

## Sulla funzione gamma incompleta.

Memoria di FRANCESCO G. TRICOMI (a Pasadena, California).

---

**Sunto.** - *Studio sistematico della funzione in parola, ch'è un'importante caso particolare delle funzioni ipergeometriche confluenti, insistendo particolarmente su alcuni nuovi lineamenti della teoria, p. es. su certi sviluppi in serie di funzioni di Bessel e sullo studio dell'andamento nel campo reale.*

### § 1 - Argomento della Memoria.

Nella redazione di una Monografia su casi particolari delle funzioni ipergeometriche confluenti per il *Bateman Manuscript Project* <sup>(1)</sup> ho avuto occasione di convincermi che la funzione gamma incompleta, solitamente definita mediante l'integrale

$$(1) \quad \gamma(\alpha, x) = \int_0^x e^{-tz} z^{\alpha-1} dt,$$

ha un'importanza maggiore di quel che generalmente si ritiene <sup>(2)</sup>. Fra l'altro, questa funzione consente uno sguardo d'insieme su di una quantità di funzioni: integrale degli errori, integralseno, integralkoseno ed esponenziale integrale, integrali di FRESNEL e loro generalizzazioni, ecc., che altrimenti si presentano sparpagliatamente e vengono spesso trattate in modi non del tutto coerenti fra loro.

Mi è parso pertanto opportuno assoggettare la funzione di cui si discorre ad uno studio più approfondito del solito, determinandone, fra l'altro, il non semplice comportamento asintotico al simultaneo divergere di  $|\alpha|$  e  $|x|$  ( $\infty$ ), il che non sembra fosse stato mai fatto precedentemente.

Nella presente Memoria considero taluni altri aspetti della teoria della funzione gamma incompleta e principalmente certe sue nuove rappresentazioni integrali, certi suoi nuovi sviluppi in serie, ecc. e studio dettagliatamente l'andamento della funzione nel campo reale, cioè per valori reali di  $\alpha$  e  $x$ .

---

<sup>(1)</sup> Un'iniziativa del *California Institute of Technology* finanziata dall'*Office of Naval Research* degli U. S. A.

<sup>(2)</sup> La sola trattazione un po' approfondita di questa funzione di cui io sia a conoscenza è contenuta nel libro di P. E. BÖHMER, *Differenzenrechnung und bestimmte Integrale* (Leipzig, Koeler, 1939).

<sup>(3)</sup> F. TRICOMI, *Asymptotische Eigenschaften der unvollständigen Gammafunktion*, « *Math. Zeitschrift* », 53 (1950), 136-148.

§ 2 - La fondamentale funzione  $\gamma^*(\alpha, x)$ .

Non è opportuno fondare la teoria della funzione gamma incompleta sulla rappresentazione integrale (1), non solo pel fatto che l'integrale converge soltanto se  $\Re \alpha > 0$ , ma soprattutto perchè dal prolungamento analitico della (1) nasce una funzione non uniforme di  $x$ , che non è reale per  $x$  negativo e inoltre ha infiniti poli nei punti  $\alpha = 0, -1, -2, \dots$ . È preferibile prendere invece come base il rapporto — che designeremo con  $\gamma^*(\alpha, x)$  — fra il precedente integrale e il prodotto  $\Gamma(\alpha)x^\alpha$ , che risulta una funzione *intera* sia di  $\alpha$  sia di  $x$  e che inoltre è sempre reale quando  $\alpha$  ed  $x$  sono tali. Questo rapporto coincide sostanzialmente con la funzione ipergeometrica confluyente di POCHHAMMER-KUMMER nel caso  $a = 1$ . Precisamente si ha

$$(2) \quad \gamma^*(\alpha, x) = e^{-x} \frac{\Phi(1, \alpha + 1; x)}{\Gamma(\alpha + 1)} = \frac{\Phi(\alpha, \alpha + 1; -x)}{\Gamma(\alpha + 1)}$$

avendo, in generale, posto (\*)

$$\Phi(a, c; x) \equiv {}_1F_1(a, c; x) = 1 + \frac{a}{c} \frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{x^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)}{c(c+1)(c+2)} \frac{x^3}{3!} + \dots$$

La funzione analitica (2) — ovviamente uniforme e sempre reale per  $\alpha$  ed  $x$  reali — è inoltre sempre finita per  $\alpha$  ed  $x$  finiti perchè quando  $\alpha$  si avvicina ad un intero negativo (i soli valori per cui possono esserci, *a priori*, dei dubbi) si ha

$$(3) \quad \lim_{\alpha \rightarrow -m} \gamma^*(\alpha, x) = e^{-x} \lim_{\alpha \rightarrow -m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(\alpha + n + 1)} = e^{-x} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{x^n}{(n-m)!} = x^m, \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Noi ci baseremo dunque sulla funzione  $\gamma^*$  definita dalla (2) definendo a partire da essa l'usuale funzione gamma incompleta  $\gamma(\alpha, x)$  mediante la formula

$$(4) \quad \gamma(\alpha, x) = \Gamma(\alpha)x^\alpha \gamma^*(\alpha, x),$$

supponendo assunto in essa il *valor principale* della potenza  $x^\alpha$ , cioè quello corrispondente ad un *arg*  $x$  compreso fra  $-\pi$  e  $\pi$ .

Tale definizione è in pieno accordo con la (1) fintanto che quella ha un senso, cioè fintanto che  $\Re \alpha > 0$ .

Inoltre sarà talvolta utile riferirsi alla *funzione gamma complementare*:

$$(5) \quad \Gamma(\alpha, x) \equiv \Gamma(\alpha) - \gamma(\alpha, x) = \Gamma(\alpha)[1 - x^\alpha \gamma^*(\alpha, x)]$$

nonchè alla funzione

$$(6) \quad \gamma_1(\alpha, x) = \Gamma(\alpha)x^\alpha \gamma^*(\alpha, -x)$$

che, in certo senso, rimpiazza la funzione  $\gamma(\alpha, x)$  sul semiasse reale negativo, essendo ivi:

$$(7) \quad \gamma(\alpha, -x \pm i0) = e^{\pm \alpha \pi i} \gamma_1(\alpha, x), \quad (x > 0).$$

(\*) La funzione  $\Phi(a, c; x)$  è invece denotata con  $F(a, c; x)$  nella mia Memoria: *Sulle funzioni ipergeometriche confluenti*, in questi stessi *Annali* (4) 26 (1947) 141-175. Cambio la notazione per metterla d'accordo con quella adottata nel *Bateman Project*.

§ 3. - **Casi particolari notevoli.**

Come si diceva dianzi, vi è una quantità di funzioni speciali: integrale degli errori, integralseno, ecc. che si possono studiare da un punto di vista unitario considerandole come casi particolari della funzione gamma incompleta. In particolare questo accade per le funzioni usualmente introdotte mediante le rappresentazioni integrali seguenti o altre lievemente differenti ( $C$  denota la costante di EULER):

$$(8) \quad \text{Erf}(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad \text{Erfi}(x) = \frac{1}{i} \text{Erf}(ix) = \int_0^x e^{t^2} dt$$

$$(9) \quad \text{Ei}(x) = \int_x^\infty e^{-t} \frac{dt}{t}, \quad \text{Ei}_1(x) = \int_{-x}^* e^{-t} \frac{dt}{t} = -\log x - C - \sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n \cdot n!}$$

$$(10) \quad \text{Ci}(x) = \int_x^\infty \cos t \frac{dt}{t}, \quad \text{Si}(x) = \int_x^\infty \sin t \frac{dt}{t} = \frac{\pi}{2} - \int_0^x \sin t \frac{dt}{t}.$$

$$(11) \quad C(\alpha, x) = \int_x^\infty \cos t \cdot t^{\alpha-1} dt, \quad S(\alpha, x) = \int_x^\infty \sin t \cdot t^{\alpha-1} dt, \quad (\Re \alpha < 1)$$

$$(12) \quad \begin{cases} C(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{x^2} \cos(\tau^2) d\tau, \\ S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{x^2} \sin(\tau^2) d\tau. \end{cases}$$

Tutte queste funzioni possono ricondursi direttamente o indirettamente alla funzione  $\gamma^*(\alpha, x)$  e connesse mediante le formule seguenti:

$$(8') \quad \text{Erf}(x) = \frac{1}{2} \gamma\left(\frac{1}{2}, x^2\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} x \gamma^*\left(\frac{1}{2}, x^2\right), \quad \text{Erfi}(x) = \frac{1}{2} \gamma_1\left(\frac{1}{2}, x^2\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} x \gamma^*\left(\frac{1}{2}, -x^2\right),$$

$$(9) \quad \text{Ei}(x) = \Gamma(0, x), \quad \text{Ei}_1(x) = \text{Ei}(-x) - i\pi \operatorname{sgn}(\Im x)$$

$$(10') \quad \text{Ci}(x) = \frac{1}{2} [\text{Ei}(ix) + \text{Ei}(-ix)], \quad \text{Si}(x) = \frac{i}{2} [\text{Ei}(ix) - \text{Ei}(-ix)]$$

$$(11') \quad \begin{cases} C(\alpha, x) = \frac{1}{2} [e^{-\alpha\pi i/2} \Gamma(\alpha, ix) + e^{\alpha\pi i/2} \Gamma(\alpha, -ix)] \\ S(\alpha, x) = \frac{i}{2} [e^{-\alpha\pi i/2} \Gamma(\alpha, ix) - e^{\alpha\pi i/2} \Gamma(\alpha, -ix)] \end{cases}$$

$$(12') \quad C(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} C\left(\frac{1}{2}, x\right), \quad S(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} S\left(\frac{1}{2}, x\right).$$

Un altro notevole caso particolare è il caso  $\alpha = n + 1$ , ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) in cui si ha

$$(13) \quad \gamma(n+1, x) = n! [1 - e^{-x} e_n(x)] \quad \text{con} \quad e_n(x) = \sum_{m=0}^n \frac{x^m}{m!}.$$

#### § 4 - Proprietà fondamentali.

Le proprietà fondamentali della funzione gamma incompleta sono espresse dalle formule seguenti che, essendo casi particolari di corrispondenti formule sulle funzioni ipergeometriche confluenti, non richiedono speciali dimostrazioni e delucidazioni:

a) *Sviluppi in serie di potenze*, ovunque convergenti:

$$(14) \quad \gamma^*(\alpha, x) = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(\alpha + n + 1)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{(\alpha + n) \cdot n!}$$

b) *formule di ricorrenza*:

$$(15) \quad \gamma^*(\alpha - 1, x) = x\gamma^*(\alpha, x) + \frac{e^{-x}}{\Gamma(\alpha)}, \quad \gamma(\alpha + 1, x) = \alpha\gamma(\alpha, x) - x^2 e^{-x}$$

c) *formule di derivazione* <sup>(5)</sup> ed equazione differenziale:

$$(16) \quad \frac{\partial^n \gamma^*}{\partial x^n} = (-1)^n (\alpha)_n \gamma^*(\alpha + n, x), \quad \frac{\partial^n}{\partial x^n} [e^x x^\alpha \gamma^*(\alpha, x)] = e^x x^{\alpha-n} \gamma^*(\alpha - n, x)$$

$$(17) \quad \left( \frac{\partial \gamma^*}{\partial \alpha} \right)_{x=0} = -Ei(x) - \log x$$

$$(18) \quad xy'' + (\alpha + 1 + x)y' + \alpha y = 0, \quad y = \gamma^*(\alpha, x)$$

d) *Sviluppi asintotici per*  $|x| \rightarrow \infty$  *ma*  $|\alpha|$  *limitato*:

$$(29) \quad \Gamma(\alpha, x) \sim e^{-x} x^{\alpha+1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(1-\alpha)_n}{x^n}, \quad \gamma^*(\alpha, x) \sim x^{-\alpha} - \frac{e^{-x}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(1-\alpha)_n}{x^{n+1}},$$

con l'osservazione che se la parte reale di  $x$  è negativa, la seconda formula, cambiando  $x$  in  $-x$  ed  $n$  in  $n - 1$  può più semplicemente scriversi

$$(19') \quad \gamma^*(\alpha, -x) \sim \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} e^{-x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n - \alpha)}{x^n}, \quad (\Re x > 0).$$

<sup>(5)</sup> Qui e nel seguito usiamo la comoda abbreviazione

$$(x)_n = \alpha(\alpha + 1) \dots (\alpha + n - 1) = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

intendendo inoltre che sia  $(x)_0 = 1$ .

Meno semplice è lo studio asintotico della nostra funzione se si lascia cadere l'ipotesi che  $|\alpha|$  resti limitato. Ad esso è dedicato il lavoro cit. (3) in cui si è rivelato decisivo il comportamento del rapporto.

$$(20) \quad z = \frac{\sqrt{\alpha}}{x - \alpha}.$$

Se il modulo di tale rapporto tende a zero e il suo argomento rimane, almeno da un certo punto in poi, compreso fra  $-\frac{3\pi}{4}$  e  $\frac{3\pi}{4}$ , si trova che

$$(21) \quad \Gamma(\alpha + 1, x) \sim e^{-x} x^{\alpha+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_{\alpha}^{(n)}(0)}{(x - \alpha)^{n+1}}$$

essendo

$$(22) \quad F_{\alpha}(t) = e^{-at}(1+t)^{\alpha}$$

ciò che in particolare implica (6)

$$F_{\alpha}(0) = 1, \quad F'_{\alpha}(0) = 0, \quad F''_{\alpha}(0) = -\alpha, \quad F'''_{\alpha}(0) = 2\alpha, \dots$$

Se invece il rapporto (2) non si avvicina a zero, cioè se, posto

$$x = \alpha + \sqrt{2\alpha} y, \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}y},$$

la quantità  $y$  resta limitata, si hanno due diversi tipi di sviluppi asintotici secondo il segno di  $\Re\alpha$ . In particolare se  $\alpha$  ed  $y$  sono entrambi *reali*, considerando i primi tre termini soltanto degli sviluppi in parola, si hanno le semplici formule asintotiche (per  $\alpha > 0$ ):

$$(23) \quad \frac{\gamma(\alpha + 1, \alpha + \sqrt{2\alpha}y)}{\Gamma(\alpha + 1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Erf}(y) - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}} (1 + y^2)e^{-y^2} + O\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$(24) \quad \Gamma(\alpha)\gamma_1(1 - \alpha, \alpha + \sqrt{2\alpha}y) = -\pi \cotg \alpha\pi + 2\sqrt{\pi} \operatorname{Erf}(y) + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} (1 - y^2)e^{y^2} + O\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

Per gli sviluppi completi, le conseguenze relative agli zeri, ecc. vedi il lavoro cit. (3).

### § 5 - Rappresentazioni integrali.

La rappresentazione integrale (1) è soggetta alla forte restrizione  $\Re\alpha > 0$ . Invece la corrispondente rappresentazione della funzione complementare

$$(25) \quad \Gamma(\alpha, x) = \int_x^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$$

è valida per ogni  $\alpha$  ed ogni  $x$  del piano complesso  $x$  tagliato lungo il semi-asse reale negativo, purchè il cammino d'integrazione eviti l'analogo taglio nel piano  $t$  e vada all'infinito in modo tale che su di esso sia  $\lim \Re t = +\infty$ .

(6) Le derivate di questa funzione per  $t=0$  sono certi interessanti polinomi in  $\alpha$  che vengono studiati in un mio lavoro in corso di stampa dal titolo: *A class of non-orthogonal polynomials related to those of Laguerre*.

Un'altra utile rappresentazione integrale, stavolta della funzione  $\gamma^*$ , si ottiene dalla classica rappresentazione integrale della funzione ipergeometrica confluyente mediante un integrale a laccio. Precisamente, escluso il solo caso di  $\alpha$  intero positivo, si ha così, con ben nota scrittura,

$$(26) \quad \gamma^*(\alpha, x) = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{2\pi i} e^{-\alpha\pi i} \oint_1^{(0+)} e^{-xt} t^{\alpha-1} dt.$$

In particolare, supponendo che il cammino d'integrazione si riduca alla circonferenza  $|t| = 1$ , con brevi calcoli si trova che

$$(27) \quad \gamma^*(\alpha, x) = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\pi} e^{-\alpha\pi i} \left[ e^{-\alpha\pi i} \int_0^\infty e^{x \cos \theta} \cos(\alpha\theta + x \sin \theta) d\theta \right].$$

Se la parte reale di  $x$  è negativa, la (26) può anche modificarsi in modo che l'integrale risulti esteso alla retta del piano  $t$  su cui è  $\Re(xt) = 0$ . Si ottiene così un'ulteriore nuova rappresentazione integrale di  $\gamma^*$  che assume un aspetto particolarmente semplice allorchè  $\alpha$  ed  $x$  sono entrambi *reali e negativi*. Precisamente in tale ipotesi si ha

$$(28) \quad \gamma^*(\alpha, x) = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\pi} e^{-\alpha\pi i} \left[ e^{-\alpha\pi i} \int_0^\infty e^{-ixt} (1+it)^{\alpha-1} dt \right] \quad (\alpha \leq 0, x \leq 0).$$

Finalmente notiamo l'ulteriore rappresentazione

$$(29) \quad \gamma(\alpha, x) = x^{\alpha/2} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha/2-1} J_\alpha(2\sqrt{xt}) dt, \quad (\Re \alpha > 0, \Re x > 0),$$

che si deduce dalla nota rappresentazione integrale delle funzioni confluenti per mezzo di funzioni di Bessel e l'elegante formula

$$(30) \quad \gamma^*(\alpha, x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta)} \int_0^1 e^{-ixt} t^{\alpha-\beta-1} \gamma^*(\beta, x-t) dt, \quad (\Re \alpha > \Re \beta > -1, \alpha\beta \neq 0),$$

che si deduce facilmente da una formula di ERDÉLYI sulle funzioni confluenti (7).

### § 6 - Sviluppi in serie di funzioni di Bessel.

Fin dal 1941 ho ripetutamente richiamata l'attenzione sull'importanza di certi sviluppi delle funzioni confluenti in serie di funzioni di Bessel, cominciando dal caso dei polinomi di LAGUERRE e di HERMITE (8) per poi passare al caso generale (9).

(7) « Quarterly Journ. of Math. », (Oxford), 10 (1939), 176-189; form. (16) a p. 181.

(8) « Giorn. Istituto Ital. Attuari », 12 (1941), 14-33.

(9) Questi *Annali*, (4) 26 (1947), 141-175 e 233-300; (4) 28 (1949), 263-289.

Introducendo la spesso comoda abbreviazione <sup>(10)</sup>

$$(31) \quad E_\nu(x) = x^{-\nu/2} J_\nu(2\sqrt{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(\nu+n+1)} \frac{x^n}{n!},$$

i principali risultati da me ottenuti nella direzione indicata sono i due sviluppi

$$(32) \quad \frac{e^{-hx}}{\Gamma(c)} \Phi(a, c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(a, c; h) x^n E_{c+n-1}(-ax)$$

$$(33) \quad \frac{e^{-x/2}}{\Gamma(c)} \Phi(a, c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^*(k, l) \left(\frac{x}{2}\right)^n E_{c+n-1}(kx), \quad k = \frac{c}{2} - a,$$

dove  $h \geq 0$  è un parametro arbitrario ed i coefficienti sono determinati rispettivamente delle due funzioni generatrici

$$(34) \quad \sum_{n=0}^{\infty} A_n(a, c; h) z^n = e^{-az} [1 + (h-1)z]^{-a} (1+hz)^{a-c}, \quad (|z| < 1)$$

$$(35) \quad \sum_{n=0}^{\infty} A_n^*(k, l) z^n = e^{2kz} (1-z)^{k-l} (1+z)^{-k-l}, \quad (|z| < 1)$$

che, fra l'altro, implicano le rispettive relazioni ricorrenti

$$(36) \quad (n+1)A_{n+1} = [(1-2h)n - hc]A_n + \\ + [(1-2h)a - h(h-1)(c+n-1)]A_{n-1} - h(h-1)aA_{n-2}$$

$$(37) \quad (n+1)A_{n+1}^* = (n+2l-1)A_{n-1}^* - 2kA_{n-2}^*.$$

Nei lavori dianzi citati è dimostrato che i due precedenti sviluppi sono validi (con assoluta ed uniforme convergenza delle serie a secondo membro) almeno in certi determinati intervalli dell'asse reale, ma recentemente <sup>(11)</sup> mi sono accorto che lo sviluppo (33) è valido addirittura nell'intero piano complesso  $x$  e lo stesso può dirsi, per le stesse ragioni, per lo sviluppo (32), qualunque sia la costante  $h$ .

Nel caso della funzione gamma incompleta dalla (2) e dalla (32) in cui sia posto  $h=0$ ,  $a=1$ ,  $c=\alpha+1$  si ha

$$\gamma^*(\alpha, x) = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n E_{\alpha+n}(-x),$$

<sup>(10)</sup> La funzione uniforme  $E_\nu(x)$  è legata alla  $\Delta_\nu(x)$  intabulata nelle ben note *Funktionen tafeln* di JAHNKE-EMDE dalla relazione

$$\Gamma(\nu+1)E_\nu(x) = \Delta_\nu(2\sqrt{x})$$

<sup>(11)</sup> Vedi il mio lavoro: *Expansion of the hypergeometric function in series of confluent ones and application to the Jacobi polynomials*, in corso di stampa in « *Commentarii Math. Helvetici* ».

essendo i coefficienti determinanti dalla funzione generatrice

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n = e^{-z}(1-z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h!}$$

il che, servendosi della notazione (13), implica

$$(38) \quad A_m = \sum_{h=0}^m \frac{(-1)^h}{h!} = e_m(-1),$$

e si ha quindi il formalmente semplice e rapidamente convergente sviluppo

$$(39) \quad \gamma^*(\alpha, x) = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} e_n(-1)x^n E_{n+\alpha}(-x)$$

nel cui uso si terrà conto che

$$e_0(-1) = 1, \quad e_1(-1) = 0, \quad e_2(-1) = \frac{1}{2}, \\ e_3(-1) = \frac{1}{3}, \quad e_4(-1) = \frac{3}{8}, \quad e_5(-1) = \frac{11}{30}, \dots$$

Cambiando  $x$  in  $-x$  la (39) assume, con le usuali notazioni per le funzioni di Bessel, l'aspetto

$$(39) \quad \gamma^*(\alpha, -x) = e^x x^{-\alpha/2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e_n(-1)x^n J_{n+\alpha}(2\sqrt{x}).$$

In particolare ponendo  $\alpha = 1/2$ , cambiando  $x$  in  $x^2$  e servendosi della seconda delle (8) si ha

$$(40) \quad \operatorname{Erfi}(x) \equiv \int_0^x e^{t^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\pi x} e^{x^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e_n(-1)x^n J_{n+\frac{1}{2}}(2x).$$

Ritengo che questa serie sia una delle migliori per il calcolo numerico, altrimenti malcomodo, della funzione  $\operatorname{Erfi}(x)$  <sup>(12)</sup>. Per esempio nel caso  $x = 1$ , considerando i termini fino a  $n = 8$ , con un calcolo rapidissimo appoggiato alle tavole a pp. 740-743 delle *Bessel Functions* di G. N. WATSON <sup>(13)</sup> si trova il valore per eccesso <sup>(14)</sup> 1,462655 mentre, aggiungendo ancora il ter-

<sup>(12)</sup> Tavole della funzione  $\operatorname{Erfi}(x)$  sono state pubblicate da H. M. TERRILL e L. SWENY e da altri, cfr. A. FLETCHER, J. C. P. MILLER, L. ROSENHEAD, *An Index of Mathematical Tables*, (London, Scientific Computing Service, 1946). Una piccola tavola della funzione in parola trovasi anche in JAHNKE-EMDE.

<sup>(13)</sup> 2nd Ed. Cambridge, University Press, 1944. Tavole molto più ampie delle funzioni di Bessel (e altre) stanno pubblicandosi a New York a cura del *National Bureau of Standard*. Nel caso in ispecie entrano in considerazione le già uscite *Tables of Spherical Bessel Functions*.

<sup>(14)</sup> Si tenga conto che la serie risulta a termini di segno alterno.



mine  $n=9$ , si trova il valore per difetto 1,462654. Bastano dunque soli 8 termini (anzi 7 perchè  $e_1=0$ ) per ottenere in meno di 5 minuti  $Erfi(1)$  con 6 decimali esatti!

Un diverso sviluppo della funzione gamma incompleta in serie di funzioni di Bessel, può ottenersi partendo dalla (33) con  $a=1$ ,  $c=\alpha+1$ ,  $k=(\alpha-1)/2$  invece che dalla (32). In tal caso i coefficienti sono determinati dalla funzione generatrice

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^* z^n = e^{(\alpha-1)z}(1-z)^{-1}(1+z)^{-\alpha} = \frac{e^{(\alpha-1)z}(1+z)^{1-\alpha}}{1-z^2}$$

che tenuto conto del fatto che, per una nota formula sui polinomi di LA-GUERRE, è

$$e^{(\alpha-1)z}(1+z)^{1-\alpha} = \sum_{m=0}^{\infty} L_m^{(1-\alpha-m)}(1-\alpha),$$

implica la relazione ricorrente semplificata

$$(41) \quad A_n^* = A_{n-2}^* + L_n^{(1-\alpha-n)}(1-\alpha), \quad (n=2, 3, \dots),$$

che unitamente alle formule  $A_0^* = 1$ ,  $A_1^* = 1$ , consente un agevole calcolo dei coefficienti in parola. Lo sviluppo è

$$(42) \quad \Upsilon^*(\alpha, x) = e^{-x/2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^* \left(\frac{x}{2}\right)^n E_{\alpha+n}\left(\frac{\alpha-1}{2}x\right)$$

e pare anch'esso molto adatto ai calcoli numerici.

È degno di nota il fatto che nel caso particolare  $\alpha=1/2$ , oltre agli sviluppi dei due tipi precedenti, ve ne è anche un terzo, formalmente anche più semplice, che sembra peculiare di questo caso particolare. Precisamente si hanno le due formule

$$(43) \quad Erf(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{[n/2]} I_{n-1/2}(x^2), \quad Erfi(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{[n/2]} I_{n+1/2}(x^2)$$

dove  $[n/2]$  denota, al solito, il massimo intero contenuto in  $n/2$  e  $I_\nu$  denota, in genere, la funzione di Bessel modificata:

$$I_\nu(x) = e^{-\nu\pi i/2} J_\nu(\epsilon^{\pi i/2} x).$$

La prima delle (43) <sup>(45)</sup> può essere agevolmente verificata operando con la trasformazione di LAPLACE

$$\mathcal{L}_s[F(t)] \equiv \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt.$$

<sup>(45)</sup> Il passaggio dalla prima alla seconda delle (43) è quasi immediato cambiando  $x$  in  $ix$ .

Precisamente, con una lecita integrazione termine a termine e ponendo, per abbreviare

$$s - \sqrt{s^2 - 1} = \sigma$$

si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_s \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{[n/2]} L_{n-1/2}(t) \right] &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{[n/2]} \mathcal{L}_s [L_{n-1/2}(t)] = [\sigma(\sigma^2 - 1)]^{-1/2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{[n/2]} \sigma^n = \\ &= [\sigma(\sigma^2 - 1)]^{-1/2} \frac{\sigma(1 - \sigma)}{1 + \sigma^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{s\sqrt{s+1}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathcal{L}_s [\text{Erf}(\sqrt{t})] \end{aligned}$$

e ne consegue

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{[n/2]} L_{n-1/2}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{Erf}(\sqrt{t}),$$

eguaglianza equivalente alla prima delle (43).

### § 7 - Alcune altre proprietà.

Nelle mie ricerche (non ancora pubblicate) sulle funzioni ipergeometriche confluenti per il *Bateman Project* ho, fra l'altro, trovato che la seconda soluzione  $\Psi(a, c; x)$  della relativa equazione differenziale <sup>(16)</sup> è suscettibile degli eleganti sviluppi in serie di polinomi di LAGUERRE:

$$\Psi(a, \alpha + 1; x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{n + \alpha} = \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha - \alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{(-\alpha)}(x)}{n + \alpha - \alpha},$$

semprechè la serie che si considera converge, ciò che certamente avviene se  $x > 0$  ed  $\alpha < 1/2$  oppure  $\alpha > -1/2$  rispettivamente per la prima e la seconda serie. In ogni caso però entrambe le serie sono *sommabili* col metodo di ABEL, e la loro somma è quella indicata.

Poichè

$$(45) \quad \Gamma(\alpha, x) = e^{-x} x^\alpha \Psi(1, \alpha + 1; x)$$

dagli sviluppi precedenti si deduce in particolare che

$$(46) \quad \Gamma(\alpha, x) = e^{-x} x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{n + 1} = \frac{e^{-x}}{\Gamma(1 - \alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{(-\alpha)}(x)}{n + 1 - \alpha}$$

con le stesse osservazioni di cui sopra circa la convergenza.

Il primo dei due precedenti sviluppi può considerarsi come il caso limite per  $y \rightarrow 0$  del già noto <sup>(17)</sup> più generale sviluppo

$$(47) \quad \Gamma(\alpha, x) \gamma(\alpha, y) = e^{-x-y} (xy)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(\alpha)_{n+1}} \frac{L_n^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(y)}{n + 1}, \quad (x \geq y > 0).$$

<sup>(16)</sup> Questa funzione è indicata invece con  $G(a, c; x)$  nel mio lavoro cit. <sup>(3)</sup> a cui rimando per la sua precisa definizione.

<sup>(17)</sup> W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER, *Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik*, 2 Aufl. (Berlin etc., Springer, 1948). p. 126.

Altri notevoli sviluppi in serie delle nostre funzioni sono il *teorema d'addizione*

$$(48) \quad \gamma(\alpha, x+y) = e^{-y} \sum_{n=0}^{\infty} (1-\alpha)_n \gamma(\alpha-n, x) \frac{(-y)^n}{n!},$$

immediata conseguenza dell'analogo teorema per le funzioni confluenti, e la *serie di Nielsen* <sup>(18)</sup>

$$(49) \quad \gamma(\alpha, x+y) = \gamma(\alpha, x) + e^{-x} x^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} (1-\alpha)_n [1 - e^{-y} e_n(y)] (-x)^{-n}, \quad (|y| < |x|)$$

spesso utile nei calcoli numerici (interpolazione), che facilmente si deduce dalla rappresentazione integrale della differenza fra due valori della funzione  $\gamma$ :

$$(50) \quad \gamma(\alpha, x+y) - \gamma(\alpha, x) = e^{-x} x^{\alpha-1} \int_0^y e^{-u} \left(1 + \frac{u}{x}\right)^{\alpha-1} du,$$

che, a sua volta, è un'immediata conseguenza della (1).

Anche notevoli sono i rapporti fra la funzione gamma incompleta e la trasformazione di LAPLACE, p. es. le formule

$$(51) \quad \mathcal{L}_x[(1+t)^{\alpha-1}] = e^{\alpha x} x^{-\alpha} \Gamma(\alpha, x) \quad (\Re x > 0)$$

$$(52) \quad \mathcal{L}_x[\gamma(\alpha, kt)] = \frac{\Gamma(\alpha) k^{\alpha}}{x(k+x)^{\alpha}} \quad (\Re \alpha > -1, \Re x > 0, \Re k > -\Re x)$$

facili conseguenze di analoghe formule sulle funzioni confluenti, che rendono conto del fatto che la funzione gamma incompleta si presenta, di regola, ogni volta che c'è da calcolare la trasformata o l'antitrasformata di LAPLACE di una funzione razionale.

Ricordo infine che ho fatto recentemente vedere <sup>(19)</sup> come la *norma*, cioè il quadrato del modulo, della funzione  $\Gamma(\alpha, x)$  possa esprimersi come la trasformata di LAPLACE di una funzione ipergeometrica gaussiana. Precisamente si ha che

$$(53) \quad \Gamma(2-2\alpha) \cdot \Gamma(\alpha, ix) \Gamma(\alpha, -ix) = \mathcal{L}_x[f_{\alpha}(t) + \bar{f}_{\alpha}(t)], \quad (\Re \alpha < 1, \Re x > 0),$$

dove

$$f_{\alpha}(t) = \frac{t^{-2\alpha}}{t+i} F\left(1, 1-\alpha; 2-2\alpha; \frac{t}{t+i}\right) = 2 \frac{t^{-2\alpha}}{t+2i} F\left(1, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}-\alpha; \frac{t}{t+2i}\right)$$

e la soprilineatura denota, al solito, il coniugato.

<sup>(18)</sup> Cfr. BÖHMER, op. cit. <sup>(2)</sup>, p. 128.

<sup>(19)</sup> « Boll. Unione Mat. Italiana », (3) 4 (1950), 341-344.

### § 8 - Andamento nel campo reale.

Quando  $\alpha$  ed  $x$  sono entrambi reali (positivi o negativi) la funzione  $\gamma^*(\alpha, x)$  è, come si è già osservato, anch'essa reale e sempre finita. Del suo generale andamento dà una sufficientemente chiara idea la figura qui appresso in cui sono tracciate alcune linee  $\gamma^*(\alpha, x) = \text{cost.}$  nel piano delle due variabili reali  $\alpha$  e  $x$ , per valori della costante compresi fra  $-6$  e  $+6$ .

Queste linee sono state tracciate servendosi solo in piccola parte delle tavole della funzione gamma incompleta di K. PEARSON <sup>(20)</sup> che, unitamente alle formule di ricorrenza, avrebbero potuto teoricamente servire per coprire l'intero semipiano  $x > 0$ , perchè assai scomode per l'uso. Ci siamo invece principalmente serviti del fatto che la funzione  $\gamma^*$  si riduce a funzioni elementari per  $\alpha$  intero:

$$(54) \quad \gamma^*(n+1, x) = n![1 - e^{-x}e_n(x)], \quad \gamma^*(-n, x) = x^n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

e della circostanza che la nostra funzione si può agevolmente calcolare anche per valori di  $\alpha$  differenti per  $1/2$  da un intero, associando alle formule di ricorrenza le altre

$$(55) \quad \gamma^*\left(\frac{1}{2}, x\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi x}} \text{Erf}(\sqrt{x}) \quad \gamma^*\left(\frac{1}{2}, -x\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi x}} \text{Erfi}(\sqrt{x}).$$

Fra le particolarità più salienti della figura c'è la presenza di *colli* per  $\alpha \leq 0$ , colli di cui il primo: quello sull'asse  $x$ , è l'unico punto in cui risulta

$$\left(\frac{\partial \gamma^*}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = -\text{Ei}(x) - \log x = 0$$

e corrisponde a  $x = 0,6764$  circa.

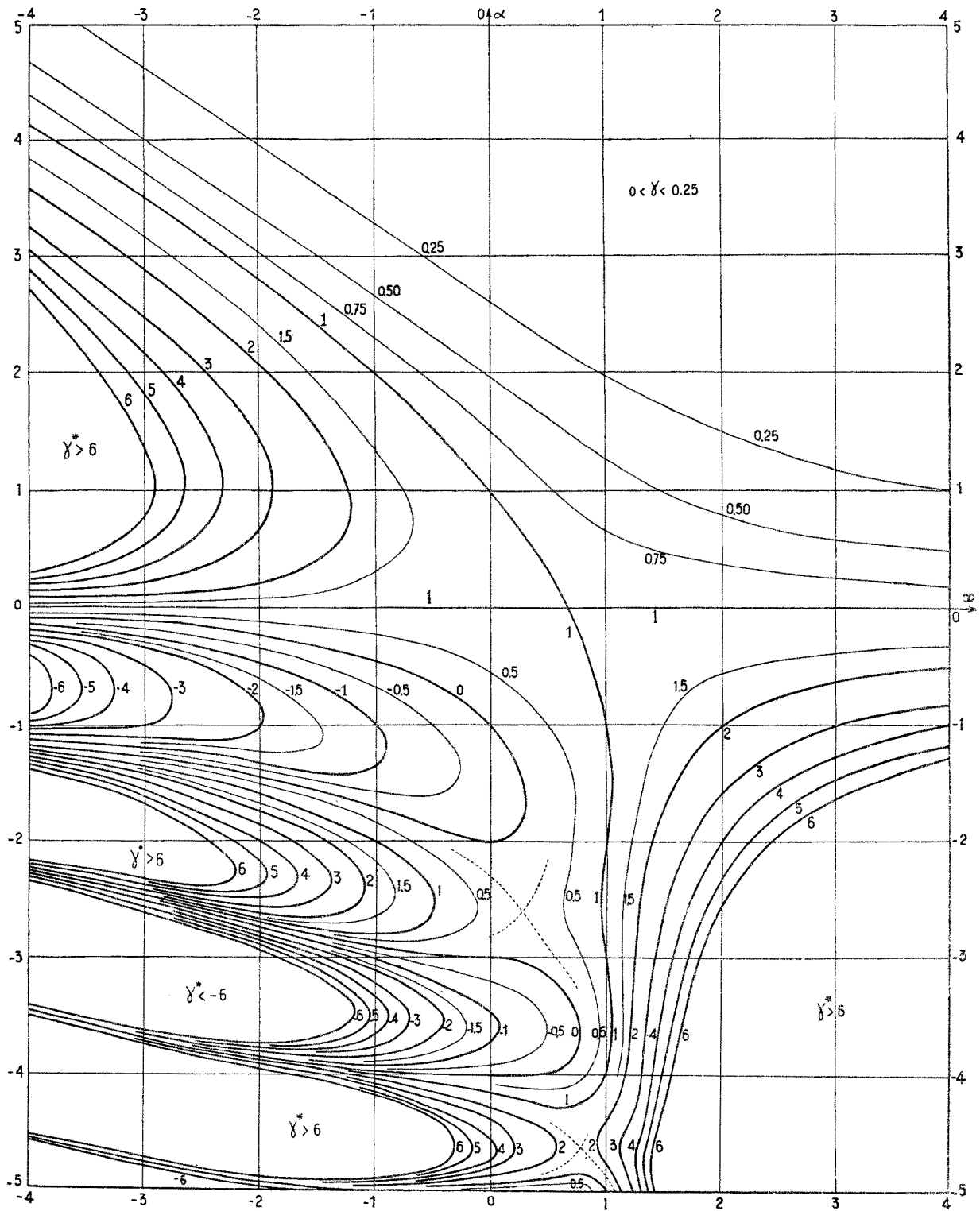
Fuori dei limiti della figura la funzione  $\gamma^*$  si domina già bene per mezzo delle formule asintotiche e, in particolare, possono così trovarsi, per la via indicata nel lavoro cit. <sup>(3)</sup>, buone rappresentazioni approssimate delle curve su cui è  $\gamma^*(\alpha, x) = 0$ .

### § 9 - Proprietà di monotonia per $\alpha$ ed $x$ non entrambi negativi.

L'impostazione di una tavola di valori numerici della funzione gamma incompleta non presenta peculiari difficoltà quando  $\alpha$  ed  $x$  sono entrambi positivi. Invero se, come in sostanza fa il PEARSON, si pone

$$(56) \quad \frac{\gamma(\alpha, x)}{\Gamma(\alpha)} = g(\alpha, x)$$

<sup>(20)</sup> Cambridge, University Press, 1934. Fra l'altro, tali tavole comprendono una tabella del logaritmo di una certa funzione  $I'(u, p)$ , molto vicina alla nostra  $\gamma^*(\alpha, x)$ , per valori positivi di  $\alpha = p + 1$  e  $u = x/\sqrt{x}$ .



ci si riduce a considerare una funzione monotona (crescente) di  $x$  i cui valori sono sempre compresi fra 0 ed 1 che, come tale, è molto adatta all'intablazione.

Inoltre è facile convincersi che la funzione  $g(\alpha, x)$  dipende monotonicamente anche da  $\alpha$ , e precisamente che è una funzione *decrescente* di  $\alpha$ , avendosi che

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{1}{g(\alpha, x)} \right] &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ 1 + \int_x^\infty e^{-t} t^{x-1} dt : \int_0^x e^{-u} u^{x-1} du \right] = \\ &= \int_x^\infty dt \int_0^x e^{-(t+u)} (tu)^{x-1} (\log t - \log u) du \cdot \left[ \int_0^x e^{-u} u^{x-1} du \right]^{-2} > 0. \end{aligned}$$

Meno semplice appare invece la cosa *a priori*, considerando la figura precedente, negli altri tre casi reali possibili:

$$a) \quad \alpha \leq 0, x \geq 0; \quad b) \quad \alpha \geq 0, x \leq 0; \quad c) \quad \alpha \leq 0, x \leq 0,$$

perchè sembra inerente alla natura delle cose il dovere avere qui a che fare con funzioni più rapidamente variabili.

Mi sembra pertanto notevole il fatto che nei due casi *a)* e *b)* rispettivamente le due funzioni  $\Gamma(\alpha, x)$  e  $\gamma_1(\alpha, x)$  possano ancora ricondursi, e per mezzo di formule estremamente semplici, a due certe funzioni  $G(\alpha, x)$  e  $g_1(\alpha, x)$  che, al pari della precedente  $g(\alpha, x)$ , sono monotone sia rispetto ad  $\alpha$  sia rispetto ad  $x$  e restano sempre comprese fra 0 ed 1. Precisamente dico che posto

$$(57) \quad \Gamma(\alpha, x) = -\frac{1}{\alpha} e^{-x} x^\alpha G(\alpha, x), \quad (\alpha \leq 0, x \geq 0)$$

e

$$(58) \quad \gamma_1(\alpha, x) = \frac{1}{\alpha} e^{x} x^\alpha g_1(\alpha, x) \quad (\alpha \geq 0, x \geq 0),$$

le due funzioni  $G(\alpha, x)$  e  $g_1(\alpha, x)$  godono delle proprietà di monotonia di cui più sopra,

Infatti cominciando dal caso di  $G$ , essendo evidentemente

$$G(\alpha, x) = -\alpha \int_0^\infty e^{-x\tau} (1 + \tau)^{\alpha-1} d\tau,$$

con un'integrazione per parti si ha

$$G(\alpha, x) = 1 - x \int_0^\infty e^{-x\tau} (1 + \tau)^\alpha d\tau$$

e ne segue che

$$(59) \quad \frac{\partial G}{\partial x} = \alpha \int_0^{\infty} e^{-x\tau}(1+\tau)^{x-1}\tau d\tau < 0, \quad \frac{\partial G}{\partial \alpha} = -x \int_0^{\infty} e^{-x\tau}(1+\tau)^x \log(1+\tau) d\tau < 0.$$

Inoltre si ha evidentemente

$$(60) \quad G(\alpha, 0) = 1, \quad G(\alpha, \infty) = 0$$

con la conseguenza che

$$(61) \quad 0 < G(\alpha, x) \leq 1.$$

Val la pena di notare ulteriormente che

$$G(0, x) = 0, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = -e^x Ei(x).$$

Passiamo ora al caso b) in cui, analogamente a più sopra, si ha

$$g_1(\alpha, x) = \alpha \int_0^1 e^{-x\tau}(1-\tau) d\tau = 1 - x \int_0^1 e^{-x\tau}(1-\tau)^x d\tau,$$

e ne segue che

$$(62) \quad \frac{\partial g_1}{\partial x} = -\alpha \int_0^1 e^{-x\tau}(1-\tau)^{x-1}\tau d\tau < 0, \quad \frac{\partial g_1}{\partial \alpha} = -x \int_0^1 e^{-x\tau}(1-\tau)^x \log(1-\tau) d\tau > 0.$$

Inoltre si ha

$$g_1(\alpha, 0) = 1, \quad g_1(\alpha, \infty) = 0$$

con la conseguenza che

$$(63) \quad 0 < g_1(\alpha, x) \leq 1.$$

Finalmente è

$$(64) \quad g_1(0, x) = e^{-x}, \quad \left(\frac{\partial g_1}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = e^{-x}[Ei_1(x) + \log x - C]$$

e le due funzioni  $G$  e  $g_1$  risultano collegate dall'uguaglianza

$$(65) \quad g_1(\alpha, x) = G(\alpha, -x) + \Gamma(\alpha + 1)e^{-x}.$$

#### § 10 - Il caso in cui $\alpha$ ed $x$ sono entrambi negativi.

Nel caso c) non sembra facile ricondurre in modo semplice la funzione gamma incompleta ad una qualche funzione soddisfacente a così drastiche limitazioni come le precedenti  $g$ ,  $G$  e  $g_1$ . Tuttavia è sempre notevole il fatto che, ponendo

$$(66) \quad \gamma^*(-\alpha, -x) = \Gamma(\alpha + 1)e^{\alpha}k(\alpha, x), \quad (\alpha \geq 0, x \geq 0),$$

la funzione  $k(\alpha, x)$  risulta anch'essa *mai superiore ad 1 in valore assoluto* ed inoltre tale che, al variare di  $x$  ( $\alpha$  rimanendo fisso) si presentano *uno o, al più, due* massimi o minimi.

Precisamente, avendosi che

$$(67) \quad k(\alpha, x) = \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha \pi} \Phi(1, 1 - \alpha; -x),$$

$$\frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha(\alpha - 1)\pi} \Phi(2, 2 - \alpha; -x) = \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha(\alpha - 1)\pi} e^{-x} \Phi(-\alpha, 2 - \alpha; x),$$

il secondo fatto è una conseguenza immediata del conteggio degli zeri positivi o negativi della funzione confluyente  $\Phi(a, c; x)$  compiuto o per meglio dire, perfezionato, in un mio recente lavoro <sup>(21)</sup>. Invero da uno dei grafici contenuti in detto lavoro risulta che, per  $x > 0$ ,  $\Phi(-\alpha, 2 - \alpha; x)$  si annulla *una* ed una sola volta se  $0 < \alpha \leq 1$  e *due* volte se invece  $\alpha$ , non intero, è maggiore di 1. (Per  $\alpha = 2, 3 \dots$  si ha uno zero positivo e uno zero nell'origine).

Resta da dimostrare che  $|k| \leq 1$  pel che occorre distinguere i due casi  $0 < \alpha < 1$  e  $\alpha \geq 1$ .

Nel 2° caso può anzi dimostrarsi che addirittura è

$$(68) \quad |k(\alpha, y)| \leq \frac{1}{2}, \quad (\alpha \geq 1)$$

perchè dalla (28) si trae che

$$k(\alpha, x) = \frac{1}{\pi} \Re \left[ e^{\alpha \pi i} \int_0^{\infty} e^{i \alpha t} (1+t)^{-\alpha-1} dt \right]$$

e conseguentemente si ha

$$|k(\alpha, x)| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (1+t^2)^{-\frac{\alpha+1}{2}} dt = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\alpha/2)}{\Gamma(\alpha/2 + 1/2)}.$$

Ma la funzione a terzo membro è, per  $\alpha > 0$ , una funzione decrescente, quindi sarà certo

$$|k(\alpha, x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[ \frac{\Gamma(\alpha/2)}{\Gamma(\alpha/2 + 1/2)} \right]_{\alpha=1} = \frac{1}{2}, \quad (\alpha \geq 1).$$

Consideriamo ora il caso  $0 < \alpha < 1$  in cui  $k(\alpha, x)$  ha, al variare di  $x$ , uno ed un solo massimo o minimo in un certo punto  $x = \beta$  tale che  $\Phi(-\alpha, 2 - \alpha; \beta) = 0$ . Ma se, più generalmente, consideriamo la funzione

$$\Phi(a, 2 - \alpha; x), \quad (-1 \leq a < 0)$$

essa ha un solo zero positivo che è notoriamente <sup>(22)</sup> una funzione crescente di  $a$ ; dunque deve necessariamente essere  $\beta > \beta_0$ , avendo indicato con  $\beta_0$

<sup>(21)</sup> F. TRICOMI, *Über die Abzählung der Nullstellen der konfluenten hypergeometrischen Funktionen*, « Math. Zeitschrift », 52 (1950), 669-675.

<sup>(22)</sup> TSVETKOFF, « Comptes Rendus (Doklady) Acad. Sci. U. R. S. S. », 32, 10-12 e 33, 290-291 (1941).



l'unico zero positivo della funzione

$$\Phi(-1, 2 - \alpha; x) \equiv 1 - \frac{x}{2 - \alpha}$$

ciò deve necessariamente aversi

$$(69) \quad \beta > 2 - \alpha.$$

D'altro canto dalle formule di derivazione (17) segue subito che

$$x \frac{\partial k}{\partial x} = (\alpha - x)k - \frac{1}{\pi} \sin \alpha\pi,$$

quindi il valore massimo o minimo  $k^*$  di  $k$  nel punto  $x = \beta$  dovrà esser tale che

$$(\alpha - \beta)k^* = \frac{1}{\pi} \sin \alpha\pi$$

e da ciò, tenendo conto della (69), si trae che

$$(70) \quad |k^*| = \left| \frac{\sin \alpha\pi}{\pi(\beta - \alpha)} \right| \leq \frac{1}{2} \left| \frac{\sin \alpha\pi}{(1 - \alpha)\pi} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{\sin(1 - \alpha)\pi}{(1 - \alpha)\pi} \right| < \frac{1}{2}.$$

Finalmente resta da considerare il punto  $x = 0$  in cui si ha

$$|k(\alpha, 0)| = \left| \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi} \right| < 1, \quad (0 < \alpha < 1); \quad k(0, 0) = 1, \quad (\alpha = 0).$$

Se ne conclude che è sempre  $|k(\alpha, x)| \leq 1$  anzi addirittura  $|k(\alpha, x)| < 1$  se si esclude il punto  $x = \alpha = 0$  in cui è  $k = 1$ .

Notiamo infine che mentre  $k(\alpha, x)$  considerato come funzione di  $x$  ha solo uno o due massimi o minimi, la stessa funzione considerata come dipendente da  $\alpha$  ha sempre *infiniti massimi* e *minimi*. Ciò risulta senz'altro dalla precedente figura che dimostra come la funzione  $\gamma^*$  (e quindi anche  $k$ ) si annulli infinite volte su ogni parallela all'asse  $\alpha$ .