

J. J. LEVALLOIS
 Inspecteur général géographe
 Institut Géographique National

SUR LA FREQUENCE DES MESURES DE PESANTEUR
DANS LES NIVELLEMENTS

Bien que cette question ait été abordée fréquemment, notamment par le Professeur Ramsayer dans un article récent "Die Genauigkeit der Schwerereduktion von Nivellements" (Zeitschrift für Vermessungswesen - Avril 1960) il nous a paru que la question pourrait être étudiée sous un aspect assez différent qui ne semble pas jusqu'ici avoir été abordé.

D'ordinaire, la cote géopotentielle $W = \int_A^B g dz$ est calculée par la sommation $\Sigma g_i \Delta z$ ou plus exactement par l'opération $\Sigma \frac{g_i + g_{i+1}}{2} \Delta z$; Δz étant la dénivelée mesurée le long du cheminement considéré. Cette opération est parfaitement légitime tant que la variation de g en fonction z est linéaire - tous les auteurs sont parfaitement d'accord à ce sujet.

Bien que ce soit évident démontrons le à nouveau :

L'expression $\int_1^2 g dz$ où $g = g_0 + az$ donne par intégration

$$\begin{aligned} \int_1^2 (g_0 + az) dz &= g_0 (z_2 - z_1) + \frac{a}{2} (z_2^2 - z_1^2) \\ &= (z_2 - z_1) \left[g_0 + \frac{a}{2} (z_2 + z_1) \right] \\ &= \left(\frac{g_1 + g_2}{2} \right) (z_2 - z_1) \end{aligned}$$

Tant que la pesanteur varie linéairement en fonction de l'altitude, dans un domaine donné, l'expression rigoureuse de la cote géopotentielle est donc

$$W_2 - W_1 = \frac{g_1 + g_2}{2} \cdot \Delta z$$

et ce résultat est tout à fait classique.

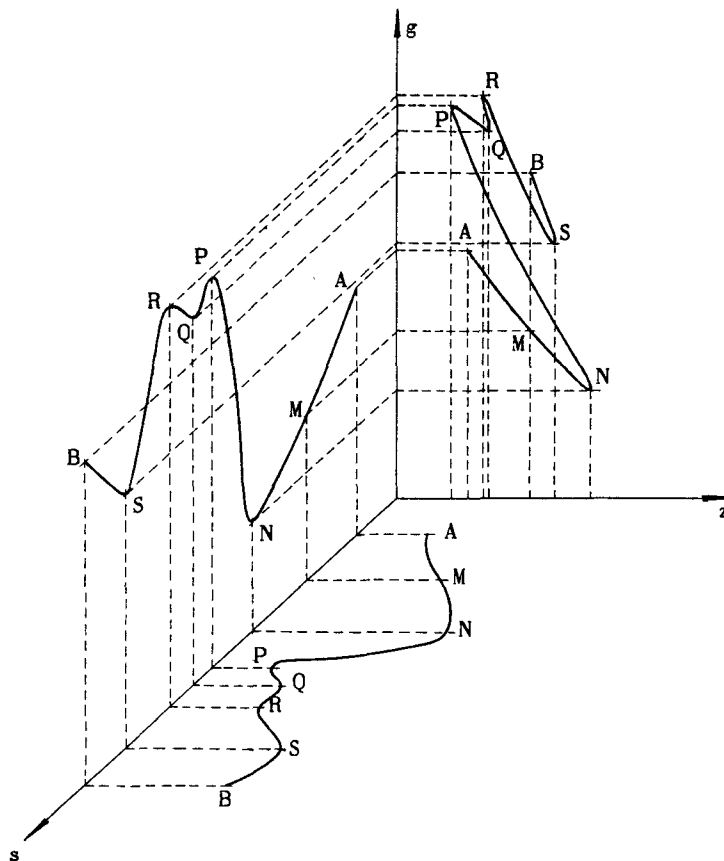
Pour déterminer les limites numériques à l'intérieur desquelles on peut continuer à l'appliquer même lorsque la variation de g n'est plus liée linéairement à l'altitude, nous serons amenés à appliquer la méthode générale d'Euler - Mac Laurin, mais nous devons toutefois définir auparavant un élément caractéristique du calcul de l'intégrale $\int g dz$.

Diagramme géopotentiel

Considérons une traverse de nivellement correspondant à un itinéraire donné. Supposons que l'on mesure en chaque point de ce nivellement la pesanteur g et la dénivelée. Nous noterons la somme des dénivelées $\Sigma dz_i = z$. C'est une fonction de l'abscisse curviligne s de l'opérateur comptée le long du cheminement, ainsi que g , et l'on peut dire que $z = z(s)$ $g = g(s)$, d'où par élimination de s entre g et z on obtient une relation $F(g, z) = 0$.

Faisons la représentation graphique suivante : considérons 3 axes de coordonnées rectangulaires sur lesquels nous représenterons le point courant par

- son abscisse curviligne s comptée à partir de l'origine du nivellement A;
- son altitude brute z obtenue en totalisant sur le carnet les dénivelées successives $z = \Sigma dz_i$;
- la valeur correspondante observée de g .



MESURES DE PESANTEUR DANS LES NIVELLEMENTS

Nous appellerons diagramme géopotentiel, la représentation tridimensionnelle ainsi obtenue.

La représentation sur le plan (s, z) n'est autre que le profil en long du terrain parcouru.

La représentation sur le plan (s, g) donne la variation de g en fonction de s, c'est le profil en long de la variation de g tout le long du cheminement.

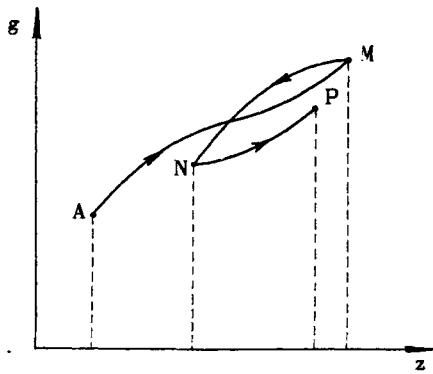
La représentation sur le plan (g, z) n'est autre que la courbe $F(g, z) = 0$.

Il est évident que si l'on considère l'expression

$$\int_A^M g(z) dz$$

la cote géopotentielle du point M par rapport à A, est précisément l'aire de la courbe considérée.

Le diagramme géopotentiel (g, z) est constitué par un certain nombre d'arcs dont le sens de parcours est parfaitement déterminé par celui de la progression sur le profil en long. Supposons par exemple



que le profil en long soit descendant entre A et M; la valeur de g ira croissant d'une manière générale. Ce sera l'inverse si le terrain monte. Le diagramme (s, z) sera donc constitué par une série d'arcs A M N P ... dont les brisures correspondront en général aux points hauts et bas. Ces brisures constitueront soit de véritables discontinuités dans la pente de la courbe, (points anguleux), soit des points de rebroussement, soit des variations continues mais très rapides de la courbure; entre deux

brisures la variation de g sera en général monotone c'est-à-dire soit toujours croissante, soit toujours décroissante. La pente du diagramme géopotentiel est en effet donnée par l'expression $\frac{dg}{dz}$. Contrairement à

ce que l'on pourrait croire cette pente n'est pas égale au gradient vertical de la pesanteur $\frac{\delta g}{\delta z}$, dérivée partielle de la pesanteur par rapport à l'altitude en un point donné, g est fonction sur l'itinéraire considéré de s et de z par conséquent

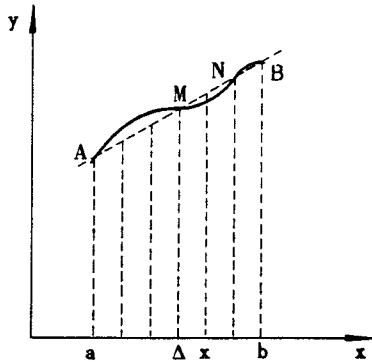
$$dg = \frac{\delta g}{\delta z} \cdot dz + \frac{\delta g}{\delta s} \cdot ds$$

$$\frac{dg}{dz} = \frac{\delta g}{\delta z} + \frac{\delta g}{\delta s} \cdot \frac{ds}{dz}$$

$$\boxed{\frac{dg}{dz} = \frac{\delta g}{\delta z} + \frac{\delta g}{\delta s} \cotg i}$$

Lorsque la pente est nulle $\frac{dg}{dz}$ peut donc être infini ce qui signifie que dans le diagramme géopotentiel, pour z constant g varie selon les exigences de l'itinéraire (influence différentielle du relief et variation de g en fonction des coordonnées géographiques) et le point figuratif se déplace suivant une ordonnée. Cette variation sera en général assez faible.

Méthode d'Euler - Mac Laurin : nous rappelons qu'elle consiste en



ceci : étant donnée une fonction continue dans un intervalle a, b , on se propose de calculer l'aire $\int_A^B y dx$ en utilisant la méthode des trapèzes. Soit Δx la base de l'un d'entre eux, on évalue l'intégrale définie par l'expression

$$\sum_A^B \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \cdot \Delta x$$

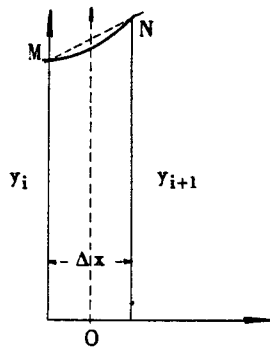
Nous nous proposons d'évaluer l'erreur de cette expression.

Considérons l'un des trapèzes de l'ensemble, on désire évaluer l'expression

$$\epsilon_i = \int_M^N y dx - \int_M^N Y dx = \int_M^N (y - Y) dx$$

où Y est la fonction linéaire représentant la corde MN dans l'intervalle Δx ; aux deux extrémités de l'intervalle on a par hypothèse

$$y_i = Y_i \quad y_{i+1} = Y_{i+1}$$



et l'on sait que $\int_M^N Y dx = \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \cdot \Delta x$

Ramenons l'origine des coordonnées au point 0, milieu de l'intervalle Δx et posons $\Delta x = 2l$ d'où

$\epsilon_i = \int_{-1}^{+1} (y - Y) dx$ et par une intégration par parties on peut écrire

$$\epsilon_i = [(y - Y) x]_{-1}^{+1} - \int \frac{d(y - Y)}{dx} \cdot x dx$$

Le terme entre crochets est nul puisque $y = Y$ aux 2 extrémités, donc

$$\epsilon_i = - \int \frac{d(y - Y)}{dx} \cdot x dx$$

MESURES DE PESANTEUR DANS LES NIVELLEMENTS

Intégrons une deuxième fois par parties; nous pouvons écrire que $x dx$ est la différentielle de $\frac{1}{2} (x^2 - 1^2)$ donc

$$\varepsilon_i = - \left[\frac{x^2 - 1^2}{2} \cdot \frac{d(y - Y)}{dx} \right]_{-1}^{+1} + \int_{-1}^{+1} \frac{x^2 - 1^2}{2} \frac{d^2(y - Y)}{dx^2} dx$$

Remarquons comme précédemment que la quantité entre crochets est nulle, et que $Y_x'' = 0$ puisque la fonction Y est linéaire par hypothèse, on trouve alors

$$\varepsilon_i = \int_{-1}^{+1} \frac{x^2 - 1^2}{2} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot dx$$

Appliquons le théorème de la moyenne on peut écrire

$$\varepsilon_i = \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_m \cdot \int \frac{x^2 - 1^2}{2} dx = - \frac{2}{3} \cdot 1^3 \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_m = - \frac{1}{12} \Delta x^3 \cdot \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_m$$

Mais d'autre part, l'expression

$$\sum \varepsilon_i = - \sum_A^B \frac{\Delta x^3}{12} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_m$$

peut s'écrire

$$- \frac{\Delta x^2}{12} \sum_A^B \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_m \cdot \Delta x$$

et l'expression \sum_A^B n'est autre que l'intégrale $\int_A^B \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) dx = \left[\frac{dy}{dx} \right]_A^B$

En définitive le premier terme de l'erreur commise dans l'évaluation de l'intégrale par la méthode des trapèzes est

$$\varepsilon = - \frac{\Delta x^2}{12} \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)_B - \left(\frac{dy}{dx} \right)_A \right]$$

C'est le premier terme du développement d'Euler - Mac Laurin. Cette expression reste valable tant que la dérivée $\left(\frac{dy}{dx} \right)$ reste continue. Circonstance essentielle, l'erreur ne dépend que des valeurs de la dérivée aux extrémités de l'intervalle d'intégration.

Application au problème considéré : nous avons dit plus haut que le diagramme géopotentiel présentait vraisemblablement des points anguleux ou des discontinuités de la dérivée aux points de changement de

J. J. LEVALLOIS

penne du terrain; nous avons cependant la possibilité d'appliquer l'expression ci-dessus dans les intervalles où la fonction reste monotone, c'est-à-dire entre les points de changement de penne :

$$\varepsilon = \frac{\Delta z^2}{12} \left[\left(\frac{dg}{dz} \right)_B - \left(\frac{dg}{dz} \right)_A \right]$$

avec
$$\frac{dg}{dz} = \frac{\delta g}{\delta z} + \frac{\delta g}{\delta s} \cotg i$$

où s est l'abscisse curviligne et i la penne du terrain.

On peut écrire approximativement en désignant par Δs , l'accroissement d'abscisse curviligne correspondant à Δz , tel que $\frac{\Delta s}{\Delta z} = \cotg i$

$$\varepsilon \# \frac{\Delta z^2}{12} \left[\frac{\delta g}{\delta z} + \frac{\delta g}{\delta s} \times \frac{\Delta s}{\Delta z} \right]_A^B$$

$$\varepsilon \# \frac{\Delta z^2}{12} \left[\frac{\delta g}{\delta z} \right]_A^B + \frac{\Delta z \cdot \Delta s}{12} \left[\frac{\delta g}{\delta s} \right]_A^B$$

et cette égalité définit Δz et Δs connaissant les limites supérieures que l'on veut imposer à ε et les valeurs de $\left(\frac{\delta g}{\delta z} \right)$ et $\left(\frac{\delta g}{\delta s} \right)$, où nous nous rappellerons que $\left(\frac{\delta g}{\delta z} \right)_A^B$ est la différence des deux gradients verticaux de la pesanteur aux extrémités du segment de même que $\left(\frac{\delta g}{\delta s} \right)_A^B$ est la différence des deux gradients horizontaux de la pesanteur en A et B.

Nous raisonnerons dans le système C.G.S. pour plus de simplicité, et nous nous imposerons que l'erreur commise ne soit pas supérieure à des quantités de l'ordre de 2/10 de millimètre.

Dans ces conditions puisque $g \# 1000$ C.G.S.

$$\varepsilon = g dz = 2.. 1000 \cdot 10^{-2} \text{ C.G.S.}$$

Le 1/10 de millimètre dans la précision des altitudes correspond donc à 10 unités C.G.S. de géopotential. Reste à fixer les valeurs de $\left(\frac{\delta g}{\delta z} \right)$ et $\left(\frac{\delta g}{\delta s} \right)$

Précisément dans le Zeitschrift für Vermessungswesen d'Avril 1960 se trouve juste avant l'article déjà mentionné du Professeur Ramsayer, une importante étude du Prof. Bodemüller : "Beitrag zur Messung und Auswertung vertikaler Schweregradienten" dont on ne saurait trop recommander la lecture. Il ressort de cet article que le gradient vertical admet en principe des valeurs voisines de la valeur

MESURES DE PESANTEUR DANS LES NIVELLEMENTS

théorique en plaine, des valeurs trop faibles dans les vallées, des valeurs trop fortes sur les sommets. La valeur normale est de 0,309 milligal par mètre soit $0.309 \cdot 10^{-5}$ C.G.S. peut varier en gros de la valeur $0^{\text{mgal}},200$ dans les vallées très encaissées à $0^{\text{mill}},400$ sur les sommets isolés et escarpés à flancs abrupts.

La valeur normale est obtenue à ± 0.030 près dans les plaines et les terrains peu onduleux. Les grosses ou les petites valeurs ne sont pas forcément obtenues sur les très grandes montagnes : ce qui compte, c'est bien davantage le caractère accusé d'un relief local que l'altitude moyenne de la contrée, comme il est facile de l'expliquer par des raisonnements tout à fait élémentaires, mais qui sont un peu trop longs pour pouvoir être exposés dans cet article.

Nous admettrons qu'en plaine, le gradient vertical se tient dans les limites 0.309 ± 0.030

en pays moyennement accidenté 0.309 ± 0.060
 en pays très accidenté 0.309 ± 0.100

et que les pentes moyennes correspondantes des routes empruntées par les itinéraires de nivellement sont

en plaine $\leq 3 \%$
 en terrain moyennement accidenté $\leq 7 \%$
 en terrain très accidenté $\geq 7 \%$

Ces chiffres peuvent sans doute être discutés et d'autres limites peuvent être admises, mais celles-ci paraissent raisonnables, d'ailleurs le calcul serait facile à faire admettre d'autres hypothèses.

La quantité $\frac{\delta g}{\delta S}$ est d'une nature identique à la précédente et l'on pourrait a priori lui attribuer des variations du même ordre de grandeur puisque ses causes sont les mêmes ; il faut toutefois tenir compte du fait que l'extension latérale des accidents du terrain est toujours plus grande que leur extension verticale (une montagne, un plateau, un pic est toujours plus étendu dans le sens horizontal que dans le sens vertical). Les variations $\frac{\delta g}{\delta s}$ seront donc plus lentes que les variations $\frac{\delta g}{\delta z}$; on peut d'ailleurs avoir une évaluation de $\frac{\delta g}{\delta S}$ de la manière suivante :

Supposons - et c'est un cas qui paraît déjà très rare - que la déviation de la verticale varie de 5" par kilomètre, ce qui peut se produire sur une très petite distance au voisinage d'une paroi verticale (à l'île de la Réunion), ou à une variation de la déviation moyenne de la verticale, de 3" par kilomètre entre le centre de l'île et la partie Nord ou Sud du rivage, d'où : $\frac{\Delta g}{g} = 5'' = \frac{1}{40.000} = 0,25 \cdot 10^{-4}$.

d'où $\Delta g = 0.25 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3$ C.G.S. / par kilomètre

soit $\frac{\Delta g}{\Delta S} = 0.25 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-5} = 0,25 \cdot 10^{-6}$ C.G.S.

J. J. LEVALLOIS

ce qui sera une valeur rare mais possible en pays très accidenté. Une valeur plus normale correspondrait à 10^{-7} C.G.S ($2''$ par kilomètre) étant entendu qu'elle peut se produire en terrain moyennement accidenté; en plaine, nous admettrons $0'',5$ par kilomètre

soit $2.5 \cdot 10^{-8}$ C.G.S.

En définitive sur un terrain de pente sensiblement uniforme p on peut dresser le tableau suivant qui résulte de l'application de la formule

$$\left[\frac{\Delta z^2}{12} \left[\frac{\delta g}{\delta z} \right]_A^B + \frac{\Delta z \cdot \Delta S}{12} \left[\frac{\Delta g}{\delta S} \right]_A^B \right] < 20$$

$$\Delta z = p \Delta S \dots$$

TABLEAU DES INTERVALLES DE MESURE DE g

	p %	$\left[\frac{\delta g}{\delta z} \right]_A^B$	$\left[\frac{\delta g}{\delta S} \right]_A^B$	Δs	Δz
Terrain plat	1 %	0.3×10^{-6}	$2.5 \cdot 10^{-8}$	9kms,2	ordre de grandeur : 100 mètres
	2 %	$0.3 \cdot 10^{-6}$	$2.5 \cdot 10^{-8}$	6kms,4	
	3 %	$0.3 \cdot 10^{-6}$	$2.5 \cdot 10^{-8}$	4kms,9	
Terrain moyennement accidenté	4 %	$0.6 \cdot 10^{-6}$	10^{-7}	2kms,0	
	5 %	$0.6 \cdot 10^{-6}$	10^{-7}	1km,9	
	6 %	$0.6 \cdot 10^{-6}$	10^{-7}	1km,7	
	7 %	$0.6 \cdot 10^{-6}$	10^{-7}	1km,5	
Terrain très accidenté	8 %	10^{-6}	$0.25 \cdot 10^{-6}$	0km,95	
	9 %	10^{-6}	$0.25 \cdot 10^{-6}$	0km,900	
	10 %	10^{-6}	$0.25 \cdot 10^{-6}$	0km,85	

Il ne faut pas prendre ce tableau au pied de la lettre et, bien entendu, on le considèrera comme donnant un ordre de grandeur. On ne perdra pas de vue cependant que c'est la valeur des gradients qui joue un rôle décisif dans la détermination de l'intervalle d'interpolation, et qu'en terrain même plat un gradient peut être anormal. On aura donc intérêt à consulter les cartes d'anomalies.

MESURES DE PESANTEUR DANS LES NIVELLEMENTS

Autres causes d'erreur : On doit également tenir compte de

a) l'erreur d'observation des dénivelées : elles restent évidemment identiques dans le nivellement géopotential et le nivellement ordinaire.

b) l'erreur de mesure de g ; elle est évidemment de la forme $\Delta g \cdot (z_2 - z_1)$.

Il est facile de constater qu'une erreur locale de mesure de ± 3 milligals par mesure, donnera pour une dénivelée de 100 m. une erreur de

$$\pm \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot 10^{-3} \cdot 10^4 \# 20 \text{ C.G.S.}$$

soit également une erreur de $\pm 0^{\text{mm}},20$. On constatera que c'est précisément l'ordre de grandeur qui correspond à l'espacement calculé plus haut.

On peut donc admettre que les intervalles ΔS du tableau précédent définissent correctement la fréquence des mesures de pesanteur. Ces chiffres sont moins larges que ceux du Prof. Ramsayer.

On aura toujours soin de mesurer g aux changements de pente ou de direction importants qui correspondent précisément aux points anguleux ou à tangente verticale du diagramme géopotential, même si cette précaution devait a priori augmenter légèrement la densité des mesures.

