

## LA FORMULE DE STOKES EST-ELLE CORRECTE ?



Stokes a établi en 1849 la formule qui porte son nom. Il semble donc étonnant de douter en 1974 de son exactitude. L'auteur de la présente Note, comme tous les géodésiens, n'a jamais mis en cause la formule elle-même. Cependant, la manière habituelle de l'établir, les hypothèses qu'il faut énoncer au préalable, et les conséquences qui en résultent pour son application ont toujours causé une gêne. Voici quelques questions qu'il est naturel de poser.

1). Pour établir la formule de Stokes, on est obligé d'accepter les deux conditions que voici : ni l'anomalie de la pesanteur  $g$ , ni le potentiel perturbateur  $T$  ne doivent admettre d'harmoniques d'ordre zéro et un, il se peut que ces hypothèses soient réalisées quand il s'agit d'un champ anomal, mais il est difficile d'en être certain et d'ailleurs, sont-elles réellement impératives, car si l'on se place à un point de vue plus général, le problème de Stokes est un problème mixte de la théorie du potentiel, intermédiaire entre les problèmes de Dirichlet et de Neumann. Alors, la question se pose de savoir si ces conditions de compatibilité doivent être maintenues.

2). Pour établir la formule de Stokes, on fait couramment usage des fonctions sphériques. La fonction de Stokes, — le noyau de l'intégrale, — est développée d'abord en une série de fonctions sphériques, puis on somme cette série et, finalement, on obtient une expression en termes finis qui ne dépend d'aucune fonction sphérique. Cette façon de procéder paraît peu logique, car il semble que les fonctions sphériques n'ont pas plus de raison d'intervenir dans ce problème que dans ceux de Dirichlet ou de Neumann.

3). Les valeurs de la fonction de Stokes décroissent trop lentement lorsque l'éloignement croît. Il en résulte que pour calculer le potentiel en un point, il faut connaître le champ anomal jusque l'antipode de ce point. Intuitivement, c'est peu vraisemblable.

C'est en voulant répondre à ces objections que nous avons découvert un défaut dans la formule de Stokes. Nous allons montrer qu'aucune condition restrictive n'est nécessaire, que les fonctions sphériques sont à bannir et que l'allure de la fonction de Stokes corrigée est beaucoup plus satisfaisante.

Nous commencerons par rappeler l'énoncé du problème de Stokes qui consiste à trouver le noyau  $S(M, P)$  de la transformation fonctionnelle

$$T(M) = \frac{1}{4\pi} \iint g(P) S(M, P) d\sigma \quad (1)$$

qui exprime le potentiel perturbateur  $T(M)$  comme une fonctionnelle dont l'argument  $g(P)$  est une fonction bornée et intégrable donnée sur une sphère de rayon égal à  $a$ .  $P$  est donc un point courant sur cette sphère et  $M$  est un point fixe (relativement à l'intégration) situé en dehors de la sphère à une distance  $L > a$  du centre. L'élément de surface est désigné par  $d\sigma$ . On posera

$$r^2 = \overline{MP}^2 = L^2 - 2La\mu + a^2 \quad (2)$$

avec

$$\mu = \cos \psi$$

$\psi$  étant l'angle  $\widehat{MOP}$  au centre  $O$  de la sphère.

La condition aux limites du problème s'écrit

$$\lim_{L=a} \left[ L \frac{\partial T}{\partial L} + 2T \right] = -ag(P) \quad (3)$$

On sait que la fonction qui figure ici entre les crochets est harmonique à l'extérieur de la sphère. On constate ainsi que le problème qui nous intéresse se réduit très simplement à un problème de Dirichlet extérieur dont la solution s'exprime à l'aide de l'intégrale double de Poisson

$$U(M) = \frac{1}{4\pi} \iint U(P) \frac{L^2 - a^2}{ar^3} d\sigma \quad (4)$$

où  $U(M)$  est une fonction harmonique prenant les valeurs données  $U(P)$  sur la sphère. Par conséquent, en posant ici

$$U = L \frac{\partial T}{\partial L} + 2T$$

on obtient

$$L \frac{\partial T}{\partial L} + 2T = -\frac{1}{4\pi} \iint g(P) \frac{L^2 - a^2}{r^3} d\sigma \quad (5)$$

D'autre part, en revenant à la formule (1) et en répétant les mêmes

## LA FORMULE DE STOKES EST-ELLE CORRECTE ?

opérations que dans (5) on obtient une formule parallèle

$$L \frac{\partial T}{\partial L} + 2T = \frac{1}{4\pi} \iint g(P) \left( L \frac{\partial S}{\partial L} + 2S \right) d\sigma \quad (6)$$

En rapprochant ces deux relations (5) et (6) et en sachant que ces formules doivent être valables quelle que soit la fonction  $g(P)$ , on trouve une équation à laquelle doit satisfaire le noyau  $S$

$$L \frac{\partial S}{\partial L} + 2S = - \frac{L^2 - a^2}{r^3} \quad (7)$$

La résolution de cette équation différentielle est immédiate. La fonction analytique réelle qui figure au second membre est continue. On sait qu'il existe alors une fonction continue  $S$  satisfaisant à l'équation (7). Nous faisons cette remarque pour pouvoir affirmer que (7) contrairement à la formule (4) est valable non seulement pour  $L > a$ , mais également pour  $L < a$ .

On peut donc intégrer (7) entre les limites zéro et  $L$  après avoir multiplié par le facteur intégrant qui est égal à  $L$ . On a d'abord

$$\frac{\partial}{\partial L} (L^2 S) = - \frac{(L^2 - a^2) L}{r^3} \quad (8)$$

et, ensuite,

$$S = - \frac{1}{L^2} \int_0^L \frac{(\lambda^2 - a^2) \lambda}{r^3} d\lambda \quad (9)$$

Pour éviter une confusion, nous avons remplacé  $L$  par  $\lambda$  sous le signe somme. L'intégration (9) est élémentaire. On vérifiera par une dérivation le résultat définitif qui est

$$S(L, \mu) = \frac{2}{r} - \frac{3(r-a)}{L^2} - \frac{3a\mu}{L^2} \text{Log} \frac{r+L-a\mu}{a(1-\mu)} \quad (10)$$

Ce noyau remplit la condition (7), on vérifie qu'il est harmonique et nous verrons tout à l'heure que la condition aux limites (3) est également respectée et ceci sans restriction aucune en ce qui concerne la fonction  $g(P)$ . Par conséquent, (10) est bien la solution unique du problème de Stokes.

Rappelons à cette occasion que le noyau classique de Stokes tel qu'on l'écrit habituellement est

$$S_a(L, \mu) = \frac{2}{r} + \frac{1}{L} - \frac{5a\mu}{L^2} - \frac{3r}{L^2} - \frac{3a\mu}{L^2} \text{Log} \frac{r+L-a\mu}{2L} \quad (11)$$

Il est facile de se rendre compte que cette fonction n'est pas une intégrale de l'équation différentielle (7). En effet, au lieu de (7) on obtient

$$L \frac{\partial S_a}{\partial L} + 2 S_a = - \frac{L^2 - a^2}{r^3} + \frac{1}{L} + \frac{3a\mu}{L^2} \quad (12)$$

C'est ce résultat qui fait penser que la formule (11) n'est peut-être pas très exacte.

Il y a bien d'autres méthodes permettant de trouver l'expression (10) à partir de (7). On peut, par exemple, former l'intégrale générale de l'équation (7) et éviter ainsi les valeurs de  $L$  inférieures à  $a$ . L'intégrale générale se trouvera comme une intégrale indéfinie avec une constante additive arbitraire qui sera désignée par  $\phi(\mu)$ . Elle ne dépend pas de la variable  $L$ , mais peut être fonction du paramètre  $\mu$ . Après la division par  $L$  on obtient

$$S(L, \mu) = \frac{2}{r} - \frac{3r}{L^2} - \frac{3a\mu}{L^2} \text{Log} \frac{r+L-a\mu}{a} + \frac{\phi(\mu)}{L^2} \quad (13)$$

Pour déterminer la fonction  $\phi$  on peut utiliser le fait que le noyau  $S$  est harmonique. Ainsi, on est conduit à écrire l'égalité de deux laplaciens

$$\Delta \left[ \frac{\phi(\mu)}{L^2} \right] = \Delta \left[ \frac{3r}{L^2} + \frac{3a\mu}{L^2} \text{Log} \frac{r+L-a\mu}{a} \right] \quad (14)$$

Un calcul élémentaire, mais assez laborieux, donne les résultats suivants

$$\Delta \left[ \frac{\phi(\mu)}{L^2} \right] = \left\{ (1-\mu^2) \phi'' - 2\mu \phi' + 2\phi \right\} / L^2$$

$$\Delta \left[ \frac{3r}{L^2} + \frac{3a\mu}{L^2} \text{Log} \frac{r+L-a\mu}{a} \right] = - \frac{9a\mu}{L^2}$$

Par conséquent, l'égalité (14) donne naissance à l'équation différentielle

$$(1-\mu^2) \phi'' - 2\mu \phi' + 2\phi = -9a\mu \quad (15)$$

dont l'intégrale générale est

$$\phi = 3a\mu \text{Log} (1-\mu) + 3a + C a \mu + D a \left( 1 + \frac{\mu}{2} \text{Log} \frac{1-\mu}{1+\mu} \right) \quad (16)$$

## LA FORMULE DE STOKES EST-ELLE CORRECTE ?

où C et D sont deux constantes arbitraires. Nous introduisons cette expression dans (13) et le noyau S devient

$$S = \frac{2}{r} - \frac{3(r-a)}{L^2} - \frac{3a\mu}{L^2} \text{Log} \frac{r+L-a\mu}{a(1-\mu)} + C \frac{a\mu}{L^2} + \quad (17)$$

$$+ D \frac{a}{L^2} \left( 1 - \frac{\mu}{2} \text{Log} \frac{1-\mu}{1+\mu} \right)$$

Les valeurs des constantes numériques C et D ne peuvent être que nulles. Ceci résulte du fait facile à démontrer et d'ailleurs bien connu que la solution d'un problème mixte est unique, si le coefficient de T dans (3) est positif. Alors, si l'on porte (17) dans (1), on trouve:

$$C \iint g(P) \mu d\sigma + D \iint g(P) \left( 1 - \frac{\mu}{2} \cdot \text{Log} \frac{1-\mu}{1+\mu} \right) d\sigma = 0$$

ce qui oblige de poser  $C = D = 0$ , si l'on ne désire pas diminuer la généralité en imposant à  $g(P)$  des conditions supplémentaires inutiles.

Ainsi donc le problème de Stokes peut être résolu dans toute sa généralité sans aucune condition restrictive et sans le recours à des fonctions sphériques. L'expression du noyau de Stokes est donnée par (10). Si l'on pose dans cette formule  $L = a$ , on obtient la fonction de Stokes qui s'écrit

$$S(\psi) = \frac{1}{a} \left\{ \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} + 3 - 6 \sin \frac{\psi}{2} - 3 \cos \psi \text{Log} \left( 1 + \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} \right) \right\} \quad (18)$$

Maintenant nous sommes en mesure de répondre à la troisième question formulée au début. Les valeurs de la fonction corrigée décroissent plus vite que celles de la fonction actuellement en usage. Voici, à titre d'exemple, quelques valeurs pour comparer les deux formules

$\psi^\circ$	Fonction S		$\psi^\circ$	Fonction S	
	nouvelle	ancienne		nouvelle	ancienne
0.1	1127.776	1163.04	50	0.490	- 1.402
0.2	556.890	588.00	60	0.352	- 2.068
0.5	215.842	241.44	70	0.266	- 2.302
1.0	103.293	124.74	80	0.210	- 2.198
2.	48.005	65.28	90	0.172	- 1.828
3.	30.053	44.88	100	0.144	- 1.266
5.	16.175	27.92	110	0.125	- 0.576
10.	6.495	13.984	120	0.110	+ 0.178
20.	2.330	5.502	130	0.099	+ 0.934
30.	1.201	1.894	150	0.086	+ 2.236
40.	0.726	- 0.168	180	0.079	+ 3.080

On doit se demander quelle est la raison principale de la différence entre les formules (10) et (11). Bien entendu, le traitement classique du problème de Stokes impose à la fonction inconnue  $T$  un développement que rien ne justifie a priori. La formule classique est établie en posant deux conditions supplémentaires, — absence des harmoniques d'ordre zéro et un. Par conséquent, nous sommes conduits à examiner encore une fois si ces conditions sont réellement nécessaires. Nous ne pouvons faire mieux que de citer deux auteurs :

1°) A la page 317 de l'excellent ouvrage de J.-J. Levallois nous lisons :

"Il est évident que si  $T$ , le potentiel perturbateur, est développable " suivant le développement

$$T = T_0 + \frac{A}{L} + \frac{B}{L^2} + \frac{C}{L^3} + \dots \quad (*)$$

" où  $B$  serait la fonction sphérique du premier ordre . . . dans l'équation

$$\frac{\partial T}{\partial L} + \frac{2T}{L} = -g$$

" les termes du troisième degré en  $1/L$  disparaissent : il n'y a point de terme en  $B$ .  
" La condition

$$\iint g \mu d\sigma = 0$$

" est donc impérative pour qu'il existe une solution du problème.

2°) A la page 89 du traité "Physical Geodesy" de H. Moritz et de Heiskanen un raisonnement analogue est exprimé en termes suivants :

"Note that even if the anomalous potential  $T$  contains a first-degree spherical term  $T_1(\theta, \lambda)$ , it will in the expression for  $\Delta g$  be multiplied by the factor  $1 - 1 = 0$ , so that  $\Delta g$  can never have a first-degree spherical harmonic " — even if  $T$  has one".

Il est intéressant de constater que chacune de ces citations commencent par "si" ou "if". Traduisons :

"S'il est vrai que la fonction inconnue  $T$  admet un développement dont " chaque terme séparément est une fonction harmonique dans l'espace à trois " dimensions, alors . . . etc . . . "

Or, cette assertion n'est pas vraie du tout ! Sans doute, le potentiel  $T$

(\*) — Les notations sont celles de cet article.

## LA FORMULE DE STOKES EST-ELLE CORRECTE ?

est—il une fonction harmonique. Toutefois, c'est une fonction inconnue et rien ne permet d'affirmer a priori qu'elle puisse être développée en une série dont chaque terme séparément est une fonction harmonique dans l'espace ; c'est seulement leur somme qui est harmonique. La perte d'un terme de la série ne signifie qu'une chose, — c'est une démonstration par absurde que la série envisagée n'est pas adéquate pour représenter le potentiel anormal  $T$ .

Il est facile d'établir la véritable série non erronée. A cet effet, partons de l'expression qui figure au second membre de (8). Son développement en fonctions sphériques, facile à trouver et d'ailleurs bien connu, est

$$\frac{(L^2 - a^2)L}{r^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\mu) \frac{a^n}{L^n}$$

ou, en tenant compte de (8) et en mettant en évidence deux premiers termes,

$$\frac{\partial}{\partial L} (L^2 S) = -1 - \frac{3a\mu}{L} - \sum_{n=2}^{\infty} (2n+1) P_n(\mu) \frac{a^n}{L^n} \quad (19)$$

Cette série peut être intégrée terme à terme ce qui donne

$$L^2 S = \phi(\mu) - L - 3a\mu \text{Log } L + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\mu) \frac{a^n}{L^{n-1}} \quad (20)$$

Comme tout à l'heure, nous avons désigné par  $\phi$  une constante d'intégration par rapport à  $L$ , mais qui est en réalité une fonction du paramètre  $\mu = \cos \psi$  que nous avons déjà calculée. En divisant (20) par  $L^2$  on trouve

$$S = \frac{\phi(\mu)}{L^2} - \frac{1}{L} - 3a\mu \frac{\text{Log } L}{L^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\mu) \frac{a^n}{L^{n+1}} \quad (21)$$

Les termes dont se compose la somme qui figure ici à partir de l'indice  $n = 2$  sont des fonctions harmoniques, le terme  $1/L$  l'est aussi. La valeur gênante de l'indice  $n = 1$  n'intervient pas, mais l'intégration du second terme de (19) conduit inéluctablement à un logarithme dans (20) et, ensuite, à la fonction  $3a\mu \text{Log } L/L^2$  dans (21). Cette fonction n'est pas harmonique dans l'espace, car

$$\Delta \left[ 3a\mu \frac{\text{Log } L}{L^2} \right] = -\frac{9a\mu}{L^4}$$

Mais il est élémentaire de calculer  $\phi(\mu)$  à partir de la condition

$$\Delta \left[ \frac{\phi(\mu)}{L^2} \right] = - \frac{9 a \mu}{L^4}$$

Nous ne répétons pas ce calcul. L'expression de  $\phi$  est donnée par (16).

Enfin, pour le potentiel T nous obtenons la série suivante :

$$T = -\frac{Y_0}{L} + \frac{1}{L^2} \iint \frac{\phi(\mu)}{4\pi} g d\sigma - 3a Y_1 \frac{\text{Log } L}{L^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} Y_n \frac{a^n}{L^{n+1}} \quad (22)$$

avec

$$Y_n = \frac{1}{4\pi} \iint P_n(\mu) g d\sigma$$

Ensuite, en se servant de la formule

$$\frac{\partial T}{\partial L} + \frac{2T}{L} = -g(L)$$

on peut calculer le champ prolongé. On trouve

$$g(L) = \frac{1}{L^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) Y_n \left( \frac{a}{L} \right)^n \quad (23)$$

On voit bien qu'aucun terme ne manque dans ce développement. Par conséquent, on n'a aucun besoin d'éliminer artificiellement les harmoniques  $Y_0$  et  $Y_1$ , autrement dit, d'admettre une hypothèse qui est manifestement contraire à l'expérience et au bon sens.

Sans autres commentaires nous livrons ces considérations aux réflexions des géodésiens.