- (1) *Rapidité de la méthode*: A, B, C : 45 opérations.
 - (2) Dans une itération, on pourra s'arrêter à A, B . On calculera C quand le résultat sera stabilisé.
 - (3) La formule du calcul de $\cos \zeta_A$ est en fait la formule dite en sinus-cosinus.
 - (4) Limitation de la méthode: 8 décimales sur $\cos \Delta\omega =$ précision du mètre pour $D > 200$ km.
 - (5) Si ζ_E est voisin de 100° , ω_B et ω_A sont mal définis. On prendra ω_A issu du calcul et $\omega_B = \omega_A + \Delta\omega$.
- (ii) *Imprimé voisin: utilisation des tables* ($1 - \cos \Delta M'$)
 Tables à 8 décimales pour lignes trigonométriques supérieures à 10° .
 Tables à 10 décimales pour lignes inférieures.
 Calculs spéciaux pour conserver ($1 - \cos \Delta M'$) à 8 chiffres significatifs.

(A) Distances

$$(1 - \cos \Delta\omega) = (1 - \cos \Delta\varphi) + \cos \varphi_A \cos \varphi_B (1 - \cos \Delta M')^*$$

(B) Azimuts

$$\sin \zeta_E = \cos \varphi_A \cos \varphi_B \frac{\sin \Delta M'}{\sin \Delta\omega}$$

$$\sin \zeta_A = \frac{\sin \zeta_E}{\cos \varphi_A} \qquad \sin \zeta_B = \frac{\sin \zeta_E}{\cos \varphi_B}$$

$$\cos \zeta_A \sin \Delta\omega = \sin \Delta\varphi + \sin \varphi_A \cos \varphi_B (1 - \cos \Delta M')$$

$$\cos \zeta_B \sin \Delta\omega = -\sin \Delta\varphi + \sin \varphi_B \cos \varphi_A (1 - \cos \Delta M')$$

(C) Compléments

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \omega_A &= \frac{\operatorname{tg} \varphi_A}{\cos \zeta_A} \\ \operatorname{tg} \omega_B &= \frac{\operatorname{tg} \varphi_B}{\cos \zeta_B} \end{aligned} \right\} \omega_B - \omega_A = \Delta\omega \text{ (vérification)}$$

Remarques

- (1) Aux distances où l'on travaille, le calcul de $\Delta M'$ doit se faire sans itérations; on calcule donc les azimuts immédiatement après les distances.
- (2) La fonction ($1 - \cos \Delta x$) peut se calculer:
 - par les tables à 10 décimales (avec interpolation parabolique)
 - mieux par les tables $\frac{2 \sin^2 x/2}{x^2} = f(x^2)$ qui permettent de conserver

* Que l'on met souvent sous la forme de formule de Pythagore:

$$\sin^2 \frac{\Delta\omega}{2} = \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2} + \cos \varphi_A \cos \varphi_B \sin^2 \frac{\Delta M'}{2}$$

une précision homogène en chiffres significatifs. Dans ce cas, on calculera $\Delta\omega$ par :

$$\text{—Tables } \frac{x^2}{2 \sin^2 x/2} = f(2 \sin^2 x/2)$$

—Extraction de racine carrée.

III—Calcul des Azimuts et des Distances : Méthode de Neper

La méthode de Neper est excellente, rapide, logarithmique. Elle perd beaucoup de son intérêt si on veut calculer les données complémentaires. Elle comporte 59 opérations élémentaires.

Calcul préliminaire des azimuts

$$\text{tg } \zeta_m = \text{tg } \frac{\Delta M'}{2} \frac{\cos \varphi_m}{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}$$

$$\text{tg } \frac{\Delta \zeta}{2} = \text{tg } \frac{\Delta M'}{2} \frac{\sin \varphi_m}{\cos \frac{\Delta \varphi}{2}}$$

Calcul vérifié des distances

$$\text{tg } \frac{\Delta \omega}{2} = \cotg \varphi_m \frac{\sin \frac{\Delta \zeta}{2}}{\sin \zeta_m} = \text{tg } \frac{\Delta \varphi}{2} \frac{\cos \frac{\Delta \zeta}{2}}{\cos \zeta_m}$$

IV—Calcul des Azimuts et des Distances : Calcul Préalable de $\Delta\omega$

On reprendra les méthodes (α) et (β) ci-dessus en les simplifiant à la demande. . . .

V—Calculs approches

Pour les courtes géodésiques, ou dans le cas où une précision médiocre est demandée, on est tenté de développer les différentes formules ci-dessus et de réaliser des développements limités, généralisation des formules différentielles :

$$\left\| \begin{array}{l} \Delta\omega^2 = \Delta\varphi^2 + \cos^2 \varphi \Delta M'^2 \\ \text{tg } \zeta_m = \frac{\Delta M'}{\Delta \varphi} \cos \varphi \\ \Delta \zeta = \Delta M' \sin \varphi \end{array} \right.$$

Il paraît peu intéressant en ce cas de chercher à calculer les éléments complémentaires. . . .

(i) Premier point de vue

Il consiste simplement à chercher des développements simples de chaque fonction utilisée, généralisant ce qu'on a déjà fait pour la fonction $(1 - \cos \Delta M')$.

CALCUL DE GRANDES GÉODÉSIIQUES

Calcul des distances :

Utilisant la formule

$$\sin^2 \frac{\Delta\omega}{2} = \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2} + \cos \varphi_A \cos \varphi_B \sin^2 \frac{\Delta M'}{2}$$

on l'écrira sous la forme

$$\Delta\omega^2 - \frac{\Delta\omega^4}{12} \dots = \left(\Delta\varphi^2 - \frac{\Delta\varphi^4}{12} \dots \right) + \cos \varphi_A \cos \varphi_B \left(\Delta M'^2 - \frac{\Delta M'^4}{12} \right) + \dots$$

et l'on utilisera 2 fonctions auxiliaires:

$$k = \frac{x^2 - x^4/12 + \dots}{x^2} = f(x^2)$$

$$1/k = \frac{x^2}{x^2 - x^4/12 + \dots} = f(x^2 - \frac{x^4}{12} + \dots)$$

[soit les fonctions $\frac{\sin^2 x/2}{x^2} = f(x^2)$ et $\frac{x^2}{\sin^2 x/2} = f(\sin^2 x/2)$ à des coefficients près] —et l'on calculera comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\omega_1^2 = (k\Delta\varphi^2) + \cos \varphi_A \cos \varphi_B (k\Delta M'^2) \\ \Delta\omega^2 = \frac{1}{k} \Delta\omega_1^2 \\ \Delta\omega = \end{array} \right.$$

Les tables k et $\frac{1}{k}$ sont extrêmement condensées . . . (voir Sect. VIII).

Remarques

(1) La formule utilisée reste ainsi rigoureuse.

(2) On peut décomposer $(\cos \varphi_A \cos \varphi_B)$ en $f\left(\varphi_m, \frac{\Delta\varphi}{2}\right)$: il semble aussi simple de calculer ce produit directement.

Calcul des azimuts

On peut utiliser les formules de Neper et des fonctions auxiliaires

$$S \text{ telle que } \sin x = xS(x^2)$$

$$t \text{ telle que } \operatorname{tg} \frac{x}{2} = xt(x^2)$$

$$t' \text{ telle que } x = 2t'f\left(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right)$$

—On bénéficie de l'usage de tables très condensées.

—Par contre, les opérations de calcul sont sensiblement augmentées, sans bénéfice réel.

—Ici aussi la précision rigoureuse est respectée.

(ii) *Deuxième point de vue*: usage de développements limités

Arrêtés aux termes du 2^{ème} ordre, les développements limités seront les suivants:

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta\omega^2 &= \Delta\varphi^2 \left[1 - (\cos^2 \varphi_m + 3 \sin^2 \varphi_m) \frac{\Delta M'^2}{12} \right] \\ &\quad + \cos^2 \varphi_m \Delta M'^2 \left[1 - \sin^2 \varphi_m \frac{\Delta M'^2}{12} \right] \\ \operatorname{tg} \zeta_m &= \frac{\Delta M' \cos \varphi_m}{\Delta\varphi} \left[1 + \frac{\Delta M'^2}{12} + \frac{\Delta\varphi^2}{24} \right] \\ \Delta\mathcal{Z} &= \Delta M' \sin \varphi_m \left[1 + \frac{\Delta M'^2}{12} \cos^2 \varphi_m + \frac{\Delta\varphi^2}{8} \right] \end{aligned} \right.$$

(iii) Enfin, on est tenté de remplacer dans les expressions ci-dessus les éléments sphériques par leurs expressions en fonction des éléments ellipsoïdiques (. . . dans les diverses méthodes). On aboutit ainsi à des développements divers. Nous retiendrons les suivants, qui comportant

- le développement limité rigoureux du 1^{er} ordre
- les développements sphériques purs du 2^{ème} ordre.

VI—Méthode par Développements Limites

Données $\begin{cases} L_A \\ L_B \\ \Delta M \end{cases}$

$$L_m = \frac{L_A + L_B}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} u : \Delta M \sin L_m \\ v : \Delta M \cos L_m \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta = \rho \Delta L \quad (\text{développement méridien}) \\ p = N \Delta M \cos L_m \quad (\text{développement sur le parallèle}) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} S^2 &= \beta^2 [1 - 0,0000\ 6168\ u^2 - 0,0000\ 2056\ v^2] + p^2 (1 - 0,0000\ 2056\ u^2) \\ \operatorname{tg} \zeta_m &= \frac{p}{\beta} \left[1 + 0,0000\ 2056\ \Delta M^2 + 0,0000\ 1028\ \Delta L^2 \right] \\ \Delta\mathcal{Z} &= u [1 + 0,0000\ 2056\ v^2 + 0,0000\ 3084\ \Delta L^2] \end{aligned} \right.$$

($\Delta M, \Delta L, u, v$, en grades)

Remarques

- La formule des distances est identique à celle donnée dans l'ouvrage de M. Dupuy: 'Notice sur quelques méthodes de calcul rapide des distances géodésiques terrestres', Page 35. Les termes sont regroupés ici de façon différente.
- La formule des azimuts est, à peu de chose près, la formule des Ingénieurs Géographes.

CALCUL DE GRANDES GÉODÉSQUES

Ces formules constituent un excellent procédé pour les courtes géodésiques, une approximation très suffisante jusqu'à 1000 km dans de nombreux cas (calculs de distances entre objectifs militaires). Elles constituent souvent un moyen rapide de vérification.

VII—Calculs Électroniques

Les calculs électroniques présentent des avantages et des exigences très particuliers:

Avantages

- (1) La question de temps de calcul est beaucoup moins préoccupante.
- (2) En particulier, on travaille systématiquement à 10 décimales sur toutes les lignes trigonométriques.
- (3) La vérification a lieu en recommençant le calcul.

Exigences

Il faut prévoir d'emblée tous les cas de figure et tâcher de conserver en tous les cas une précision finale homogène à la précision des données.

Solution adoptée

Nous avons déjà indiqué que c'était une méthode de Neper modifiée

$$\text{—Calcul de } \operatorname{tg} \frac{\varphi_A}{2}, \operatorname{tg} \frac{\varphi_B}{2}, \operatorname{tg} \frac{\Delta M'}{2}$$

$$\text{—Calcul de } \operatorname{tg} \zeta_m = \operatorname{tg} \frac{\Delta M'}{2} \frac{1 - \operatorname{tg} \varphi_A/2 \operatorname{tg} \varphi_B/2}{\operatorname{tg} \varphi_B/2 - \operatorname{tg} \varphi_A/2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\Delta \zeta}{2} = \operatorname{tg} \frac{\Delta M'}{2} \frac{\operatorname{tg} \varphi_A/2 + \operatorname{tg} \varphi_B/2}{1 + \operatorname{tg} \varphi_A/2 \operatorname{tg} \varphi_B/2}$$

$$\rightarrow \zeta_m, \frac{\Delta \zeta}{2}, \zeta_A, \zeta_B$$

$$\sin \zeta_E = \sin \zeta_A \cos \varphi_A = \sin \zeta_B \cos \varphi_B \text{ (vérification)}$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{cotg} \omega_A &= \operatorname{cotg} \varphi_A \cos \zeta_A \\ \operatorname{cotg} \omega_B &= \operatorname{cotg} \varphi_B \cos \zeta_B \end{aligned} \right\} \Delta \omega = \omega_B - \omega_A$$

Remarques

- (1) Toutes les lignes sont calculées à 10 décimales.
- (2) Usage abondant de la ligne *tangente* (cotangente) et en particulier tous les angles sont sortis par leur Arc tg (Arc cotg).
- (3) La méthode est seulement en défaut dans le cas d'une ligne équatoriale (ζ_E voisin de 100°); dans ce cas, en effet, la ligne est mal décrite par son $\cos \zeta$ et les angles ω_A et ω_B sortent avec une mauvaise précision; il faudrait alors prévoir une *variante*:

Calcul de $\Delta\omega$ par :

$$\operatorname{tg} \Delta\omega = \frac{\sin \Delta\omega}{\cos \Delta\omega} \text{ avec } \begin{cases} \sin \Delta\omega = \sin \Delta M \frac{\sin \zeta_A + \sin \zeta_B^*}{\cos \varphi_A + \cos \varphi_B} \\ \cos \Delta\omega = \sin \varphi_A \sin \varphi_B + \cos \varphi_A \cos \varphi_B \\ \cos \Delta M \dagger \end{cases}$$

$$\omega_A \text{ sorti par } \operatorname{cotg} \omega_A = \operatorname{cotg} \varphi_A \cos \zeta_A$$

$$\omega_B \text{ sorti par } \omega_B = \omega_A + \Delta\omega$$

[la mauvaise précision de ω_A n'ayant pas d'importance pour la suite (calcul des intégrales de Wallis)]

Moyennant cette variante, le calcul répondra à toutes les exigences qu'on attend de lui.

(4) La méthode est applicable au calcul à la main, moyennant de travailler à 10 décimales. (A 8 décimales, on conservera la précision du décimètre.) Il n'y a pas de vérification interne importante (sauf $\sin \zeta_B$).

Voir le fascicule: 'Calcul électronique des Grandes Géodésiques', réalisé par l'Institut Géographique National (H. M. Dufour, Septembre 1956).

VIII—CALCUL DE GRANDES GÉODÉSIQUES—PROBLÈME INVERSE CHOIX DES MÉTHODES

Après avoir passé en revue différentes formules de calcul, il est indispensable de faire une sélection dans les méthodes de travail, et ce choix est forcément assez arbitraire. Il serait idéal de choisir une seule méthode, et de s'y tenir, et cette solution est vivement recommandée à un bureau qui n'aurait qu'à résoudre rarement le problème. Malheureusement, en pratique, il faudra tenir compte des points de vue suivants :

- Nécessité de penser à une *vérification* du calcul
- Des solutions approchées, mais rapides, sont parfois suffisantes‡
- La méthode générale peut être abrégée si l'on ne recherche que les distances, ou que les azimuts
- La nature des données influera également sur le choix de la méthode utilisée :

coordonnées géographiques	→calcul en projection sphérique
coordonnées rectangulaires	→calcul en utilisant les tables de la projection

La sélection ci-dessous proposée, qui constitue en quelque sorte la ligne

* Cette formule ayant alors son plein effet (géodésique Est-Ouest).

† Formule qui a son plein effet dans le cas très particulier où, en plus de ζ_E voisin de 100° on a une ligne de longueur voisine de 10 000 km.

‡ Solution variable selon $\left\{ \begin{array}{l} \text{la longueur des géodésiques} \\ \text{la précision requise} \end{array} \right.$

CALCUL DE GRANDES GÉODÉSIQUES

de conduite du Bureau Technique de l'Institut Géographique National, tient compte de ces divers points de vue.

Dans une première partie, nous définirons un certain nombre d'imprimés de calculs, avec leurs caractéristiques.

Dans une deuxième partie, nous donnerons un certain nombre de cas de calculs, avec les modes opératoires et les imprimés qui nous paraissent les mieux adaptés.

Dans une troisième partie, nous donnerons les procédés de calcul électronique.

Note préliminaire

Dans les méthodes générales, nous préconisons toujours, en calcul sphérique, la méthode de Neper (calcul des azimuts, puis des longueurs), la méthode par calcul préalable des longueurs présentant trop de cas où la précision des données s'évanouit au milieu des calculs; cette dernière méthode reste toutefois préférable, vu sa rapidité, si l'on ne cherche que la longueur de la géodésique.

PREMIÈRE PARTIE: SELECTION D'IMPRIMÉS

I—*Calculs de Haute Précision et Forte Généralité*

(A) *Méthode complète par sphère paramétrique*

Calcul de V_1 par la formule des 3 niveaux

Calcul de V_2 par terme correctif à V_1

Calcul sphérique: Neper modifié

Vérification (et amélioration éventuelle): calcul de l'appoint en longitude ϵ et de la distance par les intégrales de Wallis

Exemple: pages 42, 43, 44, 45 (Paris Saïgon)—46—47

Cette méthode convient à tous les cas possibles. Le calcul sphérique n'est en défaut que dans des cas excessivement rares.

La vérification est bonne moyennant d'être exigeant sur la concordance des résultats (entre intégrales par points et intégrales de Wallis), et aussi de vérifier à part et spécialement le passage des latitudes ordinaires aux latitudes paramétriques.

(A') *Variante de la méthode*

Calcul de V_1 et V_2 par V_m + termes correctifs (formules de Jordan)

Exemple: page 48

Cette variante est susceptible de remplacer la précédente méthode pour les géodésiques inférieures à 1000 km, une fois tabulés commodément les termes correctifs.

(B) *Sphère conforme: intégrations par points*

Calcul sphérique: Neper modifié

Calcul des corrections d'échelle et de dv par intégrations sur 3 points

Exemple: pages 58—59

Cet imprimé est particulièrement rapide et de conception simple. De précision optima jusqu'à 1000 km, il suffit pratiquement aux besoins actuels jusque vers 10 000 km.

II—Calculs de Moindre Précision

(A) *Sphère paramétrique*: méthode par V_m

$$V_1 = V_2 = V_m = V \left(\frac{L_A + L_B}{2} \right)$$

Calcul sphérique: Neper

Exemple: voir page 89 ci-après

Cette méthode abandonne la précision des 3 niveaux et ne comporte pas de vérification, mais:

elle est rapide

elle est logarithmique (ce qui reste d'un certain intérêt)

elle garde une excellente précision pratique:

précision géodésique jusqu'à 50 km

l'erreur sur V_1 est celle sur V_2 se compensent partiellement dans le calcul des distances; l'erreur résiduelle est donnée par la formule:

$$\frac{\delta(S)}{S} = 14\Delta\omega^2 \cos^2 Z \cos 2Z \cos 2L \cdot 10^{-6}$$

$\Delta\omega$ exprimé en grades

Z orientation moyenne de la géodésique

L latitude moyenne

L'erreur maxima est de 15 m à 1000 km (géodésique à l'équateur $Z=0$).

Elle est très faible en moyenne, et surtout à nos latitudes ($\cos 2L$ voisin de 0).

(On peut naturellement prévoir la tabulation (ou un abaque) des termes correctifs à V_1 et V_2 (termes correctifs de Jordan), ce qui donne à la méthode une précision excellente.)

(B) *Sphère osculatrice*

Projection sur la sphère osculatrice en un point de latitude ronde voisine de la latitude moyenne.

Calcul sphérique par formules de Neper

Voir exemple page 90 ci-après

Cette méthode donne une excellente précision, d'autant meilleure que la latitude de projection est voisine de la latitude moyenne. Deux variantes d'utilisation:

(1^o) Projections espacées (de 5^G en 5^G , ou 10^G en 10^G). Etablissement de tables locales $L \rightarrow \psi$. Commodité d'emploi, mais précision de l'ordre du mètre à 1000 km (voir table accompagnant l'exemple).

(2^o) Projections de grade en grade: utilisation de la table de la méridienne et calcul de ψ par

$$\psi = \psi_0 + \frac{s - s_0}{R_0}$$

précision excellente, un peu moindre commodité d'emploi.

Nous citerons ensuite, mais avec un moindre intérêt:

CALCUL DE GRANDES GÉODÉSIQUES

(C) Sphère circonscrite à la latitude moyenne.

(D) Sphère conforme

Calcul sphérique: Neper

Correction d'échelle par $K_m = K \left(\frac{L_A + L_B}{2} \right)$

Pas de correction de dv

III—*Courtes Géodésiques*

Les procédés ci-dessous indiqués conviennent plus particulièrement:

—avec grande précision aux géodésiques jusque vers 100 km

—avec une précision moindre (mais souvent suffisante) aux géodésiques jusque vers 1000 km

(A) *Méthode par développement*

Voir exemple page 92.

(B) *Méthodes par projection*

Ces méthodes seront très souvent les plus avantageuses quand les deux extrémités de la géodésique sont données dans le même système de projection, ou peuvent y être ramenées facilement. Les étapes de calcul sont les suivantes:

—Ramener les points dans le même système de projection

—Calcul du gisement et distance

—Correction d'échelle et de dv

Les projections les plus intéressantes nous paraissent être Lambert, Mercator, U.T.M.

IV—*Calcul Exclusif de Distances*

Nota

Il n'y a pas lieu de parler spécialement des calculs exclusifs d'azimuts, qui d'une part sont rares, d'autre part seront traités par les imprimés déjà cités, qui se simplifient d'eux-mêmes, car les azimuts sont calculés soit préalablement aux distances, soit indépendamment.

Pour des calculs exclusifs de distances, on peut avoir intérêt à utiliser des méthodes un peu différentes, pour deux raisons essentielles:

—certains procédés conduisant facilement aux distances corrigées, difficilement aux azimuts corrigés

—le calcul sphérique reprendra la formule fondamentale:

$$\cos \Delta\omega = \sin \varphi_A \sin \varphi_B + \cos \varphi_A \cos \varphi_B \cos \Delta M'$$

(ou formules dérivées)

(A) *Sphère conforme*

Formule fondamentale de la Trigonométrie sphérique

Intégrales de Wallis

Exemple pages 60-61 moyennant de supprimer le calcul des corrections de dv

Excellente méthode pour tous calculs aéronautiques; la formule fondamentale devient inopérante aux courtes distances.

(B) *Sphère de Gauss*: Imprimé 2.353 I.G.N. B.T. 49

Formule barycentrique de M. Dupuy (cf. pages 70–71–72)

Formule fondamentale de la Trigonométrie sphérique

Formule barycentrique des distances

(C) *Méthode par V_m* (II.A) }
 (D) *Méthode par sphère osculatrice* (II.B) }

Les deux méthodes utilisées avec la formule fondamentale, ou mieux avec le développement:

$$(k\Delta\omega^2) = (k\Delta\varphi^2) + \cos \varphi_A \cos \varphi_B (k\Delta M'^2)$$

Voir exemple page 95.

(E) *Méthode III.A*

Calcul exclusif de la distance

(F) *Méthode III.B*

Calcul exclusif de la distance

DEUXIÈME PARTIE
 PROBLÈMES PRATIQUES POSES—
 UTILISATION DES IMPRIMÉS

Calculs Isoles—Calculs Tests

Utiliser *I, A* (Calcul autovérifié).

Calculs d'un Réseau Sutoran

($0 < D < 1000$ km) Précision requise du cm

(1) *Utilisation de I, A* (ou *I, A'*)

(2) *Utilisation de I, A*, simplifié (sans intégrales de Wallis)

(3) *Utilisation de I, B* (sphère conforme)

(4) *Utilisation de II, B*, (2°) (sphère de courbure)

(Moindre précision pour $D > 400$ km)

} Vérification
 par le théorème
 de Legendre
 généralisé, ou
 calculs par 2
 méthodes
 distinctes

Calculs Géodésiques

($0 < D < 200$ km)

Les méthodes précédentes restent naturellement valables. En pratique, on préférera:

III—A (développements, formules des Ingénieurs)
 Géographes

III—B (projections)

} Vérification par le
 théorème de Legendre

CALCUL DE GRANDES GÉODÉSIIQUES

Calculs de Distances et d'Orientation d'Antennes

Calculs de faible précision en général. Un calcul sur une sphère de rayon moyen suffit amplement dans la plupart des cas; on pourra utiliser, si on veut être plus rigoureux, l'imprimé II, A (calcul par V_m) et vérifier:

- soit grossièrement, par un abaque
- soit par vérification de la distance (par exemple, imprimés IV, A, ou IV, B)

Distances Aeronautiques

$D > 1000$ km: IV, A — IV, B — Abaque

$D < 1000$ km: IV, C — IV, D — IV, E

Distances et Azimuts entre Objectifs Militaires

On désire des calculs aussi rapides que possible, à la précision de quelques mètres, pour des distances excédant rarement 1000 km.

Le résultat doit être rapidement obtenu, mais on dispose de plusieurs calculateurs pouvant travailler en parallèle. Il est conseillé d'adopter 2 méthodes rapides, non vérifiées en elles-mêmes, et aussi indépendantes que possible; par exemple:

II, A: méthode par V_m .

II, B: sphère osculatrice; surtout intéressante dans le cas de nombreux calculs dans une même zone

IV, A: développements

IV, B: l'utilisation d'une projection est vivement recommandée, quand les données sont à la fois en géographiques et en projection

Remarque

Le calcul vérificateur pourra n'être que partiel (distances seulement) quand le calcul principal utilise les formules de Neper: imprimés IV, C—IV, D—IV, E—IV, F.

TROISIÈME PARTIE: CALCULS ÉLECTRONIQUES

Pour les calculs à la main, nous avons été obligés de prévoir plusieurs cas possibles, l'application d'une méthode générale unique se révélant parfois un peu lourde pour le calcul à atteindre. En calcul électronique, nous rechercherons au contraire une méthode *valable dans tous les cas de figure*, et de *précision maxima*, aussi simple à programmer que possible.

(A) *La méthode de la sphère paramétrique, avec intégrales de Wallis et itérations* nous paraît s'imposer. Elle est longue en calcul (plusieurs itérations), mais courte en programme (pas de corrections aux azimuts); elle est de précision extrême (pas de correction de ligne d'intégration).

C'est la méthode idéale sur un matériel à *programme enregistrable* (matériels qui vont devenir les seuls utilisés . . .)

Pour les courtes géodésiques, on peut procéder en une seule passe, grâce au calcul de V_1 et V_2 par les formules de Jordan: à utiliser sur un matériel à programme non enregistrable.

(B) *La méthode de la sphère conforme* constitue un excellent moyen de vérification; il suffira de vérifier les *distances* par cette 2ème méthode.

Pour les réalisations pratiques, voir le document suivant: 'Calcul électronique des Grandes Géodésiques', réalisé par l'Institut Géographique National, par H. M. Dufour, Septembre 1956.

Un simple additif: Si on désire que la méthode (B) (sphère conforme) vérifie correctement la méthode A, il est bon d'ajouter les vérifications internes suivantes au tableau de la page 13 du document précité: entre les lignes 10 et 11, intercaler: lignes trigonométriques de Z_B , $\sin Z_E = \sin Z_B \cos \varphi_B$ (vérification)

ligne 10: ajouter $\text{tg } \varphi_B = \text{tg } \omega_B \cos Z_B$ (vérification)

MÉTHODE II, A: cf. pages 32, 33, 84, 89

$$\text{Sphère paramétrique } V_1 = V_2 = V \left(\frac{L_A + L_B}{2} \right)$$

Précision

Géodésique jusqu'à 50 km (mm)

Tirs d'artillerie jusqu'à 1000 km

Distances aéronautiques jusqu'à 2000 km

Tables

Tables des lignes trigonométriques à 8 décimales de l'U.G.G.I.

Tables des latitudes ordinaires \Leftrightarrow latitudes paramétriques

Tables de $V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 L}$ pour les divers ellipsoïdes

Remarques

- (1) A titre indicatif, nous avons conservé 10 décimales pour les lignes trigonométriques des angles inférieurs à 10° . Cette précaution n'est nécessaire que dans le cas de calculs géodésiques.
- (2) Par l'adjonction de termes correctifs à V_m , on obtient une précision supplémentaire (méthode de Jordan, voir page 48). Le procédé permet alors de calculer un réseau Shoran.

GRANDES GÉODÉSIQUES—PROBLÈME INVERSE
 SPHÈRE PARAMÉTRIQUE: MÉTHODE PAR V_m (CALCULS II, A) Ellipsoïde International

$a \sin 1'' = 10,0191\ 4844$

$M_A = 0G\ 0000''\ 000$	$L_A = 50G\ 0000''\ 000$
$M_B = 5G\ 0000''\ 000$ (à l'est de A)	$L_B = 48G\ 0000''\ 000$
$\Delta M = 5G\ 0000''\ 000$	$L_m = 49G\ 0000''\ 000$
$V_m = 1,0017\ 4367$	$\Delta M' = V_m \Delta M = 5G\ 0087''\ 184$

$\varphi_A = 49G\ 8926''\ 440$
 $\varphi_B = 47G\ 8928''\ 672$

Vérification: $\varphi_A - L_A = -0G\ 1073''\ 560$
 $\varphi_B - L_B = -0G\ 1071''\ 328$

$\varphi_m = \frac{1}{2}(\varphi_A + \varphi_B) = 48G\ 8927''\ 556$
 $\frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{1}{2}(\varphi_B - \varphi_A) = -0G\ 9998''\ 884$

$\sin \varphi_m = 0,6947\ 0206$
 $\cos \varphi_m = 0,7192\ 9761$
 $\operatorname{cotg} \varphi_m = 1,0354\ 0444$

$\frac{1}{2}\Delta M' = 2G\ 5043''\ 592$
 $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\Delta Z = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\Delta M' \frac{\sin \varphi_m}{\cos \frac{\Delta\varphi}{2}}$

$\operatorname{tg} \frac{1}{2}\Delta Z = 0,0273\ 4593\ 378$
 $\sin \frac{1}{2}\Delta Z = 0,8744\ 5283$
 $\cos \frac{1}{2}\Delta Z = 0,4851\ 1055$
 $\sin \frac{1}{2}\Delta\omega = 0,0273\ 3571\ 552$
 $\cos \frac{1}{2}\Delta\omega = 0,9996\ 2630\ 95$

$\operatorname{tg} \frac{1}{2}\Delta\omega = \operatorname{cotg} \varphi_m \frac{\sin \frac{1}{2}\Delta Z}{\sin \frac{1}{2}\Delta\omega}$
 $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\Delta\omega = 0,0323\ 6712\ 11$

$\frac{\Delta\omega}{2} = 2G\ 0598''\ 358$
 $\Delta\omega = 4G\ 1196''\ 716$

$S = a \sin 1'' \frac{\Delta\omega}{V_m} = 412,037''\ 56$ (412,037'' 478)

TABLE ψ (L) DE LA PROJECTION SUR LA SPHÈRE CONFORME
AU POINT DE LATITUDE $L_0 = 50^\circ$

Ellipsoïde: International

Éléments de base de la projection:

$$L_0 = 50^\circ$$

$$\psi_0 = 49^\circ 9' 462'' 316$$

$$\alpha = \sqrt{1 + e'^2 \cos^4 L_0} = 1,0008 4566$$

$$R_0 = \sqrt{N_0 \rho_0} = 6.378.351,74$$

$$R_0 \sin 1'' = 10,019 0913$$

$$\operatorname{tg} \psi_0 = \frac{\operatorname{tg} L_0}{V_0} (V_0 = \sqrt{1 + e'^2 \cos^4 L_0})$$

$$= 1,0016 9061$$

Table calculée d'après la formule:

$$\psi = \psi_0 + \frac{s - s_0}{R_0}$$

s = méridienne (tables de l'ellipsoïde international)

Cette table, utilisée en interpolation linéaire, fournit ψ à mieux que $0,3$ (3 m). Le calcul ci-contre utilise des valeurs de ψ tirées de la formule génératrice

$$\psi = \psi_0 + \frac{s - s_0}{R_0}$$

utilisée en précision maxima, ceci afin de montrer l'efficacité de la méthode de calcul.

Méthode II, B: sphère de courbure, pages 63 à 68; 84

Tables { Tables à 8 décimales de l'UGGI
Tables locales $\psi = f(L)$ ou
Tables de la méridienne

(Pour les calculs précis: tables à 10 décimales des petits angles)

Utilisation

(1°) Calculs précis jusqu'à 400 km. Utilisation d'une latitude L_0 voisine de $L_A + L_B/2$

(2°) Calculs entre objectifs militaires jusqu'à 2000 km (précision de quelques mètres). Utilisation de latitudes L_0 de 10° en 10°

L	ψ	Δ
40 ⁰	39 ⁰ 9709' 7	9968,3
41	40 9678 0	9969,8
42	41 9647 8	9971 4
43	42 9619 2	9972 8
44	43 9592 0	9974 5
45	44 9566 5	9976 0
46	45 9542 5	9977 6
47	46 9520 1	9979 1
48	47 9499 2	9980 8
49	48 9480 0	9982 3
50	49 9462 3	9983 9
51	50 9446 2	9985 5
52	51 9431 7	9987 1
53	52 9418 8	9988 7
54	53 9407 5	9990 2
55	54 9397 7	9991 8
56	55 9389 5	9993 4
57	56 9382 9	9994 9
58	57 9377 8	9996 5
59	58 9374 3	9998 0
60	59 9372 3	

GRANDES GÉODÉSIQUES—PROBLÈME INVERSE
SPHÈRE DE COURBURE EN $L_0 = 50^G$ (CALCULS, II, B)

Ellipsoïde International

$$R_0 \sin 1'' = 10,0190\ 9131\ 3$$

$$\begin{aligned} M_A &= 0^G\ 0000''\ 00 \\ M_B &= 5^G\ 0000''\ 00 \text{ (à l'Est de } A) \\ \Delta M &= 5^G\ 0000''\ 00 \\ \alpha &= 1,0008\ 4566\ 37 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_A &= 50^G\ 0000''\ 00 \\ L_B &= 48^G\ 0000''\ 00 \end{aligned}$$

$$\Delta M' = \alpha \cdot \Delta M = 5^G\ 0042''\ 283$$

$$\begin{aligned} \psi_A &= 49^G\ 9462''\ 316 \\ \psi_B &= 47^G\ 9499''\ 242 \end{aligned}$$

$$\psi_m = \frac{1}{2}(\psi_A + \psi_B) = 48^G\ 9480''\ 779$$

$$\frac{\Delta\psi}{2} = \frac{1}{2}(\psi_B - \psi_A) = -0^G\ 9981''\ 537$$

$$\sin \psi_m = 0,6953\ 2687$$

$$\sin \frac{\Delta\psi}{2} = -0,0156\ 7831\ 880$$

$$\cos \psi_m = 0,7186\ 9363$$

$$\cos \frac{\Delta\psi}{2} = 0,9998\ 7709$$

$$\operatorname{cotg} \psi_m = 1,0336\ 0544$$

$$\operatorname{tg} \frac{\Delta\psi}{2} = -0,0156\ 8024\ 607$$

$$\frac{1}{2}\Delta M' = 2^G\ 5021''\ 142$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}\Delta M' = 0,0393\ 2336\ 75$$

$$\operatorname{tg} \zeta_m = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\Delta M' \frac{\cos \psi_m}{\sin \frac{\Delta\psi}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}\Delta \zeta = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\Delta M' \frac{\sin \psi_m}{\cos \frac{\Delta\psi}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \zeta_m = -1,8025\ 8191$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}\Delta \zeta = 0,0273\ 4595\ 52$$

$$\operatorname{cotg} \zeta_m = -0,5547\ 5981$$

$$\sin \zeta_m = +0,8744\ 5252$$

$$\zeta_m = 132^G\ 2441''\ 694$$

$$\cos \zeta_m = -0,4851\ 1111$$

$$\frac{1}{2}\Delta \zeta = 1^G\ 7404''\ 638$$

$$\zeta_A = 130^G\ 5037''\ 056 \quad (37'', 073)$$

$$\zeta_B = 133^G\ 9846''\ 332 \quad (46'', 273)$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}\Delta \omega = \operatorname{cotg} \psi_m \frac{\sin \frac{1}{2}\Delta \zeta}{\sin \zeta_m}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\Delta\psi}{2} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}\Delta \zeta}{\cos \zeta_m}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}\Delta \omega = 0,0323\ 1091\ 98$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}\Delta \omega = 0,0323\ 1092\ 04$$

$$\frac{\Delta \omega}{2} = 2^G\ 0562''\ 617$$

$$\Delta \omega = 4^G\ 1125''\ 234$$

$$S = R_0 \sin 1'' \cdot \Delta \omega = 412,037^m,475 \quad (478)$$

GRANDES GÉODÉSIQUES—PROBLÈME INVERSE
MÉTHODE PAR DÉVELOPPEMENTS LIMITES

		Ellipsoïde International
$M_A = 0^c 0000'' 000$		
$M_B = 5^c 0000'' 000$	(à l'Est de A)	
$\Delta M = 5^c 0000'' 000$		
$L_A = 50^c 0000'' 000$		
$L_B = 48^c 0000'' 000$		
$\Delta L = -2^c 0000'' 000$		
$L_m = \frac{L_A + L_B}{2} = 49^c 0000'' 000$	$\sin L_m = 0,6959\ 1280$	$\rho = 1,0000\ 5930$
	$\cos L_m = 0,7181\ 2630$	$N = 1,0035\ 4980$
$u = \Delta M \sin L_m = 3,4795\ 6400$	$u^2 = 12,1073\ 65$	$\Delta M^2 = 25,0000\ 00$
$v = \Delta M \cos L_m = 3,5906\ 3150$	$v^2 = 12,8926\ 34$	
$\beta = \rho \Delta L = -2,0001\ 1860$	$\beta^2 = 4,0004\ 7441$	$\Delta L^2 = 4,0000\ 00$
$\rho = N \Delta M \cos L_m = 3,6033\ 7752$	$\rho^2 = 12,9843\ 2955$	
<i>Distances</i>	$S^2 = \beta^2(1 - 0,00006168u^2 - 0,00002056v^2) + \rho^2(1 - 0,00002056u^2)$	
	$= 4,0004\ 7441(0,9989\ 8815) + 12,9843\ 2955(0,9997\ 5107)$	
	$= 16,9775\ 2389$	$S = 41,2^m 037^m 91$ (37 ^m ,478)
<i>Azimuths</i>	$\operatorname{tg} \zeta_m = \frac{\rho}{\beta}(1 + 0,00002056\Delta M^2 + 0,00001028\Delta L^2)$	
	ou $\operatorname{colog} \zeta_m = \frac{\beta}{\rho}(1 - 0,00002056\Delta M^2 - 0,00001028\Delta L^2)$	
	$\operatorname{tg} \zeta_m = -0,5550\ 6774(0,9994\ 4488) = -0,5547\ 5961$	
	$\zeta_m = 132^c 244'' 596$	
	$\Delta \zeta = u(1 + 0,00002056v^2 + 0,00003084\Delta L^2)$	
	$\Delta \zeta = 3,4795\ 6400(1,0003\ 8843) = 3^c 4809'' 156$	
	$\frac{\Delta \zeta}{2} = 1^c 7404'' 578$	
	$\zeta_A = 130^c 5037'' 018$ (37 ^m ,073)	
	$\zeta_B = 133^c 9846'' 174$ (46 ^m ,273)	

IMPRIMÉ III, A : développements limités

Tables { Tables à 8 décimales de l'U.G.G.I.

{ Tables de N et ρ de l'ellipsoïde (Table B et C Notice de M. Dupuy, page 38).

Precision { Géodésique jusqu'à 100 km

{ Distances militaires jusqu'à 1000 km

de:

IX—CALCUL DE GRANDES GÉODÉSQUES
LA RESOLUTION DU PROBLÈME DIRECT

ÉNONCÉ DU PROBLÈME

On donne: A $\begin{cases} M_A \\ L_A \end{cases}$ \mathcal{Z}_{AB} $S =$ distance géodésique AB

On cherche: B $\begin{cases} M_B \\ L_B \end{cases}$ \mathcal{Z}_{BA}

INDICATIONS GÉNÉRALES

Une étude rapide du problème nous montre que nous aurons deux grandes catégories de solutions:

(A) Le problème est un problème de Cauchy: on peut donc songer à le résoudre par des *développements de Taylor* à partir du point A.

Ces développements ont l'avantage d'être rigoureux . . . mais deviennent rapidement inextricables, et ont une précision très rapidement insuffisante quand la distance augmente.

(B) On se ramène à un *problème sphérique*: l'examen rapide des différentes sphères utilisables montre qu'il sera avant tout commode de n'avoir aucune correction à faire sur \mathcal{Z}_{AB} pour le transposer sur la sphère auxiliaire, ce qui nous conduit pratiquement à restreindre notre choix:

(1°) A la *sphère de courbure*, qu'on prendra

—soit au point L_A lui-même

—soit en un point L_0 voisin

(2°) A la *sphère paramétrique*, qui paraît la méthode générale la plus adaptée au problème à résoudre. On trouvera en fait 2 méthodes principales:

(a) *Méthode rigoureuse*: valable quelle que soit la longueur de la géodésique. Utilisation des intégrales de Wallis.

(b) *Méthode approchée* (pour les courtes géodésiques): un peu plus rapide, utilisant encore la sphère auxiliaire, mais calculant les corrections aux valeurs initiales par des développements limités.

(A) *Problème Direct, par des Développements Rigoureux Directs*

Ces développements vont procéder en fonction de S . Ils utilisent 2 relations fondamentales:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dG}{ds} &= \frac{dG}{dL} \cdot \frac{dL}{ds} = \frac{\cos \mathcal{Z}}{\rho} \cdot \frac{dG}{dL} & \left[\frac{dG}{ds} = \text{dérivée d'une grandeur } G \text{ par} \right. \\ & & \left. \text{rapport à } s, \text{ longueur de l'arc} \right] \\ \frac{d\mathcal{Z}}{ds} &= -\sin \mathcal{Z} \frac{1}{r\rho} \frac{dr}{dL} & (r = N \cos L) \end{aligned} \right.$$

Table directe

$$K = 1 - \frac{1}{12} \frac{u}{(63,6620)^2} + \frac{1}{360} \frac{u^2}{(63,6620)^4} \cdot \frac{1}{K} = 1 + \frac{1}{12} \frac{v}{(63,6620)^2} + \frac{1}{90} \frac{v^2}{(63,6620)^4} + \frac{1}{576} \frac{v^3}{(63,6620)^6}$$

u	K	$\Delta_1 -$
0	1,0000 0000	2 0560
10	0,9997 9440	2 0557
20	0,9995 8883	2 0553
30	0,9993 8330	2 0550
40	0,9991 7780	2 0546
50	0,9989 7234	2 0543
60	0,9987 6691	2 0540
70	0,9985 6151	2 0536
80	0,9983 5615	2 0533
90	0,9981 5082	2 0530
100	0,9979 4552	

v	$1/K$	$\Delta_1 +$
0	1,0000 0000	2 0568
10	1,0002 0568	2 0582
20	1,0004 1150	2 0596
30	1,0006 1746	2 0609
40	1,0008 2355	2 0623
50	1,0010 2978	2 0636
60	1,0012 3614	2 0650
70	1,0014 4264	2 0664
80	1,0016 4928	2 0677
90	1,0018 5605	2 0691
100	1,0020 6296	

$\Delta_2 = - 14$

Imprimés: Calcul exclusif des distances (combiné avec utilisation de la sphère de courbure)

On utilise:

— Soit la formule fondamentale, qui perd beaucoup de précision pour les faibles valeurs de $\Delta\omega$, mais est particulièrement simple et rapide.
 — Soit une formule modifiée:

- (a) $1 - \cos \Delta\omega = (1 - \cos \Delta\theta) + \cos \psi_A \cos \psi_B (1 - \cos \Delta M')$ avec utilisation de la table de cosinus des petits angles à 10 décimales.
- (b) La formule utilisée ci-contre permet de travailler de façon homogène à 8 chiffres significatifs. Les tables ci-dessus sont d'un usage commode.

Table $K = f(u)$: permet de passer de $u = x^2$ (x exprimé en grades) à $Ku = A \sin^2 \frac{x}{2}$ (A facteur constant)

Table inverse $\frac{1}{K} = f(v)$: permet de passer de $v = A \sin^2 \frac{x}{2}$ à $\frac{v}{K} = x^2$ (x exprimé en grades)

GRANDES GÉODÉSIIQUES—PROBLÈME INVERSE SPHÈRE DE COURBURE MOYENNE:
(CALCULS IV, D) CALCUL EXCLUSIF DES DISTANCES

		Ellipsoïde International
$R_0 \sin 1'' = 10,0190\ 9131$		
$M_A = 0G\ 0000''\ 00$ $M_B = 5G\ 0000''\ 00$ (à l'Est de A) $\Delta M = 5G\ 0000''\ 00$ $\alpha = 1,0008\ 4566\ 37$		$L_A = 50G\ 0000''\ 00$ $L_B = 48G\ 0000''\ 00$ $\Delta M' = \alpha \cdot \Delta M = 5G\ 0042''\ 283$
$\psi_A = 49G\ 9462''\ 316$ $\psi_B = 47G\ 9499''\ 242$	$\Delta\psi = 1G\ 9963''\ 074$	
$\cos \Delta\omega = \sin \psi_A \sin \psi_B + \cos \psi_A \cos \psi_B \cos \Delta M'$ $\sin \psi_A = 0,7065\ 0931$ $\cos \psi_A = 0,7077\ 0374$ $C = \cos \psi_A \cos \psi_B = 0,5162\ 7473$ $\cos \Delta\omega = \sin \psi_A \sin \psi_B + C \cos \Delta M'$ $= 0,9979\ 1417$ $\Delta\omega = 4G\ 1125''\ 34$ $S = R_0 \sin 1'' \times \Delta\omega = 412,038''6$	Par formule fondamentale $\sin \psi_B = 0,6839\ 7349$ $\cos \psi_B = 0,7295\ 0685$ $\cos \Delta M' = 0,9969\ 1212$	Par formule fondamentale modifiée $(K_{\Delta\omega^2} \Delta\omega^2) = (K_{\Delta\psi^2} \Delta\psi^2) + C(K_{\Delta M'^2} \Delta M'^2)$ $\cos \psi_A = 0,7077\ 0374$ $C = \cos \psi_A \cos \psi_B = 0,5162\ 7473$ $\cos \psi_B = 0,7295\ 0685$ $\Delta\psi^2 = 3G\ 9852''\ 4323$ $K_{\Delta\psi^2} = 0\ 9999\ 1806$ $\Delta M'^2 = 25G\ 0423''\ 0088$ $K_{\Delta M'^2} = 0\ 9994\ 8520$ $[K_{\Delta M'^2}] = 25G\ 0294''\ 0910$ $[K_{\Delta\omega^2}] = 16G\ 9069''\ 6811$ $\frac{1}{K} = 1,0003\ 4784$ $\Delta\omega^2 = 16G\ 9128''\ 4903$ $\Delta\omega = 4G\ 1125''\ 2344$ $S = R_0 \sin 1'' \times \Delta\omega = 412,037''678$

Variation de l'azimut sur une géodésique, obtenue par différentiation de l'équation fondamentale des géodésiques d'une surface de révolution

$$r \sin \zeta = \text{constante}$$

Développement de la latitude

$$L = L_A + \left(\frac{dL}{ds}\right)_A S + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2L}{ds^2}\right)_A S^2 + \dots$$

$$\left[\begin{aligned} \left(\frac{dL}{ds}\right)_A &= \frac{\cos \zeta_A}{\rho_A} \\ \left(\frac{d^2L}{ds^2}\right)_A &= \frac{1}{\rho} \frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{dL} \cos^2 \zeta_A + \frac{1}{\rho^2 r} \frac{dr}{dL} \sin^2 \zeta_A \\ &\dots \end{aligned} \right.$$

On se rend compte qu'on peut écrire:

$$L = L_A + \alpha \cos \zeta_A S + (\beta + \gamma \cos^2 \zeta_A) S^2 + (\delta \cos \zeta_A + \epsilon \cos^3 \zeta_A) S^3 + \dots$$

les fonctions $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon)$ étant fonctions de L_A .

Développement de la longitude

$$\frac{dM}{ds} = \frac{\sin \zeta}{r}$$

$$\frac{d^2M}{ds^2} = \sin \zeta \cos \zeta \left[\frac{1}{\rho} \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dL} - \frac{1}{r^2 \rho} \frac{dr}{dL} \right] = A \sin \zeta \cos \zeta$$

$$\frac{d^3M}{ds^3} = \sin \zeta (C + D \cos^2 \zeta)$$

A, B, C, D , fonctions de L_A .

Développement de l'azimut

$$\frac{d\zeta}{ds} = -\frac{1}{r\rho} \frac{dr}{dL} \sin \zeta$$

$$\frac{d^2\zeta}{ds^2} = U \sin \zeta \cos \zeta$$

$$\frac{d^3\zeta}{ds^3} = \sin \zeta (V + W \cos^2 \zeta)$$

...

U, V, W , fonctions de L_A .

Remarque

L'azimut peut être développé en fonction de la longitude

$$\left\| \begin{aligned} \frac{dZ}{dM} &= \sin L \\ \frac{d^2Z}{dM^2} &= \frac{\rho \cos L}{r} \operatorname{tg} Z \\ &\dots \end{aligned} \right.$$

Ce développement ne paraît pas très intéressant, par suite de l'apparition de coefficients tels que $\operatorname{tg} Z$, qui peuvent être très forts.

Utilisation des développements ci-dessus

Il semble qu'il faut se limiter aux termes du 3ème degré; au delà, les calculs deviennent bien moins rentables, et le nombre des tables à utiliser augmente rapidement.

(B) *Problème Direct, par Utilisation de la Sphère Osculatrice*

La sphère osculatrice, dans la mesure où l'on transpose le calcul sur cette surface auxiliaire sans effectuer préalablement de correction sur Z_A , constitue une méthode de calcul intéressante a priori.

On peut prendre la sphère de courbure en un point L_0 voisin de L_A . (Nous examinerons plus spécialement le cas où $L_0 = L_A$.)

Étapes fondamentales du calcul

Éléments de départ

$$Z_A \quad S \quad L_A$$

Représentation sur la sphère de courbure en L_A

$$\left\| \begin{aligned} Z_A &\longrightarrow Z_A \\ S &\longrightarrow \Delta\omega = \frac{S}{R_0} \text{ avec} \\ L_A &\longrightarrow \psi_A \text{ défini par} \end{aligned} \right. \quad \left\| \begin{aligned} R_0 &= \sqrt{N\rho} \\ \operatorname{tg} L_A &= V_A \operatorname{tg} \psi_A \text{ (si } L_A = L_0) \\ &\text{ou tables } \psi - L \\ &\text{ou tables de la méridienne:} \\ & s_A - s_0 = R_0(\psi_A - \psi_0) \end{aligned} \right.$$

Calcul sur cette sphère de courbure

$$\left\| \begin{aligned} Z_B \\ \Delta M' \\ \psi_B \end{aligned} \right.$$

Retour aux éléments de l'ellipsoïde

$$\left\| \begin{array}{l} Z_B \\ \Delta M = \frac{\Delta M'}{\alpha} \text{ avec } \alpha = \sqrt{1 + e'^2 \cos^4 L_0} \\ L_B \text{ défini par} \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \text{Tables } L - \psi \\ \text{ou Tables de la méridienne:} \\ s_B - s_0 = R_0(\psi_B - \psi_0) \end{array} \right.$$

Remarques

- (1) La méthode classique par les tables P, Q, R , est relativement proche de cette méthode (Utilisation du théorème de Legendre, usage des tables de la méridienne).
- (2) Portée limitée en latitude à 200 km environ (précision du cm).

(C) *Problème Direct, par Utilisation de la Sphère Paramétrique*

La sphère paramétrique, qui réalise le transport de la géodésique sur une sphère de révolution, *sans distorsion aucune des azimuts*, est la méthode de choix pour faire le calcul d'une très longue géodésique; en fait, c'est la seule méthode absolument rigoureuse, le calcul s'effectuant *sans aucune itération* (au contraire de ce qui se passe dans le problème inverse).

Étapes fondamentales du calcul

Éléments de départ

$$Z_A \quad S \quad L_A$$

Représentation sur la sphère paramétrique

$$\left\| \begin{array}{l} Z_A \longrightarrow Z_A \\ S \longrightarrow \Delta\omega \text{ (voir définition ci-dessous)} \\ L_A \longrightarrow \varphi_A \quad (\text{tg } \varphi = \frac{b}{a} \text{tg } L) \end{array} \right.$$

Calcul sur cette sphère

$$\left\| \begin{array}{l} Z_B \\ \Delta M' \\ \varphi_B \end{array} \right.$$

Retour sur l'ellipsoïde

$$Z_B$$

$$\Delta M = \Delta M' - \epsilon$$

$$L_B \text{ défini par } \text{tg } \varphi_B = \frac{b}{a} \text{tg } L_A \text{ (ou tables)}$$

CALCUL DE GRANDES GÉODÉSIIQUES

La principale difficulté du problème réside :

- dans le calcul de $\Delta\omega$
- dans le calcul de ϵ

Reprenant les notations déjà explicitées (Sect. II), on a vu qu'on peut écrire la relation liant S à ω , élongations correspondantes prises à partir de l'équateur, l'une sur l'ellipsoïde, l'autre sur la sphère paramétrique.

$$\frac{S}{b \sin 1''} = \omega + u^2 I_2 - u^4 I_4 + u^6 I_6 \dots$$

$$\left\| \begin{aligned} u^2 &= e'^2 \cos^2 Z_E \\ I_2 &= \frac{1}{2} \int_0^\omega \sin^2 \omega \, d\omega \\ \text{etc.} &\dots \end{aligned} \right.$$

La pierre angulaire de la méthode consiste dans le fait que les données initiales du problème (Z_{AB}, L_A) suffisent à fournir :

- (1) $\sin Z_E = \sin Z_A \cos \varphi_A \rightarrow u^2 = e'^2 \cos^2 Z_E$
- (2) ω_A défini par exemple par $\sin \varphi = \sin \omega_A \cos Z_E$

Ces données suffisent pour calculer S_A , et par suite $S_B = S_A + \Delta S$. Il reste à inverser la formule ci-dessus, c'est-à-dire :

- connaissant $S = S_B$ et u^2
- calculer ω_B , qui intervient dans $\omega, I_2, I_4, I_6 \dots$

En pratique, on pose $\frac{S}{b \sin 1''} = \sigma$ et on postule l'existence du développement

$$\omega = \sigma - u^2 I'_2 + u^4 I'_4 - u^6 I'_6$$

dans lequel I'_2, I'_4, I'_6 sont des fonctions de σ .

(Voir Note sur le calcul des Grandes Géodésiques de MM. Levallois et Dupuy, Sect. V, pages 43 et 87.)

Par un processus d'approximations successives, on obtient (en désignant par t l'argument de I_2 et I'_2) :

$$\left\| \begin{aligned} I'_2 &= I_2 \\ I'_4 &= I_4 + \frac{\sin^2 t}{2} I_2 \\ I'_6 &= I_6 + \frac{\sin^2 t}{2} I'_4 + \frac{\sin^4 t}{8} I_4 + \frac{1}{2} \cos 2t (I_2)^4 \end{aligned} \right.$$

Ces tables—valables pour tous les ellipsoïdes—permettent de passer aussi facilement de σ à ω que les tables I permettent de passer de ω à σ .

Le calcul de $\Delta\omega$ s'effectue donc par le processus suivant :

$$\omega_A \xrightarrow{\text{(Tables I)}} \sigma_B = \sigma_A \xrightarrow{\frac{S}{b \sin 1''} \text{ (Tables I')}} \omega_B \xrightarrow{\quad} \Delta\omega = \omega_B - \omega_A$$

Quant à ϵ , il se calculera comme d'habitude par la formule:

$$\frac{\epsilon}{\sin \zeta_E} = B_0 \Delta\omega - B_2 u^2 \Delta I_2 + B_4 u^4 \Delta I^4$$

Calcul de $\Delta\omega$ en fonction de S , par développements limités

Il est naturellement tentant, pour des courtes géodésiques (et les calculs de faible précision) de remplacer le processus ci-dessus, qui fait appel à $(\omega_A - \omega_B)$, par un développement direct:

$$\Delta\omega = f(\Delta S, Z_A, \varphi_A)$$

Ce développement peut se concevoir de deux façons différentes:

—Calculer ω_A et u^2 et chercher un développement de $\Delta\omega$ à la fois en fonction de $\Delta\sigma$ et de u^2 :

$$\Delta\omega = \Delta\sigma \left(1 - u^2 \frac{\sin^2 \omega_A}{2} + \dots \right) + \Delta\sigma^2 f(u^2, \omega_A)$$

Ce procédé ne semble pas tellement économique par rapport à la méthode rigoureuse, puisqu'il oblige à calculer u^2 , ω_A

—Former le développement de Taylor rigoureux de $\Delta\omega$ en fonction de ΔS , en utilisant les données de base du problème:

$$a \frac{d\omega}{ds} = V \text{ (équation fondamentale)}$$

$$a \frac{d^2\omega}{ds^2} = \frac{dV}{dL} \frac{dL}{ds} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{dV}{dL} \right) \cos \zeta$$

$$a \frac{d^3\omega}{ds^3} = A(L_A) + B(L_A) \cos^2 \zeta_A \dots \text{etc.} \dots$$

On obtient un développement analogue à ceux de L , M , $\zeta \dots$, mais plus simple et plus efficace (la dérivée première étant ici lentement variable):

—Le calcul sphérique permet de calculer φ_A , ζ_{BA} et $\Delta M'$ avec précision

—Le calcul de $\epsilon = \Delta M' - \Delta M$ devient un point délicat de la méthode, car il n'est plus rentable de faire intervenir les intégrales de Wallis.

On pourra:

—Intégrer $\Delta M = \int \frac{dM'}{V}$ par formule des 3 niveaux

—Utiliser la relation $V_2 = V_1 + K \sin^2 L_m \Delta L^2$ $\left(V_1 = \frac{a\Delta\omega}{S} \right)$

—Ou encore calculer ϵ par le développement limité:

$$\epsilon = \Delta\omega \sin \zeta_E \left(B_0 - B_2 \frac{e'^2}{2} \sin^2 \varphi_m \right)$$

La deuxième méthode semble la mieux adaptée et la plus rapide.

CALCUL DE GRANDES GÉODÉSQUES

Le Calcul sphérique

On peut:

- soit calculer la position du point équatorial E , origine des élongations et ensuite calculer la position du point B par (ζ_E, ω_B)
- soit calculer $\Delta\omega$ et résoudre le triangle PAB par $(\zeta_B, \Delta\omega)$

En pratique :

En calcul électronique

On utilisera la première méthode, qui a l'avantage de bien sérier les questions.

Nécessité de travailler partout à 10 décimales.

Difficulté dans certains cas à définir E avec précision: cette indécision n'est pas grave si, E une fois défini, tous les éléments de la figure sont définis avec précision à partir de la position de ce point.

Calcul sphérique, à la machine à calculer de bureau, par la méthode générale par sphère paramétrique

On doit recourir au calcul de (ζ_E, ω_A) , et on calculera aussi le point B à partir du point E par (ζ_E, ω_B) ; toutefois, on utilise concurremment le triangle rectilatère PEB et le triangle PAB :

- Calcul de φ_B et ζ_B par (E, ζ_E, ω_B)
- Calcul de $\Delta M'$ par la relation des sinus dans PAB
- Calcul de $\Delta\varphi$ par $\sin \Delta\varphi = \sin \Delta\omega \frac{\cos \zeta_A + \cos \zeta_B}{1 + \cos \Delta M'}$

L'imprimé I.G.N. 2306 B.T. 1953 réalise ainsi le calcul précis de toute géodésique quelle que soit la longueur.

Calcul sphérique: méthode par calcul de $\Delta\omega$ par développement limité

Pour que le calcul soit rentable, il faut ici résoudre le triangle PAB (AB étant une longueur faible: $\Delta\omega < 5^\circ$), sans avoir recours au point équatorial E .

On préconise les processus suivants:

1ère méthode

— Calcul de ζ_B par $\cotg \zeta_B \sin \zeta_A = \cos \zeta_A \cos \Delta\omega - \tg \varphi_A \sin \Delta\omega$

Calcul de $\Delta M'$ par $\sin \Delta M' = \sin \Delta\omega \frac{\sin \zeta_B}{\cos \varphi_A}$

— Calcul de $\Delta\varphi$ par $\sin \Delta\varphi = \sin \Delta\omega \frac{\cos \zeta_A + \cos \zeta_B}{1 + \cos \Delta M'}$

2ème méthode

— Calcul (approché) de φ_B par $\sin \varphi_B = \cos \Delta\omega \sin \varphi_A + \sin \Delta\omega \cos \varphi_A \cos \zeta_A$

— Calcul de $\Delta M'$ par $\sin \Delta M' = \sin \Delta\omega \frac{\sin \zeta_A}{\cos \varphi_B}$

—Calcul de ζ_B par $\sin \Delta\zeta = \sin \Delta M' \frac{\sin \varphi_A + \sin \varphi_B}{1 + \cos \Delta\omega}$

—Calcul précis de φ_B par $\sin \Delta\varphi = \sin \Delta\omega \frac{\cos \zeta_A + \cos \zeta_B}{1 + \cos \Delta M'}$

CHOIX DES PROCÉDES DE CALCULS

Il ne nous est pas possible de faire ici la discussion des méthodes à utiliser, ni de reproduire l'imprimé 2306 B.T. 1953. Voici le choix de méthodes auquel nous sommes arrivés :

(A) *Très courtes géodésiques*

Méthode classique des Ingénieurs Géographes, à laquelle d'ailleurs on peut préférer dans tous les cas la méthode (B), peut-être plus longue parfois, mais plus claire.

(B) *Géodésiques jusqu'à 400 à 500 km*

Méthode de la sphère de courbure, en prenant une latitude L_0 origine *ronde* (grade exact, par exemple) (lecture directe de α , $R_0 \sin 1''$). Selon les cas (précision exigée, zone d'extension du calcul), cette latitude *ronde* sera voisine de $\frac{L_A + L_B}{2}$, ou de L_A , ou voisine du centre de la région des calculs.

Usage de tables de ψ en $f(L)$ pour des zones de 3^G de part et d'autre des latitudes rondes utilisées.

(B') Sphère paramétrique: méthode par V_1 et V_2

Semble un peu moins intéressante que la précédente

(C) *Grandes géodésiques*

Sphère paramétrique. Intégrales de Wallis
(Imprimé I.G.N. 2306 B.T. 1953)

(D) *Calculs électroniques*

Sphère paramétrique.

Nous reproduisons ci-après la méthode (B) combinée avec le calcul sphérique de la page 101 2°).

GRANDES GÉODÉSIQUES—PROBLÈME DIRECT
SPHÈRE DE COURBURE

Ellipsoïde International

<p><i>Données</i></p> <p>$L_A = 50^G 0000'' 000$ $MA = 0^G 0000'' 000$ $Z_A = 130^G 5037'' 073$ $S = 412.037^m 478$</p>	<p>Projection</p> <p>$L_0 = 50^G$ $\alpha = 1,0008 45664$ $R_0 \sin I' = 10,0190 9131$</p>	<p>$\psi_A = 49^G 9462'' 316$ $\Delta\omega = \frac{S}{R_0 \sin I'}$ $\Delta\omega = 4^G 1125'' 2343$</p>
<p>$\sin \Delta\omega = 0,06455 444466$ $\cos \Delta\omega = 0,99791 418$</p>	<p>$\sin Z_A = 0,8873 8660$ $\cos Z_A = -0,4610 2605$ $\cos \psi_A \cos Z_A = -0,3262 6986$</p>	<p>$\sin \psi_A = 0,7065 0931$ $\cos \psi_A = 0,7077 0874$</p>
<p>$\sin \psi_A \cos Z_A \sin \Delta\omega = -0,0210 6217$ $\cos \psi_A \cos Z_A \sin \Delta\omega = -0,0210 6217$ $\sin \psi_B = 0,6839 7349$</p>	<p>$\sin \psi_A \cos Z_A \sin \Delta\omega = -0,0210 6217$ $\cos \psi_B = 0,7295 0686$</p>	<p>$\psi_B = 47^G 9499'' 241$</p>
<p>$\sin \Delta M' \sin \Delta\omega \frac{\sin Z_A}{\cos \psi_B}$ $\sin \Delta M' = 0,0785 253080$</p>	<p>$\rho' = \frac{\sin \psi_A + \sin \psi_B}{1 + \cos \Delta\omega}$ $\rho' = 0,6959 6723$</p>	<p>$\Delta Z = 3^G 4809'' 276$ $Z_A = 130^G 5037'' 073$</p>
<p>$\Delta M' = 5^G 0042'' 282$ $\cos \Delta M' = 0,9969 1212$</p>	<p>$\sin \Delta Z = \rho' \sin \Delta M'$ $\sin \Delta Z = 0,0546 510409$</p>	<p>$Z_B = 133^G 9846'' 349$ $\cos Z_B = -0,5088 3365$</p>
<p>$\rho = \frac{\cos Z_A + \cos Z_B}{1 + \cos \Delta M'}$ $\rho = 0,4856 7971$ $\sin \Delta\psi = \rho \sin \Delta\omega$ $\sin \Delta\psi = 0,0313 527849$</p>	<p>$\Delta\psi = 1^G 9963'' 074$ $\psi_A = 49^G 9462'' 316$ $\psi_B = 47^G 9499'' 242$</p>	<p>$\Delta M = \frac{\Delta M'}{\alpha} = 5^G 0000'' 000$ $MA = 0^G 0000'' 000$</p>
<p>Résultats</p>	<p>$Z_{BA} = 333^G 9846'' 349$ (273) $L_B = 48^G 0000'' 000$</p>	<p>$M_B = 5^G 0000'' 000$</p>

X—SOMMAIRE

Dans ce chapitre, nous avons été amenés à reprendre tous les chapitres précédents, dans le sens d'une amélioration des méthodes, leur mise sous forme la plus utilisable, mais en même temps en s'orientant vers des choix plus définitifs et plus catégoriques. Voici le sommaire des questions traitées:

Sections I et II (sphère paramétrique)

(a) Il est possible de prévoir la variation du terme ϵ (augment des longitudes) après un seul calcul sphérique, ce qui permet:

- 1—d'abrèger les itérations
- 2—de rendre le processus convergent même pour 2 points voisins de positions antipodes.

La méthode de la sphère paramétrique devient ainsi d'une précision absolue pour toute longueur de géodésique.

(b) Par contre, cette méthode pourra pratiquement être abandonnée pour les courtes géodésiques ($D < 1000$ km) au profit de méthodes plus rapides (sphère de courbure en particulier). Pour les distances supérieures à 1000 km, le calcul de ϵ par $\epsilon = B_0 \Delta \omega \sin Z_B$ sera pratiquement suffisant dans la généralité des cas.

Section III (sphère conforme)

La méthode par les intégrales peut être sensiblement simplifiée pour le calcul des azimuts si l'on désire une précision limitée.

La méthode de la sphère conforme reste très recommandée pour traiter des problèmes importants de calcul, du fait qu'elle réalise une représentation biunivoque de l'ellipsoïde.

Section IV (sphère de courbure)

(a) Pour les courtes géodésiques ($D < 1000$ km) la méthode peut être considérée comme la plus rapide puisqu'elle se ramène immédiatement à un calcul sphérique, moyennant l'établissement préalable de tables locales $\psi(L)$.

(b) La méthode de la sphère trisécante (M. Clos-Arceuduc) est particulièrement intéressante dans les mêmes conditions, car elle donne une zone de précision en latitude plus étendue que la sphère de courbure.

Les deux méthodes procèdent exactement des mêmes méthodes de calcul:

—Etablissement de tables $\psi(L)$ de latitudes conformes en fonction de la latitude ordinaire (tables très faciles à établir à partir de celles des méridiennes).

—Utilisation des mêmes imprimés de calcul:

- Latitudes ψ_A, ψ_B interpolées dans les tables $\psi(L)$
- Longitudes multipliées par un coefficient constant
- Calcul sphérique

CALCUL DE GRANDES GÉODÉSIQUES

Section V (sphère circonscrite à la latitude moyenne)

Section VI (sphère des normales)

Quelques développements complémentaires sur ces 2 chapitres.

Section VII: Problème sphérique

Des améliorations et simplifications importantes sont apportées dans ce domaine.

—*La formule fondamentale* (calcul de $\Delta\omega$ par $\cos \Delta\omega$) est abandonnée pour les courtes géodésiques ($D < 1000$ km), ce qui permet de lui donner une forme standardisée plus simple et toujours d'une précision suffisante dans le domaine qui lui est laissé ($1000 \text{ km} < D < 19.000 \text{ km}$).

—Les formules de Néper sont abandonnées au profit des formules voisines, mais bien plus intéressantes, de *Delambre*:

ψ_A, ψ_B latitudes

M'_A, M'_B longitudes

$$\psi_m = \frac{\psi_A + \psi_B}{2}$$

$$\frac{\Delta\psi}{2} = \frac{\psi_B - \psi_A}{2} \qquad \frac{\Delta M'}{2} = \frac{M'_B - M'_A}{2}$$

$\Delta\omega$ = distance sphérique

\mathcal{Z}_A et \mathcal{Z}_B : azimuts

$$\left| \begin{array}{l} P = \sin \frac{\Delta M'}{2} \cos \psi_m = \sin \frac{\Delta\omega}{2} \sin \mathcal{Z}_m \\ Q = \cos \frac{\Delta M'}{2} \sin \frac{\Delta\psi}{2} = \sin \frac{\Delta\omega}{2} \cos \mathcal{Z}_m \\ R = \sin \frac{\Delta M'}{2} \sin \psi_m = \cos \frac{\Delta\omega}{2} \sin \frac{\Delta\mathcal{Z}}{2} \\ S = \cos \frac{\Delta M'}{2} \cos \frac{\Delta\psi}{2} = \cos \frac{\Delta\omega}{2} \cos \frac{\Delta\mathcal{Z}}{2} \end{array} \right.$$

Calcul des azimuts

$$\operatorname{tg} \mathcal{Z}_m = \frac{P}{Q}$$

(Néper)

$$\operatorname{tg} \frac{\Delta\mathcal{Z}}{2} = \frac{R}{S}$$

Calcul des distances

$$\begin{array}{ccc} \text{(a)} & \text{(b)} & \text{(c)} \\ \sin \frac{\Delta\omega}{2} = \frac{P}{\sin \zeta_m} = \frac{Q}{\cos \zeta_m} = P \sin \zeta_m Q \cos \zeta_m & & \end{array} \quad \text{(I)}$$

$$\cos \frac{\Delta\omega}{2} = \frac{R}{\sin \frac{\Delta\zeta}{2}} = \frac{S}{\cos \frac{\Delta\zeta}{2}} = R \sin \frac{\Delta\zeta}{2} + S \cos \frac{\Delta\zeta}{2} \quad \text{(II)}$$

Les formules (c) constituent les formules barycentriques les plus précises des formules (a) et (b).

Note: Pour les distances, on peut aussi adopter:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{\Delta\omega}{2} = \sqrt{P^2 + Q^2} \\ \cos \frac{\Delta\omega}{2} = \sqrt{R^2 + S^2} \end{array} \right.$$

Le groupe de formules ci-dessus résout le problème sphérique de façon rapide, sans aucune perte de précision, *dans tous le cas de figure*. Malheureusement, les calculs complémentaires obligent à revenir aux lignes trigonométriques de ($\psi_A, \psi_B, \zeta_A, \zeta_B$). Mais ces formules restent particulièrement intéressantes:

—dans le cas de courtes géodésiques (sans calculs complémentaires).

$\Delta\omega$ sera alors calculé d'après (I):

$$\sin \frac{\Delta\omega}{2} = P \sin \zeta_m + Q \cos \zeta_m$$

—dans les calculs généraux de grande précision, et en particulier dans les calculs électroniques.

Section VIII

L'ensemble des améliorations effectuées aux diverses méthodes permet de restreindre sensiblement le choix des méthodes de travail:

$$\text{Calcul sphérique} \left\{ \begin{array}{l} \text{Formules de Delambre—distances par } \sin \frac{\Delta\omega}{2} \text{ (courtes géodésiques)} \\ \text{Formules de Delambre—calculs complémentaires distances par } \left\{ \begin{array}{l} \sin \Delta\omega/2 \\ \text{ou } \cos \Delta\omega/2 \end{array} \right. \\ \text{Formules de Neper modifiées. Imprimé 2304 B.T. 1953 (p. 108)} \\ \text{Formule fondamentale—Distance par } \cos \Delta\omega \text{ (1000 < } D < 19\,000 \text{ km)}$$

CALCUL DE GRANDES GÉODÉSIQUES

Passage de l'ellipsoïde à la sphère

- | | |
|--|---|
| { | Sphère de courbure—sphère trisécante ($D < 1000$ km) |
| | (Tables locales de latitudes) |
| | Sphère conforme { Corrections par 3 niveaux |
| | Intégrales |
| Sphère des normales (distances seulement) | |
| Sphère paramétrique ($D > 1000$ km): distances et azimuts | |

(La délimitation 1000 km entre courtes et longues géodésiques est en fait extrêmement élastique, chacun des deux domaines chevauchant largement sur l'autre . . .)

Par suite, les méthodes de travail conseillées deviennent les suivantes:

- | | | |
|---------------|---|---|
| $D < 1000$ km | { | Formules par projections planes |
| | | Formules par développements limités |
| | | Sphère de courbure + formules de Delambre |
| | | Sphère trisécante + formules de Delambre |
| $D > 1000$ km | { | Sphère conforme + formules de Néper modifiées—Corrections par 3 niveaux |
| | | Sphère conforme + formule fondamentale + intégrales
(→15 000 km) |
| | | Sphère des normales + formule fondamentale + formule barycentrique (calcul exclusif des distances) (→15 000 km) |
| | | Sphère paramétrique + formule fondamentale (→19 000 km) |

Voir page 108 un exemple de calcul par la méthode de Delambre associée à la sphère de courbure.

Section IX

Sans modification importante: les méthodes par *sphères de courbure* et *sphères trisécantes* sont les plus recommandées ($D < 1000$ km), en plus de la *sphère paramétrique* dans le cas général.

GRANDES GÉODÉSIQUES—PROBLÈME INVERSE
SPHÈRE DE COURBURE

Ellipsoïde International

<p><i>Données:</i> $M_A = +0^{\circ} 0000'' 000$ $M_B = +5. 0000, 000$ $\Delta M = +5. 0000, 000$ (B à l'est de A)</p>	<p>Projection: $L_0 = 50^{\circ} 0$ $\alpha = 0,50042 2832$ $2R_0 \sin 1'' = 20,03818 263$</p>	<p>$L_A = +50^{\circ} 0000'' 000$ $L_B = +48. 0000, 000$ $\psi_A = +49,9462,316$ $\psi_B = +47,9499,242$</p>	<p>$\frac{\Delta M'}{2} = \frac{\alpha}{2} \Delta M = 2^{\circ} 5021'' 1420$ $\sin \frac{\Delta M'}{2} = 0,03929 29999$ $\cos \frac{\Delta M'}{2} = 0,99982 2773$</p>	<p>$\frac{\Delta \psi}{2} = \frac{\psi_B - \psi_A}{2} = -0^{\circ} 9981'' 5370$ $\sin \frac{\Delta \psi}{2} = -0,01567 83188$ $\cos \frac{\Delta \psi}{2} = \dots 0,99998 7709$</p>
<p>$P = \sin \frac{\Delta M'}{2} \cos \psi_m = 0,0282396287$ $Q = \cos \frac{\Delta M'}{2} \sin \frac{\Delta \psi}{2} = 0,0156662109$ $R = \sin \frac{\Delta M'}{2} \sin \psi_m = 0,02732148$ $S = \cos \frac{\Delta M'}{2} \cos \frac{\Delta \psi}{2} = 0,99910491$</p>	<p>$\psi_m = \frac{\psi_A + \psi_B}{2} = 48^{\circ} 9480'' 7790$ $\sin \psi_m = 0,6953 2687$ $\cos \psi_m = 0,7186 9363$</p>	<p>$\frac{\Delta \psi}{2} = \frac{\psi_A + \psi_B}{2} = 48^{\circ} 9480'' 7790$ $\sin \psi_m = 0,6953 2687$ $\cos \psi_m = 0,7186 9363$</p>	<p>$\frac{\Delta \psi}{2} = \frac{\psi_B - \psi_A}{2} = -0^{\circ} 9981'' 5370$ $\sin \frac{\Delta \psi}{2} = -0,01567 83188$ $\cos \frac{\Delta \psi}{2} = \dots 0,99998 7709$</p>	<p>$\frac{\Delta \psi}{2} = \frac{\psi_B - \psi_A}{2} = -0^{\circ} 9981'' 5370$ $\sin \frac{\Delta \psi}{2} = -0,01567 83188$ $\cos \frac{\Delta \psi}{2} = \dots 0,99998 7709$</p>
<p>$\sin \zeta_m = +0,8744 5252$ $\cos \zeta_m = -0,4851 1111$</p>	<p>$\frac{P}{Q} \zeta_m = \frac{P}{Q} = -1,8025 8191$ $\frac{\Delta Z}{2} = \frac{R}{S} = 0,0273 4596$ (ou $\frac{\Delta Z}{2} = \frac{\Delta M'}{2} \sin \psi_m$)</p>	<p>$\frac{P}{Q} \zeta_m = \frac{P}{Q} = -1,8025 8191$ $\frac{\Delta Z}{2} = \frac{R}{S} = 0,0273 4596$ (ou $\frac{\Delta Z}{2} = \frac{\Delta M'}{2} \sin \psi_m$)</p>	<p>$\zeta_m = 132^{\circ} 2441'' 694$ $\frac{\Delta \zeta}{2} = 1^{\circ} 7404,638$ $\zeta_A = 130^{\circ} 5037'' 056$ $\zeta_B = 133^{\circ} 9846'' 332$</p>	<p>$\zeta_m = 132^{\circ} 2441'' 694$ $\frac{\Delta \zeta}{2} = 1^{\circ} 7404,638$ $\zeta_A = 130^{\circ} 5037'' 056$ $\zeta_B = 133^{\circ} 9846'' 332$</p>
<p>$\sin \frac{\Delta \omega}{2} = +0,8744 5252$ $\cos \zeta_m = -0,4851 1111$</p>	<p>$\sin \frac{\Delta \omega}{2} = P \sin \zeta_m + Q \cos \zeta_m = 0,03229 40674$ $\frac{\Delta \psi}{2} = \dots 2^{\circ} 0562'' 6171$</p>	<p>$\sin \frac{\Delta \omega}{2} = P \sin \zeta_m + Q \cos \zeta_m = 0,03229 40674$ $\frac{\Delta \psi}{2} = \dots 2^{\circ} 0562'' 6171$</p>	<p>$S = (2R_0 \sin 1'') \times \frac{\Delta \omega}{2} = 412037'' 475$</p>	<p>$S = (2R_0 \sin 1'') \times \frac{\Delta \omega}{2} = 412037'' 475$</p>
<p><i>Vérifications:</i> Contrôles partiels: Contrôle du Calcul sphérique: $\frac{\sin \Delta M'}{\sin \Delta \omega} = \frac{\sin \zeta_A}{\cos \psi_B} = \frac{\sin \zeta_B}{\cos \psi_A}$ $\left\{ \begin{matrix} 1,2164 1987 \\ 1,2164 1985 \\ 1,2164 1983 \end{matrix} \right.$ Vérification complète: adopter une autre méthode de calcul, absolument indépendante. Calculs restreints Calcul exclusif de la distance: ne calculer que P et Q puis sortir $\sin \frac{\Delta \omega}{2} = \sqrt{P^2 + Q^2}$, soit par $\sin \frac{\Delta \omega}{2} = P \sin \zeta_m + Q \cos \zeta_m$, en prenant pour ζ_m la valeur roudé de la table la plus voisine (la précision sur la distance reste excellente). Calcul de la distance et calcul expédité des azimuts: Prendre ζ_m arrondi, et $\frac{\Delta \zeta}{2}$ fourni par $\frac{\Delta \zeta}{2} = \frac{\Delta M'}{2} \sin \psi_m$.</p>				