

**PRESENTATION SYNTHETIQUE  
DES METHODES SEMI-ITERATIVES  
DE RESOLUTION DES SYSTEMES LINEAIRES**

---

**Résumé**

La méthode des gradients conjugués (Hestenes & Stiefel, 1952) fut spécialement conçue pour la résolution des matrices symétriques définies positives. Elle présente la propriété remarquable d'avoir la structure d'une méthode itérative et d'être en même temps une méthode d'élimination (convergence de principe en  $n$  itérations,  $n$  étant le nombre de valeurs propres différentes du système).

Cette méthode ne semble pas avoir eu tout le succès pratique que l'on aurait pu espérer, sans doute parce que, dans le cas de très grands systèmes, les erreurs d'arrondis viennent perturber les prévisions mathématiques, au point de rendre parfois la méthode non convergente.

Elle n'en reste pas moins riche de promesses, et l'étude de méthodes aptes à éviter les conséquences des erreurs d'arrondis n'est certainement pas achevée.

Dans l'article qui va suivre, nous avons essayé de généraliser les idées qui ont conduit à la théorie des gradients. Les algorithmes qui sont présentés ont les caractéristiques suivantes :

- Ils correspondent à des méthodes semi-itératives, c'est-à-dire convergentes en un nombre fini d'itérations.
- Ils correspondent, à chaque étape, à la diminution d'une norme définie positive, en général *une somme des carrés des résidus*, norme facile à contrôler et qui peut servir de critère fondamental pour la validité d'une solution.
- Ils sont différenciés, adaptés à des matrices définies positives ou non, symétriques ou non.
- Ils se confondent avec l'algorithme dit des "résidus conjugués" quand la matrice traitée est symétrique définie positive.

Nous ne savons pas si toutes ces méthodes s'imposeront dans la pratique, mais il nous a semblé important de montrer comment on pouvait les déduire d'un algorithme fondamental. On attire particulièrement l'attention sur le rapprochement (effectué en Annexe 2) entre la théorie des matrices symétriques et celle des polygones orthogonaux, avec une fonction de poids reliée à la distribution  $\lambda(x)$  des valeurs propres.

**Summary**

The method of conjugate gradients (Hestenes & Stiefel, 1952) was originally especially designed for solving symmetric positive matrices. This method has the following outstanding property : it has the structure of an iterative process and it is also an elimination method (theoretical convergence in  $n$  steps,  $n$  being the number of different eigenvalues of the matrix).

The practical success of this method, till now, has not been as important as one could expect, probably because, for big systems of equations, rounding off errors occur, which may eventually completely modify the mathematical predictions.

The method seems however to be very promising, if one takes account of the fact that all practical methods of avoiding rounding off errors have not yet been investigated .

In the following article, we have tried to give a generalization of the theory of conjugate gradients. The given algorithms have the following characteristics :

- They define semi-iterative methods, i.e. leading to the mathematical solution after a finite number of steps.
- They correspond, at each step, to a decrease of a positive norm, in general *the sum of squares of the residuals*, which is practically the best criterion to check the final solution.
- There is a special algorithm for each case : positive or non positive matrices, symmetric or not.
- When the concerned matrix is symmetric and positive, each algorithm gives back the method of "conjugate residuals".

We are not sure that these different methods will be all of practical use, but it seems important to show how they derive from a basic algorithm. Special attention should be given to the analogy (see Annex 2) between the theory of symmetric matrices and that of orthogonal polynomials  $P(x)$  , with a weight function connected with the distribution  $\lambda(x)$  of eigenvalues.



**I – Propriétés générales**

Soit à résoudre  $AX = K$ ,  $A$  matrice carrée de dimension  $n$ . Dans toute la suite de l'exposé,  $i < j$ .

**A) Formation des vecteurs  $P_i$**

Soit  $B$  une matrice telle que  $B^* A$  soit définie positive (il en existe au moins une :  $A$ ).

Soit  $(U_i)$  une suite de  $n$  vecteurs indépendants.

Par le procédé d'orthogonalisation de Schmidt, on forme à partir de cette suite les vecteurs  $P_i$  mutuellement conjuguée par rapport à la matrice  $B^* A$ .

$$P_i^* B^* A P_j = 0 \tag{1}$$

$$P_1 = U_1$$

$$P_j = U_j + \alpha_{j,1} P_1 + \dots + \alpha_{j,i} P_i + \dots + \alpha_{j,j-1} P_{j-1}$$

$$\alpha_{ji} = - \frac{P_i^* B^* A U_j}{P_i^* B^* A P_i} \tag{2}$$

Ceci n'est possible que si  $P_i^* B^* A P_i \neq 0$ , ce qui est réalisé. Sinon, en effet, on aurait  $P_i = 0$  puisque  $B^* A$  est définie positive. Mais  $P_i$  est une combinaison linéaire des  $U_i$  (le coefficient de  $U_i$  valant 1) et ne peut être nul puisque les  $U_i$  sont indépendants.

Pour la même raison, on voit immédiatement que les  $P_i$  sont indépendants.

**B) Calcul des  $y_i$**

Puisque les  $P_i$  sont indépendants, ils forment une base de  $R^n$ , et on peut écrire la solution  $X$  sous la forme :

$$X = \sum_{i=1}^n y_i P_i$$

$$\sum_{i=1}^n y_i A P_i = K$$

Multiplions à gauche cette relation par  $P_i^* B^*$ . Il vient :

$$y_i = \frac{P_i^* B^* K}{P_i^* B^* A P_i} \quad (\text{car } P_i^* B^* A P_i \neq 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Posons } X_i = y_1 P_1 + \dots + y_i P_i \\ R_i = K \\ R_{i+1} = K - A X_i \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(restes et inconnues} \\ \text{après } i \text{ itérations)} \end{array}$$

$$\Rightarrow R_{i+1} = R_i - y_i A P_i$$

D'où

$$P_i^* B^* R_i = P_i^* B^* R_{i-1} = \dots = P_i^* B^* K$$

$$\Rightarrow \boxed{y_i = \frac{P_i^* B^* R_i}{P_i^* B^* A P_i}} \quad (3)$$

C) *Relations d'orthogonalité*

1) On a :

$$P_i = U_i + a_{i,1} P_1 + \dots + a_{i,i-1} P_{i-1}$$

Multiplions cette relation par  $P_j^* B^* A$  et par  $P_i^* B^* A$

Il vient :

$$P_j^* B^* A U_i = 0$$

$$P_i^* B^* A U_i = P_i^* B^* A P_i$$

$$2) P_i^* B^* R_{i+1} = P_i^* B^* (R_i - y_i A P_i) = P_i^* B^* R_i - y_i P_i^* B^* A P_i = 0$$

$$P_i^* B^* R_j = P_i^* B^* R_{j-1} = \dots = P_i^* B^* R_{i+1} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{P_i^* B^* R_j = 0} \quad (4)$$

$$3) U_i^* B^* R_j = P_i^* B^* R_j - \alpha_{i,1} P_1^* B^* R_j - \dots - \alpha_{i,i-1} P_{i-1}^* B^* R_j$$

$$\Rightarrow \boxed{U_i^* B^* R_j = 0} \quad (5)$$

Il nous reste à choisir la matrice  $B$  et la suite indépendante  $(U_i)$  pour définir totalement la méthode. Ce choix sera différent suivant que la matrice  $A$  sera définie positive ou non, symétrique ou non. *Dans tous les cas, on cherchera à annuler la plupart des scalaires  $\alpha_{ji}$  afin de ne pas conserver en mémoire tous les vecteurs  $P_i$  et de rendre la méthode opérationnelle.*

**II – Cas des matrices définies positives symétriques – Méthode générale**

On prend  $\boxed{U_i = R_i}$  (6) et on impose à  $B$  d'être définie positive.

**A) Indépendance des  $U_i$**

L'équation (5) s'écrit :  $R_i^* B^* R_j = 0$

Supposons que l'on ait :  $k_1 R_1 + \dots + k_i R_i + \dots + k_n R_n = 0$  ( $k_i \neq 0$ )

Multiplications cette relation par  $R_i^* B^* \Rightarrow k_i R_i^* B^* R_i = 0$

– si  $\exists i$ ,  $R_i^* B^* R_i = 0$ ,  $R_i = 0$  puisque  $B$  est définie positive.

Alors l'équation  $A.X = K$  est vérifiée par  $X_{i-1}$  puisque le reste est nul.

– sinon,  $k_i = 0, \forall i \Rightarrow$  les  $R_i$  sont indépendants.

**B) Nullité des  $\alpha_{ji}$**

On a  $P_i^* B^* R_i = R_i^* B^* R_i + \alpha_{i,1} P_1^* B^* R_i + \dots + \alpha_{i,i-1} P_{i-1}^* B^* R_i$

$\Rightarrow P_i^* B^* R_i = R_i^* B^* R_i$  d'après (4)

$$\Rightarrow y_i = \frac{R_i^* B^* R_i}{P_i^* B^* A P_i} \quad (7)$$

Mais  $R_{i+1} = R_i - y_i A P_i$

$\Rightarrow R_{i+1}^* B^* R_j = R_i^* B^* R_j - y_i P_i^* A^* B^* R_j$

$\Rightarrow y_i \cdot P_i^* A^* B^* R_j = 0$  d'après (5) si  $i < j - 1$

si  $y_i = 0$   $\Rightarrow R_i^* B^* R_i = 0 \Rightarrow R_i = 0$  car  $B$  définie positive

$\Rightarrow$  le système a été résolu à la  $(i - 1)$ ème itération

si  $P_i^* A^* B^* R_j = 0$   $\Rightarrow$   $\alpha_{ji} = 0$  si  $i \neq j - 1$

$\Rightarrow$   $P_j = R_j + \mu_j \cdot P_{j-1}$  avec  $\mu_j = - \frac{P_{j-1}^* B^* A R_j}{P_{j-1}^* B^* A P_{j-1}}$  (8)

**C) Propriété de minimum**

$$R_{i+1}^* A^{-1} B R_{i+1} = R_i^* A^{-1} B R_i - y_i (R_i^* A^{-1} B A P_i + R_i^* B^* A^{-1} A P_i) + y_i^2 P_i^* A A^{-1} B A P_i$$

Si  $A B = B A$  (9)

$$R_{i+1}^* A^{-1} B R_{i+1} = R_i^* A^{-1} B R_i - 2 y_i R_i^* B P_i + y_i^2 P_i^* A B P_i$$

$$\frac{\partial}{\partial y_i} (R_{i+1}^* A^{-1} B R_{i+1}) = 0 \iff y_i = \frac{P_i^* B^* R_i}{P_i^* B^* A P_i} \quad (10)$$

Le choix de  $y_i$  correspond au minimum de  $R_{i+1}^* A^{-1} B R_{i+1}$

**D) Choix de la matrice B**

Pour conserver cette propriété de minimum, on imposera à  $B$  de commuter avec  $A$ . Alors, si  $A$  n'a pas de valeur propre multiple,  $B$  est un polynôme de degré au plus  $(n - 1)$  en  $A$ . En effet, soit  $V_i$  un vecteur propre de  $A$  avec la valeur propre  $\lambda_i$ :

METHODES SEMI-ITERATIVES DE RESOLUTION DES SYSTEMES LINEAIRES

$$A V_i = \lambda_i V_i \Rightarrow A (B V_i) = B (A V_i) = \lambda_i B V_i$$

Donc,  $B V_i$  est aussi vecteur propre de  $A$  avec la même valeur propre  $\lambda_i$ .

Puisque  $\lambda_i$  est valeur propre simple,  $B V_i$  et  $V_i$  sont proportionnels  
 $\Rightarrow B V_i = \lambda'_i V_i \Rightarrow V_i$  est aussi vecteur propre de  $B$ , avec une autre valeur propre  $\lambda'_i$ .

$A$  étant symétrique est diagonalisable et  $B$  est donc diagonalisable avec la même matrice de passage, puisque les colonnes de cette matrice de passage sont constituées de vecteurs propres communs à  $A$  et à  $B$ .

$$\Rightarrow A = P D P^{-1} \quad B = P \Delta P^{-1}$$

Soit  $f(\lambda)$  le polynôme de Lagrange de degré  $n-1$ , prenant les valeurs  $\lambda'_i$  lorsque  $\lambda$  prend les valeurs  $\lambda_i$ .

$$f(\lambda) = \sum_{i=1}^n \lambda'_i \prod_{j \neq i} \frac{\lambda - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}$$

Alors  $\Delta = f(D)$  et  $B = f(A)$

$B$  est donc bien un polynôme de degré au plus  $n-1$  en  $A$ . Comme on ne connaît rien a priori sur les valeurs propres de  $A$ , on imposera à  $B$  cette dernière condition.

E) Normalisation de  $y_i$

On a  $P_i = R_i + \mu_i \cdot P_{i-1}$

avec 
$$\mu_i = - \frac{P_{i-1} B^* A R_i}{P_{i-1} B^* A P_{i-1}}$$

Or  $y_{i-1} A P_{i-1} = R_i - R_{i-1}$ .

Multiplions cette relation par  $B R_i$  et par  $B P_{i-1}$

$$\Rightarrow y_{i-1} P_{i-1}^* A^* B R_i = R_i^* B R_i - R_{i-1}^* B R_i = R_i^* B R_i$$

$$y_{i-1} P_{i-1}^* A^* B P_{i-1} = R_i^* B P_{i-1} - R_{i-1}^* B P_{i-1} = -R_{i-1}^* B P_{i-1}$$

mais  $R_{i-1}^* B P_{i-1} = R_{i-1}^* B R_{i-1} + \mu_{i-1} R_{i-1}^* B P_{i-2} = R_{i-1}^* B R_{i-1}$

$$\Rightarrow \boxed{\mu_i = \frac{R_i^* B R_i}{R_{i-1}^* B R_{i-1}}} \quad (11)$$

Si nous voulons éviter tout risque de dépassement de capacité des mémoires de l'ordinateur, il est nécessaire de normaliser les coefficients  $y_i$ .

Pour cela, posons  $P_i' = k_i P_i$       $y_i' = y_i / k_i$

Alors  $P_i' = k_i R_i + \mu_i' P_{i-1}'$

avec 
$$\mu_i' = \frac{k_i \mu_i}{k_{i-1}}$$

Nous choisissons  $k_i = \frac{R_i^* R_i}{R_i^* B R_i} \Rightarrow \boxed{\mu_i = \frac{R_i^* R_i}{R_{i-1}^* R_{i-1}}} \quad (12)$

Avec cette normalisation,

$$|y_i| < 1$$

En outre, si à la  $i^{\text{ème}}$  itération, les résidus diminuent brusquement, on a  $y_i \simeq 1$ ,  $\mu_i' \simeq 0$  et  $P_i' \simeq k_i R_i$  : on voit ainsi que le processus se "réinitialise" automatiquement. On pourrait d'ailleurs aussi prendre  $k_i = \frac{1}{\sqrt{P_i^* P_i}}$ , ce qui imposerait  $P_i^* P_i = 1$ . Ce choix normalise également les coefficients  $y_i$ , mais il n'a pas la signification remarquable du précédent.

**III – Systèmes linéaires symétriques définis positifs – Applications**

On pose  $T_i = A R_i$       $\theta_i = A P_i$

Il nous reste à choisir la matrice **B** pour définir complètement la méthode.

**A) Méthode des gradients conjugués [Hestenes & Stiefel, 1952].**

On choisit 
$$\boxed{B = I}$$



METHODES SEMI-ITERATIVES DE RESOLUTION DES SYSTEMES LINEAIRES

Alors :

$P_i^* A P_j = 0$  : les gradients sont conjugués par rapport à la matrice  $A$  qui doit être définie positive

$P_i^* R_j = 0$

$R_i^* R_j = 0$  : les résidus sont orthogonaux

$$\alpha_{ji} = - \frac{P_i^* A R_j}{P_i^* A P_i} \quad y_i = \frac{P_i^* R_i}{P_i^* A P_i} \quad (13)$$

A chaque itération, on minimise  $R_{i+1}^* A^{-1} R_{i+1}$

$B = I$  est définie positive  $\Rightarrow$  les restes sont indépendants et

$\alpha_{ji} = 0$  si  $i \neq j - 1$  (d'après II, A et B).

$$\Rightarrow P_i = R_i + \mu_i P_{i-1} \text{ avec } \mu_i = - \frac{\theta_{i-1} R_i}{\theta_{i-1} P_{i-1}} = \frac{R_i R_i}{R_{i-1} R_{i-1}}$$

$$k_i = \frac{R_i R_i}{R_i B R_i} = 1 \Rightarrow y_i \text{ est automatiquement normalisé.}$$

*Algorithme (GRADCO)*

$$R_1 = K$$

$$R_i = R_{i-1} - y_{i-1} \theta_{i-1}$$

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_i = - \frac{\theta_{i-1}^* R_i}{\theta_{i-1}^* P_{i-1}} = \frac{R_i R_i}{R_{i-1} R_{i-1}}$$

$$P_1 = R_1$$

$$P_i = R_i + \mu_i P_{i-1} \quad (14)$$

$$\theta_1 = A P_1$$

$$\theta_i = A P_i$$

$$y_1 = \frac{P_1 R_1}{\theta_1 P_1}$$

$$y_i = \frac{P_i R_i}{\theta_i P_i}$$

$$X_1 = y_1 P_1$$

$$X_i = X_{i-1} + y_i P_i$$

*Test :*

$$R_i^* R_i < \epsilon \rightarrow \text{fin}$$

**B) Méthode des résidus conjugués**

**1) Méthode**

On choisit

$$\boxed{B = A}$$

Alors :

$$P_i^* A^* A P_j = 0$$

$$P_i^* A R_j = 0$$

$R_i^* A R_j = 0$  : les résidus sont conjugués par rapport à la matrice A

$$a_{ji} = -\frac{\theta_i^* T_j}{\theta_i^* \theta_i} \qquad y_i = \frac{\theta_i^* R_i}{\theta_i^* \theta_i} \qquad (15)$$

A chaque itération, on minimise  $R_{i+1}^* R_{i+1}$

$$\Rightarrow a_{ji} = 0 \quad \text{si } i \neq j - 1$$

$$\Rightarrow P_i = R_i + \mu_i P_{i-1} \quad \text{avec } \mu_i = -\frac{\theta_{i-1}^* T_i}{\theta_{i-1}^* \theta_{i-1}}$$

On peut aussi normaliser  $y_i$  comme il a été dit en prenant

$$k_i = \frac{R_i^* R_i}{R_i^* A R_i} \qquad \mu_i' = \frac{R_i^* R_i}{R_{i-1}^* R_{i-1}} \Rightarrow P_i' = k_i R_i + \mu_i' P_{i-1}'$$

**2) Algorithme des résidus conjugués :  $AX = K = R_1$**

$$R_1 = K \qquad R_i = R_{i-1} - y_{i-1} \theta_{i-1}$$

$$T_1 = A R_1 \qquad T_i = A R_i$$

$$k_1 = \frac{R_1^* R_1}{T_1^* R_1}, \quad \mu_1 = 0 \qquad k_i = \frac{R_i^* R_i}{T_i^* R_i}, \quad \mu_i = \frac{R_i^* R_i}{R_{i-1}^* R_{i-1}}$$

$$P_1 = k_1 R_1 \qquad P_i = k_i R_i + \mu_i P_{i-1} \qquad (16)$$

METHODES SEMI-ITERATIVES DE RESOLUTION DES SYSTEMES LINEAIRES

$$\begin{aligned} \theta_1 &= k_1 T_1 & \theta_i &= k_i T_i + \mu_i \theta_{i-1} \\ y_1 &= \frac{\theta_1^* R_1}{\theta_1^* \theta_1} & y_i &= \frac{\theta_i^* R_i}{\theta_i^* \theta_i} \\ X_1 &= y_1 P_1 & X_i &= X_{i-1} + y_i P_i \end{aligned}$$

Test :  $R_i^* R_i < \epsilon \rightarrow \text{fin}$

C) *Autres méthodes*

1) En pratique, on ne calcule pas de puissance élevée de  $A$ . On pourrait néanmoins penser à une méthode intermédiaire entre gradients et résidus en posant  $B = I + h.A$ . Le coefficient  $h$  pourrait, soit être fixé une fois pour toutes, soit varier à chaque itération pour minimiser une expression, par exemple  $R_{i+1}^* B R_{i+1}$ . Nous n'avons pas expérimenté cette méthode.

2) *Extensions de la méthode*

Les méthodes envisagées sont en fait généralisables à toutes les résolutions :

$$NX = R$$

dans lesquelles  $N$  est un "opérateur symétrique défini positif" dont on sait calculer le produit par un vecteur quelconque donné numériquement.

a) *Moindres carrés* – Relations d'observations

$$GX = K \Rightarrow G^* GX = G^* K \Rightarrow NX = R$$

b) *Moindres carrés* – Equations de condition

$$HV = K \Rightarrow HH^* L = K \Rightarrow NL = R$$

( $L$  = multiplicateurs de Lagrange ;  $V = H^* L$ )

c) *Systèmes carrés quelconques* :  $AX = K$

Ils peuvent se ramener à l'un des cas précédents. La méthode n'est toutefois pas à conseiller de façon générale, car si  $A$  est symétrique définie positive, on a :

$$\text{Cond}(A) = \rho \Rightarrow \text{Cond}(AA^*) = \text{Cond}(A^*A) = \text{Cond}(A^2) = \rho^2$$

C'est pour cela que dans la suite de l'exposé, nous avons recherché des

méthodes qui dans ce cas évitent la formation systématique de  $A^2$  (Voir Annexe 4).

**d) Autres applications**

Nous avons vu le cas simple  $N = A^* A$  ;  $N = B B^*$ . Il existe de nombreuses autres applications, où  $N$  peut être utilisé comme opérateur, sans être directement exprimé en ordinateur :

$N$  matrice réduite d'élimination

$N$  défini par une formulation mathématique

(cf. Dufour, 1961, 1964).

3) Dans toute la suite, nous avons préféré le choix correspondant à la méthode des résidus conjugués ( $B = A$ ) car :

– à chaque itération, nous minimisons  $R_{i+1}^* R_{i+1}$ , quel que soit le type de la matrice  $A$ .

$$\text{En effet, } R_{i+1} = R_i - y_i \theta_i$$

$$R_{i+1}^* R_{i+1} = R_i^* R_i - 2y_i \theta_i^* R_i + y_i^2 \theta_i^* \theta_i$$

$$\frac{\partial (R_{i+1}^* R_{i+1})}{\partial y_i} = 0 \iff y_i = \frac{\theta_i^* R_i}{\theta_i^* \theta_i}$$

– Le critère  $R_i^* R_i$  négligeable nous semble caractériser parfaitement la résolution des systèmes linéaires.

– La décroissance uniforme de  $R_i^* R_i$  permet un test d'arrêt simple et sûr :

$$R_i^* R_i < \epsilon$$

Néanmoins, il est certain que la suite pourrait se généraliser en introduisant une matrice  $B$ , comme dans ce qui précède. Nous ne l'avons pas fait pour alléger l'exposé et parce que notre but était la mise au point d'algorithmes opérationnels.

**IV – Cas des matrices définies positives non symétriques**

**A) Méthode**

On résout simultanément les deux systèmes :

$$A X = K \quad (S)$$

$$A^* X' = K \quad (S')$$

On choisit 

$$\begin{aligned} U_i &= R'_i \\ U'_i &= R_i \end{aligned}$$
 (17)

c'est-à-dire qu'on construit les solutions d'un système sur les restes de l'autre système.

On utilise de préférence la méthode des résidus conjugués ( $B = A$  et  $B' = A^*$ ).

**B) Propriétés**

D'après I, on a donc :

$$P_i = R'_i + a_{i1} P_1 + \dots + a_{i,i-1} P_{i-1}$$

$$P'_i = R_i + a'_{i1} P'_1 + \dots + a'_{i,i-1} P'_{i-1}$$

$$X = \sum_{i=1}^n y_i P_i \quad \text{avec} \quad y_i = \frac{P_i^* A^* R_i}{P_i^* A^* A P_i} \quad y'_i = \frac{P_i'^* A R_i'}{P_i'^* A A^* P_i'}$$

**Relations d'orthogonalité**

$$P_i^* A^* A P_j = 0 \qquad P_i'^* A A^* P_j' = 0$$

$$P_i^* A^* R_j = 0 \qquad P_i'^* A R_j' = 0$$

$$R_i^* A^* R_j = 0 \qquad R_i^* A R_j' = 0$$

On a donc :

$$P_i^* A^* R_i = P_i'^* A R_i' = P_i'^* A R_i' = R_i'^* A^* R_i = R_i^* A R_i'$$

$$\Rightarrow y_i = \frac{R_i'^* A^* R_i}{P_i^* A^* A P_i} \qquad y'_i = \frac{R_i'^* A R_i}{P_i'^* A A^* P_i'} \qquad (18)$$

**Indépendance des  $R_i$  et des  $R'_i$**

La démonstration est identique à celle de II, A.

**Propriété de minimum**

A chaque itération, on minimise  $R_{i+1}^* R_{i+1}$  et  $R_{i+1}'^* R_{i+1}'$

**Nullité des  $a_{ji}$**

On a :

$$\begin{aligned} R_{i+1} &= R_i - y_i A P_i \\ \Rightarrow R_{i+1}^* A R_j' &= R_i^* A R_j' - y_i P_i^* A^* A R_j' \\ \Rightarrow y_i P_i^* A^* A R_j' &= 0 \quad \text{si } i < j-1 \\ \Rightarrow \text{si } i < j-1 \text{ et si } y_i \neq 0 & \quad a_{ji} = 0 \end{aligned}$$

Dans les mêmes conditions,  $a_{ji}' = 0$

Ceci suppose que  $y_i$  et  $y_i'$  sont différents de zéro, c'est-à-dire que

$$\boxed{R_i^* A^* R_i = R_i^* A R_i' \neq 0} \quad (19)$$

Cette condition peut n'être pas remplie avec  $R_i \neq 0$  bien que  $A$  soit définie positive.

**C) Réinitialisation**

Si, à une itération, on trouve que  $R_i^* A^* R_i = 0$  avec  $R_i^* R_i \neq 0$ , il est nécessaire de réinitialiser, car le processus normal est alors bloqué.

On a en effet :

$$y_i = y_i' = 0 \quad R_j = R_i \quad R_j' = R_i'$$

On pose alors

$$\left| \begin{array}{l} X_0 = X_i \\ K = R_i \end{array} \right.$$

et on a :  $y_i = \frac{R_i^* A R_i}{R_i^* A^* A R_i} \neq 0$  car  $A$  est définie positive.

METHODES SEMI-ITERATIVES DE RESOLUTION DES SYSTEMES LINEAIRES

En pratique, on pourra réinitialiser dès que

$$\frac{R_i^* R_i}{R_1^* R_1} \quad \text{ou} \quad \frac{R_i'^* R_i'}{R_1'^* R_1'} < \epsilon$$

$\epsilon$  étant à choisir en fonction de la précision des calculs.

D) Normalisation de  $y_i$  et  $y_i'$

Comme précédemment, on peut multiplier  $P_i$  par un coefficient pour que  $y_i \leq 1$ .

En effet, on a  $P_i = R_i + \mu_i P_{i-1}$  avec  $\mu_i = -\frac{P_{i-1}^* A^* A R_i'}{P_{i-1}^* A^* A P_{i-1}}$

Or,  $y_{i-1} A P_{i-1} = R_i - R_{i-1}$

Multiplions cette relation par  $A R_i'$  et par  $A P_{i-1}$

$$\Rightarrow y_{i-1} P_{i-1}^* A^* A R_i' = R_i^* A R_i' - R_{i-1}^* A R_i' = R_i^* A R_i'$$

$$y_{i-1} P_{i-1}^* A^* A P_{i-1} = R_i^* A P_{i-1} - R_{i-1}^* A P_{i-1} = -R_{i-1}^* A P_{i-1}$$

mais  $R_{i-1}^* A P_{i-1} = R_{i-1}^* A R_{i-1}' + \mu_{i-1} R_{i-1}^* A P_{i-2} = R_{i-1}^* A R_{i-1}'$

$$\Rightarrow \boxed{\mu_i = \frac{R_i^* A R_i'}{R_{i-1}^* A R_{i-1}'}} \tag{20}$$

De même, on a  $\mu_i' = \frac{R_i' A^* R_i}{R_{i-1}' A^* R_{i-1}}$

$$\Rightarrow \boxed{\mu_i = \mu_i'}$$

On peut donc ne pas calculer le vecteur  $T_i'$ , nécessaire seulement au calcul de  $\mu_i'$ .

Pour normaliser, multiplions  $P_i$  par  $\frac{R_i^* R_i}{R_i^* A R_i}$  et  $P_i'$  par  $\frac{R_i'^* R_i'}{R_i'^* A R_i'}$

$P_i$  et  $P_i'$  deviennent :

$$P_i = \frac{R_i^* R_i}{R_i^* A R_i} \cdot R_i' + \frac{R_i^* R_i}{R_{i-1}^* R_{i-1}} \cdot P_{i-1}$$

$$P_i' = \frac{R_i'^* R_i'}{R_i'^* A R_i'} \cdot R_i + \frac{R_i'^* R_i'}{R_{i-1}'^* R_{i-1}'} \cdot P_{i-1}'$$

Alors,  $y_i \leq 1$  et  $y_i' \leq 1$ .

**E) Algorithme (DPNS)**

$$X_0 = 0$$

$$R_1 = K$$

$$R_i = R_{i-1} - y_{i-1} \theta_{i-1}$$

$$R_1' = K$$

$$R_i' = R_{i-1}' - y_{i-1}' \theta_{i-1}'$$

$$T_1 = A R_1'$$

$$T_i = A R_i'$$

$$P_1 = \frac{R_1^* R_1}{R_1^* T_1} \cdot R_1'$$

$$P_i = \frac{R_i^* R_i}{R_i^* T_i} \cdot R_i' + \frac{R_i^* R_i}{R_{i-1}^* R_{i-1}} \cdot P_{i-1}$$

$$\theta_1 = \frac{R_1^* R_1}{R_1^* T_1} \cdot T_1$$

$$\theta_i = \frac{R_i^* R_i}{R_i^* T_i} \cdot T_i + \frac{R_i^* R_i}{R_{i-1}^* R_{i-1}} \theta_{i-1} \quad (21)$$

$$\theta_1' = \frac{R_1'^* R_1'}{R_1'^* T_1} \cdot A^* R_1$$

$$\theta_i' = \frac{R_i'^* R_i'}{R_i'^* T_i} \cdot A^* R_i + \frac{R_i'^* R_i'}{R_{i-1}'^* R_{i-1}'} \theta_{i-1}'$$

$$y_1 = \frac{\theta_1^* R_1}{\theta_1^* \theta_1}$$

$$y_i = \frac{\theta_i^* R_i}{\theta_i^* \theta_i}$$

$$y_1' = \frac{\theta_1'^* R_1'}{\theta_1'^* \theta_1'}$$

$$y_i' = \frac{\theta_i'^* R_i'}{\theta_i'^* \theta_i'}$$



METHODES SEMI-ITERATIVES DE RESOLUTION DES SYSTEMES LINEAIRES

$$X_1 = X_0 + y_1 P_1 \qquad X_i = X_{i-1} + y_i P_i$$

Tests :

$$R_i^* R_i < \epsilon \rightarrow \text{fin}$$

$$\theta_i^* R_i < \epsilon \rightarrow \text{réinitialisation } K = R_i \quad X_0 = X_i$$

V – Cas des matrices non définies positives, symétriques

A) Méthode

On prend  $U_i = A \cdot P_{i-1}$  (22)

$$\Rightarrow P_1 = R_1$$

$$P_i = A P_{i-1} + \alpha_{i1} P_1 + \dots + \alpha_{i,i-1} P_{i-1}$$

B) Indépendance des  $P_i$

S'il existe une combinaison linéaire nulle entre les  $P_i$ , on peut écrire :

$$a_1 P_1 + \dots + a_n A^{(n-1)} P_1 \equiv 0$$

$$\Rightarrow (a_1 I + \dots + a_n A^{(n-1)}) P_1 = 0$$

Ceci peut se rencontrer dans deux circonstances :

1)  $P_1$  n'a de composantes non nulles que sur  $p$  vecteurs propres  $V_i$  de  $A$  (en particulier si  $P_1$  est vecteur propre de  $A$ ).

En effet, on a alors

$$P_1 = \sum_{i=1}^p V_i$$

$$\Rightarrow (a_1 I + \dots + a_{p+1} A^p) P_1 = \sum_{i=1}^p (a_1 + \dots + a_{p+1} \lambda_i^p) V_i$$

Mais il existe des nombres  $a_i$  non tous nuls tels que :

$$a_1 \lambda_i + \dots + a_{p+1} \lambda_i^p = 0 \quad \forall i = 1 \text{ à } p$$

$$\Rightarrow \text{Pour ces nombres, on a : } (a_1 I + \dots + a_{p+1} A^p) P_1 \equiv 0$$

2)  $A$  admet des valeurs propres multiples.

En effet,  $A$  symétrique est diagonalisable ;  $A = P D P^{-1}$ ,  $D$  diagonale. Il est immédiat de voir que les polynômes dont  $D$  est racine forment un idéal, c'est-à-dire qu'ils sont tous multiples du polynôme minimum  $Q(\lambda) = \prod_i (\lambda - \lambda_i)$ , formé à partir des  $p$  valeurs propres distinctes de  $D$ , donc de  $A$ . Mais  $A$  et  $D$  sont racines des mêmes polynômes puisque  $Q(A) = P \cdot Q(D) \cdot P^{-1}$ . Si  $A$  a des valeurs propres multiples, son polynôme minimum est de degré  $p < n$ . Il existe donc des nombres  $a_i$  non tous nuls tels que  $a_1 I + \dots + a_{p+1} A^p \equiv 0$ .

Dans ces deux cas, il semblerait que la méthode ne soit pas applicable, car les  $P_i$  n'engendrent pas tout l'espace  $R^n$ . En fait, la méthode converge alors en  $p$  itérations, à condition de prendre toutefois

$$P_1 = R_1 = K$$

En effet, on a  $a_1 \neq 0$ , car sinon  $A$  aurait la valeur propre nulle. On peut donc écrire :

$$A X \left( -\frac{a_2}{a_1} K - \dots - \frac{a_{p+1}}{a_1} A^{p-1} K \right) \equiv K$$

$$\Rightarrow X = \frac{-a_2}{a_1} K - \dots - \frac{a_{p+1}}{a_1} A^{p-1} K \text{ est donc solution de } A X = K$$

et appartient donc à l'espace engendré par les  $p$  vecteurs de la forme  $A^{i-1} \cdot K$ , donc par les  $p$  vecteurs  $P_i$ .

**C) Autres propriétés**

On utilise encore le principe de la méthode des résidus conjugués ( $B = A$ ), c'est-à-dire que l'on impose  $\theta_i^* \theta_j = 0$  avec  $\theta_i = A P_i$

$$\Rightarrow a_{ji} = -\frac{\theta_i^* A \theta_{j-1}}{\theta_i^* \theta_i}$$

$$y_i = \frac{\theta_i^* R_i}{\theta_i^* \theta_i}$$

**Relations d'orthogonalité**

On a  $P_i^* A R_j = 0$

METHODES SEMI-ITERATIVES DE RESOLUTION DES SYSTEMES LINEAIRES

Mais  $P_i = A P_{i-1} + a_{i1} P_1 + \dots + a_{i,i-1} P_{i-1}$

$\Rightarrow P_i^* A A R_j = 0$  si  $j > i + 1$

**Propriété de minimum**

Le choix de  $y_i$  minimise encore  $R_{i+1}^* R_{i+1}$  à chaque itération.

**Nullité des  $a_{ji}$**

On a :  $R_j = R_{j-1} - y_{i-1} \theta_{j-1}$

$\Rightarrow \theta_i^* A R_j = \theta_i^* A R_{j-1} - y_{j-1} \theta_i^* A \theta_{j-1} \Rightarrow y_{j-1} \theta_i^* A \theta_{j-1} = 0$

$j > i + 2$

$\Rightarrow$  si  $y_{j-1} \neq 0$   $a_{ji} = -\frac{\theta_i^* A \theta_{j-1}}{\theta_i^* \theta_i} = 0$

$\Rightarrow$   $P_j = A P_{j-1} + \mu_j P_{j-1} + \nu_j P_{j-2}$  (23)

avec  $\mu_j = -\frac{\theta_{j-1}^* A \theta_{j-1}}{\theta_{j-1}^* \theta_{j-1}}$   $\nu_j = -\frac{\theta_{j-2}^* A \theta_{j-1}}{\theta_{j-2}^* \theta_{j-2}}$  (24)

Ici,  $y_{j-1}$  peut être nul. Mais le processus n'est pas bloqué pour autant, car alors

$R_j = R_{j-1}$

mais  $P_j \neq P_{j-1}$  et  $\theta_j \neq \theta_{j-1}$

On peut donc poursuivre l'algorithme.

**Autres expressions de  $\nu_i$**

On a :  $\theta_{i-1} = A \theta_{i-2} + a_{i-1,i-2} \theta_{i-2} + a_{i-1,i-3} \theta_{i-3}$

$\Rightarrow \theta_{i-1}^* \theta_{i-1} = \theta_{i-1}^* A \theta_{i-2}$

$\Rightarrow \nu_i = -\frac{\theta_{i-1}^* \theta_{i-1}}{\theta_{i-2}^* \theta_{i-2}} \left( \mu_i = -\frac{\theta_{i-1}^* A \theta_{i-1}}{\theta_{i-2}^* A \theta_{i-1}} \right)$

D) *Algorithme (NDPS)*

$$\begin{array}{ll}
 R_i = K & R_i = R_{i-1} - y_{i-1} \theta_{i-1} \\
 & S_i = A \theta_{i-1} \\
 \mu_i = 0 & \mu_i = - \frac{\theta_{i-1}^* S_i}{\theta_{i-1} \theta_{i-1}} \\
 \nu_i = 0 & \nu_i = - \frac{\theta_{i-2}^* S_i}{\theta_{i-2} \theta_{i-2}} \quad (\nu_2 = 0) \\
 P_i = R_i & P_i = \theta_{i-1} + \mu_i P_{i-1} + \nu_i P_{i-2} \quad (25) \\
 \theta_i = A R_i & \theta_i = S_i + \mu_i \theta_{i-1} + \nu_i \theta_{i-2} \\
 y_i = \frac{\theta_i R_i}{\theta_i \theta_i} & y_i = \frac{\theta_i R_i}{\theta_i \theta_i} \\
 X_i = y_i P_i & X_i = X_{i-1} + y_i P_i
 \end{array}$$

*Test :*  $R_i^* R_i < \epsilon \rightarrow \text{fin}$

(Cf. Annexe 2)

E) *Autre méthode*

1) *Méthode*

Nous proposons également une autre méthode tout à fait analogue à la précédente.

On prend

$$U_i = A R_{i-1}$$

On a alors  $P_i = A R_{i-1} + a_{i1} P_1 + \dots + a_{i,i-1} P_{i-1}$

La démonstration de l'indépendance des  $P_i$  est identique à celle du paragraphe 2, à condition de prendre  $P_i = R_i$

On montre de même que  $a_{ji} = - \frac{\theta_i^* A T_j}{\theta_i^* \theta_i}$  avec  $T_j = A R_j$

METHODES SEMI-ITERATIVES DE RESOLUTION DES SYSTEMES LINEAIRES

$$y_i = \frac{\theta_i^* R_i}{\theta_i \theta_i}$$

$$\theta_i^* R_j = 0$$

$$T_i^* T_j = 0 \text{ si } j > i+1$$

$$a_{ji} = 0 \text{ si } j > i+2 \text{ et si } y_i \neq 0$$

On a donc  $P_j = A R_{j-1} + \mu_j P_{j-1} + \nu_j P_{j-2}$

avec  $\mu_j = -\frac{\theta_{j-1}^* A T_{j-1}}{\theta_{j-1}^* \theta_{j-1}}$        $\nu_j = -\frac{\theta_{j-2}^* A T_{j-1}}{\theta_{j-1}^* \theta_{j-1}}$

Cette méthode et la précédente sont, au moins théoriquement, équivalentes.

2) *Algorithme*

$R_1 = K$	$R_i = R_{i-1} - y_{i-1} \theta_{i-1}$	
	$S_i = A T_{i-1}$	
$\mu_1 = 0$	$\mu_i = -\frac{\theta_{i-1}^* S_i}{\theta_{i-1}^* \theta_{i-1}}$	
$\nu_1 = 0$	$\nu_i = -\frac{\theta_{i-2}^* S_i}{\theta_{i-1}^* \theta_{i-1}} \quad (\nu_2 = 0)$	
$P_1 = R_1$	$P_i = T_{i-1} + \mu_i P_{i-1} + \nu_i P_{i-2}$	(27)
$\theta_1 = A R_1$	$\theta_i = S_i + \mu_i \theta_{i-1} + \nu_i \theta_{i-2}$	
$y_1 = \frac{\theta_1 R_1}{\theta_1^* \theta_1}$	$y_i = \frac{\theta_i R_i}{\theta_i^* \theta_i}$	
$X_1 = y_1 P_1$	$X_i = X_{i-1} + y_i P_i$	
$T_1 = \theta_1$	$T_i = A R_i$	

**Test :**  $R_i^* R_i < \epsilon \rightarrow \text{fin.}$

**VI – Cas des matrices carrées quelconques**

On propose deux méthodes différentes mais toutes deux construites à partir de l'algorithme du chapitre V.

**A) 1) Première méthode**

On utilise le même artifice que celui employé pour les matrices définies positives non symétriques. c'est-à-dire que l'on résout simultanément les deux systèmes :

$$A X = K \quad (S)$$

$$A^* X' = K \quad (S')$$

On choisit

$$\boxed{\begin{matrix} U_i = A^* P'_{i-1} \\ U'_i = A P_{i-1} \end{matrix}} \quad (28)$$

**2) Propriétés**

On a donc :

$$P_i = A^* P'_{i-1} + a_{i1} P_1 + \dots + a_{i,i-1} P_{i-1}$$

$$P'_i = A P_{i-1} + a'_{i1} P'_1 + \dots + a'_{i,i-1} P'_{i-1}$$

$$\theta_i = A \theta'_{i-1} + a_{i1} \theta_1 + \dots + a_{i,i-1} \theta_{i-1} \quad \theta_i = A P_i$$

$$\theta'_i = A^* \theta_{i-1} + a'_{i1} \theta'_1 + \dots + a'_{i,i-1} \theta'_{i-1} \quad \theta'_i = A^* P'_i$$

On utilise le critère des résidus conjugués ( $B = A$  et  $B' = A^*$ ), c'est-à-dire que :

$$\theta_i^* \theta_j = 0 \quad \theta_i^{*'} \theta_j' = 0$$

$$\Rightarrow a_{ji} = - \frac{P_i^* A^* A A^* P'_{j-1}}{P_i^* A^* A P_i} = - \frac{\theta_i^* A \theta'_{j-1}}{\theta_i^* \theta_i}$$

$$a'_{ji} = - \frac{P_i^{*'} A A^* A P_{j-1}}{P_i^{*'} A A^* P_i'} = - \frac{\theta_i^{*'} A^* \theta_{j-1}}{\theta_i^{*'} \theta_i'} \quad (29)$$

$$y_i = \frac{P_i^* A^* R_i}{P_i^* A^* A P_i} = \frac{\theta_i^* R_i}{\theta_i^* \theta_i}$$

$$y'_i = \frac{P_i^{*'} A R'_i}{P_i^{*'} A A^* P_i'} = \frac{\theta_i^{*'} R'_i}{\theta_i^{*'} \theta_i'}$$

**Relations d'orthogonalité**

On a :

$$\begin{aligned} P_i^* A^* R_j &= 0 & P_i'^* A R_j' &= 0 \\ P_i'^* A A^* R_j &= 0 & P_i^* A^* A R_j' &= 0 \quad \text{si } j > i+1 \end{aligned}$$

**Propriété de minimum**

Les choix de  $y_i$  et de  $y_i'$  minimisent  $R_{i+1}^* R_{i+1}$  et  $R_{i+1}' R_{i+1}'$  à chaque itération.

**Nullité des  $a_{ji}$**

On a :

$$\begin{aligned} \theta_{i-1}'^* A^* R_j &= \theta_{i-1}'^* A^* R_{j-1} - y_{i-1} \theta_{i-1}'^* A^* \theta_{j-1} \\ \theta_{i-1}^* A R_j' &= \theta_{i-1}^* A R_{j-1}' - y_{j-1}' \theta_{i-1}^* A \theta_{j-1}' \\ \Rightarrow y_{j-1}' \theta_{i-1}'^* A^* \theta_{j-1} &= y_{j-1}' \theta_{i-1}^* A \theta_{j-1}' = 0 \\ \Rightarrow \text{si } y_j \text{ et } y_j' \neq 0 &\Rightarrow a_{ji}' = a_{ji} = 0 \quad \text{si } i < j-2 \\ \Rightarrow P_i &= A^* P_{i-1}' + \mu_i P_{i-1} + \nu_i P_{i-2} \\ P_i' &= A P_{i-1} + \mu_i' P_{i-1}' + \nu_i' P_{i-2}' \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \mu_i &= -\frac{\theta_{i-1}^* A \theta_{i-1}'}{\theta_{i-1}'^* \theta_{i-1}} & \mu_i' &= -\frac{\theta_{i-1}'^* A^* \theta_{i-1}}{\theta_{i-1}'^* \theta_{i-1}'} \\ \nu_i &= -\frac{\theta_{i-2}^* A \theta_{i-1}'}{\theta_{i-2}^* \theta_{i-2}} = -\frac{\theta_{i-1}'^* \theta_{i-1}'}{\theta_{i-2}^* \theta_{i-2}} & (30) \\ \nu_i' &= -\frac{\theta_{i-2}'^* A^* \theta_{i-1}}{\theta_{i-2}'^* \theta_{i-2}'} = -\frac{\theta_{i-1}^* \theta_{i-1}}{\theta_{i-2}'^* \theta_{i-2}'} \end{aligned}$$

**3) Réinitialisation**

Mais, comme pour les systèmes définis positifs non symétriques, le processus peut se bloquer si, après la  $i^{\text{ème}}$  itération, le système (S') est résolu,

c'est-à-dire si  $R'_{i+1} = 0$  sans que  $R_{i+1}$  soit nul.

Ceci se produit par exemple si  $K$  est vecteur propre de  $A^*$  sans l'être de  $A$ . Alors, le système  $(S')$  converge en une seule itération et on trouverait à la deuxième itération  $P_2 = \theta_2 = 0$ .

Il est alors nécessaire de réinitialiser en posant

$$\begin{cases} X_0 = X_i \\ K = R_i \end{cases}$$

4) *Algorithme*

$$X_0 = 0$$

$$R_1 = K$$

$$R'_1 = K$$

$$R_i = R_{i-1} - y_{i-1} \theta_{i-1}$$

$$R'_i = R'_{i-1} - y'_{i-1} \theta'_{i-1}$$

$$S_i = A^* \theta_{i-1}$$

$$S'_i = A \theta'_{i-1}$$

$$\mu_1 = 0 \quad \mu_i = - \frac{\theta_{i-1}^* S'_i}{\theta_{i-1}^* \theta_{i-1}}$$

$$\mu'_1 = 0 \quad \mu'_i = - \frac{\theta'_{i-1} S_i}{\theta'_{i-1} \theta'_{i-1}} \quad (31)$$

$$\nu_1 = 0 \quad \nu_i = - \frac{\theta_{i-2}^* S'_i}{\theta_{i-2}^* \theta_{i-2}} = - \frac{\theta'_{i-1} \theta'_{i-1}}{\theta_{i-2}^* \theta_{i-2}} \quad (\nu_2 = 0)$$

$$\nu'_1 = 0 \quad \nu'_i = - \frac{\theta'_{i-2} S_i}{\theta'_{i-2} \theta'_{i-2}} = - \frac{\theta_{i-1}^* \theta_{i-1}}{\theta'_{i-2} \theta'_{i-2}} \quad (\nu'_2 = 0)$$

$$P_1 = R'_1 \quad P_i = \theta'_{i-1} + \mu_i P_{i-1} + \nu_i P_{i-2}$$

$$\theta_1 = A R'_1 \quad \theta_i = S'_i + \mu_i \theta_{i-1} + \nu_i \theta_{i-2}$$

$$\theta'_1 = A^* R_1 \quad \theta'_i = S_i + \mu'_i \theta'_{i-1} + \nu'_i \theta'_{i-2}$$



METHODES SEMI-ITERATIVES DE RESOLUTION DES SYSTEMES LINEAIRES

$$y_1 = \frac{\theta_1^* R_1}{\theta_1^* \theta_1} \qquad y_i = \frac{\theta_i^* R_i}{\theta_i^* \theta_i}$$

$$y_1' = \frac{\theta_1'^* R_1}{\theta_1'^* \theta_1'} \qquad y_i' = \frac{\theta_i'^* R_i'}{\theta_i'^* \theta_i'}$$

$$X_1 = X_0 + y_1 P_1 \qquad X_i = X_{i-1} + y_i P_i$$

Tests :  $R_i^* R_i < \epsilon \rightarrow$  fin

$R_i'^* R_i' < \epsilon \rightarrow$  réinitialisation  $K = R_i \quad X_0 = X_i$

B) 1) *Deuxième méthode*

On peut toujours amener la matrice d'un système à être symétrique en ajoutant des relations fictives. Il suffit de résoudre simultanément les deux systèmes :

$$A X = K \quad (S)$$

$$A^* X' = K \quad (S')$$

Le système global s'écrit :

$$\left| \begin{array}{cc|cc} 0 & A & X' & \\ A^* & 0 & X & \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} K \\ K \end{array} \right| \qquad N = \left| \begin{array}{cc} 0 & A \\ A^* & 0 \end{array} \right| \qquad (32)$$

N est bien symétrique quelle que soit la matrice A . Mais N n'est pas définie positive.

On peut donc appliquer l'algorithme du chapitre V valable pour les matrices non définies positives symétriques. Il serait néanmoins maladroit d'appliquer cet algorithme brutalement à la matrice N . Vu la forme de celle-ci, il se simplifie en effet considérablement. En outre, la démonstration du chapitre V reste bien sûr valable, et nous sommes donc assurés de la convergence (au moins théorique) de la méthode en  $2n$  itérations, *sans qu'il soit nécessaire de réinitialiser.*

2) *Algorithme*

$$R_1 = K \qquad R_i = R_{i-1} - y_{i-1} \theta_{i-1}$$

$$R_1' = K \qquad R_i' = R_{i-1}' - y_{i-1} \theta_{i-1}'$$

$$\begin{aligned}
 S_i &= A^* \theta_{i-1} \\
 S_i' &= A \theta_{i-1}' \\
 \mu_1 &= 0 & \mu_i &= -\frac{S_i^* \theta_{i-1}' + S_i'^* \theta_{i-1}}{\theta_{i-1}^* \theta_{i-1}' + \theta_{i-1}'^* \theta_{i-1}} \\
 \nu_1 &= 0 & \nu_i &= -\frac{S_i^* \theta_{i-2}' + S_i'^* \theta_{i-2}}{\theta_{i-2}^* \theta_{i-2}' + \theta_{i-2}'^* \theta_{i-2}} \quad (\nu_2 = 0) \\
 P_1 &= R_1' & P_i &= \theta_{i-1}' + \mu_i P_{i-1} + \nu_i P_{i-2} \\
 \theta_1 &= A R_1' & \theta_i &= S_i' + \mu_i \theta_{i-1}' + \nu_i \theta_{i-2}' \\
 \theta_1' &= A^* R_1 & \theta_i' &= S_i + \mu_i \theta_{i-1}' + \nu_i \theta_{i-2}' \\
 y_1 &= \frac{\theta_1^* R_1 + \theta_1'^* R_1'}{\theta_1^* \theta_1' + \theta_1'^* \theta_1} & y_i &= \frac{\theta_i^* R_i + \theta_i'^* R_i'}{\theta_i^* \theta_i' + \theta_i'^* \theta_i} \\
 X_1 &= y_1 P_1 & X_i &= X_{i-1} + y_i P_i \\
 \text{Test :} & & R_i^* R_i &< \epsilon \rightarrow \text{fin.}
 \end{aligned}$$

Bien que les deux méthodes reposent sur des principes différents, les deux algorithmes sont très semblables. La première méthode est optimiste et converge normalement en  $n$  itérations, sauf s'il est nécessaire de réinitialiser, auquel cas elle peut ne converger que plus lentement. La seconde est plus sûre car elle converge obligatoirement sans réinitialisation en  $2n$  itérations. Elle peut même converger plus vite, en  $n$  itérations, si par exemple, la matrice du système est symétrique (l'algorithme se confond alors avec celui du chapitre V qui converge en  $n$  itérations), et plus généralement si

$$A A^* = A^* A \quad (\text{Voir Annexe 3})$$

### Conclusion

Le lecteur notera bien entendu que les méthodes présentées nécessitent le stockage de vecteurs auxiliaires, en nombre variable selon les méthodes. Dans chaque cas, il est possible d'adapter le calcul pour réduire ce nombre (le vecteur  $X$  pouvant en particulier être calculé séparément).

Les méthodes ici présentées doivent être considérées comme *complémentaires* des méthodes d'élimination classique (Gauss - Choleski) qu'elles peuvent contrôler de façon courante. Elles sont les seules applicables dans certains cas déterminés.



### BIBLIOGRAPHIE

- H.M. DUFOUR, 1961 : Résolution des systèmes linéaires — Méthodes itératives — Méthodes par élimination — Essai d'une méthode synthétisant les deux points de vue — Cas de l'équation de Laplace, No 26.972 I.G.N./2.
- H.M. DUFOUR, 1964 : Résolution des systèmes linéaires par la méthode des résidus conjugués. Bulletin géodésique No 71, Mars 1964.
- H.M. DUFOUR, 1967 : La résolution des systèmes linéaires par la méthode des résidus conjugués. Contrat 72/65 D.R.M.E./I.G.N., No 26.981 B — I.G.N./2.
- H.M. DUFOUR, 1968 : Développements théoriques sur les méthodes des gradients conjugués et des résidus conjugués. No 26.919 I.G.N./2.
- H.M. DUFOUR, 1973 : Propriétés des systèmes linéaires symétriques déduites de leur forme spectrale — Symposium d'Oxford. No 26.781 I.G.N./2.
- M.R. HESTENES & E. STIEFFEL, 1952 : Methods of conjugate gradients for solving linear systems. Journal of Research of the N.B.S., Décembre 1952.
- H. MORITZ, 1972 : Advanced least squares methods. Reports of the Department of Geodetic Science. Report No 175 — June 1972.
- N.K. SAXENA, 1973 : Adjustment technique without explicit formation of normal equations. Symposium d'Oxford, Septembre 1973.



Annexe 1

Exemple de Résolution de Système

A) Matrice définie positive et symétrique – Méthode des résidus conjugués normalisés.

Résolution du système  $A \cdot X = K$  avec

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{vmatrix} \quad K = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} \quad n = 100$$

La convergence a lieu en 100 itérations exactement.

Nombre d'itérations	$y_i$	$R_i^* R_i / R_i^* A R_i$	$R_i^* R_i$
1	0,80000	0,50	0,2000
10	0,23913	3,50	$0,1976 \cdot 10^{-2}$
20	0,13319	6,83	$0,3020 \cdot 10^{-3}$
30	0,09226	10,17	$0,9601 \cdot 10^{-4}$
40	0,07056	13,50	$0,4198 \cdot 10^{-4}$
50	0,05713	16,83	$0,2197 \cdot 10^{-4}$
60	0,04799	20,17	$0,1290 \cdot 10^{-4}$
70	0,04137	23,50	$0,8209 \cdot 10^{-5}$
80	0,03636	26,83	$0,5543 \cdot 10^{-5}$
90	0,03243	30,17	$0,3917 \cdot 10^{-5}$
99	0,02955	33,17	$0,2956 \cdot 10^{-5}$
100	1,00000	33,51	0,0000

En simple précision (6–7 décimales), on trouve à la centième itération :

$$R_i^* R_i = 0,2350 \cdot 10^{-11}$$

METHODES SEMI-ITERATIVES DE RESOLUTION DES SYSTEMES LINEAIRES

*B) Matrice définie positive non symétrique – Méthode du chapitre IV*

Résolution du système  $A \cdot X = K$  avec

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad K = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Cet exemple nécessite deux réinitialisations, ce qui est exceptionnel. Nous le donnons pour montrer les difficultés maximales qui peuvent être rencontrées dans la résolution.

Nombre d'itérations	$y_i$	$y'_i$	$\mu_i = \mu'_i$	$R_i^* R_i$	$R'_i{}^* R'_i$	Observations
1	0,5	1,0	0,0	0,500	0,000	initialisation
2	0,5	1,0	0,0	0,375	0,250	réinitialisation
3	-0,333	-1,0	-0,5	0,333	0,125	
4	1,0	1,5	-0,666	0,250	0,000	
5	1,0	1,0	0,0	0,1875	0,1875	réinitialisation
6	-1,0	-1,0	-1,0	0,125	0,125	
7	1,0	1,0	-1,0	0,0625	0,0625	
8	-1,0	-1,0	-1,0	0,000	0,000	

On notera la décroissance régulière de  $R_i^* R_i$  jusqu'à la 7<sup>ème</sup> itération et sa chute brutale à la huitième, ce qui est caractéristique du critère des résidus conjugués ( $B = A, R_i^* R_i$  minimum). En effectuant le calcul en simple précision, on trouve à la 8<sup>ème</sup> itération :

$$R_i^* R_i = 0,888 \cdot 10^{-13}$$

**C) Matrice non définie positive, symétrique – Méthode du chapitre V**

Résolution du système  $A \cdot X = K$  avec

$$A = \begin{vmatrix} -0,08 & -1,44 & 0 \\ -1,44 & -0,92 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad K = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

La matrice  $A$  a la valeur propre 1 double et la valeur propre  $-2$ . Nous donnons cet exemple simple pour montrer que la méthode converge en moins de  $n$  itérations si certaines valeurs propres de  $A$  sont confondues.

Nombre d'itérations	Vecteurs	Composantes			$y_i$
		1	2	3	
1	R	0,507	0,235	1,324	-0,3243
	X	-0,324	-0,324	-0,324	
	P	1	1	1	
	$\theta$	-1,520	-2,360	1	
2	R	0	0	0	0,500
	X	-0,260	-0,680	1	
	P	0,129	-0,711	2,649	
	$\theta$	1,014	0,469	2,649	

**D) Matrice quelconque – Deuxième méthode du chapitre VI**

On a appliqué le deuxième algorithme du chapitre VI à l'exemple déjà traité en B et on pourra comparer les deux résolutions. (La première méthode du chapitre VI se confond ici avec celle du chapitre IV utilisée en B puisque  $A$  est définie positive). On résout ici :

$$\begin{vmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X' \\ X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K \\ K \end{vmatrix}$$

METHODES SEMI-ITERATIVES DE RESOLUTION DES SYSTEMES LINEAIRES

avec  $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$   $K = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

Nombre d'itérations	$y_i$	$\mu_i$	$\nu_i$	$R_i^* R_i$
1	0,666	0,0	0,0	0,666
2	0,200	-1,333	0,0	0,600
3	-0,333	0,933	-0,555	0,333
4	0,0	-0,600	-1,440	0,333
5	0,211	0,0	-0,416	0,263
6	0,043	0,158	-1,583	0,261
7	-1,0	-0,114	-0,765	0,0

En simple précision, on trouve à la 7<sup>ième</sup> itération :

$$R_i^* R_i = 1,025 \cdot 10^{-12}$$

On remarquera que, à la 4<sup>ème</sup> itération,  $y_i$  est nul, mais que le processus continue normalement.

**Annexe 2**

**Réduction des Matrices symétriques à leur forme spectrale**

(Dufour, 1968, 1973)

Toutes les méthodes de résolution sont "globales", c'est-à-dire :

- qu'elles sont indépendantes de l'ordre des inconnues
- que les scalaires  $y, \mu, \nu \dots$  sont invariants si on applique une transformation orthonormée sur les inconnues et les termes constants.

On peut donc se ramener à la résolution du système

$$\Lambda X = R^{(1)} \tag{34}$$

Il est identique de raisonner (sauf au point de vue erreurs d'arrondis) sur l'ensemble des systèmes symétriques  $(A, K)$  et sur l'ensemble des systèmes diagonaux  $(\Lambda, R)$ .

**Gradients conjugués**

Considérons les polynômes orthogonaux  $[1, P_1(\lambda) \dots P_i(\lambda) \dots P_n(\lambda)]$ , formés par orthogonalisation, dans l'intervalle  $0 < \lambda < \infty$  avec la distribution de poids :  $m_h = \lambda_h R_h^2$  ( $h = 1, 2 \dots n$ ).

Les gradients  $P_i$ , dans la méthode des gradients, correspondent à l'application à  $R$  de la suite de ces polynômes :

$$\begin{aligned} P_1 &= R_1 \\ P_2 &= P_1(\lambda) R_1 \\ &\vdots \\ P_i &= P_i(\lambda) R_1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

On reconnait en effet la relation de conjugaison :

$$P_i^* \Lambda P_j = \sum_h P_i(\lambda) P_j(\lambda) \lambda_h R_h^2 = \int_0^\infty P_i(\lambda) P_j(\lambda) d(\lambda_h R_h^2) \tag{35}$$

(1)

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}$$

étant la matrice spectrale du système



METHODES SEMI-ITERATIVES DE RESOLUTION DES SYSTEMES LINEAIRES

*Résidus conjugués*

On introduit de même les polynômes orthogonaux (entre  $-\infty$  et  $+\infty$ ) par rapport à la distribution de poids  $[\lambda_h^2 R_h^2]$ .

Les vecteurs  $P$  sont les résultats de l'application de ces polynômes au vecteur  $R$ . On reconnaît la relation d'orthogonalité des  $\theta = \Lambda P$  :

$$\langle \theta_i \theta_j \rangle = \sum_h P_i(\lambda) P_j(\lambda) \lambda_h^2 R_h^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} P_i(\lambda) P_j(\lambda) d(\lambda_h^2 R_h^2) \quad (36)$$

La méthode utilisée en (V) pour résoudre les systèmes symétriques quelconques n'est en fait que l'utilisation de la relation existant entre 3 polynômes orthogonaux successifs. Si l'on prenait :

1) Une distribution dense uniforme de valeurs propres de  $-1$  à  $+1$

2) La fonction  $R(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$  ( $\rightarrow X = \frac{1}{\lambda^2}$ )

les polynômes  $\theta$  seraient les polynômes de Legendre et la relation entre 3  $\theta$  successifs deviendrait la relation entre 3 polynômes successifs :

$$\theta_{i+1} = \frac{2i+1}{i+1} \lambda P_i(\lambda) + 0 P_i(\lambda) - \frac{i}{i+1} P_{i-1}(\lambda)$$

(le coefficient de  $P(\lambda)$  étant ici nul par symétrie).



**Annexe 3**

**Considérations générales sur les systèmes quelconques**

A) Soit un système carré quelconque :

$$A X = K$$

On peut écrire :

$$A = N + G, \text{ avec } \begin{cases} N = \text{matrice symétrique} \\ G = \text{matrice antisymétrique} \end{cases}$$

On peut trouver une transformation orthonormée de matrice  $a$  telle que :

$$a^T N a = \Lambda = \text{matrice diagonale}$$

Le système initial peut s'écrire, après application de cette transformation :

$$[\Lambda + a^T G a] X' = K' \quad (37)$$

$a^T G a$  étant une matrice antisymétrique, car :

$$G + G^T = 0 \Rightarrow a^T G a + a^T G^T a = 0$$

L'ensemble des systèmes à matrice carrée se ramène donc à l'ensemble :

$$(\Lambda + G) X = K$$

$\Lambda =$  matrice diagonale

$G =$  matrice antisymétrique

Le sous-ensemble des matrices définies positives correspond au cas où tous les termes de  $\Lambda$  sont positifs.

B) Commentaire sur la résolution :

$$\begin{vmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} X \\ Y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K \\ K' \end{vmatrix}$$

## METHODES SEMI-ITERATIVES DE RESOLUTION DES SYSTEMES LINEAIRES

On a ramené le système  $A X = K$  à un système symétrique non défini positif :

$$N = \begin{vmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{vmatrix}$$

Soit  $\lambda_h$  une valeur propre, et  $\begin{vmatrix} V_h \\ W_h \end{vmatrix}$  le vecteur propre correspondant.

On a :

$$A W_h = \lambda V_h$$

$$A^* V_h = \lambda W_h$$

$$\Rightarrow A^* A W_h = \lambda A^* V_h = \lambda^2 W_h$$

$$\text{et } A A^* V_h = \lambda A W_h = \lambda^2 V_h$$

On a donc la correspondance suivante :

$$\left. \begin{array}{l} (A A^*) V_h = s V_h \\ (A^* A) W_h = s W_h \end{array} \right\} \Rightarrow N \times \begin{vmatrix} V_h \\ \pm W_h \end{vmatrix} = \pm \sqrt{s} \begin{vmatrix} V_h \\ \pm W_h \end{vmatrix}$$

On peut prendre  $V_h$  orthogonaux entre eux, et  $W_h$  orthogonaux entre eux. Les composantes de  $(K, K')$  sur  $(V_h, W_h)$  sont :

$$K_h = V_h^* K + W_h^* K' \quad (\text{valeur propre } \lambda_h)$$

$$K_{-h} = V_h^* K - W_h^* K' \quad (\text{valeur propre } -\lambda_h)$$

Dans certains cas, on peut avoir :

$$K_{-h} = 0 \Rightarrow V_h^* K = W_h^* K'$$

– C'est le cas si  $A = A^*$  si on prend  $K = K'$

– C'est aussi le cas si  $V_h \equiv W_h$  si on prend aussi  $K = K'$ , c'est-à-dire si

$$A A^* \equiv A^* A \quad (\text{matrice normale})$$

La convergence a alors lieu en  $n$  itérations, les composantes sur les axes correspondant aux valeurs propres négatives n'intervenant pas dans le calcul.

Par contre, on peut avoir :

$$K_h = K_{-h} \Rightarrow W_h^* K' = 0 \Rightarrow K' = 0$$

Dans ce cas, la convergence a lieu en  $2n$  itérations, une itération sur  $2$  donnant  $y = 0$ .

Dans le cas général, il semble avantageux de partir de  $K = K'$ , mais en réinitialisant dès qu'un gain sensible a été réalisé sur  $R^* R$ .



**Annexe 4**

**Résolution des Systèmes de Moindres carrés  
(et des Systèmes carrés quelconques)**

*(Voir Moritz, 1972)*

Un système de moindres carrés s'écrit, après linéarisation :

$$\left. \begin{aligned}
 GX &= \ell + HV = \ell + V' \\
 X &= \text{paramètres, de valeur probable } 0, \text{ de poids } \pi \text{ (signal)} \\
 \ell &= \text{lectures} \\
 V &= \text{corrections aux lectures, de valeur probable } 0, \text{ de variance } \Sigma
 \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

La solution est donnée par le minimum d'une fonction  $\phi$ , dans laquelle  $L$  sont des corrélatifs de Lagrange :

$$\phi = V^* \Sigma^{-1} V + 2L^* (GX - \ell - HV) + X^* \pi X$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial V} = 0 \Rightarrow \Sigma^{-1} V - H^* L = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial L} = 0 \Rightarrow -HV + GX = \ell$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial X} = 0 \Rightarrow G^* L + \pi X = 0$$

On élimine  $V$ , et on pose  $U = H \Sigma H^* = \text{variance } (HV) = \text{Var } \{V'\}$

$$V = \Sigma H^* L \quad V' = HV = UL$$

$$\left\| \begin{aligned}
 -UL + GX &= \ell \\
 G^* L + \pi X &= 0
 \end{aligned} \right\| \quad (39)$$

**1) Relations d'observations**

$$H = I \quad \Sigma = I \quad \pi = 0 \quad G^* GX = G^* \ell$$

a) *Résolution par les gradients* (voir Saxena, 1973).

Le programme général (14) s'adapte avec quelques simplifications :

$$\begin{array}{ll}
 R_1 = G^* \ell & R_i = R_{i-1} - y_{i-1} G^* \sigma_{i-1} \\
 S_1 = G R_1 & S_i = G R_i \\
 \mu_1 = 0 & \mu_i = - \frac{\sigma_{i-1}^* S_i}{\sigma_{i-1}^* \sigma_{i-1}} = \frac{R_i^* R_i}{R_{i-1}^* R_{i-1}} \\
 P_1 = R_1 & P_i = R_i + \mu_i P_{i-1} \\
 \sigma_1 = S_1 & \sigma_i = S_i + \mu_i \sigma_{i-1} \\
 y_1 = \frac{P_1^* R_1}{\sigma_1^* \sigma_1} & y_i = \frac{P_i^* R_i}{\sigma_i^* \sigma_i} \\
 X_1 = y_1 P_1 & X_i = X_{i-1} + y_i P_i
 \end{array} \tag{40}$$

*Test*  $R_i^* R_i < \epsilon \rightarrow \text{fin.} \quad V = Ax - \ell$

Signification du teste d'arrêt :

$$R = 0 \iff R_1 - (G^* G) X = 0 \iff G^* (\ell - GX) = 0 \iff G^* V = 0 \tag{41}$$

Ce résultat est typique d'une résolution en moindres carrés ; toutefois,  $R^* R$  n'est pas forcément régulièrement dégressif.

b) *Résolution par les résidus conjugués*

Il suffit de reprendre le programme (16) avec les modifications suivantes :

$$\begin{array}{ll}
 R_1 = K & \Rightarrow R_1 = G^* \ell \\
 T_1 = AR_1 & \Rightarrow S_1 = GR_1 ; T_1 = G^* S_1 \\
 T_i = AR_i & \Rightarrow S_i = GR_i ; T_i = G^* S_i
 \end{array} \tag{42}$$

à la fin, ajouter  $V = GX - \ell$  (calcul des corrections).

Dans ce cas,  $(R^* R)$  diminue régulièrement au cours du calcul. Le vecteur auxiliaire  $S$  est nécessaire si on désire travailler directement à partir de la matrice  $G$ .

## METHODES SEMI-ITERATIVES DE RESOLUTION DES SYSTEMES LINEAIRES

### 2) Equations de contrainte classique

$$G = 0, \quad \Sigma = I. \quad HV + \ell = 0$$

On résout en posant

$$V = H^* L; \quad H H^* L + \ell = 0$$

#### a) Méthode des gradients

Appliquer le programme (40), avec les modifications suivantes :

$$\begin{aligned} R_1 = G^* \ell &\Rightarrow R_1 = -\ell \\ X_i &\Rightarrow L_i \\ V = AX - \ell &\Rightarrow V = H^* L \end{aligned} \quad (43)$$

#### b) Méthode des résidus

Appliquer le programme (16), avec les modifications suivantes :

$$\begin{aligned} R_1 = K &\Rightarrow R_1 = -\ell \\ T_1 = AR_1 &\Rightarrow S_1 = H^* R_1; \quad T_1 = HS_1 \\ T_i = AR_i &\Rightarrow S_i = H^* R_i; \quad T_i = HS_i \\ X_i &\Rightarrow L_i \end{aligned} \quad (44)$$

à la fin, ajouter  $V = H^* L$

### 3) Systèmes carrés quelconques

Les quatre méthodes ci-dessus sont applicables.

### 4) Equation de contrainte avec $\Sigma \neq I$

$$HV + \ell = 0, \quad V = \Sigma H^* L. \quad H \Sigma H^* L + \ell = 0$$

La méthode des gradients subsiste, adaptée de (14), mais pas la forme (40).

La méthode des résidus subsiste intégralement, avec naturellement les modifications :

$$\begin{aligned} S_i = H^* R_i; \quad S'_i = \Sigma S_i; \quad T_i = HS'_i \\ X_i \Rightarrow L_i; \quad V = \Sigma H^* L \end{aligned} \quad (45)$$

5) *Système général de moindres carrés*

Le système (39) ci-dessus est un système symétrique, soluble par la méthode explicitée en (25), qui donne simultanément  $X$  et  $L$ . On notera que le procédé est applicable du moment que la matrice  $\begin{vmatrix} -U & G \\ G^* & \pi \end{vmatrix}$  est régulière, ce qui n'implique pas forcément que  $\pi$  et  $U$  le soient. Il est facile aussi de se rendre compte que toutes les opérations se font à partir des matrices données initiales  $(G, H, \Sigma, P)$  et des vecteurs auxiliaires.

