LA COORDINATION DES SYSTÈMES GÉODÉSIQUES

Calcul et compensation des grandes triangulations en prenant en considération la forme du géoide

(Communication présentée à Rome à la Commission d'études n° 1)

ANTONIO MARUSSI, Università di Trieste

1. Le but extrème que l'on pourrait se proposer dans le problème de la coordination des systèmes géodésiques, serait celui d'établir sur la surface de la Terre (géoide) un système de coordonnées tel que:

(a) les coordonnées soient absolues, c'est à dire indépendantes de toute surface conventionnelle de référence, et directement mesurables (telles sont les coordonnées astronomiques, latitude et longitude);

(b) les coordonnées soient douées d'une métrique telle qu'il soit possible de calculer, à partir de ces coordonnées, toute relation métrique linéaire ou angulaire entre deux ou plusieurs points; p. ex. distances géodésiques, angles entre géodésiques, etc.

Ce but serait obtenu en donnant en tout point le tenseur métrique correspondant, et par conséquent les coefficients de connexion (symboles de Christoffel).

Un pareil système donnerait donc, en théorie, complète satisfaction soit au navigateur employant les méthodes classiques de la navigation astronomique, soit au géodésien, au cartographe, au militaire, qui seraient à même de calculer toute relation métrique entre les points de la surface de la Terre. Mais, comme la variation du tenseur métrique ainsi déterminé serait très rapide et irregulière, on devrait être pourvu de tables si lourdes et l'on devrait exécuter des calculs si compliqués pour résoudre les problèmes même les plus élémentaires, que la méthode ne serait guère appliquable en pratique. Il faut aussi observer que la représentation de la surface sur le plan d'une carte donnerait lieu à des difficultés semblables, si l'on voulait qu'elle satisfasse à des conditions de simplicité pratique en ce qui concerne les relations métriques.

Il faut donc se servir d'un système de coordonnées admettant un tenseur métrique aussi simple que possible, que l'on puisse déterminer en fonction d'un nombre aussi limité que possible de paramètres: tel est le cas du tenseur métrique de l'ellipsoide en coordonnées géographiques, qui dépend de deux paramètre fonctions d'un seulement. Mais on sait les inconvenients auxquels on se heurte alors: il faut d'abord renoncer à employer les coordonnées naturelles, si utiles au navigateur, et il faut établir une correspondance conventionnelle entre le géoide et un ellipsoide arbitrairement choisi, telle que les propriétés métriques des figures sur le géoide soient conservées autant que possible.

Une manière simple d'obtenir un tel résultat consiste, comme on le sait, a projeter les points du géoide sur l'ellipsoide de référence, p. ex. le long des normales à l'ellipsoide lui même; on établit de cette façon une correspondance entre les points du géoide et les coordonnées géographiques sur l'ellipsoide: en appliquant alors la métrique de l'ellipsoide aux coordonnées géographiques ainsi obtenues, on a les relations métriques pour les figures projetées sur l'ellipsoide, et non celles des figures originales tracées sur le géoide.

Des études ont été effectués en ce sens (voir bibliographie), en référant toutefois la surface du géoide à ses coordonnées naturelles: les coordonnées astronomiques. Nous chercherons dans la communication présente à établir les formules fondamentales pour la même étude, en utilisant les coordonnées géographiques ellipsoidales.

2. Dans une note plus complète qui va suivre, nous avons calculé tous les éléments qui peuvent intéresser l'établissement d'une correspondance par projection normale entre géoide et ellipsoide; ici nous donnerons seulement, sans justification, les résultats essentiels.

Soient ρ et ν rayon de courbure du méridien et la grande normale de l'ellipsoide; φ et λ les coordonnées géographiques ellipsoidales;

$$ds_1^2 = \rho^2 d\varphi^2 + \nu^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2$$

donne donc le carré du déplacement élémentaire de la projection sur l'ellipsoide de P, point sur le géoide, et définit ainsi la métrique pour toute figure projetée sur l'ellipsoide. On a pour les symboles de Christoffel de II$^{\text{ème}}$ espèce relatifs à cette métrique:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 11 \end{Bmatrix}_1 = \frac{d \log \rho}{d\varphi}; \quad \begin{Bmatrix} 1 \\ 22 \end{Bmatrix}_1 = \frac{\nu}{\rho} \sin \varphi \cos \varphi; \quad \begin{Bmatrix} 2 \\ 12 \end{Bmatrix}_1 = -\frac{\rho}{\nu} \tan \varphi;$$

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 12 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 11 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 22 \end{Bmatrix}_1 = 0$$

Le carré du déplacement élémentaire du point P sur le géoide est donné d'ailleurs en toute rigueur par

$$ds^2 = [(\rho+N)^2+N_\varphi^2]\, d\varphi^2+2N_\varphi N_\lambda d\varphi d\lambda+[(\nu+N)^2 \cos^2 \varphi+N_\lambda^2]d\lambda^2$$

où N est l'élévation du géoide sur l'ellipsoide, $N_\varphi = \dfrac{\partial N}{\partial \varphi}$, $N_\lambda = \dfrac{\partial N}{\partial \lambda}$; avec très grande approximation on aura aussi

$$ds^2 = \rho(\rho+2N)\, d\varphi^2+2N_\varphi N_\lambda d\varphi d\lambda+\nu\,(\nu+2N) \cos^2 \varphi d\lambda^2;$$

le module de déformation $m = ds/ds_1$ sera donc donné par

$$m^2 = 1+\frac{2N}{\rho_d}+\frac{N_\varphi N_\lambda}{\rho\nu \cos \varphi} \sin 2\alpha$$

où α est l'azimut sur l'ellipsoide, ρ_d étant le rayon de courbure de l'ellipsoide de référence dans cet azimut.

Comme on devait l'attendre, dans l'expression du carré du déplacement sur le géoide, ou bien dans celle du module de déformation, figure la hauteur N du géoide sur l'ellipsoide; tandis que nous verrons que les coefficients de connexion (symboles de Christoffel) ne dépendent que des dérivées de N, c'est à dire des déviations de la verticale.

Introduisons donc les déviations de la verticale:

$$\xi = \varphi_{astr.} - \varphi_{géod.};\ \eta = (\lambda_{astr.} - \lambda_{géod.}) \cos\varphi;$$

on a immédiatement

$$\xi = -\frac{N_\varphi}{\rho};\ \eta = -\frac{N_\lambda}{\nu\cos\varphi}.$$

N_φ et N_λ sont les composantes covariantes de grad N; on a donc

$$\frac{\partial N_\varphi}{\partial\lambda} = \frac{\partial N_\lambda}{\partial\varphi}$$

et par conséquent

$$\frac{\partial\rho\xi}{\partial\lambda} = \frac{\partial\nu\eta\cos\varphi}{\partial\varphi}$$

que l'on peut écrire aussi

$$\frac{\partial\eta}{\rho\partial\varphi} - \frac{\partial\xi}{\nu\cos\varphi\partial\lambda} = \frac{\eta}{\nu}\tan\varphi.$$

C'est la condition d'intégrabilité, dite aussi condition de Villarceau, à la quelle doivent satisfaire les dérivées des déviations pour l'existance de la surface du géoide.

On trouve aussi que la courbure moyenne $\mathscr{H}$ du géoide diffère de celle $\mathscr{H}_1$ de l'ellipsoide de la quantité $\Delta_2 N = \text{div grad } N$; donc

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 - \Delta_2 N$$

et si l'on tien compte de la formule de Bruns, on a la relation très importante, vérifiée avec une très haute approximation

$$\mathscr{H}_1 - \mathscr{H} = \Delta_2 N = \frac{\partial}{\partial n}\log\frac{g}{\gamma}$$

ou g est l'intensité de la pesanteur sur le géoide, γ l'intensité sur l'ellipsoide; $\frac{\partial}{\partial n}$ représente la dérivée normale (à l'une ou l'autre des deux surfaces).

On a pareillement, en fonction des déviations de la verticale

$$\Delta_2 N = \frac{\xi}{\nu}\tan\varphi - \frac{\partial\xi}{\rho\partial\varphi} - \frac{\partial\eta}{\nu\cos\varphi\partial\lambda}.$$

Les symboles de Christoffel de deuxième espèce se calculent aisément; ils sont en première approximation

$$\left\{\begin{matrix}1\\11\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1\\11\end{matrix}\right\}_1 - \xi;\ \left\{\begin{matrix}1\\12\end{matrix}\right\} = -\eta\frac{\nu\cos\varphi}{\rho};\ \left\{\begin{matrix}1\\22\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1\\22\end{matrix}\right\}_1;$$

$$\left\{\begin{matrix}2\\11\end{matrix}\right\} = \frac{\rho\eta}{\nu\cos\varphi};\ \left\{\begin{matrix}2\\12\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}2\\12\end{matrix}\right\}_1 - \frac{\rho\xi}{\nu};\ \left\{\begin{matrix}2\\22\end{matrix}\right\} = -\eta\cos\varphi.$$

3. La connexion étant ainsi établie, l'équation d'une ligne (en particulier d'une géodésique) sur le géoide peut s'écrire immédiatement; les développements de Legendre généralisés (voir référence en bibliographie) permettront alors de calculer les coordonnées géographiques ellipsoidales tout en développant le réseau de triangulation sur le géoide.

On a montré dans une Note parue sur les Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, comme la différence entre les symboles de Christoffel — qui est un tenseur que nous appelerons T^j_{pq} — permet de déterminer immédiatement l'altération de la courbure géodésique d'une courbe quelconque dans la correspondance entre ellipsoide et géoide; en particulier donc la courbure tangentielle de la transformée géoidique d'une géodésique ellipsoidale.

Si nous indiquons par γ_{pqr} la partie symmétrique du tenseur $\varepsilon_{rj}\, T^j_{pq}$ (ε_{rj} est le tenseur de Ricci de l'ellipsoide en coordonnées géographiques) on a pour la courbure géodésique γ de la transformée d'une courbe ellipsoidale de courbure géodésique γ_1:

$$\gamma = \frac{S}{m_t^3}(\gamma_1 + \gamma_{pqr}\lambda^p\lambda^q\lambda^r)$$

ou S est le module de déformation aréale (dans notre cas approximativement $S = 1 + \frac{2N}{\rho}$), m_t le module de déformation dans la direction de la courbe considérée, et $\lambda^1 = d\varphi/ds_1$, $\lambda^2 = d\lambda/ds_1$ sont le coefficients de direction de la tangente à la courbe donnée. Dans notre approximation on a

$$\gamma_{111} = \rho\nu\eta;\ \gamma_{112} = \gamma_{121} = \gamma_{211} = -\frac{\rho\nu\xi \cos\varphi}{3}$$

$$\gamma_{222} = 0;\ \gamma_{122} = \gamma_{212} = \gamma_{221} = \frac{\rho\nu\eta \cos\varphi}{3}.$$

BIBLIOGRAPHIE

BESSEL, W. Ueber den Einfluss der Unregelmässigkeiten der Figur der Erde auf geodätische Arbeiten. *Bessel's Abhandlungen herausgegeben von R. Hengelmann, vol. III.*

PUCCI, E. Sulle formule fondamentali della Geodesia geoidica. *Ann. Mat. pura appl.*, 1886.

POINCARE, H. Sur les déviations de la verticale en Géodésie—*Bulletin Astronomique*, 1901.

MINEO, C. Sulle formule fondamentali per il confronto della superficie geòidica con l'ellissoide besseliano. *G. Mat.*, 49 (1911).

MINEO, C. Sulla geometria d'una superficie poco differente da un ellissoide con applicazione al caso della Terra. *Ann. Mat. pura appl.*, serie IV, tomo XIV, 1935–36.

MARUSSI, A. Sviluppi di Legendre generalizzati per una curva qualunque tracciata su di una superficie pure qualunque. *R.C. Accad. Lincei.* serie VIII, vol. VIII, fasc. 4, 1950.

MARUSSI, A. Sulla curvatura tangenziale delle trasformate di curve nelle rappresentazioni affini fra superfici *R.C. Accad. Lincei.* serie VIII, vol. XVI, fasc. 4, 1954.