G. BLAHA
Ministère des Terres et Forêts
Québec – Canada

INFLUENCE DE L'INCERTITUDE DES PARAMETRES TENUS FIXES DANS UNE COMPENSATION SUR LA PROPAGATION DES VARIANCES–COVARIANCES

Bien qu'applicable à une gamme de problèmes de compensation par la méthode des moindres carrés, cet article (condensation d'un rapport du même titre et par le même auteur) a été inspiré par la compensation des réseaux géodésiques en deux dimensions. Celle–ci se fait selon les ordres des réseaux en gardant, pour des raisons pratiques bien évidentes, les coordonnées des points de l'ordre supérieur en général inchangées lors de la résolution du système des autres coordonnées. Cependant, si on négligeait la contribution de l'incertitude des paramètres "fixes" lors de la propagation des variances–covariances, la qualité des résultats indiquée par la compensation serait trop optimiste, sans aucune signification réelle. Le but principal de la présente étude est de corriger les matrices de variances–covariances de cette influence en considérant la méthode générale des moindres carrés avec des paramètres pondérés, inconnus, ou la combinaison des deux. Cette approche représente une généralisation du traitement exposé dans l'article cité en référence, dans le sens qu'il permet l'inclusion dans le modèle mathématique de paramètres totalement inconnus.

This work (condensed report of the same title and by the same author), although applicable to a number of least squares adjustment problems, was inspired by adjustments of two–dimensional geodetic networks. Such adjustments are carried out separately for different orders keeping in general the coordinates of the points belonging to a higher order unchanged for obvious practical reasons. However, should the uncertainty of the "fixed" parameters be neglected in the variance–covariance propagation, the outcome of an adjustment would be too optimistic and without any real meaning. The main task of this study is to correct the variance–covariance matrices for the contribution of this uncertainty considering the "General Least Squares Method" with weighted, unknown, or some weighted and some unknown parameters. Such an approach represents a generalization of the treatment described in the reference paper in a sense that it allows for the inclusion of completely unknown parameters in the mathematical model.

o

o o

Introduction

La compensation par la méthode des moindres carrés des réseaux géodésiques se fait selon leurs ordres, celle d'un ordre inférieur pouvant commencer lorsque celle de l'ordre supérieur a été terminée. De ce fait, on ne permet pas, en général, que les coordonnées des points de l'ordre supérieur changent, même si un changement, quoique petit, avait théoriquement eu lieu dans une compensation simultanée des deux (ou plusieurs) ordres. Le fait que l'on exclut tout changement dans les valeurs numériques de certains paramètres dans une compensation n'implique cependant pas la variance (ou co–variance) zéro de ces paramètres.

Par conséquent, compenser un réseau géodésique en tenant quelques points de l'ordre supérieur fixes non seulement pour la solution mais aussi pour la propagation des variances–covariances indiquerait une qualité des points compensés trop optimiste, sans aucune signification réelle. Pour remédier à la situation, il est impérieux de corriger les matrices de variances–covariances ainsi calculées de la contribution de l'incertitude des paramètres considérés fixes.

L'étude portera particulièrement sur la méthode dite générale des moindres carrés. Un problème de ce genre a déjà été traité, entre autre dans l'article du docteur Papo cité en référence. Cependant, les paramètres qui y sont considérés (sans compter les paramètres "fixes") étaient tous pondérés, c'est–à–dire, les démonstrations mathématiques ne permettaient pas l'inclusion des paramètres totalement inconnus. Le but principal de notre étude est donc de généraliser les formules développées dans ledit article pour englober les cas où tous les paramètres ou une partie de ceux–ci sont des inconnues. Les méthodes de conditions et de variation des paramètres n'étant que des cas spéciaux de la méthode générale, nous pourrions déduire des formules pour ces deux méthodes à partir des résultats de la méthode générale.

La matrice des poids des observations sera définie comme l'inverse de leur matrice de variances–covariances sans appliquer aucun "facteur–échelle" (σ_0^2). Ainsi, dans le cas de la méthode de variation des paramètres par exemple, l'inverse de la matrice des équations normales donnerait directement la matrice de variances–covariances des paramètres compensés, sans tenir compte de l'incertitude des points "fixes", bien entendu. Ajoutons toutefois que dans la pratique, l'échelle de la matrice de variances–covariances des observations peut être vérifiée après le calcul des résidus au moyen du test "Chi–carré".

Méthode générale

Le modèle mathématique et sa linéarisation dans la méthode générale se présentent comme suit :

$$F(\bar{L}, \bar{X}) = 0 \; ,$$

$$AX + BV + W = 0 \; .$$

où $\bar{L} = L^b + V$, L^b et V, vecteurs–colonnes avec n éléments, sont respectivement des observations compensées, des quantités observées et des résidus ; où $\bar{X} = X^\circ + X$, X° et X, vecteurs–colonnes avec u éléments, sont respectivement des valeurs compensées des paramètres, leurs valeurs initiales et des corrections différentielles dont on doit corriger ces dernières ; et où :

$A = \partial F / \partial X$, matrice aux dimensions (r, u) ; expansion au "point" X°,
$B = \partial F / \partial L$, matrice aux dimensions (r, n) ; expansion au "point" L^b,
$W = F(L^b, X^\circ)$, vecteur de r "termes constants".

Soulignons que l'introduction des paramètres "fixes" $(\tilde{X})$ ne change rien à notre modèle en ce qui concerne la solution elle–même. Formellement, nous pourrions écrire $F(\bar{L}, \bar{X}, \tilde{X}) = 0$ et $W = F(L^b, X^\circ, \tilde{X})$, mais comme les corrections associées à $\tilde{X}$ sont zéro par définition, nous aurions après la linéarisation $AX + BV + W = 0$ comme précédemment (pour le calcul des éléments du vecteur W, on utilise les valeurs $\tilde{X}$; si pour une raison ou pour une autre elles étaient inaccessibles ou incorrectes, on pourrait se servir des valeurs disponibles et corriger, lors de la solution, le vecteur W par un vecteur constant, fonction de la différence entre les valeurs "disponibles" et "fixes" ; dans notre contexte, ceci est sans intérêt et ne sera plus mentionné). Naturellement, les paramètres $\tilde{X}$ surgiront lors de la propagation des variances–covariances. Notons aussi que les observations (L^b) peuvent être dépendantes, le seul prérequis étant la non–singularité de leur matrice de variances–covariances $(\Sigma_L b)$. Rappelons que ceci est consistant avec notre intention de traiter le cas général dont la méthode de variation des paramètres serait déduite en posant $B = -I$ et la méthode de conditions en faisant $A = 0$, les paramètres X n'existant pas. Comme nous l'avons signalé, l'aspect le plus important de notre étude est une généralisation additionnelle qui nous permettra, au besoin, de "pondérer" les paramètres tel qu'expliqué dans la suite.

Définissons maintenant une fonction ϕ qui sera minimisée et des matrices P et P_0 :

$$\phi = V^T PV + X^T P_0 X,$$

$P = \Sigma_L b^{-1}$, matrice des poids des observations aux dimensions (n, n), P_0 . . . matrice des poids des quantités X aux dimensions (u, u).

Définissons, par la suite, la matrice P_0 de façon qui convient à notre problème, compte tenu de la forme de la fonction ϕ. Si toutes les quantités X° étaient pondérées, c'est–à–dire, si aucun des paramètres ne représentait une inconnue proprement dite, il serait logique de les traiter comme un deuxième groupe des quantités "observées", admettant toutefois leur indépendance statistique des quantités L^b. La matrice des variances–covariances de ces "observations" étant représentée par le symbole Σ_0, nous aurions par analogie avec L^b :

$$P_0 = \Sigma_0^{-1} \tag{A}$$

Cependant, il se pourrait que seulement une partie des paramètres soit pondérée (deuxième partie), l'autre partie représentant des inconnues proprement dites (première partie). Naturellement, nous ne voulons pas que la première partie soit considérée dans la formation de la fonction ϕ, ce qui peut être accompli en acceptant le poids zéro des quantités y appartenant ; la deuxième partie peut encore être traitée comme "observations" et la matrice P_0 pour l'ensemble s'écrira ainsi :

$$P_0 \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_{02}^{-1} \end{bmatrix} \tag{B}$$

où Σ_{02} est la matrice des variances—covariances associée au deuxième groupe des quantités X°. Puisque le premier groupe de ces quantités sont des constantes pures (valeurs approchées des paramètres inconnus), leurs variances—covariances sont zéro et la matrice Σ_0 pour l'ensemble des éléments X° sera :

$$\Sigma_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_{02} \end{bmatrix} \tag{B'}$$

Finalement, lorsque tous les paramètres sont des inconnues, le cas qui pourrait être appelé "méthode générale propre", nous les éliminons de la fonction ϕ en posant $P_0 = 0$. D'autre part, puisque toutes les valeurs X° sont maintenant des constantes, nous avons :

$$P_0 = \Sigma_0 = 0 \,. \tag{C}$$

La forme de la matrice P_0 variera donc selon que les paramètres sont des inconnues, des "observations", ou le mélange des deux. On pourrait conclure cette partie en soulignant que l'assertion $P_0 = \Sigma_0^{-1}$ n'est pas valable en général.

Sans changer sa valeur, nous écrivons la fonction ϕ de la façon suivante :

$$\phi = V^T PV + X^T P_0 X - 2K^T (BV + AX + W) = min \,,$$

où K est un vecteur de "coefficients de Lagrange" qui contient r éléments. Il s'ensuit alors que

$$\partial \phi / \partial V = 2V^T P - 2K^T B = 0 \ ,$$

$$\partial \phi / \partial X = 2X^T P_0 - 2K^T A = 0 \ .$$

d'où on tire graduellement, en utilisant aussi l'équation $AX + BV + W = 0$ et la définition $M = BP^{-1} B^T$:

$$V = P^{-1} B^T K,$$

$$K = -M^{-1} (AX + W) \ ,$$

$$X = -(P_0 + A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} W \ ,$$

$$\overline{X} = X^\circ - (P_0 + A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} W \ . \tag{D}$$

Matrices de variances–covariances

Pour effectuer la propagation des variances—covariances en tenant compte de l'incertitude de t paramètres $\widetilde{X}$, il nous faut redéfinir le vecteur W (noté W') qui numériquement demeure inchangé, mais non sa différentiation. En effet :

$$W' = F(L^b, X^\circ, \widetilde{X}) \ ,$$

$$dW' = B dL^b + A dX^\circ + \widetilde{B} d\widetilde{X} \ , \tag{E}$$

où $\widetilde{B} \equiv \partial F / \partial \widetilde{X}$ est une matrice aux dimensions (r, t). En différenciant la relation (D) et en utilisant la relation (E), nous obtenons :

$$d\overline{X} = [-(P_0 + A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} B \ \vdots \ I - (P_0 + A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} A \ \vdots$$
$$- (P_0 + A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} \widetilde{B}] \begin{bmatrix} dL^b \\ dX^\circ \\ d\widetilde{X} \end{bmatrix} \tag{F}$$

L'application de la loi de propagation des variances—covariances nous donne sous l'hypothèse de l'indépendance statistique des quantités L^b, X° et $\widetilde{X}$ (aux paramètres $\widetilde{X}$ on associe $\Sigma_{\widetilde{X}}$) :

$$\Sigma_{\overline{X}} = \Sigma^*_{\overline{X}} + \Delta \Sigma_{\overline{X}} \ .$$

$$\Sigma_{\bar{X}}^{*} = (P_0 + A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} A (P_0 + A^T M^{-1} A)^{-1} + \Sigma_0 - \Sigma_0 A^T M^{-1} A$$
$$(P_0 + A^T M^{-1} A)^{-1} - (P_0 + A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} A \Sigma_0 +$$
$$(P_0 + A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} A \Sigma_0 A^T M^{-1} A (P_0 + A^T M^{-1} A)^{-1} \,, \quad \text{(G)}$$

$$\Delta \Sigma_{\bar{X}} = (P_0 + A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} \widetilde{B} \Sigma_{\widetilde{X}} \widetilde{B}^T M^{-1} A (P_0 + A^T M^{-1} A)^{-1} \; ; \quad \text{(H)}$$

au cas où les paramètres $\widetilde{X}$ sont fixes aussi pour les fins de la propagation des variances–covariances, la matrice $\Sigma_{\widetilde{X}}$ est zéro et la matrice résultante est $\Sigma_{\bar{X}}^{*}$. Pour trouver une formule générale donnant la matrice $\Sigma_{\bar{X}}^{*}$ il nous faut d'abord étudier trois cas différents selon la nature des paramètres.

Premier cas.

Dans ce paragraphe nous considérons tous les paramètres pondérés ; les poids sont associés aux "observations" X° et la matrice P_0 est donnée en (A). Il ne s'agit, en effet, que de la méthode de conditions avec deux groupes des quantités "observables", soit le groupe L^b et le groupe X°. Nous pouvons développer l'équation (G) à l'aide de la deuxième des identités suivantes :

$$(P_0 + A^T M^{-1} A) \Sigma_0 = I + A^T M^{-1} A \Sigma_0 \;,$$

$$\Sigma_0 = (P_0 + A^T M^{-1} A)^{-1} + (P_0 + A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} A \Sigma_0 \;.$$

Si nous remplaçons Σ_0 du deuxième et du troisième terme du côté droit de l'équation (G) par cette identité, nous obtenons :

$$\Sigma_{\bar{X}}^{*} = (P_0 + A^T M^{-1} A)^{-1} \;.$$

Deuxième cas.

Considérons maintenant deux groupes de paramètres dont le premier consiste en des inconnues proprement dites et le deuxième en des quantités "observées" ; les matrices P_0 et Σ_0 pour ce cas ont paru en (B) et (B'). Nous pouvons constater en effet que P_0 est l'inverse dit généralisé de Σ_0 donnant, par exemple, $P_0 \Sigma_0 P_0 = P_0$. Parallèlement au premier cas, nous obtenons une identité pour Σ_0 et, par la suite, une expression pour $\Sigma_{\bar{X}}^{*}$ de l'équation (G) comme ci–dessous (en admettant, comme partout ailleurs, que l'inverse de la matrice $P_0 + A^T M^{-1} A$ existe) :

$$\Sigma_0 = (P_0 + A^T M^{-1} A)^{-1} P_0 \Sigma_0 + (P_0 + A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} A \Sigma_0 ,$$

$$\Sigma^*_{\overline{X}} = (P_0 + A^T M^{-1} A)^{-1} \{ A^T M^{-1} A (P_0 + A^T M^{-1} A)^{-1} + P_0 \Sigma_0 -$$

$$P_0 \Sigma_0 A^T M^{-1} A (P_0 + A^T M^{-1} A)^{-1} \} .$$

En faisant la mise en facteur par la droite de $(P_0 + A^T M^{-1} A)^{-1}$, le terme entre les accolades de la dernière équation devient la matrice–unité et nous pouvons donc écrire également dans ce cas–ci :

$$\Sigma^*_{\overline{X}} = (P_0 + A^T M^{-1} A)^{-1} \tag{I}$$

Des formules semblables seraient valables aussi dans les cas spéciaux $P_0 \Sigma_0 = I$ (premier cas) et $P_0 \Sigma_0 = 0$ (troisième cas qui suit), mais nous préférons les traiter séparément.

Troisième cas.

Si tous les paramètres sont des inconnues, nous avons immédiatement en considérant (C) :

$$\Sigma^*_{\overline{X}} = (A^T M^{-1} A)^{-1} = (P_0 + A^T M^{-1} A)^{-1} .$$

Nous pouvons donc conclure que la formule (I) est une formule générale qui englobe tous les trois cas. Cependant, on n'aurait pas pu arriver à cette conclu–sion en considérant seulement le premier cas, car, comme nous l'avons vu, $P_0 \Sigma_0$ ne donne pas une matrice–unité en général.

Pour exprimer la matrice $\Delta \Sigma_{\overline{X}}$ d'une façon convenable, nous posons :

$$\Omega = (P_0 + A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} \widetilde{B} . \tag{J}$$

Nous sommes maintenant en mesure de résumer nos formules ainsi :

$$\Sigma_{\overline{X}} = \Sigma^*_{\overline{X}} + \Delta \Sigma_{\overline{X}} ,$$

$$\Sigma^*_{\overline{X}} = (P_0 + A^T M^{-1} A)^{-1} ,$$

$$\Delta \Sigma_{\overline{X}} = \Omega \Sigma_{\widetilde{X}} \Omega^T .$$

Un procédé semblable nous donnerait les matrices de variances—covariances pour les fonctions de paramètres ou pour les observations, corrigées de la contribution de l'incertitude dans les paramètres $\widetilde{X}$. Par exemple, en considérant la méthode de condition (cas spécial de la méthode générale où les paramètres X n'existent pas), nous aurions :

$$\Sigma_{\overline{L}}^{*} = \Sigma_{L^b} - \Sigma_{L^b} B^T M^{-1} B \Sigma_{L^b} ,$$

$$\Delta \Sigma_{\overline{L}} = (\Sigma_{L^b} B^T M^{-1} \widetilde{B}) \Sigma_{\widetilde{X}} (\Sigma_{L^b} B^T M^{-1} \widetilde{B})^T .$$

Discussion des formules du docteur Papo

Pour comparer certaines formules de l'article cité en référence avec les nôtres, faisons d'abord une correspondance entre les notations (les quantités correspondantes sont séparées par quelques points) :

$$B_X , \Sigma_X \ldots \widetilde{B} , \Sigma_{\widetilde{X}} \; ; \quad M_X \; \ldots \; \widetilde{B} \Sigma_{\widetilde{X}} \widetilde{B}^T \; ;$$

déjà dans cette phase initiale de comparaisons, nous pouvons constater que les formules du docteur Papo avant le partitionnement des paramètres sont identiques aux nôtres de la méthode de conditions. En ce qui a trait au partitionnement des paramètres dans son article, nous avons de plus :

$$L_1^b , \Sigma_1 \ldots L^b , \Sigma_{L^b} \; ; \; L_2^b , \Sigma_2 \ldots X^\circ , \Sigma_0 \; ; \quad B_1 , B_2 \ldots B , A \; ;$$

$$M_1 \ldots M \; ; \quad K \ldots \Sigma_{\overline{X}}^{*} \; ; \quad \Sigma_{L^{a_2}} \ldots \Sigma_{\overline{X}} .$$

(La dernière ligne suit de la précédente). Les formules finales du docteur Papo peuvent alors être récrites :

$$\Sigma_{\overline{X}} = \Sigma_{\overline{X}}^{*} + (\Sigma_{\overline{X}}^{*} A^T M^{-1} \widetilde{B}) \Sigma_{\widetilde{X}} (\Sigma_{\overline{X}}^{*} A^T M^{-1} \widetilde{B})^T ,$$

$$\Sigma_{\overline{X}}^{*} = (\Sigma_0^{-1} + A^T M^{-1} A)^{-1} .$$

Notons surtout que pour démontrer ce résultat, on a utilisé la matrice Σ_0 qui devait être non—singulière. Nécessairement, tous les paramètres étaient pondérés et il ne pouvait pas y avoir de paramètres inconnus. Notons ensuite que ce résultat est identique au nôtre du "premier cas".

Nous pouvons conclure cet exposé en constatant l'identité des résultats partout où la comparaison est possible. Cependant, le résultat principal de l'article cité en référence n'a été obtenu que pour deux groupes des quantités "observables" de la méthode de conditions sans introduire de paramètres inconnus. Ainsi, il représente un cas spécial dont la généralisation a été le but principal de ce travail.

o

o o

REFERENCE

H.B. PAPO : "Considered Parameters in a Least Squares Adjustment Process", publié dans le Bulletin Géodésique, No. 107, Bureau Central de l'Association Internationale de Géodésie, Paris, France, 1er mars 1973.