Sur la multiplication des séries trigonométriques.

(*Par* Niels Nielsen, *à Copenhague.*)

Il est bien connu que M. Pringsheim (*) a donné, il y a vingt ans à peu près, un théorème concernant la multiplication, selon la règle de Cauchy, de deux séries trigonométriques aux coefficients positifs ou alternés. Dans la Note que voici je me suis proposé de généraliser comme suit le théorème susdit de l'éminent géomètre allemand:

Supposons que les coefficients réels ou complexes des séries trigonométriques convergentes

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos n x, \quad g_1(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \sin n x$$

$$f_2(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \cos n x, \quad g_2(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \sin n x$$

satisfassent aux deux conditions suivantes, savoir 1.°

$$\lim_{n=\infty} \sum_{s=1}^{s=n-1} | a_s b_{n-s} | = 0 \tag{1}$$

2.° qu'une des quatre séries à termes positifs

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} | a_n \pm a_{n+1} |, \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} | b_n \pm b_{n+1} | \tag{2}$$

soit convergente; tous les produits obtenus en multipliant une des quatre séries

$$f_1(x), \quad f_1(x-\pi), \quad g_1(x), \quad g_1(x-\pi)$$

(*) *Mathematische Annalen,* t. 26, p. 157-166; 1885.

par une des quatre autres séries

$$f_2(x),\quad f_2(x-\pi),\quad g_2(x),\quad g_2(x-\pi)$$

peuvent être développés d'après la règle de multiplication de Cauchy.

Quant à la démonstration de ce théorème, désignons par

$$s = \sum_{n=1}^{n=\infty} u_n\,,\quad s_1 = \sum_{n=1}^{n=\infty} v_n\,, \tag{3}$$

deux séries convergentes, puis mettons

$$w_n = u_1 v_{n-1} + u_2 v_{n-2} + \cdots + u_{n-1} v_1\,,$$

Abel (*) a démontré que la règle de Cauchy, savoir

$$s\,s_1 = \sum_{n=1}^{n=\infty} w_n \tag{4}$$

est appliquable, pourvu que la série infinie qui figure au second membre de (4) soit convergente aussi, condition qui est nécessaire et suffisante à la fois.

On sait que M. Pringsheim a démontré son théorème susdit en prenant pour point de départ la proposition d'Abel; dans ce qui suit, nous avons à appliquer une méthode entièrement différente. A cet effet, mettons dans (3)

$$s = s_n + R_n\,,\quad s_1 = s'_n + R'_n\,,$$

un calcul direct donnera

$$s_n\,s'_n = \sum_{p=1}^{p=n} w_n + R''_n\,, \tag{5}$$

où nous avons posé pour abréger

$$R''_n = \sum_{s=1}^{s=n} u_s\,(v_n + v_{n-1} + \cdots + v_{n-s+1}), \tag{6}$$

ce qui montrera que la condition

$$\lim_{n=\infty} |\,R''_n\,| = 0 \tag{7}$$

(*) *Journal de Crelle*, t. 1, p. 318; 1826. Œuvres, t. I. p. 226.

est aussi à la fois nécessaire et suffisante pour l'application de la règle de Cauchy.

On sait, d'après le théorème de M. Mertens (*) que la condition (7) est certainement satisfaite pourvu qu'une seule au moins des séries (3) soit *absolument* convergente, ce qui n'est pas nécessaire.

Cela posé, considérons d'abord le produit

$$f_1(x)\,f_2(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos n\,x \cdot \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \cos n\,x, \tag{8}$$

nous aurons pour le terme de reste (6) cette expression

$$\left.\begin{aligned} R''_n = \sum_{s=1}^{s=n} a_s \cos s\,x\,.\Big(b_n \cos n\,x + b_{n-1} \cos (n-1)\,x + \cdots + \\ + b_{n-s+1} \cos (n-s+1)\,x\Big)\,; \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

supposons maintenant convergente la série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} |\, b_n - b_{n+1} \,|,$$

puis multiplions par $2 \sin \frac{x}{2}$ les deux membres de (9), nous aurons après une transformation très simple

$$2 \sin \frac{x}{2} \cdot R_n = A - B + C,$$

où nous avons posé pour abréger

$$A = b_n \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) x \cdot \sum_{s=1}^{s=n} a_s \cos s\,x$$

$$B = \sum_{s=1}^{s=n} a_s\, b_{n-s+1}\,.\cos s\,x\,.\sin \left(n - s + \frac{1}{2}\right) x$$

$$C = \sum_{s=1}^{s=n} a_s \cos s\,x\,.\,(U_{n-s+1} + U_{n-s+2} + \cdots + U_{n-1}),$$

où il faut admettre dans C:

$$U_p = (b_p - b_{p+1}) \sin \left(p + \frac{1}{2}\right) x,$$

de sorte que la série à termes positifs $\Sigma \,|\, U_n \,|$ est convergente.

(*) *Journal de Crelle*, t. 79, p. 182 ; 1875.

Cela posé, il est évidemment possible de déterminer un positif entier N tel que pour $n \geqq N$:

$$|A| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |B| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |C| < \frac{\varepsilon}{3}$$

ce qui donnera finalement pour $n \geqq N$

$$|R''_n| < \frac{\varepsilon}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|},$$

ce qui montrera que le produit (8) peut toujours être développé d'après la règle de CAUCHY, pourvu que x ne soit pas un multiple de 2π.

Supposons convergente la série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} |b_n + b_{n+1}|,$$

nous avons à étudier de la même manière le produit

$$2 R''_n \cos\frac{x}{2}$$

et ainsi de suite pour tous les autres produits mentionnés dans le théorème; telle est la démonstration complète de notre théorème énoncé.

Supposons particulièrement *positifs* les deux suites de coefficients a_n et b_n, puis supposons

$$a_{n+1} \leqq a_n, \quad b_{n+1} \leqq b_n, \quad \lim_{n=\infty} a_n = 0, \quad \lim_{n=\infty} b_n = 0, \tag{10}$$

il saute aux yeux que deux des quatre séries (2) sont convergentes et que la condition (1) se réduira à celle-ci

$$\lim_{n=\infty} \sum_{s=1}^{s=n} a_s b_{n-s} = 0; \tag{11}$$

c'est-à-dire que les deux séries à termes alternés

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n-1} a_n, \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n-1} b_n$$

peuvent être multipliées d'après la règle de CAUCHY, d'où la proposition suivante:

Supposons multiplicables d'après la règle de CAUCHY *les deux séries aux* *termes altérnés* $\Sigma(-1)^{n-1} a_n$ et $\Sigma(-1)^{n-1} b_n$, *tous les produits des séries trigonométriques mentionnées dans le théorème général peuvent être développés d'après la règle de* CAUCHY *aussi.*

Dans ses recherches aussi profondes qu'ingénieuses sur la multiplication d'après la règle de CAUCHY de deux séries non absolument convergentes M. PRINGSHEIM (*) a remplacé la condition (11) par ces deux autres

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{n=\infty} a_n (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = 0 \\ &\lim_{n=\infty} b_n (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

qui sont équivalentes à (11) mais plus faciles à appliquer.

Posons par exemple

$$a_n = \frac{1}{n^\alpha \varphi(n)}, \quad b_n = \frac{1}{n^\beta}, \tag{13}$$

où α et β désignent des nombres positifs tels que $\alpha + \beta \geqq 1$, tandis que $\varphi(n)$ est une fonction positive de n qui croît constamment avec n, de sorte que

$$\lim_{n=\infty} \varphi(n) = \infty, \quad \lim_{n=\infty} \frac{\varphi(n)}{\log n} = \text{quantité finie.}$$

Pour étudier maintenant les deux conditions (12), posons pour abréger

$$\sigma_n = \frac{1}{n^\alpha \varphi(n)} \left(\frac{1}{1^\beta} + \frac{1}{2^\beta} + \cdots + \frac{1}{n^\beta}\right)$$

$$\sigma'_n = \frac{1}{n^\beta} \left(\frac{1}{1^\alpha \varphi(1)} + \frac{1}{2^\alpha \varphi(2)} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha \varphi(n)}\right),$$

puis appliquons l'inégalité évidente

$$\frac{1}{n^\beta} < \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x^\beta},$$

nous aurons

$$\sigma_n < \frac{1}{n^\alpha \varphi(n)} \cdot \int_1^n x^{-\beta} d\beta < \frac{n^{1-\alpha-\beta}}{\varphi(n)} \leqq \frac{1}{\varphi(n)};$$

(*) *Mathematische Annalen,* t. 21, p. 327-328; 1883.

quant à σ'_n, désignons par p un positif entier qui deviendra infiniment grand avec n mais de sorte que

$$\lim_{n=\infty} (p \,.\, n^{-\beta}) = 0,$$

nous aurons

$$\sigma'_n < \frac{1}{n^\beta}\left(\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{p^\alpha}\right) + \frac{1}{n^\beta \varphi(p)}\left(\frac{1}{(p+1)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}\right)$$

d'où sans peine

$$\sigma'_n < \frac{p}{n^\beta} + \frac{n^{1-\alpha-\beta}}{\varphi(p)};$$

c'est-à-dire que les conditions (12) sont remplies dans ce cas.

Prenons comme second exemple

$$a_n = \frac{1}{\varphi(n)}, \quad b_n = \frac{1}{n}, \tag{14}$$

où $\varphi(n)$ est du même caractère que dans (13) mais telle que nous ayons ici

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varphi(n)}{\log n} = \infty, \quad \lim_{n=\infty} \frac{\varphi(n)}{\log n \,.\, \log(\log n)} = 0, \tag{15}$$

nous verrons par le même procédé que les conditions (12), sont remplies dans ce cas aussi.

Comme troisième exemple supposons convergente la série

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \cdots \tag{16}$$

nous aurons de notre proposition susdite précisément le théorème énoncé de M. PRINGSHEIM.

Remarquons en passant avec M. PRINGSHEIM (*) que la convergence de la série (16) est *suffisante* mais point de tout *nécessaire* pour la multiplication d'après la règle de CAUCHY les deux séries à termes alternés en question, comme le montrent clairement nos séries particulières (13) et (14) du reste.

Études maintenant plus amplement nos produits des séries trigono-

(*) *Mathematische Annalen,* t. 21, p. 349, t. 26, p. 165.

métriques, nous verrons que la condition relative à la convergence de la série (16) joue un rôle *essentiel* pour la transformation des produits susdits.

Étudions d'abord le produit

$$f_1(x) \,.\, f_2(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos n\,x \,.\, \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \cos n\,x,$$

nous aurons un développement de la forme

$$f_1(x) f_2(x) = U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + \cdots, \tag{17}$$

où nous avons posé pour abréger

$$U_n = \sum_{s=1}^{s=n} a_s\, b_{n-s} \cos s\,x \cos (n-s)\,x,$$

d'où, en mettant

$$w_n = a_1\, b_{n-1} + a_2\, b_{n-2} + \cdots + a_{n-1}\, b_1, \tag{18}$$

nous aurons après une simple transformation

$$U_n = \frac{1}{2} w_n \cos n\,x + \frac{1}{2} \cdot \sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}}{}' (a_s\, b_{n-s} + b_s\, a_{n-s}) \cos (n - 2\,s)\,x. \tag{19}$$

Posons ensuite

$$f_1(x)\, g_2(x) = U'_2 + U'_3 + U'_4 + U'_5 + \cdots \tag{20}$$

$$g_1(x)\, g_2(x) = U''_2 + U''_3 + U''_4 + U''_5 + \cdots \tag{21}$$

nous aurons de même

$$U'_n = \frac{1}{2} w_n \sin n\,x + \frac{1}{2} \cdot \sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}} (a_s\, b_{n-s} - a_{n-s}\, b_s) \sin (n - 2\,s)\,x \tag{22}$$

$$U''_n = -\frac{1}{2} w_n \cos n\,x + \frac{1}{2} \cdot \sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}}{}' (a_s\, b_{n-s} + a_{n-s}\, b_s) \cos (n - 2\,s)\,x; \tag{23}$$

dans (19) et (23) l'accent fixé au signe de sommation indique qu'il faut prendre la moitié du terme qui, pour n pair, correspond à $2\,s = n$.

Les formules (17), (20), (21) *sont appliquables pour les séries trigonométriques considérées dans notre théorème général.*

Ordonnons maintenant selon des fonctions trigonométriques des multiples de x les trois séries en question, nous aurons *formellement*, en posant pour abréger

$$\left.\begin{aligned} A_n &= b_1\, a_{n+1} + b_2\, a_{n+2} + b_3\, a_{n+3} + \cdots \\ B_n &= a_1\, b_{n+1} + a_2\, b_{n+2} + a_3\, b_{n+3} + \cdots, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

ce qui donnera particulièrement

$$A_0 = B_0 = a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + a_3\, b_3 + \cdots, \tag{25}$$

ces développements

$$\left.\begin{aligned} f_1(x)\, f_2(x) &= \frac{1}{2} A_0 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{n=\infty} (w_n + A_n + B_n) \cos n x \\ f_1(x)\, g_2(x) &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{n=\infty} (w_n - A_n + B_n) \sin n x \\ g_1(x)\, g_2(x) &= \frac{1}{2} A_0 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{n=\infty} (- w_n + A_n + B_n) \cos n x, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

où il faut admettre $w_1 = 0$.

Cela posé, les formules *formelles* (26) donneront cette proposition remarquable et nouvelle, je le crois:

Supposons multiplicables d'après la règle de Cauchy *deux séries trigonométriques, le produit ainsi obtenu ne peut pas généralement être ordonné selon des cos et sin des multiples de x, savoir être transformé formellement dans une série trigonométrique ordinaire.*

C'est précisement cette proposition qui montre clairement le rôle essentiel qui joue dans ce problème la condition de M. Pringsheim.

En effet, supposons positifs les coefficients a_n et b_n et convergente la série (16), toutes les séries A_n et B_n définies par (24) sont évidemment convergentes aussi; de plus nous aurons facilement

$$\left.\begin{aligned} A_{n+1} \leqq A_n, \quad B_{n+1} \leqq B_n \\ \lim_{n=\infty} A_n = \lim_{n=\infty} B_n = 0, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

ce qui montrera clairement la *convergence* des trois séries trigonométriques qui figurent aux seconds membres des formules (26).

Cela posé, il est très facile de démontrer rigoreusement dans ce cas les trois formules (26). En effet, nous n'avons qu'à transformer de la manière susdite les n premiers termes des séries qui figurent aux seconds membres de (18), (20), (21), la convergence des séries A_n et B_n et les formules (27) nous conduiront au but après une recherche non difficile des termes de reste.

Ces réductions faites, nous avons démontré cette autre proposition intéressante :

Parmi les séries trigonométriques à coefficients positifs ou alternés qui sont multiplicables d'après la règle de CAUCHY, *celles considérées par* M. PRINGSHEIM *sont les seules, dont les produits ainsi obtenus peuvent être transformés formellement dans des séries trigonométriques ordinaires.*

Copenhague, le 20 novembre 1906.