Sur les équations linéaires aux différences finies.

(*Par* M. Walter B. Ford, *à Ann Arbor.*)

Considérations préliminaires.

1. Pendant plusieurs années M. Dini a publié dans les *Annali* une série de Mémoires intéressants sur les équations différentielles. Toutes ses recherches se groupent, en dernier lieu, autour une expression qui se trouve dans le premier Mémoire (janvier, 1899) pour l'intégrale générale d'une équation différentielle linéaire du $n^{ième}$ ordre; cette expression a la forme d'une série infinie dont le $m^{ième}$ terme est une intégrale définie *m-tuple* qui dépend non seulement des coefficients de l'équation donnée, mais aussi de n fonctions arbitraires. Pour un choix convenable de ces fonctions il peut arriver que l'intégrale générale prendra une forme qui fait voir directement ses propriétés les plus importantes et c'est ainsi, en particulier, que dans son deuxième Mémoire (avril, 1899) M. Dini trouve que sa méthode s'applique à l'étude des intégrales de certaines équations différentielles linéaires quand on considère ces intégrales pour des valeurs très grandes de la variable indépendante. De cette manière, il arrive à un théorème général qui donne, comme conséquences spéciales, beaucoup des résultats importants de M. Poincaré (*) publiés en 1885, ainsi que certains résultats plus récents de M. Kneser (**). Mais, ce n'est pas ici le lieu d'énumérer toutes les applications et tous les résultats nombreux que M. Dini a trouvé dans cette série de Mémoires; il suffit de remarquer que sa méthode est tout à fait originale et

(*) *Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies* American Journal of Mathematics, Vol. VII.

(**) *Untersuchung und asymptotische Darstellung der Integrale gewisser linearer Differentialgleichungen bei grossen reellen Werthen des Arguments;* Journal de Crelle, t. 120, pp. 267-275 (1899).

qu'elle ne laisse rien à désirer au point de vue ni de sa généralité ni de la valeur des applications que l'on peut en faire.

Le caractère de cette méthode d'étudier les équations différentielles ainsi que l'analogie bien connue entre la théorie de telles équations et la théorie des équations aux différences finies nous porte à croire que l'on peut adapter la méthode à l'étude des intégrales des équations de cette dernière espèce, et c'est cette question que nous nous proposons dans le Mémoire actuel. D'ailleurs, il y a deux considérations spéciales qui nous semblent ajouter un intérêt supplémentaire à cette recherche. Autant que l'auteur en sache, il n'existe dans la litérature actuelle sur le calcul des différences finies aucun théorème analogue à celui que nous avons signalé plus haut relatif aux intégrales de certaines équations différentielles linéaires considérées pour les valeurs très grandes de l'argument. Pour être plus précis, si l'on a une équation linéaire aux différences finies sous la forme

$$A_0(x)\,y(x+n)+A_1(x)\,y(x+n-1)+A_2(x)\,y(x+n-2)+\cdots$$
$$\cdots+A_n(x)\,y(x)=0$$

où le coefficient $A_r(x)$, $r=0, 1, 2,\ldots n$ tend vers une limite bien déterminée quand $x=\infty$, il n'existe aucun théorème qui exprime d'une manière explicite l'allure de l'intégrale générale $y(x)$ quand x prend des valeurs très grandes. Il est vrai que M. Poincaré, dans le Mémoire cité plus haut, démontre sous les mêmes hypothèses l'existence de la limite $\lim\limits_{x=\infty}\dfrac{y(x+1)}{y(x)}$, $y(x)$ étant une intégrale quelconque de l'équation donnée, et il trouve la valeur de cette limite; mais, le but que nous nous proposons est plutôt de déterminer le caractère de l'intégrale $y(x)$ *elle-même*, de sorte que les propriétés du rapport $\dfrac{y(x+1)}{y(x)}$, bien qu'elles ne soient pas le but de nos recherches, en résultent comme conséquences spéciales (*). En second lieu, un théorème

(*) De l'égalité $\lim\limits_{x=\infty}\dfrac{y(x+1)}{y(x)}=k=$ *une valeur déterminée* on peut seulement conclure que, pour les valeurs assez grandes de x, il existe une relation de la forme

$$y(x+1)+[\varepsilon(x)-k]\,y(x)=0$$

où $\lim\limits_{x=\infty}\varepsilon(x)=0$. Quant à la fonction $y(x)$ elle-même, nous obtenons en effectuant l'intégratel que nous venons de l'indiquer pour les équations aux différences finies, une fois obtenu, aurait une application directe à l'étude de la convergence des fractions algébriques continues. En effet, si l'on représente par $\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$ la $n^{ième}$ réduite d'une quelconque des fractions algébriques continues qui correspondent à une série donnée de puissances:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \quad (r = \textit{rayon de convergence} \geqq 0)$$

on sait bien (*) que chacun des polynômes $P_n(x)$, $Q_n(x)$ considéré pour une valeur fixée de x, satisfait à une équation linéaire aux différences finies du second ordre par rapport à la variable n, de sorte qu'en se servant d'un tel théorème on pourrait étudier la convergence de la fraction pour la valeur donnée de x: ce qui veut dire, étudier l'existence et la valeur de la limite $\lim\limits_{n=\infty} \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$.

C'est donc un théorème de ce caractère spécial que nous avions en vue et nous croyons l'avoir trouvé dans notre Théorème III, aussi bien que dans le Théorème I. Nous comptons publier plus tard les applications les plus importantes de ces deux Théorèmes, surtout les applications à la question de la convergence des fractions algébriques continues.

Enfin, avant d'aborder les considérations détaillées des paragraphes suivants, l'auteur se fait un devoir d'exprimer ici sa profonde gratitude à M. Dini. En comparant les pages qui suivent avec les deux premiers Mémoires mentionnés plus haut, on verra sans peine tout ce qu'il lui doit, et que les présentes recherches eussent, en somme, été impossibles sans l'aide, la direction que lui fournissait ainsi l'éminent mathématicien italien.

---

tion de cette équation par les méthodes bien connues (voir par exemple Boole, *A treatise on the calculus of finite differences*, London, 1860, pp. 101, 102)

$$y(x) = c\,[\varepsilon(x-1) - k]\,[\varepsilon(x-2) - k]\,[\varepsilon(x-3) - k] \ldots [\varepsilon(r) - k],$$

r étant une valeur quelconque fixée de x, et c étant la valeur de $y(r)$. Mais, cette expression a la forme d'un produit dans lequel le nombre des facteurs croît indéfiniment avec x, et par conséquent elle ne s'adapte pas, au moins en général, à l'étude de la question que nous avons posée.

(*) Voir par exemple la thèse de M. Padé: *Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles.* Annales de l'École Normale supérieure, 3ième série, t. 9, supplément, p. 43 (1892).

2. Nous résumons, d'abord quelques relations générales du calcul des différences finies.

Représentons par $y(x)$ une fonction (réelle ou complexe) de la variable réelle x et supposons que cette fonction soit définie (*) au moins pour tous les entiers positifs $x \geqq$ un certain entier $\alpha \geqq 0$. Alors, la $n^{ième}$ différence $\Delta^n y(x)$ de $y(x)$ est définie par la formule

$$\left.\begin{aligned} \Delta^n y(x) = y(x+n) - n\, y(x+n-1) + \\ + \frac{n(n-1)}{2} y(x+n-2) - \cdots + (-1)^n y(x) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

et, avec les hypothèses indiquées cette différence constitue évidemment une fonction définie comme $y(x)$ au moins pour tous les entiers positifs $x \geqq \alpha$.

Comme résultat spécial de cette définition, nous remarquons tout d'abord l'existence des expressions $\Delta^r y(x+n-r)$; $r = 0, 1, 2, \ldots n$ lorsque $x \geqq \alpha$. De plus, pour les mêmes valeurs de x les trois relations générales existent:

$$\left.\begin{aligned} y(x+n-r) = y(x+n) - r\,\Delta y(x+n-1) + \\ + \frac{r(r-1)}{2!} \Delta^2 y(x+n-2) - \cdots \\ \cdots + (-1)^r \Delta^r y(x+n-r);\quad r = 0, 1, 2, \ldots n. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta^r y(x+n-r) = \Delta^r y(x) + (n-r)\,\Delta^{r+1} y(x) + \\ + \frac{(n-r)(n-r-1)}{2!} \Delta^{r+2} y(x) + \\ + \cdots + \Delta^n y(x);\quad r = 0, 1, 2, \ldots n. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta^r y(x) = \Delta^r y(x+n-r) - (n-r)\,\Delta^{r+1} y(x+n-r-1) + \\ + \frac{(n-r)(n-r-1)}{2!} \Delta^{r+2} y(x+n-r-2) - \\ - \cdots + (-1)^{n-r} \Delta^n y(x);\quad r = 0, 1, 2, \ldots n. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

En effet, ces relations résultent directement quand on substitue pour les différences diverses leurs valeurs déterminées par l'équation (1).

(*) Nous employons toujours le mot *défini* dans le sens « défini d'une manière unique ».

Les formules (2), (3), (4) nous permettent de faire les observations suivantes qui nous seront utiles dans ce qui va suivre.

En nous bornant toujours aux valeurs de x qui sont des entiers positifs, supposons que pour $x \geqq \alpha$ la fonction $y(x)$ existe et satisfasse à une équation linéaire aux différences finies de la forme ordinaire:

$$\alpha_0(x)\,\Delta^n y(x) + \alpha_1(x)\,\Delta^{n-1} y(x) + \alpha_2(x)\,\Delta^{n-2} y(x) + \cdots + \alpha_n(x)\,y(x) = 0 \qquad (5)$$

dans laquelle les coefficients α_r sont des fonctions données (réelles ou complexes) de x, c'est-à-dire, quand $x \geqq \alpha$ la fonction $y(x)$ existe et par conséquent aussi toutes les fonctions $\Delta y(x)$, $\Delta^2 y(x), \ldots$ $\Delta^n y(x)$ et pour les mêmes valeurs de x l'équation (5) se vérifie. Alors, il résulte de ce que nous venons de dire que les expressions

$$y(x+n),\ \Delta y(x+n-1),\ \Delta^2 y(x+n-2), \ldots\ \Delta^{n-1} y(x+1),\ \Delta^n y(x)$$

existent quand $x \geqq \alpha$ et, d'après la formule (4) il résulte aussi que pour les mêmes valeurs de x ces expressions satisfont à une équation de la forme

$$\left.\begin{aligned} a_0(x)\,\Delta^n y(x) + a_1(x)\,\Delta^{n-1} y(x+1) + a_2(x)\,\Delta^{n-2} y(x+2) + \cdots +\\ + a_{n-1}(x)\,\Delta y(x+n-1) + a_n(x)\,y(x+n) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

les coefficients a_r étant des fonctions linéaires des coefficients α_r et étant déterminés par la formule suivante:

$$\left.\begin{aligned} a_r = \frac{(-1)^{n-r}}{r!}\Bigg[\frac{n!}{(n-r)!}\,\alpha_n - \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!}\,\alpha_{n-1} + \frac{(n-2)!}{(n-r-2)!}\,\alpha_{n-2} - \cdots \\ \cdots + (-1)^{n-r}\frac{r!}{0!}\,\alpha_r\Bigg], \qquad r = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Réciproquement, si l'on a une fonction $y(x)$ qui existe pour $x \geqq \alpha$ et satisfait à une équation (6) dans laquelle les a_r sont déterminés en termes des fonctions données α_r par les relations (7) cette fonction satisfera à l'équation (5) pour toutes les valeurs indiquées de x. En effet, il résulte de la relation (1) que les expressions $y(x)$, $\Delta y(x)$, $\Delta^2 y(x), \ldots$ $\Delta^n y(x)$ existent pour $x \geqq \alpha$ et en même temps, la relation (3) nous permet d'écrire l'équation donnée (6) sous la forme

$$\alpha'_0(x)\,\Delta^n y(x) + \alpha'_1(x)\,\Delta^{n-1} y(x) + \cdots + \alpha'_n(x)\,y(x) = 0$$

où les coefficients α'_r sont déterminés par les équations

$$\alpha'_r = \frac{1}{r!}\left[\frac{n!}{(n-r)!}\,\alpha_n + \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!}\,\alpha_{n-1} + \cdots + \frac{(r+1)!}{1!}\,\alpha_{r+1} + \frac{r!}{0!}\,\alpha_r\right],$$

$$r = 0,\ 1,\ 2, \ldots\ n.$$

lesquelles suivant les relations données (7) se réduisent aux autres $\alpha'_r = \alpha_r$.

Ainsi, on peut toujours remplacer une équation linéaire aux différences finies, ayant la forme usuelle (5) par une autre de la forme (6) de manière que lorsque la fonction $y(x)$ est une intégrale de l'une pour $x \geqq \alpha$ elle sera aussi une intégrale de l'autre.

Plus généralement, on peut démontrer au moyen des relations générales (1), (2), (3) et (4) que si l'on a une équation linéaire dans n'importe quelle des formes suivantes,

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_0(x)\,\Delta^n y(x) + \alpha_1(x)\,\Delta^{n-1} y(x) + \alpha_2(x)\,\Delta^{n-2} y(x) + \ldots + \\
&\qquad\qquad + \alpha_n(x)\,y(x) = 0\\
&a_0(x)\,\Delta^n y(x) + a_1(x)\,\Delta^{n-1} y(x+1) + a_2(x)\,\Delta^{n-2} y(x+2) + \cdots + \\
&\qquad\qquad + a_n(x)\,y(x+n) = 0\\
&A_0(x)\,y(x+n) + A_1(x)\,y(x+n-1) + A_2(x)\,y(x+n-2) + \cdots + \\
&\qquad\qquad + A_n(x)\,y(x) = 0
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

il est possible de trouver une équation ayant l'une ou l'autre des deux autres formes et telle que si $y(x)$ est une intégrale de l'une lorsque $x \geqq \alpha$ elle sera de même une intégrale de l'autre pour les mêmes valeurs de x.

Le premier théorème (*).

3. Cela posé, nous allons nous occuper de l'équation de la deuxième des formes (8):

$$a_0(x)\,\Delta^n y(x) + a_1(x)\,\Delta^{n-1} y(x+1) + \cdots + a_n(x)\,y(x+n) = 0 \qquad (9)$$

(*) On trouve l'énoncé du théorème dans le § 8.

en supposant que les coefficients a sont des fonctions connues (réelles ou complexes) de la variable réelle x. En nous bornant toujours (comme il suffit pour les applications usuelles) aux valeurs entières positives de x, supposons que les coefficients a soient définis pour tous les entiers positifs $x \geqq$ un certain entier $\alpha \geqq 0$.

Supposons aussi d'abord que la fonction $y(x)$ qui joue le rôle d'intégrale soit donnée et soit définie (comme les coefficients a) pour toutes les valeurs de $x \geqq \alpha$.

Choisissons maintenant une fonction arbitraire $z(x)$ qui est aussi définie pour $x \geqq \alpha$. Pour toutes les valeurs de $x \geqq \alpha + 1$ nous pouvons donc écrire

$$\left.\begin{aligned}\sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x-1} z(x_1)\,[a_0(x_1)\,\Delta^n y(x_1) + a_1(x_1)\,\Delta^{n-1} y(x_1+1) + \cdots +\\ + a_n(x_1)\,y(x_1+n)] = 0\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

où la sommation a rapport (de la manière ordinaire) aux entiers x_1 qui se trouvent entre α et $x-1$ (α et $x-1$ compris). Nous allons considérer d'abord certaines transformations qui sont possibles pour le terme

$$\sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x-1} z(x_1)\,a_r(x_1)\,\Delta^{n-r} y(x_1+r); \quad r = 0,\ 1,\ 2, \ldots\ (n-1). \tag{11}$$

Or, en général $u(x)$ et $v(x)$ étant deux fonctions définies pour $x \geqq \alpha$ on peut écrire pour toutes les valeurs de $x \geqq \alpha + 1$

$$\sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x-1} u(x_1)\,\Delta v(x_1) = \Big[u(x_1)\,v(x_1)\Big]_{x_1=\alpha}^{x_1=x} - \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x-1} v(x_1+1)\,\Delta u(x_1)\ (*). \tag{12}$$

En effet, avec ces hypothèses on sait que les différences $\Delta u(x)$, $\Delta v(x)$ existent pour $x \geqq \alpha$ de sorte que pour les mêmes valeurs de x l'expression $u(x)\,\Delta v(x) + v(x+1)\,\Delta u(x)$ existe et quand $x \geqq \alpha + 1$ on peut écrire

$$\begin{aligned}&\sum_{x_1-\alpha}^{x_1=x-1} [u(x_1)\,\Delta v(x_1) - v(x_1+1)\,\Delta u(x_1)] =\\ &= \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x-1} [u(x_1+1)\,v(x_1+1) - u(x_1)\,v(x_1)] =\\ &= u(x)\,v(x) - u(\alpha)\,v(\alpha) = \Big[u(x_1)\,v(x_1)\Big]_{x_1=\alpha}^{x_1=x}.\end{aligned}$$

Mais, cette formule est, en effet, la formule cherchée (12).

(*) Nous posons toujours $[f(x)]_{x=a}^{x=b} = f(b) - f(a)$ et $[f(x)]_{x=a} = f(a)$.

Cela posé, retournons au terme (11). Avec les hypothèses actuelles pour $a_r(x)$ et $z(x)$ la fonction $z(x)a_r(x)$ sera définie pour toutes les valeurs de $x \geqq \alpha$ et, suivant la définition (1) telle sera aussi l'expression $\Delta^{n-r-1}y(x+r)$. Par conséquent, nous pouvons appliquer la formule (12) au terme (11) en prenant $u(x)=z(x)a_r(x)$, $v(x)=\Delta^{n-r-1}y(x+r)$. Nous obtenons ainsi pour toutes les valeurs de $x \geqq \alpha+1$

$$\sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x-1} z(x_1)\,a_r(x_1)\,\Delta^{n-r}y(x_1+r)=$$

$$=\Big[z(x_1)\,a_r(x_1)\,\Delta^{n-r-1}y(x_1+r)\Big]_{x_1=\alpha}^{x_1=x}-\sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x-1}\Delta^{n-r-1}y(x_1+r+1)\,\Delta\{z(x_1)\,a_r(x_1)\}.$$

Mais, on peut de nouveau appliquer la formule (12) à la sommation qui se trouve dans le second membre de cette dernière équation, de sorte qu'on a aussi

$$\sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x-1} z(x_1)\,a_r(x_1)\,\Delta^{n-r}y(x_1+r)=$$

$$=\Big[z(x_1)\,a_r(x_1)\,\Delta^{n-r-1}y(x_1+r)-\Delta\{z(x_1)\,a_r(x_1)\}\,\Delta^{n-r-2}y(x_1+r+1)\Big]_{x_1=\alpha}^{x_1=x}+$$

$$\sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x-1}\Delta^{n-r-2}y(x_1+r+2)\,\Delta^2\{z(x_1)\,a_r(x_1)\}.$$

Après $n-r$ applications pareilles de la formule (12) nous obtenons pour toutes les valeurs de $x \geqq \alpha+1$ la relation

$$\left.\begin{aligned}\sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x-1} z(x_1)\,a_r(x_1)\,\Delta^{n-r}y(x_1+r) &= \Big[P_r(x_1)\Big]_{x_1=\alpha}^{x_1=x}+\\ +(-1)^{n-r}\sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x-1} y(x_1+n)\,\Delta^{n-r}\{z(x_1)\,a_r(x_1)\}&,\\ (r=0,\ 1,\ 2,\dots\ n-1)&\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

où

$$\left.\begin{aligned}P_r(x)=z(x)\,a_r(x)\,\Delta^{n-r-1}y(x+r)\,-&\\ -\Delta\{z(x)\,a_r(x)\}\,\Delta^{n-r-2}y(x+r+1)+\cdots&\\ +\cdots+(-1)^{n-r-1}\Delta^{n-r-1}\{z(x)\,a_r(x)\}\,y(x+n-1).&\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

Enfin, en donnant à r ses valeurs successives $0,\ 1,\ 2,\dots\ (n-1)$ et en nous servant de la relation (10), nous obtenons la relation suivante pour les valeurs de $x \geqq \alpha + 1$:

$$\left.\begin{array}{r}\Big[P_0(x_1) + P_1(x_1) + \cdots + P_{n-1}(x_1)\Big]_{x_1=\alpha}^{x_1=x} + \\ + \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x-1} y(x_1+n)\left[z(x_1)\,a_n(x_1) - \Delta\{z(x_1)\,a_{n-1}(x_1)\} + \right. \\ \left. + \Delta^2\{z(x_1)\,a_{n-2}(x_1)\} - \cdots + (-1)^n \Delta^n\{z(x_1)\,a_0(x_1)\}\right] = 0.\end{array}\right\} \tag{15}$$

Mais, suivant la définition (14), nous trouvons immédiatement que

$$P_0(x) + P_1(x) + \cdots + P_{n-1}(x) = p_0(x)\,\Delta^{n-1} y(x) + p_1(x)\,\Delta^{n-2} y(x+1) + \cdots + \\ + p_{n-1}(x)\,y(x+n-1)$$

où les expressions $p_0(x)$, $p_1(x)$,... $p_n(x)$ sont déterminées par les équations suivantes:

$$\left.\begin{array}{l} p_0(x) = z(x)\,a_0(x) \\ p_1(x) = z(x)\,a_1(x) + \varepsilon_1\,\Delta\{z(x)\,a_0(x)\} = z(x)\,a_1(x) - \Delta\,p_0(x) \\ p_2(x) = z(x)\,a_2(x) + \varepsilon_1\,\Delta\{z(x)\,a_1(x)\} + \varepsilon_2\,\Delta^2\{z(x)\,a_0(x)\} = \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = z(x)\,a_2(x) - \Delta\,p_1(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_{n-1}(x) = z(x)\,a_{n-1}(x) + \varepsilon_1\,\Delta\{z(x)\,a_{n-2}(x)\} + \cdots + \\ \qquad\qquad + \varepsilon_{n-1}\,\Delta^{n-1}\{z(x)\,a_0(x)\} = z(x)\,a_{n-1}(x) - \Delta\,p_{n-2}(x) \end{array}\right\} \tag{16}$$

avec $\varepsilon_r = (-1)^r$.

Par conséquent, si nous posons encore

$$\left.\begin{array}{l} p_n(x) = z(x)\,a_n(x) + \varepsilon_1\,\Delta\{z(x)\,a_{n-1}(x\} + \cdots + \\ \qquad + \varepsilon_n\,\Delta^n\{z(x)\,a_0(x)\} = z(x)\,a_n(x) - \Delta\,p_{n-1}(x) \end{array}\right\} \tag{17}$$

l'équation (15) prend la forme

$$\left.\begin{array}{r} p_0(x)\,\Delta^{n-1} y(x) + p_1(x)\,\Delta^{n-2} y(x+1)\,p_2(x)\,\Delta^{n-3} y(x+2) + \cdots + \\ + p_{n-1}(x)\,y(x+n-1) = \\ = \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x-1} y(x_1+n)\,Z(x_1) + c \end{array}\right\} \tag{18}$$

où

$$Z(x_1) = -p_n(x) \tag{19}$$

et

$$c = \left[p_0(x)\,\Delta^{n-1} y(x) + p_1(x)\,\Delta^{n-2} y(x+1) + \cdots + p_{n-1}(x)\,y(x+n-1)\right]_{x=\alpha} \tag{20}$$

4. La formule (18) une fois établie, comme conséquence nécessaire exprimant une relation entre les fonctions données $a_0(x)$, $a_1(x)$,... $a_n(x)$ et la fonction choisie $z(x)$, profitons maintenant de l'arbitraire qui existe dans le choix de cette fonction $z(x)$. Ainsi, en désignant par $z_1(x)$, $z_1(x) \dots z_n(x)$ n telles fonctions $z(x)$ et par $p_{r,0}(x)$, $p_{r,1}(x)$,..., $p_{r,n-1}(x)$, $Z_r(x)$, c_r respectivement les fonctions $p_0(x)$, $p_1(x)$,..., $p_{n-1}(x)$, $Z(x)$ et la constante c qui correspondent à la fonction $z_r(x)$, nous aurons le système suivant d'équations pour toutes les valeurs de $x \geqq \alpha + 1$:

$$\left.\begin{aligned}
&p_{1,0}\,\Delta^{n-1} y(x) + p_{1,1}\,\Delta^{n-2} y(x+1) + \cdots + \\
&\qquad + p_{1,n-1}\, y(x+n-1) = \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x-1} y(x_1+n)\, Z_1(x_1) + c_1 \\
&p_{2,0}\,\Delta^{n-1} y(x) + p_{2,1}\,\Delta^{n-2} y(x+1) + \cdots + \\
&\qquad + p_{2,n-1}\, y(x+n-1) = \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x-1} y(x_1+n)\, Z_2(x_1) + c_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&p_{n,0}\,\Delta^{n-1} y(x) + p_{n,1}\,\Delta^{n-2} y(x+1) + \cdots + \\
&\qquad + p_{n,n-1}\, y(x+n-1) = \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x-1} y(x_1+n)\, Z_n(x_1) + c_n .
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Par conséquent, nous n'avons qu'à supposer que les fonctions $z_r(x)$ aient été choisies de sorte que pour toutes les valeurs de $x \geqq \alpha + 1$ le déterminant

$$P(x) = \begin{vmatrix} p_{1,0} & p_{1,1} & \cdots & p_{1,n-1} \\ p_{2,0} & p_{2,1} & \cdots & p_{2,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n,0} & p_{n,1} & \cdots & p_{n,n-1} \end{vmatrix} \tag{22}$$

est différent de zéro, pour écrire (en particulier) toujours pour les mêmes valeurs de $x \geqq \alpha + 1$,

$$y(x+n-1) = \frac{P_n(x)}{P(x)} \tag{23}$$

où $P_n(x)$ représente le déterminant obtenu de (22) en y remplaçant les éléments de la dernière colonne par les seconds membres correspondants des équations (21).

La relation (23) une fois obtenue, considérons en plus de détail les propriétés du déterminant (22). Nous avons d'abord

$$P(x) = \left| \begin{array}{l} z_1\, a_0(x) \quad z_1\, a_1(x) + \varepsilon_1 \Delta \{ z_1\, a_0(x) \} \\ \qquad\qquad z_1\, a_2(x) + \varepsilon_1 \Delta \{ z_1\, a_1(x) \} + \varepsilon_2 \Delta^2 \{ z_1\, a_0(x) \} \ldots \\ z_2\, a_0(x) \quad z_2\, a_1(x) + \varepsilon_1 \Delta \{ z_2\, a_0(x) \} \\ \qquad\qquad z_2\, a_2(x) + \varepsilon_1 \Delta \{ z_2\, a_1(x) \} + \varepsilon_2 \Delta^2 \{ z_2\, a_0(x) \} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_n\, a_0(x) \quad z_n\, a_1(x) + \varepsilon_1 \Delta \{ z_n\, a_0(x) \} \\ \qquad\qquad z_n\, a_1(x) + \varepsilon_1 \Delta \{ z_n\, a_1(x) \} + \varepsilon_2 \Delta^2 \{ z_n\, a_0(x) \} \cdots \end{array} \right| ,$$

Mais, d'après la formule générale bien connue

$$\left. \begin{array}{l} \Delta^n \{ u(x)\, v(x) \} = \Delta^n v(x)\, u(x) + n\, \Delta^{n-1} v(x+1)\, \Delta u(x) + \\ \quad + \dfrac{n(n-1)}{2!} \Delta^{n-2} v(x+2)\, \Delta^2 u(x) + \ldots + v(x+n)\, \Delta^n u(x) \end{array} \right\} \tag{24}$$

ce déterminant prend directement la forme

$$P(x) = \varepsilon_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_{n-1}\, a_0(x)\, a_0(x+1)\, a_0(x+2) \ldots a_0(x+n-1)\, Q(x) \tag{25}$$

où

$$Q(x) = \left| \begin{array}{ccccc} z_1 & \Delta z_1 & \Delta^2 z_1 & \ldots & \Delta^{n-1} z_1 \\ z_2 & \Delta z_2 & \Delta^2 z_2 & \ldots & \Delta^{n-1} z_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_n & \Delta z_n & \Delta^2 z_n & \ldots & \Delta^{n-1} z_n \end{array} \right| . \tag{26}$$

De la même manière, nous obtenons pour le déterminant $P_n(x)$ la forme

$$P_n(x) = \varepsilon_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_{n-2}\, a_0(x)\, a_0(x+1)\, a_0(x+2) \ldots a_0(x+n-2)\, Q_n(x)$$

où

$$Q_n(x) = \left| \begin{array}{cccccc} z_1 & \Delta z_1 & \Delta^2 z_1 & \ldots & \Delta^{n-2} z_1 & \sum\limits_{x_1=\alpha}^{x_1=x-1} y(x_1+n)\, Z_1(x_1) + c_1 \\ z_2 & \Delta z_2 & \Delta^2 z_2 & \ldots & \Delta^{n-2} z_2 & \sum\limits_{x_1=\alpha}^{x_1=x-1} y(x_1+n)\, Z_2(x_1) + c_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_n & \Delta z_n & \Delta^2 z_n & \ldots & \Delta^{n-2} z_n & \sum\limits_{x_1=\alpha}^{x_1=x-1} y(x_1+n)\, Z_n(x_1) + c_n \end{array} \right|$$

Comme conséquence première de l'équation (25), on peut remplacer la condition introduite plus haut relative au déterminant $P(x)$, par la suivante:

le coefficient $a_0(x)$ de l'équation donné (9) avec le déterminant $Q(x)$ (qui ne dépend que des fonctions $z_r(x)$) ne doit s'annuler pour aucune valeur de $x \geqq \alpha + 1$. De plus, l'équation (23) prend maintenant la forme

$$y(x+n-1) = \varepsilon_{n-1} \frac{Q_n(x)}{a_0(x+n-1)\,Q(x)}.$$

Ou, si nous posons

$$A(x) = \begin{vmatrix} z_1 & \Delta z_1 & \Delta^2 z_1 & \ldots & \Delta^{n-1} z_1 & c_1 \\ z_2 & \Delta z_2 & \Delta^2 z_2 & \ldots & \Delta^{n-1} z_2 & c_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_n & \Delta z_n & \Delta^2 z_n & \ldots & \Delta^{n-1} z_n & c_n \end{vmatrix} \tag{27}$$

et

$$\bar{q}(x, x_1) = \begin{vmatrix} z_1 & \Delta z_1 & \ldots & \Delta^{n-2} z_1 & Z_1(x_1) \\ z_2 & \Delta z_2 & \ldots & \Delta^{n-2} z_2 & Z_2(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_n & \Delta z_n & \ldots & \Delta^{n-2} z_n & Z_n(x_1) \end{vmatrix} \tag{28}$$

nous aurons pour toutes les valeurs de $x \geqq \alpha + 1$:

$$y(x+n-1) = \frac{\varepsilon_{n-1} A(x)}{a_0(x+n-1)\,Q(x)} +$$

$$+ \frac{\varepsilon_{n-1}}{a_0(x+n-1)\,Q(x)} \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x-1} y(x_1+n)\,\bar{q}(x, x_1).$$

Enfin, après la transformation $x - 1 = x'$, cette équation devient

$$\left.\begin{aligned} y(x+n) = \frac{\varepsilon_{n-1} A(x+1)}{a_0(x+n)\,Q(x+1)} + \\ + \frac{\varepsilon_{n-1}}{a_0(x+n)\,Q(x+1)} \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x} y(x_1+n)\,\bar{q}(x+1, x_1), \quad (x \geqq \alpha). \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Cette dernière formule a évidemment une relation étroite avec la formule importante (26) du susdit premier Mémoire de M. Dini et nous allons l'employer pour étudier les intégrales $y(x)$ qui peuvent exister sous des hypothèses données pour une équation (9). Cependant, nous remarquons que jusqu'à ce point la signification précise de cette formule est celle d'une relation nécessaire entre les coefficients donnés $a_0(x)$, $a_1(x)$,... $a_n(x)$, l'intégrale $y(x)$

considérée comme donnée et une suite de n fonctions arbitraires $z_1(x)$, $z_2(x), \ldots z_n(x)$ quand on suppose, en résumé, que

a) chacune des fonctions $a_0(x)$, $a_1(x), \ldots a_n(x)$; $z_1(x)$, $z_2(x), \ldots z_n(x)$ est définie pour toutes les valeurs entières de $x \geqq$ un certain entier $\alpha \geqq 0$,

b) la fonction $y(x)$ est une intégrale donnée particulière de l'équation (9) pour toutes les valeurs de $x \geqq \alpha$,

c) le coefficient $a_0(x)$ ne s'annule pour aucune valeur de $x \geqq \alpha + 1$,

d) on choisit les fonctions $z_1(x)$, $z_2(x) \ldots z_n(x)$ de manière que le déterminant $Q(x)$ défini par l'équation (26) ne s'annule pour aucune valeur de $x \geqq \alpha + 1$.

5. Revenons alors à la formule (29). En remplaçant l'expression $y(x_1+n)$ qui se trouve sous le signe de sommation par sa valeur déterminée par la même formule, nous obtenons la nouvelle relation pour les valeurs de $x \geqq \alpha$:

$$y(x+n) = \frac{\varepsilon_{n-1} A(x+1)}{a_0(x+n)\,Q(x+1)} +$$

$$+ \frac{\varepsilon^2_{n-1}}{a_0(x+n)\,Q(x+1)} \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x} \frac{A(x_1+1)\,\bar{q}(x+1,\,x_1)}{a_0(x_1+n)\,Q(x_1+1)} +$$

$$+ \frac{\varepsilon^2_{n-1}}{a_0(x+n)\,Q(x+1)} \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x} \frac{\bar{q}(x+1,\,x_1)}{a_0(x_1+n)\,Q(x_1+1)} \sum_{x_2=\alpha}^{x_2=x_1} y(x_2+n)\,\bar{q}(x_1+1,\,x_2).$$

De la même manière on obtient maintenant

$$y(x+n) = \frac{\varepsilon_{n-1} A(x+1)}{a_0(x+n)\,Q(x+1)} +$$

$$+ \frac{\varepsilon^2_{n-1}}{a_0(x+n)\,Q(x+1)} \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x} \frac{A(x_1+1)\,\bar{q}(x+1,\,x_1)}{a_0(x_1+n)\,Q(x_1+1)} +$$

$$+ \frac{\varepsilon^3_{n-1}}{a_0(x+n)\,Q(x+1)} \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x} \frac{\bar{q}(x+1,\,x_1)}{a_0(x_1+n)\,Q(x_1+1)} \sum_{x_2=\alpha}^{x_2=x_1} \frac{A(x_2+1)\,\bar{q}(x_1+1,\,x_2)}{a_0(x_2+n)\,Q(x_2+1)} +$$

$$+ \frac{\varepsilon^3_{n-1}}{a_0(x+n)\,Q(x+1)} \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x} \frac{\bar{q}(x+1,\,x_1)}{a_0(x_1+n)\,Q(x_1+1)}$$

$$\sum_{x_2=\alpha}^{x_2=x_1} \frac{\bar{q}(x_1+1,\,x_2)}{a_0(x_2+n)\,Q(x_2+1)} \sum_{x_3=\alpha}^{x_3=x_2} y(x_3+n)\,\bar{q}(x_2+1,\,x_3).$$

En général, après m applications pareilles de la formule (29) nous arrivons au résultat suivant dans lequel, comme dans les deux précédents, on suppose toujours que $x \geqq \alpha$:

$$\left.\begin{aligned}
y(x+n) = {} & \frac{\varepsilon_{n-1} A(x+1)}{a_0(x+n)\,Q(x+1)} + \\
& + \frac{\varepsilon_{n-1}^2}{a_0(x+n)\,Q(x+1)} \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x} \frac{A(x_1+1)\,\overline{q}(x+1,\,x_1)}{a_0(x_1+n)\,Q(x_1+1)} + \\
& + \frac{\varepsilon_{n-1}^3}{a_0(x+n)\,Q(x+1)} \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x} \frac{\overline{q}(x+1,\,x_2)}{a_0(x_1+n)\,Q(x_1+1)} \sum_{x_2=\alpha}^{x_2=x_1} \frac{A(x_2+1)\,\overline{q}(x_1+1,\,x_2)}{a_0(x_2+n)\,Q(x_2+1)} + \\
& + \cdots + \cdots\cdots\cdots\cdots + \\
& + \frac{\varepsilon_{n-1}^{m+1}}{a_0(x+n)\,Q(x+1)} \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x} \frac{\overline{q}(x+1,\,x_1)}{a_0(x_1+n)\,Q(x_1+1)} \sum_{x_2=\alpha}^{x_2=x_1} \frac{\overline{q}(x_1+1,\,x_2)}{a_0(x_2+n)\,Q(x_2+1)} \cdots \\
& \sum_{x_{m-1}=\alpha}^{x_{m-1}=x_{m-2}} \frac{\overline{q}(x_{m-2}+1,\,x_{m-1})}{a_0(x_{m-1}+n)\,Q(x_{m-1}+1)} \sum_{x_m=\alpha}^{x_m=x_{m-1}} \frac{A(x_m+1)\,\overline{q}(x_{m-1}+1,\,x_m)}{a_0(x_m+n)\,Q(x_m+1)} + \\
& + R_m(x)
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

où

$$\begin{aligned}
R_m(x) = {} & \frac{\varepsilon_{n-1}^{m+1}}{a_0(x+n)\,Q(x+1)} \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x} \frac{\overline{q}(x+1,\,x_1)}{a_0(x+n)\,Q(x_1+1)} \sum_{x_2=\alpha}^{x_2=x_1} \frac{\overline{q}(x_1+1,\,x_2)}{a_0(x_2+n)\,Q(x_2+1)} \cdots \\
& \cdots \sum_{x_m=\alpha}^{x_m=x_{m-1}} \frac{\overline{q}(x_{m-1}+1,\,x_m)}{a_0(x_m+n)\,Q(x_m+1)} \sum_{x_{m+1}=\alpha}^{x_{m+1}=x_m} y(x_{m+1}+n)\,\overline{q}(x_m+1,\,x_{m+1}).
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous arrivons au résultat suivant: si les fonctions $z_1, z_2, z_3, \ldots z_n$ (qui doivent satisfaire aux conditions déjà spécifiées au § 4) sont telles qu'on a $\lim\limits_{m=\infty} R_m(x) = 0$ pour toutes les valeurs de $x \geqq \alpha$, alors la formule (30) fournit le moyen d'exprimer explicitement sous la forme d'une série infinie convergente les valeurs que l'intégrale $y(x)$ doit avoir pour les valeurs $x \geqq \alpha + n$ de x.

De plus, il n'est pas difficile de montrer que cette dernière condition se présentera dans tous les cas où l'on peut écrire, pour un choix donné des fonctions z

$$\left| \frac{\overline{q}(x+1,\,x_1)}{a_0(x+n)\,Q(x+1)} \right| \leqq d < 1 \ (^*) \quad \left\{ \begin{array}{c} d = \text{une constante indépendante} \\ \text{de } x \text{ et } x_1, \\ x \geqq \alpha, \quad x_1 \geqq \alpha. \end{array} \right\} \tag{e}$$

(*) Nous indiquons toujours par $|f|$ la valeur absolue ou le module de f suivant que f est réel ou complexe.

En effet, la valeur de x étant choisie, représentons par λ_x la valeur maximum de l'expression $y(x_1+n)$ lorsque $\alpha \leqq x_1 \leqq x$. Nous pourrons donc écrire pour la même valeur de x

$$|R_m(x)| < \lambda_x d^{m+1} K_m(x) \tag{31}$$

où

$$K_m(x) = \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x} \sum_{x_2=\alpha}^{x_2=x_1} \cdots \sum_{x_{m+1}=\alpha}^{x_{m+1}=x_m} 1. \tag{32}$$

Mais, pour cette expression $K_m(x)$ nous pouvons démontrer l'équation suivante :

$$K_m(x) = \frac{1}{(m+1)!}(x-\alpha+m+1)(x-\alpha+m)\cdots(x-\alpha+1). \tag{33}$$

En effet (en suivant le procès d'une induction mathématique) on a d'abord l'équation évidente

$$K_0(x) = x - \alpha + 1 \tag{34}$$

tandis que si l'on pose

$$K_{m-1}(x) = \frac{1}{m!}(x-\alpha+m)(x-\alpha+m-1)\,..\,(x-\alpha+1) \tag{35}$$

on obtient

$$K_m(x) = \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x} K_{m-1}(x) = \frac{1}{m!}\sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x}(x_1-\alpha+m)(x_1-\alpha+m-1)\ldots(x_1-\alpha+1) =$$

$$= \frac{1}{m!}\sum_{y_1=m}^{y_1=x-\alpha+m} y_1(y_1-1)(y_1-2)\ldots(y_1-m+1).$$

Mais, il existe la formule générale

$$\sum_{y_1=p}^{y_1=q} y_1(y_1-1)(y_1-2)\ldots(y_1-m+1) =$$

$$= \frac{1}{m+1}\Big[y_1(y_1-1)(y_1-2)\ldots(y_1-m)\Big]_{y_1=p}^{y_1=q}$$

comme on voit en écrivant

$$y_1(y_1-1)(y_1-2)\ldots(y_1-m+1) =$$

$$= \frac{1}{m+1}\left[(y_1+1)y_1(y_1-1)\ldots(y_1-m+1) - y_1(y_1-1)\,..\,(y_1-m)\right].$$

Ainsi, l'existence de la relation (35) nous permet d'écrire

$$K_m(x) = \frac{1}{(m+1)} \Big[y\ (y_1 - 1) \ldots (y_1 - m) \Big]_{y_1 = m}^{y_1 = x - \alpha + m + 1} =$$

$$= \frac{1}{(m+1)\,!} (x - \alpha + m + 1)(x - \alpha + m) \ldots (x - \alpha + 1)\,;$$

en d'autres termes, d'après l'équation (34) nous avons démontré la formule désirée (33).

De la formule (33) nous avons maintenant

$$K_m(x) = \frac{(x - \alpha + m + 1)\,!}{(x - \alpha)\,!\, m\,!} =$$

$$= \frac{1}{(x-\alpha)\,!} (x - \alpha + m + 1)(x - \alpha + m) \ldots (m+1)$$

de sorte que nous pouvons écrire pour une valeur quelconque de $x \geqq \alpha$

$$K_m(x) = \frac{m^{x-\alpha+1}}{(x-\alpha)\,!} \Big\{ 1 + \varepsilon_m(x) \Big\} \tag{36}$$

où $\lim\limits_{m=\infty} \varepsilon_m(x) = 0$.

Par conséquent, en revenant à l'inégalité (31) et en nous rappelant que $d < 1$ nous arrivons à l'équation désirée $\lim\limits_{m=\infty} R_m(x) = 0,\ x \geqq \alpha$.

6. Dans tout ce qui précède nous avons supposé toujours que la fonction $y(x)$ qui joue le rôle d'intégrale particulière de l'équation (9) était donnée, c'est-à-dire, nous avons observé la condition (b) du § 4. Sous cette condition, les fonctions $z_r(x)$ une fois choisies, les constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ qui se trouvent dans le déterminant $A(x)$ sont déterminées complètement par les n équations suivantes:

$$\left.\begin{array}{l} c_r = [p_{r,0}(x)\,\Delta^{n-1}\, y(x) + p_{r,1}(x)\,\Delta^{n-2}\, y(x+1) + \cdots \\ \quad \ldots + p_{r,n-1}(x)\, y(x+n-1)]_{x=\alpha}\,; \qquad r = 1, 2, 3, \ldots, n. \end{array}\right\} \tag{37}$$

Indépendamment de tout ce qui précède, soit donnée maintenant une équation (9) et une suite de n fonctions arbitraires $z_1(x), z_2(x), \ldots, z_n(x)$. Supposons que les coefficients donnés $a_0, a_1 \ldots, a_n$ et les fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_n$ satisfassent à la condition (a) du § 4 et que les conditions (c) et (d) du même paragraphe soient satisfaites non seulement pour $x \geqq \alpha + 1$ mais aussi pour

$x = \alpha$. Enfin, supposons qu'il soit donné une suite de n constantes arbitraires c_1, c_2, $c_3, \ldots, c_n$.

Alors, en vertu de l'équation (25) le déterminant $P(x)$ défini par l'équation (22) ne s'annulera pas pour $x \geqq \alpha$. En particulier, on aura $P(\alpha) \neq 0$ de sorte que, les constantes c_r étant connues, le système (37) détermine d'une manière unique les valeurs des quantités $\Delta^{n-1} y(\alpha)$, $\Delta^{n-2} y(\alpha+1), \ldots, y(\alpha+n-1)$. Par conséquent, d'après la relation (1) on trouve directement que, sous les mêmes conditions, les quantités $y(\alpha)$, $y(\alpha+1), \ldots$, $y(\alpha+n-1)$ seront aussi déterminées et déterminées d'une manière unique.

Ceci dit, supposons encore pour fixer les idées, que la condition (e) du § 5 soit satisfaite dans laquelle pour les fonctions données a_0, $a_1, \ldots, a_n$; z_1, $z_2, \ldots, z_n$ et pour les constantes données c_1, c_2, $c_3, \ldots, c_n$, l'expression $\bar{q}(x, x_1)$ est définie par l'équation (28).

Sous ces conditions, nous allons montrer que la série infinie

$$\left.\begin{aligned}
Y(x) = {} & \frac{\varepsilon_{n-1} A(x+1)}{a_0(x+n)\,Q(x+1)} + \\
& + \frac{\varepsilon_{n-1}^2}{a_0(x+n)\,Q(x+1)} \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x} \frac{A(x_1+1)\,\bar{q}(x+1, x_1)}{a_0(x_1+n)\,Q(x_1+1)} + \\
& + \frac{\varepsilon_{n-1}^3}{a_0(x+n)\,Q(x+1)} \\
& \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x} \frac{\bar{q}(x+1, x_1)}{a_0(x_1+n)\,Q(x_1+1)} \sum_{x_2=\alpha}^{x_2=x_1} \frac{A(x_2+1)\,\bar{q}(x_1+1, x_2)}{a_0(x_2+n)\,Q(x_2+1)} + \\
& + \frac{\varepsilon_{n-1}^4}{a_0(x+n)\,Q(x+1)} \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x} \frac{\bar{q}(x+1, x_1)}{a_0(x_1+n)\,Q(x_1+1)} \\
& \sum_{x_2=\alpha}^{x_2=x_1} \frac{\bar{q}(x_1+1, x_2)}{a_0(x_2+n)\,Q(x_2+1)} \sum_{x_3=\alpha}^{x_3=x_2} \frac{A(x_3+1)\,\bar{q}(x_2+1, x_3)}{a_0(x_3+n)\,Q(x_3+1)} + \\
& + \cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \quad (38)$$

convergera pour toutes les valeurs de $x \geqq \alpha$ et sera telle que si nous posons $y(x+n) = Y(x)$ les valeurs de $y(x)$ ainsi déterminées dans l'intervalle $x \geqq \alpha + n$ avec les valeurs $y(\alpha+n-1)$, $y(\alpha+n-2), \ldots$, $y(\alpha)$ déterminées par les équations (37) constitueront une intégrale de l'équation donnée (9) pour toutes les valeurs (entières) de $x \geqq \alpha$: c'est-à-dire, pour une telle valeur de x les expressions $\Delta^n y(x)$, $\Delta^{n-1} y(x+1), \ldots, y(x+n)$ existeront et vérifieront l'équation (9).

Or, la valeur de $x \geqq \alpha$ étant donnée, la fonction $\dfrac{A(x_1+1)}{a_0(x_1+n)\,Q(x_1+n)}$ considérée pour les valeurs de x_1 dans l'intervalle $\alpha \leqq x_1 \leqq x$ aura une valeur maximum μ_x de sorte que le $m^{\text{ième}}$ terme de la série donnée, quand on le considère pour la valeur indiquée de x sera moindre en valeur absolue que $d^{m-1}\mu_x K_m(x)$ où $K_m(x)$ a la définition (32). Ainsi, d'après la relation (36) le même terme devient moindre en valeur absolue que

$$\mu_x\, d^{m-1} \frac{(m-2)^{x-\alpha+1}}{(x-\alpha)!}\,\{1+\varepsilon_{m-2}(x)\}.$$

Il s'en suit que pour toutes les valeurs de m plus grandes qu'une certaine valeur m_0 et pour toutes les valeurs déjà indiquées pour x le même terme est moindre en valeur absolue que $G(x)\, d^{m-1}\,(m-2)^{x-\alpha+1}$, $G(x)$ étant indépendante de m, et puisque $d<1$ cette expression est le $m^{\text{ième}}$ terme d'une série convergente.

Pour prouver que la fonction indiquée $y(x)$ est une intégrale de l'équation (9) il suffit de supposer que la série (30) est convergente pour $x \geqq \alpha$: c'est-à-dire, il n'importe pas si la condition spéciale que nous avons signalée est satisfaite.

Or, la série étant convergente pour les valeurs de $x \geqq \alpha$, on établit directement pour les mêmes valeurs de x l'égalité

$$Y(x) = y(x+n) = \frac{\varepsilon_{n-1}\, A(x+1)}{a_0(x+n)\,Q(x+1)} + \\ + \frac{\varepsilon_{n-1}}{a_0(x+n)\,Q(x+1)} \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x} y(x_1+n)\,\bar{q}(x+1,\, x_1)$$

d'où on a pour les valeurs de $x \geqq \alpha+1$:

$$y(x+n-1) = \frac{\varepsilon_{n-1}\, A(x)}{a_0(x+n-1)\,Q(x)} + \\ + \frac{\varepsilon_{n-1}}{a_0(x+n-1)\,Q(x)} \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x-1} y(x_1+n)\,\bar{q}(x,\, x_1).$$

Par conséquent, en substituant pour $A(x)$ et $\bar{q}(x, x_1)$ leurs valeurs déterminées par (27) et (28), et en nous servant de l'équation (25), nous arrivons à la relation

$$y(x+n-1) = \frac{P_n(x)}{P(x)} \qquad (x \geqq \alpha+1) \tag{39}$$

où $P(x)$ est le déterminant (22), tandis que $P_n(x)$ est le déterminant

$$P_n(x) = \begin{vmatrix} p_{1,0} & p_{1,1} & \dots & p_{1,n-2} & \Phi_1 + c_1 \\ p_{2,0} & p_{2,1} & \dots & p_{2,n-2} & \Phi_2 + c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n,0} & p_{n,1} & \dots & p_{n,n-2} & \Phi_n + c_n \end{vmatrix}$$

avec

$$\Phi_r(x) = \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x-1} y(x_1+n)\, Z_r(x_1)\,; \qquad r = 1,\ 2,\ 3, \dots\ n. \tag{40}$$

Cela posé, considérons le système de n fonctions $\eta_0(x)$, $\eta_1(x)$,... $\eta_{n-1}(x)$ dont chacune est définie (en vertu de nos hypothèses actuelles, et d'équation (25)) pour toutes les valeurs de $x \geqq \alpha$ au moyen des n équations suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} p_{1,0}\,\eta_{n-1}(x) + p_{1,1}\,\eta_{n-2}(x) + \dots + p_{1,n-1}\,\eta_0(x) = H_1(x) + c_1 \\ p_{2,0}\,\eta_{n-1}(x) + p_{2,1}\,\eta_{n-2}(x) + \dots + p_{2,n-1}\,\eta_0(x) = H_2(x) + c_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_{n,0}\,\eta_{n-1}(x) + p_{n,1}\,\eta_{n-2}(x) + \dots + p_{n,n-1}\,\eta_0(x) = H_n(x) + c_n \end{array}\right\} \tag{41}$$

où $H_r(\alpha) = 0$ $(r = 1,\ 2, \dots\ n)$ tandis que pour des valeurs de $x \geqq \alpha + 1$ la même expression $H_r(x)$ est définie par l'équation $H_r(x) = \Phi_r(x)$.

Or, nous avons d'abord pour la valeur spéciale $x = \alpha$ les équations suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} \eta_0(\alpha) = y(\alpha + n - 1), \quad \eta_1(\alpha) = \Delta\, y(\alpha + n - 2), \\ \eta_2(\alpha) = \Delta^2\, y(\alpha + n - 3)\,, \dots \quad \eta_{n-1}(\alpha) = \Delta^{n-1}\, y(\alpha). \end{array}\right\} \tag{42}$$

En effet, les quantités $y(\alpha)$, $y(\alpha + 1)$,... $y(\alpha + n - 1)$ étant déterminées par hypothèse de sorte qu'elles satisfont aux équations (37) on vérifie directement les relations indiquées (42).

D'ailleurs, en se bornant aux valeurs de $x \geqq \alpha + 1$ on trouve tout de suite d'après l'équation (39) que

$$\eta_0(x) = y(x + n - 1). \tag{43}$$

En même temps, nous observons que toutes les différences $\Delta\,\eta_s(x)$ $(s = 0,$ $1,\ 2, \dots\ n - 1)$ existent lorsque $x \geqq \alpha + 1$ parce que si l'on a en général une fonction $u(x)$ définie pour les valeurs de $x \geqq \alpha + 1$ il résulte de la définition (1) que la différence $\Delta\, u(x)$ existe pour toutes les mêmes valeurs de x.

Or, la $r^{ième}$ équation du système (41) est

$$p_{r,0}\,\eta_{n-1}(x)+p_{r,1}\,\eta_{n-2}(x)+\cdots+p_{r,n-1}\,\eta_0(x)=H_r(x)+c_r\,.$$

Par conséquent, si l'on prend la première différence de chaque membre de cette équation, en se rappelant en même temps la formule générale

$$\Delta\{u(x)\,v(x)\}=u(x)\,\Delta\,v(x)+\Delta\,u(x)\,v(x+1),$$

il vient

$$p_{r,0}\,\Delta\,\eta_{n-1}(x)+p_{r,1}\,\Delta\,\eta_{n-2}(x)+\cdots+p_{r,n-1}\,\Delta\,\eta_0(x)+$$
$$+\Delta\,p_{r,0}\,\eta_{n-1}(x+1)+\Delta\,p_{r,1}\,\eta_{n-2}(x+1)+\cdots+$$
$$+\Delta\,p_{r,n-1}\,\eta_0(x+1)=y(x+n)\,Z_r(x).$$

De plus, si nous observons que l'équation (43) nous permet d'écrire

$$y_1(x+n)=\eta_0(x+1)\,;\quad (x\geqq\alpha) \tag{44}$$

et si nous nous servons des définitions (16), (17) et (19) cette dernière équation devient

$$z_r\,a_0\,\Delta\,\eta_{n-1}(x)+[z_r\,a_1-\Delta\,p_{r,0}]\,\Delta\,\eta_{n-2}(x)+[z_r\,a_2-\Delta\,p_{r,1}]\,\Delta\,\eta_{n-3}(x)+$$
$$+\ldots+[z_r\,a_{n-1}-\Delta\,p_{r,n-2}]\,\Delta\,\eta_0(x)+[z_r\,a_n-\Delta\,p_{r,n-1}]\,\eta_0(x+1)+$$
$$+\Delta\,p_{r,0}\,\eta_{n-1}(x+1)+\Delta\,p_{r,1}\,\eta_{n-2}(x+1)+\cdots+\Delta\,p_{r,n-1}\,\eta_0(x+1)=0$$

ou

$$\theta\,z_r+\theta_1\,\Delta\,p_{r,0}+\theta_2\,\Delta\,p_{r,1}+\cdots+\theta_{n-1}\,\Delta\,p_{r,n-2}=0\,;\ (r=1,\,2,\ldots,\,n) \tag{45}$$

où

$$\theta=a_0(x)\,\Delta\,\eta_{n-1}(x)+a_1(x)\,\Delta\,\eta_{n-2}(x)+\cdots+a_{n-1}(x)\,\Delta\,\eta_0(x)+a_n(x)\,\eta_0(x+1)$$

et

$$\left.\begin{aligned}
\theta_1 &= \eta_{n-1}(x+1)-\Delta\,\eta_{n-2}(x)\\
\theta_2 &= \eta_{n-2}(x+1)-\Delta\,\eta_{n-3}(x)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\theta_{n-s-1} &= \eta_{s+1}(x+1)-\Delta\,\eta_s(x)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\theta_{n-2} &= \eta_2(x+1)-\Delta\,\eta_1(x)\\
\theta_{n-1} &= \eta_1(x+1)-\Delta\,\eta_0(x).
\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Mais, en se servant encore de la relation $\Delta\,p_{r,s-1}=z_r\,a_s-p_{r,s}$ on voit tout de suite que le discriminant du système d'équations (45) se réduit à $\frac{\varepsilon_{n-1} P(x)}{a_0(x)}$ et, par suite (d'après nos hypothèses relatives à la fonction $P(x)$) ne s'annule pas pour $x \geqq \alpha$.

Ainsi, pour toutes les valeurs de $x \geqq \alpha$ nous aurons nécessairement $\theta = \theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_{n-1} = 0$.

Après ces préparatifs nous sommes à même de démontrer la relation générale suivante

$$\Delta \eta_s(x) = \Delta^{s+1} y(x + n - s - 1) \quad (s = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \tag{47}$$

En effet, d'après les équations (42) et (43), nous avons tout d'abord

$$\eta_0(x) = y(x + n - 1); \quad (x \geqq \alpha).$$

Mais, il résulte de là (en remarquant encore qu'en général, lorsque $u(x)$ est définie pour les valeurs de $x \geqq \alpha$ la différence $\Delta u(x)$ est nécessairement définie aussi pour les mêmes valeurs de x) que

$$\Delta \eta_0(x) = \Delta y(x + n - 1) \qquad (x \geqq \alpha). \tag{48}$$

Or, en suivant le procès de l'induction mathématique, si nous posons

$$\Delta \eta_{s-1}(x) = \Delta^s y(x + n - s); \qquad (x \geqq \alpha)$$

nous avons, en nous rappelant les équations (46) et $\theta_{n-s} = 0$,

$$\eta_s(x + 1) = \Delta^s y(x + n - s) \qquad (x \geqq \alpha).$$

Par conséquent, nous pouvons écrire

$$\eta_s(x) = \Delta^s y(x + n - s - 1) \qquad (x \geqq \alpha + 1). \tag{49}$$

Mais, d'après les équations (42) nous avons aussi $\eta_s(\alpha) = \Delta^s y(\alpha + n - s - 1)$ de sorte qu'au lieu de la relation (49) il existe la relation plus générale

$$\eta_s(x) = \Delta^s y(x + n - s - 1) \qquad (x \geqq \alpha).$$

Cette relation est donc établie aussitôt qu'on se rend compte de l'epuation (48).

Mais, les relations (44) et (47) avec l'équation $\theta = 0$ nous donnent le résultat désiré: c'est-à-dire, la fonction $y(x)$ étant donnée de la manière indiquée plus haut, les expressions $\Delta_n y(x)$, $\Delta^{n-1} y(x+1), \ldots \Delta y(x+n-1)$, $y(x+n)$ existent pour $x \geqq \alpha$ et satisfont à l'équation (9).

7. Tout en conservant les hypothèses du dernier paragraphe, supposons maintenant non seulement que les coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ satisfassent aux conditions y introduites, mais aussi que la fonction

$$A_0(x) = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

ne s'annule pour aucune valeur de $x \geqq \alpha$. Dans ces circonstances, nous allons montrer que les raisonnements du même paragraphe nous permettent de trouver non seulement des intégrales particulières de l'équation donnée (9) quand $x \geqq \alpha$, mais aussi (les fonctions z_r étant une fois choisies) ils conduisent à l'intégrale générale. En effet, supposons qu'on donne aux constantes $c_1, c_2, \ldots c_n$ les n systèmes de valeurs $c_{r,1}, c_{r,2}, \ldots c_{r,n}$ $(r = 1, 2, \ldots n)$ et que $y_1(x), y_2(x), \ldots y_n(x)$ représentent respectivement les intégrales particulières correspondantes pour $x \geqq \alpha$ obtenues de la manière indiquée dans le § 6 et supposons que le déterminant

$$C = \begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \ldots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \ldots & c_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \ldots & c_{n,n} \end{vmatrix} \tag{50}$$

ait une valeur différente de zéro. Nous pourrons alors démontrer que toute intégrale de l'équation (9) pour les valeurs de $x \geqq \alpha$ doit avoir la forme

$$y(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + \ldots + k_n y_n(x) \tag{51}$$

où $k_1, k_2, \ldots, k_n$ sont des constantes (indépendantes de x) et pas toutes égales à zéro.

Pour prouver cela commençons par rappeler encore que les intégrales $y_r(x)$ satisfont aux équations (37). Ainsi, on trouve que le déterminant C peut se transformer dans la forme

$$C = P(\alpha) D(\alpha)$$

où $P(x)$ a la signification ordinaire, tandis que $D(\alpha)$ est le déterminant

$$D(\alpha) = \begin{vmatrix} \Delta^{n-1} y_1(\alpha) & \Delta^{n-2} y_1(\alpha+1) & \ldots & y_1(\alpha+n-1) \\ \Delta^{n-1} y_2(\alpha) & \Delta^{n-2} y_2(\alpha+1) & \ldots & y_2(\alpha+n-1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Delta^{n-1} y_n(\alpha) & \Delta^{n-2} y_n(\alpha+1) & \ldots & y_n(\alpha+n-1) \end{vmatrix}.$$

De plus, ce dernier déterminant, quand on substitue pour les différences successives leurs valeurs déterminées par la formule (1) prend la forme

$$D(\alpha) = \begin{vmatrix} y_1(\alpha+n-1) & y_1(\alpha+n-2) & \dots & y_1(\alpha) \\ y_2(\alpha+n-1) & y_2(\alpha+n-2) & \dots & y_2(\alpha) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n(\alpha+n-1) & y_n(\alpha+n-2) & \dots & y_n(\alpha) \end{vmatrix}. \tag{52}$$

Il résulte donc, d'après l'hypothèse $C \neq 0$ que nous pouvons écrire $D(\alpha) \neq 0$ où $D(\alpha)$ est défini par l'équation (51).

Cela posé, il convient d'établir les deux lemmes généraux suivants:

Lemme I: Soit donnée une équation linéaire aux différences finies (9) dans laquelle les coefficients $a_0, a_1, \dots a_n$ sont définis pour toutes les valeurs (entières positives) de $x \geqq$ un certain entier $\alpha \geqq 0$. Soit aussi $y_1(x), y_2(x), \dots y_n(x)$ n intégrales particulières de cette équation pour $x \geqq \alpha$. Enfin, supposons que l'expression $A_0(x) = a_0(x) + a_1(x) + \dots + a_n(x)$ ne s'annule pas quand $x \geqq \alpha$. Alors, la condition nécessaire et suffisante pour que les intégrales indiquées soient dépendantes linéairement, c'est-à-dire qu'on ait pour toutes les valeurs de $x \geqq \alpha$ la relation

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \dots + \lambda_n y_n(x) = 0; \quad (\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n \textit{ constantes}) \tag{53}$$

est que le déterminant (52) n'a pas la valeur zéro.

Or, il résulte tout de suite des propriétés bien connues des déterminants que la condition indiquée est nécessaire. Pour voir qu'elle est aussi suffisante nous observons d'abord que, en vertu des remarques générales du § 2 l'équation (9) peut s'écrire sous la forme

$$A_0(x)\, y(x+n) + A_1(x)\, y(x+n-1) + \dots + A_n(x)\, y(x) = 0 \tag{54}$$

où les coefficients A sont liés par une rélation linéaire aux coefficients a et où, en particulier $A_0 = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Or, si le déterminant (52) est égal à zéro, nous savons bien qu'il existe n constantes $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ pas toutes égales à zéro de sorte qu'on a

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \dots + \lambda_n y_n(x) = 0 \\ \qquad\qquad \{x = \alpha,\ \alpha+1, \dots,\ \alpha+n-1\}. \end{array}\right\} \tag{55}$$

Mais, en général, si l'on peut écrire

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \dots + \lambda_n y_n(x) = 0 \\ \qquad\qquad \left\{\begin{array}{l} x = p,\ p+1, \dots\ p+n-1 \\ p \geqq \alpha \end{array}\right\}, \end{array}\right\} \tag{56}$$

alors (en se rappelant que $A_0(x) \neq 0$, $x \geqq \alpha$) on a la même relation aussi pour $x = p + n$ comme cela résulte de l'équation (54).

Par conséquent, en commençant de l'équation (55) nous pourrons écrire sous les hypothèses actuelles la relation désirée (53).

Lemme II. Soit $y_1(x)$, $y_2(x)$,... $y_n(x)$ n intégrales linéairement indépendantes de l'équation (9) pour $x \geqq \alpha$. Alors, en supposant que les coefficients satisfont aux conditions du lemme précédent, toute autre intégrale de la même équation pour ces valeurs de x peut s'écrire sous la forme

$$y(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + \cdots + k_n y_n(x)\,; \quad (k_1,\ k_2, \ldots\ k_n \text{ constantes}). \tag{57}$$

En effet, considérons le système de constantes k_1, k_2,... k_n déterminé par les équations

$$\left.\begin{aligned} &y(\alpha) = k_1 y_1(\alpha) + k_2 y_2(\alpha) + \cdots + k_n y_n(\alpha) \\ &y(\alpha+1) = k_1 y_1(\alpha+1) + k_2 y_2(\alpha+1) + \cdots + k_n y_n(\alpha+1) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &y(\alpha+n-1) = k_1 y_1(\alpha+n-1) + k_2 y_2(\alpha+n-1) + \cdots + \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + k_n y(\alpha+n-1). \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

Or, le discriminant de ce système (qui n'est autre chose que le déterminant (52)) est différent de zéro suivant notre hypothèse, de sorte que ces constantes k existent et sont déterminées d'une manière unique. Mais, si l'on substitue dans l'équation (59) les valeurs de $y(\alpha)$, $y(\alpha+1)$,... $y(\alpha+n-1)$ données par les équations (58) il résulte directement d'après la condition $A_0(x) \neq 0$, $x \geqq \alpha$ que

$$y(\alpha+n) = k_1 y_1(\alpha+n) + k_2 y_2(\alpha+n) + \cdots + k_n y_n(\alpha+n). \tag{59}$$

Enfin, en employant les valeurs de $y(\alpha+1)$, $y(\alpha+2)$,... $y(\alpha+n)$ déterminées par les équations (58), (59) on arrive à un résultat correspondant pour l'expression $y(\alpha+n+1)$ et en continuant de la même manière on arrive évidemment à la relation désirée (57).

Revenons donc aux remarques que nous avons faites au commencement du paragraphe. En rappelant qu'on a pour les intégrales $y_1(x)$, $y_2(x)$,... $y_n(x)$ l'inégalité $D(\alpha) \neq 0$ où $D(\alpha)$ est définie par l'équation (52) il résulte du lemme I que les mêmes intégrales sont linéairement indépendantes dans l'intervalle $x \geqq \alpha$. De là, en appliquant le lemme II, nous arrivons maintenant à l'équation désirée (51).

Enfin, nous observons que l'intégrale $y(x)$ que nous avons obtenue dans le § 6 et qui contient les n constantes arbitraires $c_1, c_2, \ldots c_n$ représentera elle-même l'intégrale générale pour les valeurs de $x \geqq \alpha$ lorsque (outre la condition indiquée plus haut relative à l'expression $A_0(x)$) les intégrales particulières $y_1, y_2, \ldots y_n$ correspondant aux n systèmes de valeurs

$$1, 0, 0, 0, \ldots 0; \quad 0, 1, 0, 0, \ldots 0; \quad 0, 0, 1, 0, 0, \ldots 0; \ldots; \quad 0, 0, 0, \ldots 1$$

existent pour toutes les valeurs x dans le même intervalle. En effet, d'après ce que nous venons de dire, les mêmes intégrales formeront un système fondamental pour l'intervalle $x \geqq \alpha$. De plus, quand on développe chacun des déterminants $A(x+1)$, $A(x_1+1), \ldots A(x_n+1)$ par rapport aux éléments de la dernière colonne l'intégrale $y(x)$ du § 6 prend la forme

$$y(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + \cdots + k_n(x),$$

les constantes k étant arbitraires.

8. En résumé, nous pouvons donc énoncer le théorème général suivant:

Théorème I. *Soit donnée l'équation linéaire aux différences finies*

$$a_0(x)\, \Delta^n y(x) + a_1(x)\, \Delta^{n-1} y(x+1) + \cdots + a_n(x)\, y(x+n) = 0$$

les coefficients étant définis au moins pour toutes les valeurs entières positives de $x \geqq$ un certain entier $\alpha \geqq 0$, et le coefficient $a_0(x)$ ne s'annulant pour aucune des mêmes valeurs de x.

Choisissons maintenant un système quelconque de n fonctions $z_1(x)$, $z_2(x)$, $z_3(x), \ldots z_n(x)$ dont chacune est définie au moins pour toutes les valeurs entières positives de $x \geqq \alpha$ tandis que le déterminant

$$Q(x) = \begin{vmatrix} z_1 & \Delta z_1 & \Delta^2 z_1 & \ldots & \Delta^{n-1} z_1 \\ z_2 & \Delta z_2 & \Delta^2 z_2 & \ldots & \Delta^{n-1} z_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_n & \Delta z_n & \Delta^2 z_n & \ldots & \Delta^{n-1} z_n \end{vmatrix}$$

ne s'annule pour aucune des mêmes valeurs de x.

En même temps, choisissons un système de n constantes arbitraires c_1, c_2,

$c_3, \ldots c_n$ *et formons les déterminants*

$$A(x) = \begin{vmatrix} z_1 & \Delta z_1 & \Delta^2 z_1 & \ldots & \Delta^{n-2} z_1 & c_1 \\ z_2 & \Delta z_2 & \Delta^2 z_2 & \ldots & \Delta^{n-2} z_2 & c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_n & \Delta z_n & \Delta^2 z_n & \ldots & \Delta^{n-2} z_n & c_n \end{vmatrix},$$

$$\bar{q}(x, x_1) = - \begin{vmatrix} z_1 & \Delta z_1 & \Delta^2 z_1 & \ldots & \Delta^{n-2} z_1 & f_1(x_1) \\ z_2 & \Delta z_2 & \Delta^2 z_2 & \ldots & \Delta^{n-2} z_2 & f_2(x_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_n & \Delta z_n & \Delta^2 z_n & \ldots & \Delta^{n-2} z_n & f_n(x_1) \end{vmatrix}$$

où

$$f_r(x) = z_r a_n - \Delta\{z_r a_{n-1}\} + \Delta^2\{z_r a_{n-1}\} + \cdots + (-1)^n \Delta^n \{z_1 a_0\};$$

$$r = 0, 1, \ldots n$$

et posons

$$\Phi(x, x_1) = \frac{\bar{q}(x+1, x_1)}{a_0(x_1+n)\,Q(x_1+1)}, \quad \Psi(x, x_1) = \frac{A(x_1+1)\,\bar{q}(x+1, x_1)}{a_0(x_1+n)\,Q(x_1+1)}.$$

Enfin, formons la série infinie

$$Y(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{a_0(x+n)\,Q(x+1)}\left[A(x+1) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_m(x) + \cdots\right]$$

où

$$u_m(x) = (-1)^{m(n-1)} \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x} \sum_{x_2=\alpha}^{x_2=x_1} \cdots \sum_{x_m=\alpha}^{x_m=x_{m-1}} \Phi(x, x_1)\,\Phi(x_1, x_2) \ldots$$

$$\ldots \Phi(x_{m-2}, x_{m-1})\,\Psi(x_{m-1}, x_m)$$

et supposons que cette série soit convergente pour toutes les valeurs de $x \geqq \alpha$ $\left(\right.$*ce qui a lieu en particulier si* $\left|\dfrac{\bar{q}(x+1, x_1)}{a_0(x+n)\,Q(x+1)}\right| \leqq d < 1$ *lorsque* $x \geqq \alpha$, $x_1 \geqq \alpha$, *d étant une constante*$\left.\right)$.

Alors, le système d'équations

$$c_r = \left[p_{r,0}\,\Delta^{n-1} y(x) + p_{r,1}\,\Delta^{n-2} y(x+1) + \cdots + p_{r,n-1}\, y(x+n-1)\right]_{x=\alpha};$$

$$r = 1, 2, \ldots n$$

où

$$p_{r,s} = z_r(x)\, a_s(x) - \Delta \{ z_r(x)\, a_{s-1}(x) \} + \cdots + (-1)^s \Delta^s \{ z_r(x)\, a_0(x) \}$$

détermine d'une manière unique une valeur pour chacune des expressions $\Delta^{n-1} y(\alpha)$, $\Delta^{n-2} y(\alpha+1), \ldots\, y(\alpha+n-1)$ *et par conséquent, pour chacune des expressions* $y(\alpha)$, $y(\alpha+1), \ldots\, y(\alpha+n-1)$ *et la fonction* $y(x)$ *qui prend ces valeurs dans l'intervalle* $\alpha \leqq x \leqq \alpha+n-1$ *et les valeurs* $y(x) = Y(x-n)$ *dans l'intervalle* $x \geqq \alpha+n$ *sera une intégrale de l'équation donnée pour toutes les valeurs de* $x \geqq \alpha$.

De plus, cette intégrale sera l'intégrale générale pour les mêmes valeurs de x *lorsque l'expression* $A_0(x) = a_0(x) + a_1(x) + \cdots + a_n(x)$ *ne s'annule pour aucune des mêmes valeurs de* x, *tandis que les intégrales particulières* $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots\, y_n(x)$ *qui correspondent aux* n *systèmes de valeurs*

$$1,\ 0,\ 0,\ 0, \ldots\ 0;\ 0,\ 1,\ 0, \ldots\ 0; \ldots;\ 0,\ 0,\ 0, \ldots\ 1$$

des constantes c_1, $c_2, \ldots\, c_n$ *existent dans le sens indiqué plus haut.*

Ce théorème, bien que compliqué, a évidemment une grande généralité, surtout parce qu'on peut choisir les fonctions auxiliaires z_1, $z_2, \ldots\, z_n$ d'une façon bien arbitraire. En effet, on peut ordinairement choisir ces fonctions d'un nombre infini de manières, à chacune desquelles correspond une expression de la forme indiquée pour l'intégrale générale de l'équation donnée (9). En même temps, il résulte de cette liberté de choix qu'on peut obtenir souvent l'intégrale générale sous une forme spéciale, qui met en évidence directement ses propriétés les plus importantes.

Le deuxième théorème.

9. En dehors du théorème du paragraphe précédent, nous désirons établir un autre théorème général qui se prête surtout à l'étude des intégrales d'une équation (9) quand on les considère pour les valeurs très grandes de l'argument x.

A cet effet, revenons à l'équation (9) et posons encore les hypothèses du § 3 relatives aux coefficients a_0, $a_1, \ldots\, a_n$ et à l'intégrale $y(x)$. D'ailleurs, ayant choisis la fonction $z(x)$ comme dans le cas précédent, choisissons encore un entier positif, arbitrairement grand β.

Alors, nous pouvons écrire évidemment pour toutes les valeurs de x (x entier positif, comme toujours) dans l'intervalle $\alpha \leqq x \leqq \beta - 1$:

$$\sum_{x_1=x}^{x_1=\beta-1} z(x_1)\left[a_0(x)\,\Delta^n y(x_1) + a_1(x_1)\,\Delta^{n-1} y(x_1+1) + \cdots + \right.$$
$$\left. + a_n(x_1)\, y(x_1+n)\right] = 0.$$

Comme dans le cas précédent, considérons maintenant le terme

$$\sum_{x_1=x}^{x_1=\beta-1} z(x_1)\, a_r(x_1)\, \Delta^{n-r} y(x_1+r).$$

Or, en général, $u(x)$ et $v(x)$ étant deux fonctions définies dans l'interval $\alpha \leqq x \leqq \beta$ on peut écrire pour toutes les valeurs de x dans l'intervalle plus petit $\alpha \leqq x \leqq \beta - 1$:

$$\sum_{x_1=x}^{x_1=\beta-1} u(x_1)\,\Delta\, v(x_1) = \Big[u(x_1)\, v(x_1)\Big]_{x_1=x}^{x_1=\beta} - \sum_{x_1=x}^{x_1=\beta-1} v(x_1+1)\,\Delta\, u(x_1). \qquad (60)$$

En effet, sous les hypothèses indiquées, chacune des différences $\Delta u(x)$, $\Delta v(x)$ existe pour toutes les valeurs de x dans l'intervalle $\alpha \leqq x \leqq \beta - 1$ et, par conséquent, il est de même pour l'expression $u(x)\,\Delta v(x) + v(x+1)\,\Delta u(x)$. Nous avons donc pour toutes ces valeurs de x

$$\sum_{x_1=x}^{x_1=\beta-1} \left[u(x_1)\,\Delta\, v(x_1) + v(x_1+1)\,\Delta\, u(x_1)\right] =$$
$$= \sum_{x_1=x}^{x_1=\beta-1} \left[u(x_1+1)\, v(x_1+1) - u(x_1)\, v(x_1)\right] =$$
$$= u(\beta)\, v(\beta) - u(x)\, v(x) = \Big[u(x_1)\, v(x_1)\Big]_{x_1=x}^{x_1=\beta},$$

d'où l'on déduit immédiatement la formule (60).

Nous obtenons donc dans le cas actuel pour toutes les valeurs de x dans l'intervalle $\alpha \leqq x \leqq \beta - 1$ l'équation

$$\sum_{x_1=x}^{x_1=\beta-1} z(x_1)\, a_r(x_1)\, \Delta^{n-r} y(x_1+r) = \Big[P_r(x_1)\Big]_{x_1=x}^{x_1=\beta} +$$
$$+ (-1)^{n-r} \sum_{x_1=x}^{x_1=\beta-1} y(x_1+n)\, \Delta^{n-r} \{ z(x_1)\, a_r(x_1) \}; \qquad r = 0,\ 1, \ldots\ n-1,$$

l'expression $P_r(x)$ étant définie par l'équation (14).

Par conséquent, en suivant encore de proche en proche les raisonnements du § 3 nous arrivons à la relation

$$p_0(x)\,\Delta^{n-1}y(x)+p_1(x)\,\Delta^{n-2}y(x+1)+\cdots+p_{n-1}(x)\,y(x+n-1)= \qquad (\alpha\leqq x\leqq\beta-1)$$

$$-\sum_{x_1=x}^{x_1=\beta-1}y(x_1+n)\,Z(x_1)+c$$

les expressions $p_0, p_1, \ldots p_n$ et $Z(x)$ étant données comme dans le cas précédent par les équations (16), (17) et (19) tandis que pour la constante c on a maintenant

$$c=[p_0\,\Delta^{n-1}y(x)+p_1\,\Delta^{n-2}y(x+1)+\cdots+p_{n-1}\,y(x+n-1)]_{x=\beta}. \tag{61}$$

Cela posé, répétons les opérations du § 4 avec les modifications qui se présentent naturellement. Ainsi, choisissons n fonctions arbitraires $z_1, z_2, \ldots z_n$ et considérons le système des n équations

$$p_{r,0}\,\Delta^{n-1}y(x)+p_{r,1}\,\Delta^{n-2}y(x+1)+\cdots+$$

$$+p_{r,n-1}\,y(x+n-1)=-\sum_{x_1=x}^{x_1=\beta-1}y(x_1+n)\,Z_r(x_1)+c_r$$

$$r=1,\ 2,\ 3,\ldots\ n.$$

Supposons maintenant que, les fonctions z étant choisies de la manière indiquée, le déterminant $P(x)$ donné par l'équation (22) ne s'annule pas lorsque $x\geqq\alpha$. Nous pourrons donc écrire (en particulier) pour toutes les valeurs de x dans l'intervalle $\alpha\leqq x\leqq\beta-1$:

$$y(x+n-1)=\frac{P_n(x)}{P(x)}$$

ou $P_n(x)$ représente maintenant le déterminant

$$P_n(x)=\begin{vmatrix} p_{1,0} & p_{1,1} & \ldots & p_{1,n-2} & -\sum\limits_{x_1=x}^{x_1=\beta-1}y(x_1+n)\,Z_1(x_1)+c_1 \\ p_{2,0} & p_{2,1} & \ldots & p_{2,n-2} & -\sum\limits_{x_1=x}^{x_1=\beta-1}y(x_1+n)\,Z_2(x_1)+c_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n,0} & p_{n,1} & \ldots & p_{n,n-2} & -\sum\limits_{x_1=x}^{x_1=\beta-1}y(x_1+n)\,Z_n(x_1)+c_n \end{vmatrix} \tag{62}$$

ou

$$P_n(x) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{n-2}\, a_0(x)\, a_0(x+1) \ldots a_0(x+n-1)\, Q_n(x)$$

où

$$Q_n(x) = \begin{vmatrix} z_1 & \Delta z_1 & \Delta^2 z_1 & \ldots & \Delta^{n-2} z_1 - \sum_{x_1=x}^{x_1=\beta-1} y(x_1+n)\, Z_1(x_1) + c_1 \\ z_2 & \Delta z_2 & \Delta^2 z_2 & \ldots & \Delta^{n-2} z_2 - \sum_{x_1=x}^{x_1=\beta-1} y(x_1+n)\, Z_2(x_1) + c_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_n & \Delta z_n & \Delta^2 z_n & \ldots & \Delta^{n-2} z_n - \sum_{x_1=x}^{x_1=\beta-1} y(x_1+n)\, Z_n(x_1) + c_n \end{vmatrix}.$$

En vertu de l'équation (25) on peut remplacer la condition $P(x) \neq 0$, $x \geqq \alpha$ par l'autre $Q(x) \neq 0$, $a_0(x) \neq 0$, $x \geqq \alpha$ et si nous posons maintenant

$$\bar{q}(x, x_1) = -\begin{vmatrix} z_1 & \Delta z_1 & \ldots & \Delta^{n-2} z_1 & Z_1(x_1) \\ z_2 & \Delta z_2 & \ldots & \Delta^{n-2} z_2 & Z_2(x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_n & \Delta z_n & \ldots & \Delta^{n-2} z_n & Z_n(x_1) \end{vmatrix} \tag{63}$$

nous avons maintenant pour les valeurs de x dans l'intervalle $\alpha \leqq x \leqq \beta - 1$:

$$\left.\begin{aligned} y(x+n-1) &= \frac{\varepsilon_{n-1} A(x)}{a_0(x+n-1)\, Q(x)} + \\ &+ \frac{\varepsilon_{n-1}}{a_0(x+n-1)\, Q(x)} \sum_{x_1=x}^{x_1=\beta-1} y(x_1+n)\, \bar{q}(x, x_1) \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

où les expressions $Q(x)$ et $A(x)$ ont les significations signalées dans le cas précédent, c'est-à-dire, ils ont respectivement les définitions (26) et (27).

La formule (64) peut s'écrire aussi sous la forme suivante, en supposant maintenant que x est dans l'intervalle $\alpha - 1 \leqq x \leqq \beta - 2$:

$$\left.\begin{aligned} y(x+n) &= \frac{\varepsilon_{n-1} A(x+1)}{a_0(x+n)\, Q(x+1)} + \\ &+ \frac{\varepsilon_{n-1}}{a_0(x+n)\, Q(x+1)} \sum_{x_1=x+1}^{x_1=\beta-1} y(x_1+n)\, \bar{q}(x+1, x_1). \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

Par conséquent, on obtient aussi pour toutes ces valeurs de x:

$$\begin{aligned} y(x+n) &= \frac{\varepsilon_{n-1} A(x+1)}{a_0(x+n)\, Q(x+1)} + \\ &+ \frac{\varepsilon_{n-1}^2}{a_0(x+n)\, Q(x+1)} \sum_{x_1=x+1}^{x_1=\beta-1} \frac{A(x_1+1)\, \bar{q}(x+1, x_1)}{a_0(x_1+n)\, Q(x_1+1)} + \\ &+ \frac{\varepsilon_{n-1}^2}{a_0(x+n)\, Q(x+1)} \sum_{x_1=x+1}^{x_1=\beta-1} \frac{\bar{q}(x+1, x_1)}{a_0(x_1+n)\, Q(x_1+1)} \sum_{x_2=x_1+1}^{x_2=\beta-1} y(x_2+n)\, \bar{q}(x_1+1, x_2). \end{aligned}$$

Plus généralement, si nous posons

$$\Phi(x, x_1) = \frac{\overline{q}(x+1, x_1)}{a_0(x_1+n)\,Q(x_1+1)}, \quad \Psi(x, x_1) = \frac{A(x_1+1)\,\overline{q}(x+1, x_1)}{a_0(x_1+n)\,Q(x_1+1)}. \tag{66}$$

nous obtenons la formule générale suivante qui est valable pour toutes les valeurs de x dans l'intervalle $\alpha - 1 \leqq x \leqq \beta - 2$:

$$\left.\begin{aligned}
y(x+n) = \frac{\varepsilon_{n-1}}{a_0(x+n)\,Q(x+1)} \Bigg[& A(x+1) + \varepsilon_{n-1} \sum_{x_1=x+1}^{x_1=\beta-1} \Psi(x, x_1) + \\
& + \varepsilon_{n-2}^2 \sum_{x_1=x+1}^{x_1=\beta-1} \sum_{x_2=x_1+1}^{x_2=\beta-1} \Phi(x, x_1)\,\Psi(x_1, x_2) + \\
& + \varepsilon_{n-1}^3 \sum_{x_1=x+1}^{x_1=\beta-1} \sum_{x_2=x_1+1}^{x_2=\beta-1} \sum_{x_3=x_2+1}^{x_3=\beta-1} \Phi(x, x_1)\,\Phi(x_1, x_2)\,\Psi(x_2, x_3) + \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\
& + \varepsilon_{n-1}^m \sum_{x_1=x+1}^{x_1=\beta-1} \sum_{x_2=x_1+1}^{x_2=\beta-1} \cdots \sum_{x_m=x_{m-1}+1}^{x_m=\beta-1} \Phi(x, x_1)\,\Phi(x_1, x_2) \ldots \\
& \ldots \Phi(x_{m-2}, x_{m-1})\,\Psi(x_{m-1}, x_m) + \varepsilon_{n-1}^m R_m(x) \Bigg]
\end{aligned}\right\} \tag{67}$$

où

$$R_m(x) = \sum_{x_1=x+1}^{x_1=\beta-1} \sum_{x_2=x_1+1}^{x_2=\beta-1} \cdots \sum_{x_m=x_{m-1}+1}^{x_m=\beta-1} \sum_{x_{m+1}=x_m+1}^{x_{m+1}=\beta-1} \Phi(x, x_1)\,\Phi(x_1, x_2) \ldots$$
$$\ldots \Phi(x_{m-1}, x_m)\,y(x_{m+1}+n)\,\overline{q}(x_m+1, x_{m+1}).$$

En étudiant ce résultat, il est important de remarquer une différence essentielle entre cette dernière relation et la relation correspondante (30). Dans la relation (30), on peut donner une valeur aussi grande qu'on veut au nombre m mais cela n'est pas vrai dans le cas actuel. En effet, la valeur de x étant donnée, pour calculer les diverses limites inférieures des sommations qui se trouvent dans l'expression plus haut il faut déterminer un système de valeurs $x_1, x_2, \ldots x_{m+1}$ au moyen des équations

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= x + 1 \\
x_2 &= x_1 + 1 \\
&\cdots\cdots\cdots \\
x_{m+1} &= x_m + 1
\end{aligned}\right\} \tag{68}$$

et en même temps on doit avoir

$$x_{m+1} \leqq \beta - 1. \tag{69}$$

Ces relations (68) et (69) conduisent immédiatement à la seule relation $x \leqq \beta - m + 2$ relative aux quantités β et m de sorte que, β et x étant choisis, il faut prendre

$$m \leqq \beta - x + 2.$$

Cependant, la valeur de m sera sans restriction, comme dans le cas précédent, si l'on peut prendre dans tout ce qui précède $\beta = \infty$, mais il est évident qu'on ne peut pas faire cela et en même temps être assuré que le second membre de l'équation résultante (67) ait une signification sans poser d'autres conditions sur les fonctions $a_0, a_1, \ldots a_n$; $z_1, z_2, \ldots z_n$ et l'intégrale donnée $y(x)$. En même temps, il n'est pas important, dans le but que nous poursuivons de spécifier ce que ces conditions doivent être. En effet, la formule (67) une fois trouvée comme conséquence nécessaire de nos hypothèses actuelles, elle ne fait maintenant qu'inspirer les considérations suivantes qui correspondent à celles du § 6.

9. Sans regard, alors, aux hypothèses spéciales des paragraphes précédents, revenons à l'équation donnée (9). Supposons que les coefficients $a_0, a_1, \ldots a_n$ satisfassent aux conditions indiquées au commencement du § 3 et que $a_0(x)$ ne s'annule jamais pour $x \geqq \alpha$. Choisissons maintenant un système quelconque de n fonctions $z_1(x), z_2(x), \ldots z_n(x)$ telle que

$$z_r(x) \quad (r = 1, 2, \ldots n)$$

est définie pour toutes les valeurs de $x \geqq \alpha$ tandis que le déterminant $Q(x)$ défini par l'équation (26) ne s'annule pour aucune des mêmes valeurs de x. Enfin, soient données n constantes arbitraires $c_1, c_2, \ldots c_n$.

Sous ces hypothèses, les expressions $A(x)$ et $\bar{q}(x, x_1)$ définies respectivement par les équations (27) et (63) auront évidemment une signification lorsque $x \geqq \alpha$, $x_1 \geqq \alpha$ de sorte qu'il en sera de même pour les expressions $A(x+1)$, $\bar{q}(x+1, x_1)$, $\Phi(x, x_1)$, $\Psi(x, x_1)$ lorsque $x \geqq \alpha - 1$, $x_1 \geqq \alpha$.

Cela posé, considérons la série infinie suivante (qui se présente naturellement si l'on a égard aux résultats du paragraphe précédent)

$$Y(x) = \frac{\varepsilon_{n-1}}{a_0(x+n)\,Q(x+1)}\left[A(x+1) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_m(x) + \cdots\right] \tag{70}$$

où

$$u_m(x) = \varepsilon_{n-1}^m \sum_{x_1=x+1}^{x_1=\infty} \sum_{x_2=x_1+1}^{x_2=\infty} \cdots \sum_{x_m=x_{m-1}+1}^{x_m=\infty} \Phi(x, x_1)\,\Phi(x_1, x_2)\ldots$$
$$\Phi(x_{m-2}, x_{m-1})\,\Psi(x_{m-1}, x_m).$$

Les fonctions $a_0, a_1, \dots a_n$; $z_1, z_2, \dots z_n$ et les constantes $c_1, c_2, \dots c_n$ étant ainsi données, supposons maintenant que pour les valeurs de $x \geqq x_0 \geqq \alpha - 1$, x_0 étant une constante suffisamment grande, les conditions suivantes soient satisfaites :

a) chacun des termes $u_m(x)$ a une signification ;

b) la série $|u_1(x)| + |u_2(x)| + \cdots + |u_m(x)| + \cdots$ converge vers une limite $U(x)$ telle que la série

$$\sum_{x_1=x+1}^{x_1=\infty} |\Phi(x, x_1)| \, U(x_1)$$

converge aussi.

c) la série $Y(x)$ (qui convergera certainement sous les conditions (*a*) et *b*)) est telle que chacune des expressions

$$\sum_{x_1=x+1}^{x_1=\infty} Y(x_1) \, Z_r(x_1) \qquad (r = 1, 2, \dots n)$$

a une signification.

Nous allons montrer que sous ces conditions la fonction $y(x)$ définie pour toutes les valeurs de $x \geqq x_0 + n$ par la formule $y(x) = Y(x - n)$ sera une intégrale de l'équation donnée (9) pour toutes ces valeurs de x.

Pour le voir, nous observons d'abord que l'équation (70) nous permet d'écrire lorsque $x \geqq x_0$, $x_1 \geqq x_0$:

$$Y(x_1) \, \bar{q}(x + 1, x_1) = \varepsilon_{n-1} \Psi(x, x_1) + \varepsilon_{n-1} \sum_{m=1}^{m=\infty} u_m(x_1) \, \Phi(x, x_1).$$

Par conséquent, en représentant par p une constante $> x_0$ nous pouvons écrire aussi pour les valeurs de $x \geqq x_0$:

$$\sum_{x_1=x+1}^{x_1=p} Y(x_1) \, \bar{q}(x + 1, x_1) = \varepsilon_{n-1} \sum_{x_1=x+1}^{x_1=p} \Psi(x, x_1) +$$

$$+ \varepsilon_{n-1} \sum_{x_1=x+1}^{x_1=p} \sum_{m=1}^{m=\infty} u_m(x_1) \, \Phi(x, x_1).$$

Or, quand la quantité p augmente indéfiniment le premier terme du second membre de cette équation tend vers la limite $u_1(x)$. En même temps, le second terme du même membre prend la forme d'une série infinie double dans laquelle on peut intervertir l'ordre des sommations.

En effet, cette dernière propriété résulte d'un théorème bien connu (*) relatif aux séries infinies, quand on observe que sous les hypothèses actuelles la série

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} | u_m (x_1) \Phi (x, x_1) | \quad \text{ou} \quad | \Phi (x, x_1) | \sum_{m=1}^{m=\infty} | u_m (x_1) |$$

converge à une limite $| \Phi (x, x_1) | \, U (x_1)$ telle que la série

$$\sum_{x_1=x+1}^{x_1=\infty} | \Phi (x, x_1) | \, U (x_1)$$

converge aussi.

Nous aurons donc pour toutes les valeurs de $x \geqq x_0$

$$\sum_{x_1=x+1}^{x_1=\infty} Y (x_1) \, \overline{q} (x + 1, x_1) = u_1 (x) + \varepsilon_{n-1} \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{x_1=x+1}^{x_1=\infty} u (x_1) \, \Phi (x, x_1) =$$

$$= \sum_{m=1}^{m=\infty} u_m (x) = \varepsilon_{n-1} \, a_0 (x + n) \, Q (x + 1) \, Y (x) - A (x + 1)$$

d'où il résulte encore que

$$\left. \begin{aligned} Y (x) = {} & \frac{\varepsilon_{n-1} \, A (x + 1)}{a_0 (x + n) \, Q (x + 1)} + \\ & + \frac{\varepsilon_{n-1}}{a_0 (x + n) \, Q (x + 1)} \sum_{x_1=x+1}^{x_1=\infty} Y (x_1) \, \overline{q} (x + 1, x_1) \, ; \qquad (x \geqq x_0). \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Or, en posant $y (x) = Y (x - n)$ ou $y (x + n) = Y (x)$ la relation (71) nous donne

$$y (x + n - 1) = \frac{\varepsilon_{n-1} \, A (x)}{a_0 (x + n - 1) \, Q (x)} +$$

$$+ \frac{\varepsilon_{n-1}}{a_0 (x + n - 1) \, Q (x)} \sum_{x_1=x}^{x_1=\infty} y (x_1 + n) \, \overline{q} (x, x_1) \qquad (x \leqq x_0 + 1)$$

d'où, en substituant pour les expressions $A (x)$ et $\overline{q} (x, x_1)$ leurs valeurs telles qu'elles sont déterminées par les équations (27) et (63) et en se servant de

(*) Voir par exemple: GOURSAT, *Cours d'Analyse*, tome I, p. 401 (Paris, 1902).

l'équation (25) il vient

$$y(x+n-1)=\frac{P_n(x)}{P(x)} \qquad (x \geqq x_0+1) \tag{72}$$

l'expression $P(x)$ étant donnée par le déterminant (22) tandis que l'expression $P_n(x)$ est le déterminant

$$P_n(x)=\begin{vmatrix} p_{1,0} & p_{1,1} & \cdots & p_{1,n-2} & -\sum\limits_{x_1=x}^{x_1=\infty} y(x_1+n)\,Z_1(x_1)+c_1 \\ p_{2,0} & p_{2,1} & \cdots & p_{2,n-2} & -\sum\limits_{x_1=x}^{x_1=\infty} y(x_1+n)\,Z_2(x_1)+c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n,0} & p_{n,1} & \cdots & p_{n,n-2} & -\sum\limits_{x_1=x}^{x_1=\infty} y(x_1+n)\,Z_n(x_1)+c_n \end{vmatrix}$$

qui a certainement une signification quand $x \geqq x_0+1$ d'après la condition (c) posée plus haut.

L'équation (72) une fois établie, nous allons considérer (comme dans le cas précédent) les n fonctions $\eta_0(x)$, $\eta_1(x), \ldots \eta_{n-1}(x)$ dont chacune est définie (en vertu de nos hypothèses) quand $x \geqq x_0+1$ au moyen du système suivant:

$$\left.\begin{array}{c} p_{r,0}\,\eta_{n-1}(x)+p_{r,1}\,\eta_{n-2}(x)+\cdots+p_{r,n-2}\,\eta_1(x)+p_{r,n-1}\,\eta_0(x)=H_r(x)+c_r \\ r=1,\,2,\ldots\,n \end{array}\right\} \tag{73}$$

où

$$H_r(x)=-\sum_{x_1=x}^{x_1=\infty} y(x_1+n)\,Z_r(x_1).$$

Nous aurons d'abord

$$\eta_0(x)=y(x+n-1) \qquad (x \geqq x_0+1). \tag{74}$$

En même temps, d'après la définition (1) on peut dire que chacune des expressions $\Delta\,\eta_s(x)$ existe quand $x \geqq x_0+1$ parce que les fonctions $\eta_s(x)$ elles-mêmes existent pour les mêmes valeurs de x.

Prenons donc la première différence de chaque membre de la $r^{\text{ième}}$ équation du système (73). Ainsi nous obtenons pour toutes les valeurs de $x \geqq x_0+1$ l'égalité

$$p_{r,0}\,\Delta\,\eta_{n-1}(x)+p_{r,1}\,\Delta\,\eta_{n-2}(x)+\cdots+p_{r,n-1}\,\Delta\,\eta_0(x)+$$
$$+\;p_{r,0}\,\eta_{n-1}(x+1)+\Delta p_{r,1}\,\eta_{n-2}(x+1)+\cdots,+\Delta p_{r,n-1}\,\eta_0(x+1)=y(x+n)\,Z_r(x).$$

Mais, d'après l'équation (74) nous pouvons écrire quand $x \geqq x_0$,

$$y(x+n) = \eta_0(x+1).$$

Par conséquent, en rappelant les définitions (16), (17) et (19) nous avons maintenant pour les valeurs de $x \geqq x_0 + 1$

$$\begin{aligned} &z_r a_0 \Delta \eta_{n-1}(x) + [z_r a_1 - \Delta p_{r,0}] \Delta \eta_{n-1}(x) + [z_r a_2 - \Delta p_{r,1}] \Delta \eta_{n-3}(x) + \\ &+ \cdots + [z_r a_{n-1} - \Delta p_{r,n-2}] \Delta \eta_0(x) + [z_r a_n - \Delta p_{r,n-1}] \eta_0(x+1) + \\ &+ \Delta p_{r,0} \eta_{n-1}(x+1) + \Delta p_{r,1} \eta_{n-2}(x) + \cdots + \Delta p_{r,n-1} \eta_0(x+1) = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\left.\begin{array}{c} \theta z_r + \theta_1 \Delta p_{r,0} + \theta_1 \Delta p_{r,1} + \cdots + \theta_{n-1} \Delta p_{r,n-2} = 0, \\ \left\{ \begin{array}{l} r = 1, 2, \ldots n, \\ x \geqq x_0 + 1. \end{array}\right. \end{array}\right\} \tag{75}$$

où

$$\theta = a_0(x) \Delta \eta_{n-1}(x) + a_1(x) \Delta \eta_{n-2}(x) + \cdots + a_{n-1} \Delta \eta_0(x) + a_n(x) \eta_0(x+1)$$

et

$$\left\{\begin{array}{l} \theta_1 = \eta_{n-1}(x+1) - \Delta \eta_{n-2}(x) \\ \theta_2 = \eta_{n-2}(x+1) - \Delta \eta_{n-3}(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \theta_{n-s-1} = \eta_{s+1}(x+1) - \Delta \eta_s(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \theta_{n-1} = \eta_1(x+1) - \Delta \eta_0(x). \end{array}\right.$$

Mais, en se servant encore de la relation $\Delta p_{r,s-1} = z_r a_s - p_{r,s}$, il vient (comme dans le cas précédent) que le discriminant du système (75) ne s'annule pas lorsque $x \geqq x_0 + 1$ de sorte que pour les mêmes valeurs de x on a nécessairement $\theta = \theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_{n-1} = 0$.

Cela posé, nous allons démontrer la formule

$$\eta_s(x) = \Delta^s y(x+n-s-1); \qquad x \geqq x_0 + s + 1. \tag{76}$$

En effet, si nous posons

$$\eta_{s-1}(x) = \Delta^{s-1} y(x+n-s), \qquad x \geqq x_0 + s$$

nous obtenons

$$\Delta \eta_{s-1}(x) = \Delta^s y(x+n-s), \qquad x \geqq x_0 + s$$

et puisque $\theta_{n-s-2}=0$ nous pouvons écrire aussi

$$\eta_s(x+1)=\Delta^s y(x+n-s)\,; \qquad x \geqq x_0+s$$

ou

$$\eta_s(x)=\Delta^s y(x+n-s-1)\,; \qquad x \geqq x_0+s+1$$

ce qui est la formule indiquée (76). Cette formule sera donc démontrée aussitôt que nous prenons en égard l'équation (74).

En particulier, il suffit de prendre $x \geqq x_0+n$ pour écrire

$$\Delta \eta_s(x)=\Delta^{s+1} y(x+n-s-1)\,; \qquad s=0,\ 1,\ 2,\ldots\ (n-1),$$

de sorte que, en vertu de l'équation $\theta=0$, on a pour toutes les valeurs de $x \geqq x_0+n$ la relation désirée

$$a_0(x)\,\Delta^n y(x)+a_1(x)\,\Delta^{n-1} y(x+1)+\cdots+a_n(x)\,y(x+n)=0.$$

10. Supposons maintenant remplies non seulement les conditions du dernier paragraphe, mais encore la suivante : la fonction

$$A_0(x)=a_1(x)+a_2(x)+\cdots+a_n(x)$$

ne s'annule pour aucune valeur de $x \geqq$ une certaine valeur fixée $\bar{x}_0$. Avec ces hypothèses, nous pouvons démontrer (les fonctions $z_1, z_2,\ldots z_n$ une fois choisies) que si l'on choisit n systèmes de valeurs $c_{r,1}, c_{r,2},\ldots c_{r,n}$ $(r=1, 2, 3,\ldots n)$ pour les constantes $c_1, c_2,\ldots c_n$ de sorte que le système particulier $c_{r,1}, c_{r,2},\ldots c_{r,n}$ corresponde à l'intégrale $y_r(x)$ $(x \geqq x_{0,r}+n)$ et si en même temps le déterminant (50) est différent de zéro, alors les n intégrales $y_1(x)$, $y_2(x),\ldots y_n(x)$ constituent un système fondamental d'intégrales pour toutes les valeurs de $x \geqq X_0$, X_0 étant une quantité quelconque, fixée et au moins aussi grande que la plus grande des quantités $x_{0,1}+n$, $x_{0,2}+n,\ldots x_{0,n}+n$, $\bar{x}_0$.

Pour prouver cela, il suffit évidemment d'après les deux lemmes du § 7 de montrer qu'il existe une valeur fixée X_0 qui satisfait aux conditions indiquées plus haut et en outre est telle que le déterminant

$$\begin{vmatrix} y_1(X_0+n-1) & y_1(X_0+n-2) & \ldots & y_1(X_0) \\ y_2(X_0+n-1) & y_2(X_0+n-2) & \ldots & y_2(X_0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n(X_0+n-1) & y_n(X_0+n-2) & \ldots & y_n(X_0) \end{vmatrix}$$

est différent de zéro.

Or, d'après les considérations du dernier § on sait que pour $x \geqq x_{0,r} + n$ l'intégrale $y_r(x)$ est telle qu'on a les n équations suivantes:

$$c_{1,r} = p_{1,0}\,\Delta^{n-1} y_r(x) + p_{1,1}\,\Delta^{n-2} y_r(x+1) + \cdots +$$
$$+ p_{1,n-1}\, y_r(x+n-1) + \sum_{x_1=x}^{x_1=\infty} y(x_1+n)\, Z_1(x_1)$$
$$c_{2,r} = p_{2,0}\,\Delta^{n-1} y_r(x) + p_{2,1}\,\Delta^{n-2} y_r(x+1) + \cdots +$$
$$+ p_{2,n-1}\, y_r(x+n-1) + \sum_{x_1=x}^{x_1=\infty} y(x_1+n)\, Z_2(x_1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$c_{n,r} = p_{n,0}\,\Delta^{n-1} y_r(x) + p_{n,1}\,\Delta^{n-2} y_r(x+1) + \cdots +$$
$$+ p_{n,n-1}\, y_r(x+n-1) + \sum_{x_1=x}^{x_1=\infty} y(x_1+n)\, Z_n(x_1).$$

Mais, en donnant dans ces équations à x une valeur suffisamment grande, chacune des sommations qui s'y trouvent devient aussi petite qu'on veut en valeur absolue: cela résulte, en effet, de l'hypothèse que nous avons faite relative à l'existence de ces sommations. Par conséquent, en prenant x suffisamment grand, le déterminant C qui est définie par (50) diffère aussi peu qu'on veut du déterminant obtenu de (50) en y remplaçant l'élément $c_{r,s}$ par l'expression

$$p_{s,0}\,\Delta^{n-1} y_r(x) + p_{s,1}\,\Delta^{n-2} y_r(x+1) + \cdots + p_{s,n-1}\, y(x+n-1).$$

En d'autres termes, pour x suffisamment grand nous pouvons écrire

$$C = P(x)\, D(x) + \varepsilon(x) \tag{77}$$

où $P(x)$ a la signification usuelle et $D(x)$ est le déterminant

$$D(x) = \begin{vmatrix} \Delta^{n-1} y_1(x) & \Delta^{n-2} y_1(x+1) & \ldots & y_1(x+n-1) \\ \Delta^{n-1} y_2(x) & \Delta^{n-2} y_2(x+1) & \ldots & y_2(x+n-1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Delta^{n-1} y_n(x) & \Delta^{n-2} y_n(x+1) & \ldots & y_n(x+n-1) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(x+n-1) & y_1(x+n-2) & \ldots & y_1(x) \\ y_2(x+n-1) & y_2(x+n-2) & \ldots & y_2(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n(x+n-1) & y_n(x+n-2) & \ldots & y_n(x) \end{vmatrix}$$

et où l'expression $\varepsilon(x)$ est telle que $\lim\limits_{x=\infty} \varepsilon(x) = 0$.

Cela posé, donnons à x une valeur X_0 plus grande que n'importe quelle des quantités $x_{0,1}+n$, $x_{0,2}+n, \ldots$ $x_{0,n}+n$, $\bar{x}_0$ et en même temps telle que $|\varepsilon(X_0)|<C$. Alors, non seulement nous serons assurés que toutes les fonctions $y_r(x)$ sont des intégrales de l'équation donnée (9) lorsque $x \geqq X_0$ et pour les mêmes valeurs de x que $A_0(x) \neq 0$, mais encore nous aurons, d'après l'équation (77),

$$P(X_0)\,D(X_0)=M$$

où M est une constante différente de zéro.

Ainsi, en rappelant que la quantité $P(X_0)$ est finie, nous avons $D(X_0) \neq 0$ de sorte que nous arrivons au résultat indiqué.

Enfin, on peut répéter ici les considérations qui se trouvent à la fin du § 7, excepté qu'on remplace maintenant l'intervalle $x \geqq \alpha$ par l'autre $x \geqq X_0$.

Les résultats des trois derniers paragraphes nous permettent d'énoncer le théorème général suivant:

11. Théorème II. *Soit donnée l'équation linéaire aux différences finies*

$$a_0(x)\,\Delta^n y(x)+a_1(x)\,\Delta^{n-1} y(x+1)+\cdots+a_n(x)\,y(x+n)=0$$

les coefficients étant définis au moins pour toutes les valeurs entières positives de $x \geqq$ *un certain entier* $\alpha \geqq 0$, *et le coefficient* $a_0(x)$ *ne s'annulant pour aucune des mêmes valeurs de* x.

Choisissons maintenant un système quelconque de n *fonctions* $z_1(x)$, $z_2(x), \ldots$ $z_n(x)$ *dont chacune est définie au moins pour toutes les valeurs entières positives de* $x \geqq \alpha$ *tandis que le determinant*

$$Q(x)=\begin{vmatrix} z_1 & \Delta z_1 & \Delta^2 z_1 & \ldots & \Delta^{n-1} z_1 \\ z_2 & \Delta z_2 & \Delta^2 z_2 & \ldots & \Delta^{n-1} z_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_n & \Delta z_n & \Delta^2 z_n & \ldots & \Delta^{n-1} z_n \end{vmatrix}$$

ne s'annule pour aucune des mêmes valeurs de x.

En même temps, choisissons un système de n *constantes arbitraires* c_1, c_2, $c_3, \ldots$ c_n *et formons les déterminants*

$$A(x)=\begin{vmatrix} z_1 & \Delta z_1 & \Delta^2 z_1 & \ldots & \Delta^{n-2} z_1 & c_1 \\ z_2 & \Delta z_2 & \Delta^2 z_2 & \ldots & \Delta^{n-2} z_2 & c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_n & \Delta z_n & \Delta^2 z_n & \ldots & \Delta^{n-2} z_n & c_n \end{vmatrix},$$

$$\bar{q}(x, x_1) = \begin{vmatrix} z_1 & \Delta z_1 & \Delta^2 z & \dots & \Delta^{n-2} z_1 & f_1(x_1) \\ z_2 & \Delta z_2 & \Delta^2 z_2 & \dots & \Delta^{n-2} z_2 & f_2(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_n & \Delta z_n & \Delta^2 z_n & \dots & \Delta^{n-2} z_n & f_n(x_1) \end{vmatrix}$$

où

$$f_r(x) = z_r a_n - \Delta\{z_r a_{n-1}\} + \Delta^2\{z_r a_{n-2}\} - \dots + \\ + (-1)^n \Delta^n\{z_r a_0\}; \quad (r = 0, 1, \dots n),$$

et posons

$$\Phi(x, x_1) = \frac{\bar{q}(x+1, x_1)}{a_0(x_1+n)\, Q(x_1+1)}, \qquad \Psi(x, x_1) = \frac{A(x_1+1)\,\bar{q}(x+1, x_1)}{a_0(x_1+n)\, Q(x_1+1)}.$$

Enfin, formons la série infinie

$$Y(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{a_0(x+n)\, Q(x+1)}\left[A(x+1) + u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_m(x) + \dots\right]$$

où

$$u_m(x) = (-1)^{m(n-1)} \sum_{x_1=x+1}^{x_1=\infty} \sum_{x_2=x_1+1}^{x_2=\infty} \dots \sum_{x_m=x_{m-1}+1}^{x_m=\infty} \Phi(x, x_1)\,\Phi(x_1, x_2) \dots \\ \dots \Phi(x_{m-2}, x_{m-1})\,\Psi(x_{m-1}, x_m).$$

On peut dire maintenant que si une valeur fixée $x_0 \geqq \alpha$ existe telle que pour $x \geqq x_0$:

a) *chacun des termes $u_m(x)$ a une signification,*

b) *la série*

$$\sum_{x_1=x+1}^{x_1=\infty} |u_m(x_1)|$$

converge vers une limite $U(x)$ telle que la série

$$\sum_{x_1=x+1}^{x_1=\infty} |\Phi(x, x_1)|\, U(x_1)$$

converge aussi,

c) *la série $Y(x)$ (qui convergera certainement lorsque $x \geqq x_0$ d'après les conditions (a), (b)) définit une fonction de x telle que chacune des expressions*

$$\sum_{x_1=x+1}^{x_1=\infty} Y(x_1)\, f_r(x_1) \qquad (r = 1, 2, \dots n)$$

a une signification,

alors, la fonction $y(x) = Y(x-n)$ *sera une intégrale de l'équation donnée pour toutes les valeurs de* $x \geqq x_0 + n$.

De plus, cette intégrale sera l'intégrale générale pour les mêmes valeurs de x *lorsque l'expression* $A_0(x) = a_0(x) + a_1(x) + \cdots + a_n(x)$ *ne s'annule pour aucune des mêmes valeurs de* x, *tandis que les intégrales particulières* $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots\ y_n(x)$ *correspondant aux* n *systèmes de valeurs* 1, 0, 0,... 0; 0, 1, 0,... 0; 0, 0, 1, 0,... 0,...; 0, 0, 0,... 0. 1 *des constantes* $c_1, c_2, \ldots\ c_n$ *existent dans le sens indiquée plus haut lorsque* $x \geqq x_0 + n$.

Applications des théorèmes précédents à des équations de types speciaux.

12. Nous allons considérer, au moyen du théorème du dernier paragraphe quelques propriétés importantes des intégrales d'une équation (9) lorsque l'argument x prend des valeurs très grandes. Dans ce but, il convient tout d'abord de faire quelques observations générales relatives aux déterminants $Q(x)$, $A(x)$ et $\overline{q}(x, x_1)$ (qui jouent un rôle essentiel dans tout ce qui précède) quand on détermine les fonctions auxiliaires $z_1(x)$, $z_2(x), \ldots\ z_n(x)$ de manière à satisfaire à une équation linéaire aux différences finies du $n^{\text{ième}}$ ordre, ayant des coefficients constants.

Ainsi, supposons que ces fonctions z forment un système fondamental d'intégrales de l'équation

$$\alpha_0 \Delta^n z(x) + \varepsilon_1 \alpha_1 \Delta^{n-1} z(x) + \varepsilon_2 \alpha_2 \Delta^{n-2} z(x) + \cdots + \varepsilon_n \alpha_n z(x) = 0, \tag{78}$$

les quantités α étant constantes (indépendantes de x) avec $\alpha_0 \neq 0$ et $\varepsilon_s = (-1)^s$ (*).

Or, on peut obtenir sans difficulté un système d'intégrales fondamentales pour l'équation (78). En effet, en suivant les indications du § 2 on peut écrire cette équation sous la forme

$$A_0 z(x+n) + A_1 z(x+n-1) + \cdots + A_n z(x) = 0, \tag{79}$$

(*) Nous avons introduit les quantités ε_s dans les coefficients de l'équation (78) pour écrire cette équation sous une forme adaptée aux considérations qui suivent.

où les coefficients A sont des constantes déterminées par les équations

$$\left.\begin{array}{c} A_r = \dfrac{\varepsilon_r}{(n-r)!}\left[\dfrac{n!}{r!}\alpha_0 + \dfrac{(n-1)!}{(r-1)!}\alpha_1 + \dfrac{(n-2)!}{(r-2)!}\alpha_2 + \cdots + \dfrac{(n-r)!}{0!}\alpha_r\right]; \\ r = 0,\ 1, \ldots\ n. \end{array}\right\} \quad (80)$$

Mais, il est bien connu (*) que les fonctions

$$z_1(x) = m_1^x, \quad z_2(x) = m_2^x, \ldots \quad z_n(x) = m_n^x \tag{81}$$

où les quantités m_1, m_2,... m_n sont les racines (réelles ou imaginaires) de l'équation algébrique

$$\varphi(m) = A_0\, m^n + A_1\, m^{n-1} + \cdots + A_n = 0 \tag{82}$$

constituent un système fondamental d'intégrales de l'équation (79) pourvu que ces racines soient distinctes.

Supposons donc que l'équation (9) aussi que l'équation (78) étant données, on forme l'équation algébrique (82) et que toutes ses n racines soient distinctes, et prenons pour les fonctions auxiliaires $z_1(x)$, $z_2(x)$,... $z_n(x)$ les n fonctions (81).

Il résulte directement que $\Delta^r z_s = (m_s - 1)^r m_s^x$; $\left\{\begin{array}{l} r = 0,\ 1,\ 2, \ldots \\ s = 1,\ 2, \ldots\ n \end{array}\right.$ de sorte que le déterminant $Q(x)$ se réduit à $(m_1 m_2 m_3 \ldots m_n)^x q$, q étant le produit $\Pi_{r,s}(m_r - m_s)$ de toutes les différences $m_r - m_s$ quand $r > s$. De plus, il résulte de nos hypothèses que $q \neq 0$. Ajoutons maintenant l'hypothèse ultérieure qu'aucune des racines m_1, m_2,... m_n n'est égale à zéro.

Alors, le déterminant $Q(x)$ ne s'annulera jamais et on aura

$$Q(x) = \sigma^x q \tag{83}$$

où

$$\sigma = m_1\, m_2\, m_3 \ldots m_n = \frac{\varepsilon_n A_n}{\alpha_0} = \frac{1}{\alpha_0}(\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n).$$

Quant aux déterminants $A(x)$ et $\bar{q}(x, x_1)$, prenons la définition (63) de $\bar{q}(x, x_1)$ (en nous bornant ainsi au théorème II) et développons chacun des mêmes déterminants par rapport aux éléments de la dernière colonne. Nous

(*) Voir, par exemple: Boole, *A treatise on the calculus of finite differences*, p. 106 (London, 1860).

obtenons ainsi

$$\left.\begin{aligned} A(x) &= \varepsilon_{n-1} Q_{.}(x) c_1 + \varepsilon_{n-2} Q_2(x) c_2 + \cdots + \varepsilon_0 Q_n(x) c_n, \\ \overline{q}(x, x_1) &= \varepsilon_{n-1} Q_1(x) f_1(x_1) + \varepsilon_{n-2} Q_2(x) f_2(x_1) + \cdots + \varepsilon_0 Q_n(x) f_n(x_1) \end{aligned}\right\} \tag{84}$$

où $Q_r(x)$ est le mineur du déterminant $Q(x)$ par rapport au $r^{\text{ième}}$ élément de la dernière colonne, et où $f_r(x)$ a la signification usuelle:

$$f_r(x) = z_r(x) a_n(x) + \varepsilon_1 \Delta \{ z_r(x) a_{n-1}(x) \} + \cdots + \varepsilon_n \Delta^n \{ z_r(x) a_0(x) \}. \tag{85}$$

D'ailleurs, en posant pour faciliter l'analyse $\sigma_r = \dfrac{\sigma}{m_r}$, nous avons

$$Q_r(x) = \sigma_r^x q_r$$

où

$$q_r = \frac{q}{(m_r - m_1)(m_r - m_2)\cdots(m_r - m_{r-1})(m_{r+1} - m_r)\ldots(m_n - m_r)} = \frac{\varepsilon^{n-s} \alpha_0 q}{\varphi(m_r)}.$$

Ainsi, les formules (84) prennent les formes

$$A(x) = \alpha_0 q \sum_1^n {}_r \frac{c_r \sigma_r^x}{\varphi'(m_r)}, \tag{86}$$

$$\overline{q}(x, x_1) = \alpha_0 q \sum_1^n {}_r \frac{\sigma_r^x f_r(x_1)}{\varphi'(m_r)}. \tag{87}$$

De plus, d'après l'équation (85) nous pouvons écrire

$$\varepsilon_n f_r(x) = \sum_0^n {}_s \varepsilon_s \Delta^{n-s} \{ z_r a_s \}$$

ou

$$\varepsilon_n f_r(x) = \sum_0^n {}_s \varepsilon_s \Delta^{n-s} [(a_s - \alpha_s) z_r] = m_r^x \sum_0^n \varepsilon_s \frac{\Delta^{n-s}[(a_s - \alpha_s) m_r^x]}{m_r^x}$$

de sorte que

$$f_r(x) = \varepsilon_n m_r^x \sum_0^n {}_s F_{r,s}(x) \tag{88}$$

où

$$F_{r,s}(x) = \varepsilon_s \frac{\Delta^{n-s}[(a_s - \alpha_s) m_r^x]}{m_r^x}. \tag{89}$$

Cela posé, nous allons considérer les expressions

$$\Phi(x, x_1) = \frac{\overline{q}(x+1, x_1)}{a_0(x_1+n) Q(x_1+1)} \quad \text{et} \quad \Psi(x) = \frac{A(x_1+1)\overline{q}(x+1, x_1)}{a_0(x_1+n) Q(x_1+1)}$$

dont les propriétés jouent un rôle essentiel lorsque on désire appliquer le théorème II.

D'après les équations (83), (86), (87), (88) et (89) et la relation $m_r = \frac{\sigma}{\sigma_r}$ nous avons dans le cas actuel les relations

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi(x, x_1) = \frac{\varepsilon_n \alpha_0}{a_0 (x_1 + n)} \sum_1^n {}_r \frac{\sigma_r^{(x-x_1)}}{m_r \varphi'(m_r)} \sum_0^n {}_s F_{r,s}(x_1), \\
&\Psi(x, x_1) = \alpha_0 q \Phi(x, x_1) \sum_1^n {}_t \frac{c_t \sigma_t^{x_1+1}}{\varphi'(m_t)} = \\
&\qquad\qquad = \frac{\varepsilon_n \alpha_0^2 q}{a_0 (x_1 + n)} \sum_1^n {}_r \sum_1^n {}_t \frac{c_t \sigma_r^{(x-x_1)} \sigma_t^{x_1+1}}{m_r \varphi'(m_r) \varphi'(m_t)} \sum_0^n {}_s F_{r,s}(x_1)
\end{aligned}\right\} \quad (90)$$

dont la dernière $\left(\text{en vertu de l'équation } \sigma_t = \frac{\sigma_r m_r}{m_t}\right)$ peut prendre aussi la forme

$$\Psi(x, x_1) = \frac{\varepsilon_n \alpha_0^2 q}{a_0 (x_1 + n)} \sum_1^n {}_r \sum_1^n {}_t \frac{c_t \sigma_r^{x+1} \left(\frac{m_r}{m_t}\right)^{x_1+1}}{m_r \varphi'(m_r) \varphi'(m_t)} \sum_0^n {}_s F_{r,s}(x_1). \quad (91)$$

Ainsi, chaque fois que nous aurons, outre l'équation (9) encore une équation (78) pour déterminer les fonctions auxiliaires, pour s'assurer si le théorème II peut être appliqué il suffit de s'assurer si les conditions (a), (b) et (c) du même théorème sont satisfaites, les $\Phi(x, x_1)$ et $\Psi(x, x_1)$ étant donnés par les équations (90) et (91).

13. Après ces observations générales nous allons considérer les équations (9) dont les coefficients $a_0, a_1, \ldots a_n$ (outre qu'ils sont définis pour les valeurs de $x \geqq \alpha$) tendent vers les limites $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ respectivement lorsque $x = \infty$. Supposons aussi que $\alpha_0 \neq 0$, $\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \neq 0$ et déterminons les fonctions $z_1(x), z_2(x), \ldots z_n(x)$ de la manière que nous venons d'indiquer, les quantités $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ de l'équation (78) étant maintenant ces mêmes valeurs limites. En d'autres termes, supposons que l'équation donnée (9) ait la forme limite

$$\alpha_0 \Delta^n y(x) + \alpha_1 \Delta^{n-1} y(x+1) + \cdots + \alpha_n y(x+n-1) = 0 \quad (92)$$

lorsque $x = \infty$ et choisissons comme fonctions auxiliaires $z_r(x)$ les intégrales fondamentales de la forme m^x (m = constante indépendante de x) de l'équation aux différences finies $f_r(x) = 0$ qui correspond à la même équation (92).

Alors les quantités $a_s - \alpha_s$ qui se trouvent dans l'expression $F_{r,s}(x)$ tenderont vers la limite zéro lorsque $x = \infty$. En particulier, supposons que pour toutes les valeurs de x plus grandes qu'une certaine valeur fixée x_0 on ait

$$|a_s - \alpha_s| < \frac{\tau(x)}{x}, \tag{93}$$

$\tau(x)$ étant une fonction positive de x telle que la série infinie

$$\sum_{x_1 = x+1}^{x_1 = \infty} \frac{\tau(x_1)}{x_1}$$

converge; par exemple, $\tau(x) = \frac{1}{x^\nu}, \frac{1}{(\log x)^{1+\nu}}, \frac{1}{\log x\,(\log x)^{1+\nu}} \cdots$ avec $\nu > 0$.

Enfin, outre la supposition que $\alpha_0 \neq 0$, $\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \neq 0$ et que les racines $m_1, m_2, \ldots m_n$ de l'équation algébrique (82) sont distinctes (de sorte qu'on puisse employer les résultats du paragraphe précédent) commençons par supposer que toutes ces racines ont le même module ρ.

Avec ces hypothèses diverses, considérons tout d'abord l'expression $F_{r,s}(x)$ qui est définie par l'équation (89). D'après la formule (24) nous avons

$$\Delta^{n-s}[(a_s - \alpha_s)m_r^x] = m_r^x \Delta^{n-s}[(a_s(x) - \alpha_s)] + n(m_r - 1)m_r^x \Delta^{n-s-1}[a_s(x+1) - \alpha_s] +$$
$$+ \frac{n(n-1)}{2}(m_r - 1)^2 m_r^x \Delta^{n-s-2}[a_s(x+2) - \alpha_s] + \cdots$$
$$+ (m_r - 1)^{n-s} m_r^x [a_s(x+s) - \alpha_s].$$

D'ailleurs, lorsque $x \geqq x_0$ nous pouvons écrire, d'après les formules (1) et (93), $|\Delta^r(a_s - \alpha_s)| < 2^r \frac{\tau(x)}{x}$ de sorte que la dernière équation nous donne pour ces mêmes valeurs de x

$$|\Delta^{n-s}(a_s - \alpha_s)m_r^x| < (m_r - 1)^{n-s} m_r^x 2^{2n-s} \frac{\tau(x)}{x} < 2^{2n}(m_r - 1)^n m_r^x \frac{\tau(x)}{x}.$$

Par conséquent, nous avons

$$|F_{r,s}(x)| < 2^{2n}(\rho + 1)^n \frac{\tau(x)}{x}$$

et

$$\left|\sum_0^n{}_s F_{r,s}(x)\right| < 2^{2n}(n+1)(\rho+1)^n \frac{\tau(x)}{x} < \Omega_1 \frac{\tau(x)}{x}; \qquad (x \geqq x_0) \tag{94}$$

Ω_1 étant une constante (dépendant seulement de n et ρ).

Ceci dit, considérons l'expression $\Phi(x, x_1)$ qui est définie par l'équation (90). Puisque $|m_r| = \rho$ nous avons $\sigma_r = \rho^{n-1} i_r$, i_r étant une quantité dont le module est égal à un. Nous aurons donc, avec les hypothèses actuelles

$$\Phi(x, x_1) = \frac{\varepsilon_n \alpha_0}{a_0(x_1+n)} \rho^{(n-1)(x-x_1)} \sum_1^n {}_r \frac{i_r^{(x-x_1)}}{m_r \varphi'(m_r)} \sum_0^n {}_s F_{r,s}(x_1)$$

ou, en rappelant l'équation (94) et la relation $\lim_{x_1=\infty} a_0(x_1+n) = \lim_{x_1=\infty} a_0(x_1) = \alpha_0$,

$$\Phi(x, x_1) = \rho^{(n-1)(x-x_1)} M(x, x_1) \tag{95}$$

où pour toutes valeurs entières de x et pour les valeurs de $x_1 \geqq x_0$ (x_0 suffisamment grand)

$$|M(x, x_1)| < \Omega_2 \frac{\tau(x_1)}{x_1}; \quad \Omega_2 = \text{constante indépendante de } x \text{ et } x_1. \tag{96}$$

De la même manière, nous pouvons écrire pour l'expression $\Psi(x, x_1)$

$$\Psi(x, x_1) = \frac{\varepsilon_n \alpha_0^2 q}{a_0(x_1+n)} \rho^{(n-1)(x+1)} \sum_1^n {}_r \sum_1^n {}_t \frac{c_t\, i_r^{x+2} \left(\frac{m_r}{m_t}\right)^{x_1+1}}{m_r \varphi'(m_r) \varphi'(m_t)} \sum_0^n {}_s F_{r,s}(x_1) \tag{97}$$

d'où, en observant que $\left|\frac{m_r}{m_t}\right| = 1$ il vient

$$\Psi(x, x_1) = \rho^{(n-1)(x+1)} N(x, x_1) \tag{98}$$

où, pour toutes les valeurs entières de x et pour les valeurs de $x_1 \geqq x_0$ (x_0 suffisamment grand)

$$|N(x, x_1)| < \Omega_3 \frac{\tau(x_1)}{x_1}; \quad \Omega_3 = \text{constante indépendante de } x \text{ et } x_1. \tag{99}$$

Ainsi, nous arrivons à la formule

$$\left.\begin{aligned} &\Phi(x, x_1)\Phi(x_1, x_2)\ldots\Phi(x_{m-2}, x_{m-1})\Psi(x_{m-1}, x_m) = \\ &\qquad = \rho^{(n-1)(x+1)} P(x, x_1, x_2, \ldots x_m) \end{aligned}\right\} \tag{100}$$

où, pour toutes les valeurs entières de x et pour $x_m \geqq x_{m-1} \geqq \cdots \geqq x_1 \geqq x_0$, nous pouvons écrire

$$|P(x, x_1, x_2, \ldots x_m)| < \Omega_2^{m-1} \Omega_3 \frac{\tau(x_1)\tau(x_2)\ldots\tau(x_m)}{x_1 x_2 \ldots x_m}.$$

La formule (100) une fois établie, les conditions (a) et (b) du théorème II seront remplies directement dans le cas actuel. En effet, la condition (a) est remplie parce que nous avons lorsque $x \geqq x_0$

$$\sum_{x_1=x+1}^{x_1=\infty} \sum_{x_2=x_1+1}^{x_2=\infty} \cdots \sum_{x_m=x_{m-1}+1}^{x_m=\infty} |\Phi(x, x_1)\Phi(x_1, x_2)\ldots$$
$$\ldots \Phi(x_{m-2}, x_{m-1}) \Psi(x_{m-1}, x_m)| < \rho^{(n-1)(x+1)} \Omega_2^{m-1} \Omega_3 W(x)$$

où

$$W(x) = \sum_{x_1=x+1}^{x_1=\infty} \cdot \frac{\tau(x_1)}{x_1} \sum_{x_2=x_1+1}^{x_2=\infty} \frac{\tau(x_2)}{x_2} \cdots \sum_{x_m=x_{m-1}+1}^{x_m=\infty} \frac{\tau(x_m)}{x_m},$$

et il résulte de nos hypothèses que cette expression $W(x)$ a une signification pour toutes les valeurs indiquées de x.

De plus, si nous posons

$$\tau_1(x) = \sum_{x_1=x+1}^{x_1=\infty} \frac{\tau(x_1)}{x_1}$$

de sorte que $\tau_1(x)$ devient aussi petit qu'on veut en prenant x suffisamment grand, nous pourrons écrire aussi

$$u_m(x) = \rho^{(n-1)(x+1)} V_m(x) \tag{101}$$

où

$$|V_m(x)| < \Omega_2^{m-1} \Omega_3 [\tau_1(x)]^m; \qquad x \geqq x_0. \tag{102}$$

Par conséquent, en prenant x_0 suffisamment grand il résulte la relation

$$|u_m(x)| < \rho^{(n-1)(x+1)} k_m \quad \left\{ \begin{array}{l} x \geqq x_0, \\ k = \text{constante (indépendante de } x) < 1, \end{array} \right.$$

d'où on conclut que la série $|u_1(x)| + |u_2(x)| + \cdots + |u_m(x)| + \cdots$ converge et a une somme $U(x) = \theta(x) \rho^{(n-1)(x+1)}$ telle que $\theta(x) < \frac{k}{1-k}$ lorsque $x \geqq x_0$.

Enfin, quant aux expressions $|\Phi(x, x_1)| U(x_1)$ et $Y(x_1) f_r(x_1)$ (qui se trouvent dans les conditions (b) et (c) du théorème II) d'après les équations (88), (94), (95) et (96) ces expressions prennent les formes respectives

$$\theta_1(x, x_1) \rho^{(n-1)(x+1)}, \quad \frac{\theta_2(x, r)}{a_0(x_1+n)} \left[\frac{A(x_1+1)\rho^{x_1}}{Q(x_1+1)} + \frac{\theta_3(x_1)\rho^{(n-1)(x_1+1)+x_1}}{Q(x_1+1)} \right]$$

où pour toutes les valeurs de $x \geqq x_0$, on a

$$\theta_1(x, x_1) < \Omega_5 \frac{\tau(x_1)}{x_1} \; (\Omega_5 = \text{const. ind. de } x \text{ et } x_1),$$

$$|\theta_2(x_1, r)| < \Omega_1 \frac{\tau(x_1)}{x_1} \; (r = 1, 2, \ldots n) \quad \text{et} \quad |\theta_3(x)| \leqq \theta(x).$$

En même temps, d'après les équations (83) et (86) le module de chacun des quotients $\dfrac{A(x_1+1)\rho^{x_1}}{Q(x_1+1)}$, $\dfrac{\rho^{(n-1)(x_1+1)+x_1}}{Q(x_1+1)}$ reste toujours fini. Ainsi, on voit que les expressions $|\Phi(x, x_1)|\,U(x_1)$ et $Y(x_1)f_r(x_1)$ possèdent les propriétés désirées.

Il résulte ainsi sous les hypothèses actuelles relatives à l'équation (9) et aux racines de l'équation algébrique (82) que toutes les conditions que nous avons posées dans le théorème II sont remplies.

Nous allons considérer la forme de la série $Y(x)$ qui se présente dans le cas actuel.

D'après les équations (83) et (86) il vient

$$\begin{aligned} Y(x) = \varepsilon_{n-1} \Bigg[& \frac{\alpha_0}{a_0(x+n)\,\sigma^{x+1}} \sum_1^n {}_r \frac{c_r \sigma_r^{x+1}}{\varphi'(m_r)} + \\ & + \frac{u_1(x)}{a_0(x+n)\,\sigma^{x+1} q} + \cdots + \frac{u_m(x)}{a_0(x+n)\,\sigma^{x+1} q} + \cdots \Bigg] = \\ = \varepsilon_{n-1} \Bigg[& \Bigg\{ \sum_1^n {}_r \frac{c_r}{\varphi'(m_r)\, m_r^{x+1}} - \frac{a_0(x+m) - \alpha_0}{a_0(x+n)} \sum_1^n {}_r \frac{c_r}{\varphi'(m_r)\, m_r^{x+1}} \Bigg\} + \\ & + \frac{u_1(x)}{a_0(x+n)\,\sigma^{x+1} q} + \cdots + \frac{u_m(x)}{a_0(x+n)\,\sigma^{x+1} q} + \cdots \Bigg]. \end{aligned}$$

Mais, en vertu de nos hypothèses relatives aux différences $a_s(x) - \alpha_s$ nous avons au moins pour toutes les valeurs de $x \geqq x_0 - n$

$$|a_0(x+n) - \alpha_0| < \frac{\tau(x+n)}{x+n} < \sum_{x_1=x+1}^{x_1=\infty} \frac{\tau(x_1)}{x_1} < \tau_1(x).$$

Par conséquent, en nous rappelant les équations (101) et (102) nous pouvons écrire pour toutes les valeurs de $x \geqq x_0$:

$$Y(x) = \frac{c'_1}{m_1^{x+1}} + \frac{c'_2}{m_2^{x+1}} + \cdots + \frac{c'_n}{m_n^{x+1}} + \frac{\eta(x)}{\rho^{x+1}}$$

où $c'_r = \dfrac{\varepsilon_{n-1}\, c_r}{\varphi'(m_r)}$ et où $\eta(x)$ est une fonction de x qui tend vers zéro comme $\tau_1(x)$ lorsque $x = \infty$.

En appliquant le théorème II, nous avons donc la formule suivante pour l'intégrale particulière $y(x)$ que nous avons obtenue quand on la considère au moins pour les valeurs de $x \geqq x_0 + n$

$$y(x) = Y(x-n) = \frac{c''_1}{m_1^x} + \frac{c''_2}{m_2^x} + \cdots + \frac{c''_n}{m_n^x} + \frac{\varepsilon(x)}{\rho^x} \qquad (103)$$

où $c''_r = m_r^{n-1} c'_r$ et où $\varepsilon(x)$, comme la fonction $\eta(x)$ employée plus haut, a la forme $\varepsilon(x) = g\,\tau_1(x)$, g étant une fonction de x dont le module ne dépasse jamais une certaine constante. De plus, en observant que l'existence de la condition $\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \neq 0$ demande que l'expression

$$A_0(x) = a_0(x) + a_1(x) + \cdots + a_n(x)$$

ne s'annule pour aucune valeur de x plus grande qu'un certain nombre fixe, il résulte du même théorème II que l'intégrale générale de l'équation donnée (9) aura la forme (103) pour toutes les valeurs de x qui dépassent un certain nombre fixe.

Nous allons considérer certains résultats analogues qui ont lieu lorsque toutes les racines de l'équation (82) n'ont pas le même module ρ.

Supposons, en effet, que $m_1, m_2, \ldots m_h$ $(h < n)$ soient les racines dont le module est un maximum ρ, et, au lieu de considérer comme arbitraires toutes les constantes $c_1, c_2, \ldots c_n$ posons $c_{h+1} = c_{h+2} = \cdots = c_n = 0$, les autres constantes $c_1, c_2, \ldots c_h$ étant arbitraires comme auparavant. Ces hypothèses signifient évidemment que nous nous bornons à certaines intégrales particulières au lieu de l'intégrale générale.

D'après l'équation (91) nous avons maintenant pour l'expression $\Psi(x, x_1)$ la formule

$$\Psi(x, x_1) = \frac{\varepsilon_n\, \alpha_0^2\, q}{a_0(x_1+n)} \sum_1^n{}_r \sum_1^h{}_t \frac{c_t\, \sigma_r^{x+1} \left(\dfrac{m_r}{m_t}\right)^{x+1}}{m_r\, \varphi'(m_r)\, \varphi'(m_t)} \sum_0^n{}_s F_{r,s}(x_1)$$

dans laquelle, pour toutes les valeurs possibles de r et t nous avons $\left|\dfrac{m_r}{m_t}\right| \leqq \rho$. Quant à l'expression $\Phi(x, x_1)$ nous avons encore la formule (90) mais dans le cas actuel $|\sigma_r| \leqq \rho^{n-1}$ au lieu de $|\sigma_r| = \rho^{n-1}$.

Par conséquent, en posant les mêmes hypothèses comme auparavant pour les différences $a_s - \alpha_s$ nous arrivons encore aux formules (95) et (98) dans lesquelles les fonctions $M(x, x_1)$, $N(x, x_1)$, bien que différentes des fonctions $M(x, x_1)$, $N(x, x_1)$ du cas précédent, ont les propriétés indiquées par les équations (96) et (99) respectivement. Mais, cela suffit, comme dans le cas précédent, pour nous assurer que le théorème II est applicable.

Par conséquent, pour toutes les valeurs de x plus grandes qu'un certain nombre fixe nous pouvons écrire

$$y(x) = \frac{c''_1}{m_1^x} + \frac{c''_2}{m_2^x} + \cdots + \frac{c''_h}{m_h^x} + \frac{\varepsilon(x)}{\rho^x}$$

où $c''_r = \dfrac{\varepsilon_{n-1} m_r^{n-1} c_r}{\varphi'(m_r)}$ et où $\varepsilon(x)$ a les propriétés signalées plus haut.

Avant de résumer nos résultats actuels sous la forme d'un théorème général, il convient de faire quelques observations générales.

Ainsi, supposons pour le moment qu'au lieu de commencer par une équation de la forme (9) on ait une équation sous la deuxième des formes (8), c'est-à-dire

$$A_0(x)\, y(x+n) + A_1(x)\, y(x+n-1) + \cdots + A_n(x)\, y(x) = 0. \tag{104}$$

Supposons que le coefficient $A_r(x)$ soit défini pour tous les entiers positifs $x \geqq$ un certain entier $\alpha \geqq 0$ et qu'il tend vers la limite B_r lorsque $x = \infty$ de sorte que la différence $A_r(x) - B_r$ considérée comme un infiniment petit, satisfait aux conditions que nous venons de poser pour l'expression $a_s(x) - \alpha_s$.

Or, suivant les indications du § 2 on peut remplacer l'équation actuelle (104) par une autre de la forme (9), les coefficients $a_r(x)$ étant données par la formule

$$\left.\begin{aligned} a_r(x) = \frac{\varepsilon_{n-r}}{(n-r)!}\Big[\frac{n!}{r!} A_n(x) + \frac{(n-1)!}{(r-1)!} A_{n-1}(x) + \\ + \frac{(n-2)!}{(r-2)!} A_{n-2}(x) + \cdots + \frac{(n-r)!}{0!} A_{n-r}(x)\Big]. \end{aligned}\right\} \tag{105}$$

Mais cette formule montre que les coefficients de l'équation indiquée (9) satisferont à toutes les conditions que nous avons toujours posées dans l'étude d'une telle équation, pourvu que le coefficient $A_n(x)$ (qui ne diffère de $a_0(x)$ que par le facteur ε_n) ne s'annule pas pour les valeurs de $x \geqq \alpha$ et qu'on ait $\lim\limits_{x=\infty} A_n(x) = B_n \neq 0$ et $\lim\limits_{x=\infty} [a_0(x) + a_1(x) + \cdots + a_n(x)] = B_0 \neq 0$.

D'ailleurs, quand on a une équation (9) dont les coefficients sont déterminés au moyen des relations (105) l'équation (79) pour déterminer les fonctions auxiliaires $z_r(x)$ devient

$$B_n z(x+n) + B_{n-1} z(x+n-1) + \cdots + B_0 z(x) = 0.$$

En effet, d'après la relation (105) on a évidemment

$$\alpha_r = \frac{\varepsilon_{n-r}}{(n-r)!}\left[\frac{n!}{r!} B_n + \frac{(n-1)!}{(r-1)!} B_{n-1} + \cdots + \frac{(n-r)!}{0!} B_{n-r}\right]$$

de sorte que les équations (80) se réduisent directement aux autres $A_r = \varepsilon_n B_{n-r}$. Par conséquent, l'équation algébrique (82) pour déterminer les racines $m_1, m_2, \ldots m_n$ devient maintenant

$$B_n m^n + B_{n-1} m^{n-1} + \cdots + B_0 = 0$$

de sorte que les quantités $\frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2}, \ldots \frac{1}{m_n}$ sont les racines de l'autre équation

$$B_0 m^n + B_1 m^{n-1} + \cdots + B_n = 0.$$

Enfin, il suffit d'observer qu'en prenant α suffisamment grand la condition $A_n(x) \neq 0$, $x \geqq \alpha$ est satisfaite d'elle-même d'après l'autre condition $B_n \neq 0$ pour énoncer le théorème suivant:

Théorème III. *Soit donnée une équation linéaire aux différences finies sous la forme*

$$A_0(x)\, y(x+n) + A_1(x)\, y(x+n-1) +$$
$$+ A_2(x)\, y(x+n-2) + \cdots + A_n(x)\, y(x) = 0,$$

les coefficients A étant définis au moins pour toutes les valeurs entières positives de $x \geqq$ un certain entier $\alpha \geqq 0$. De plus, supposons que le coefficient $A_r(x)$ tende vers la limite B_r lorsque $x = \infty$ de sorte que la différence $A_r(x) - B_r$ devient un infiniment petit d'un ordre aussi grand que celui de l'expression $\frac{\tau(x)}{x}$, $\tau(x)$ étant une fonction positive telle que la série

$$\sum_{x_1=x+1}^{x_1=\infty} \frac{\tau(x_1)}{x_1}$$

converge, par exemple $\tau(x) = \frac{1}{x^\nu}, \frac{1}{(\log x)^{1+\nu}}, \frac{1}{\log x\,(\log_2 x)^{1+\nu}}, \ldots$ *avec* $\nu > 0$.

Enfin supposons que $B_0 \neq 0$, $B_n \neq 0$.

Alors, si l'on désigne par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ *les racines (réelles ou imaginaires) de l'équation algébrique*

$$B_0 \lambda^m + B_1 \lambda^{m-1} + B_2 \lambda^{m-2} + \cdots + B_n = 0$$

on a les résultats suivants pourvu que toutes ces racines soient distinctes :

a) *si toutes les racines* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ *ont le même module* λ *l'intégrale générale de l'équation donnée, quand on considère cette intégrale pour les valeurs entières de* x *plus grandes qu'un certain nombre fixe, prend la forme*

$$y(x) = c_1 \lambda_1^x + c_2 \lambda_2^x + \cdots + c_n \lambda_n^x + \lambda^x \varepsilon(x)$$

où les quantités $c_1, c_2, \ldots c_n$ *sont des constantes arbitraires, tandis que l'expression* $\varepsilon(x)$ *est une fonction de* x *qui lorsque* $x = \infty$ *devient un infiniment petit d'un ordre aussi grand que celui de l'expression*

$$\sum_{x_1=x+1}^{x_1=\infty} \frac{\tau(x_1)}{x_1}.$$

b) *si les racines* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ *n'ont pas le même module et si* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_h$ $(h < n)$ *sont celles dont le module a la valeur minimum* λ, *il existe une intégrale particulière de l'équation donnée qui, quand on la considère pour les valeurs entières de* x *plus grandes qu'un certain nombre fixe, prend la forme*

$$y(x) = c_1 \lambda_1^x + c_2 \lambda_2^x + \cdots + c_h \lambda_h^x + \lambda^x \varepsilon(x)$$

où $c_1, c_2, \ldots c_h$ *sont des constantes arbitraires, tandis que l'expression* $\varepsilon(x)$ *a la signification indiquée plus haut.*

14. Nous allons généraliser le théorème précédent en supposant que les racines $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ ne sont pas toutes distinctes.

Dans ce but, retournons aux considérations des §§ 12 et 13 et supposons (comme dans le cas précédent) que les coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ de l'équation donnée (9) soient définis pour tous les entiers $x \geqq$ un certain entier $\alpha \geqq 0$ et tendent vers les limites $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ respectivement lorsque $x = \infty$, où $\alpha_0 \neq 0$, $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \neq 0$. En outre, quant aux racines $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ de l'équation algébrique actuelle, supposons que $m_1, m_2, \ldots, m_p$ $(p < n)$ soient distinctes, tandis que $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ représentent respectivement leurs degrés de multiplicité, de sorte que

$$\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \lambda = n.$$

Enfin, mettons $x^{(0)} = 1$, $x^{(t)} = x(x-1)(x-2)\ldots(x-t+1)$, $(t \geqq 1)$; alors, il est bien connu que sous nos hypothèses les n fonctions suivantes:

$$\begin{array}{llll} z_1 = m_1^x, & z_2 = x^{(1)} m_1^x, & z_3 = x^{(2)} m_1^x, \ldots, & z_\alpha = x^{(\alpha-1)} m_1^x \\ z_{\alpha+1} = m_2^x, & z_{\alpha+2} = x^{(1)} m_2^x, & z_{\alpha+3} = x^{(2)} m_2^x, \ldots, & z_{\alpha+\beta} = x^{(\beta-1)} m_2^x \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ z_{n-\lambda+1} = m_p^x, & z_{n-\lambda+2} = x^{(1)} m_p^x, & z_{n-\lambda+3} = x^{(2)} m_p^x, \ldots, & z_n = x^{(\lambda-1)} m_p^x \end{array}$$

constituent un système fondamental d'intégrales de l'equation (78) ou (79).

Cela posé, choisissons ces n fonctions comme les fonctions auxiliaires $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ de notre équation (9). Nous allons déterminer d'abord la valeur correspondante du déterminant $Q(x)$.

Or, nous avons en particulier $z_r = x^{(r-1)} z_1$, $1 \leqq r \leqq \alpha$. Par conséquent, en nous servant de la relation générale (24), nous obtenons

$$\left.\begin{aligned} \Delta^s z_r = \Delta^s x^{(r-1)} z_1 + s\,\Delta^{s-1} (x+1)^{(r-1)} \Delta z_1 + \\ + \frac{s(s-1)}{2} \Delta^{s-2} (x+2)^{(r-1)} \Delta^2 z_1 + \cdots \\ + \cdots + s\,\Delta (x+s-1)^{(r-1)} \Delta^{s-1} z_1 + (x+s)^{(r-1)} \Delta^s z_1;\ s = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}\right\} \tag{106}$$

Mais, nous voyons directement que

$$\left\{\begin{aligned} & \Delta^s x^{(t)} = t(t-1)(t-2)\ldots(t-s+1)\, x^{t-s}; \quad (s \leqq t) \\ & \Delta^s x^{(t)} = 0; \quad (s > t) \\ & \Delta^s z_1 = (m_1 - 1)^s m_1^x = \mu_1^s m_1^x; \quad \mu_1 = m_1 - 1 \end{aligned}\right.$$

de sorte que l'équation (106) peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} \Delta^s z_r = m_1^x \Big[& (r-1)(r-2)\ldots(r-s)\, x^{(r-s-1)} + \\ & + \mu_1 s (r-1)(r-2)\ldots(r-s+1)(x+1)^{(r-s)} + \\ & + \mu_1^r \frac{s(s-1)}{2} (r-1)(r-2)\ldots(r-s+2)(x+2)^{(r-s+1)} + \cdots \\ & \cdots + \mu_1^{s-1} s (r-1)(x+s-1)^{(r-2)} + \mu_1^s (x+s)^{(r-1)} \Big]; \\ & (1 \leqq r \leqq \alpha). \end{aligned}$$

De la même manière, il résulte plus généralement que si l'on pose

$\mu_t = m_t - 1$ on peut écrire

$$\Delta^s z_r = m_t^x p_{r,s}(\mu_t); \quad (1 \leqq r \leqq n)$$

où $t=1$ lorsque $1 \leqq r \leqq \alpha$, $t=2$ lorsque $\alpha+1 \leqq r \leqq \alpha+\beta, \ldots, t=p$ lorsque $n-\lambda+1 \leqq r \leqq n$, et où

$$\begin{aligned} p_{r,s}(\mu_t) = \mu_t^s (x+s)^{(r-1)} + s(r-1)\mu_t^{s-1}(x+s-1)^{(r-2)} + \\ + \frac{s(s-1)}{2}(r-1)(r-2)\mu_t^{s-2}(x+s-2)^{(r-3)} + \cdots \\ + s(r-1)(r-2)\ldots(r-s+1)\mu_t(x+1)^{(r-s)} + \\ + (r-1)(r-2)\ldots(r-s)\,x^{(r-s-1)}. \end{aligned}$$

Ainsi le déterminant $Q(x)$ prend la forme

$$Q(x) = (m_1^\alpha m_2^\beta m_3^\gamma \ldots m_p^\lambda)^x \Delta_n$$

où Δ_n est un déterminant d'ordre n dont les α premières lignes horizontales sont

$$p_{r,0}(\mu_1) \quad p_{r,1}(\mu_1) \quad p_{r,2}(\mu_1) \ldots p_{r,n-1}(\mu_1); \qquad r = 1, 2, 3, \ldots, \alpha,$$

tandis que les $(\alpha+1)^{ième}$, $(\alpha+2)^{ième}, \ldots, (\alpha+\beta)^{ième}$ lignes sont

$$p_{r,0}(\mu_2) \quad p_{r,1}(\mu_2) \quad p_{r,2}(\mu_2) \ldots p_{r,n-1}(\mu_2); \qquad r = 1, 2, 3, \ldots, \beta,$$

et ainsi de suite, les λ dernières lignes étant

$$p_{r,0}(\mu_p) \quad p_{r,1}(\mu_p) \quad p_{r,2}(\mu_p) \ldots p_{r,n-1}(\mu_p); \qquad r = 1, 2, 3, \ldots, \lambda.$$

Mais, si l'on observe la relation

$$\begin{aligned} & p_{r,s}(\mu_t) - (r-1)(x+s-r+2)^{(1)} p_{r-1,s}(\mu_t) + \\ & + \frac{(r-1)(r-2)}{2}(x+s-r-3)^{(2)} p_{r-2,s}(\mu_t) + \cdots + \\ & + (-1)^{(r-2)}(r-1)(x+s-1)^{(r-2)} p_{2,s}(\mu_t) + (-1)^{r-1}(x+s)^{(r-1)} p_{1,s}(\mu_t) = \\ & = s(s-1)(s-2)\ldots(s-r+2)\mu_t^{s-r+1} \end{aligned}$$

ce déterminant Δ_n peut se transformer directement dans un autre dont les α

premières lignes horizontales sont

$$0\,0\,0 \ldots 0 \quad (r-1)! \quad r!\mu_1 \quad \frac{(r+1)!}{2}\mu_1^2 \ldots \frac{(n-2)!}{(n-r-1)!}\mu_1^{n-r-1}; \qquad r=1,\,2,\ldots,\,\alpha$$

tandis que les $(\alpha+1)^{ième}$, $(\alpha+2)^{ième}$, ... $(\alpha+\beta)^{ième}$ lignes sont

$$0\,0\,0 \ldots 0 \quad (r-1)! \quad r!\mu_2 \quad \frac{(r+1)!}{2}\mu_2^2 \ldots \frac{(n-2)!}{(n-r-1)!}\mu_2^{n-r-1}; \qquad r=1,\,2,\ldots,\,\beta$$

et ainsi de suite, les λ dernières lignes étant

$$0\,0\,0 \ldots 0 \quad (r-1)! \quad r!\mu_p \quad \frac{(r+1)!}{2}\mu_p^2 \ldots \frac{(n-2)!}{(n-r-1)!}\mu_p^{n-r-1}; \qquad r=1,\,2,\ldots,\,\lambda.$$

Ainsi, en se rappelant la relation $\mu_\iota - \mu_\omega = m_\iota - m_\omega$, on arrive à la valeur suivante pour le déterminant Δ_n:

$$\Delta_n = t_0\,[(m_2-m_1)^\alpha]^\beta\,[(m_3-m_1)^\alpha\,(m_3-m_2)^\beta]^\gamma \ldots$$
$$\ldots [(m_p-m_1)^\alpha\,(m_p-m_2)^\beta \ldots (m_p-m_1)^\chi]^\lambda$$

où

$$t_0 = 1!\,2!\,3!\ldots(\alpha-1)!\,1!\,2!\,3!\ldots(\beta-1)!\ldots1!\,2!\,3!\ldots(\lambda-1)! \quad (107)$$

Par conséquent, si nous posons $\sigma = m_1^\alpha\, m_2^\beta\, m_3^\gamma \ldots m_p^\lambda$ nous avons dans le cas actuel

$$Q(x) = \sigma^x q, \qquad (108)$$

q étant une constante par rapport à x et $q \neq 0$.

Cela posé, nous allons considérer (en suivant la marche du § 12) le déterminant $Q_r(x)$ qui se rencontre dans les relations générales (84) en supposant d'abord que $1 \leqq r \leqq \alpha$.

Ce déterminant, comme le déterminant $Q(x)$ que nous venons de considérer, peut se transformer d'abord dans la forme

$$Q_r(x) = \left(\frac{\sigma}{m_1}\right)^x \Delta_{n-1}$$

où Δ_{n-1} est le déterminant d'ordre $n-1$ tel que ses $\alpha-1$ premières lignes horizontales sont

$$\left\{\begin{array}{l} 0\,0\,0\ldots 0 \quad (r_1-1)! \quad r_1!\,\mu_1 \quad \dfrac{(r_1+1)!}{2}\mu_1^2\ldots \\ \qquad\qquad\qquad \ldots\dfrac{(n-2)!}{(n-r_1-1)!}\mu_1^{n-r_1-1}; \qquad r_1=1,\,2,\ldots,\,r-1 \\ p_{r_1,0}(\mu_1) \quad p_{r_1,1}(\mu_1) \quad p_{r_1,2}(\mu_1)\ldots p_{r_1,n-2}(\mu_1); \qquad r_1=r+1,\,r+2,\ldots,\,\alpha. \end{array}\right.$$

tandis que ses $n-\alpha$ autres lignes sont égales respectivement aux lignes correspondantes du déterminant Δ_n quand on y néglige les éléments de la dernière colonne.

D'ailleurs, d'après la relation

$$p_{r,s}(\mu_1)-s\,\mu_1\,p_{r,s-1}(\mu_1)+\frac{s\,(s-1)}{2}\mu_1^2\,p_{r,s-2}(\mu_1)-\cdots+$$
$$+(-1)^{s-1}s\,\mu_1^{s-1}p_{r,1}(\mu_1)+(-1)^s\mu_1^s\,p_{r,0}(\mu_1)=$$
$$=\frac{(r-1)!}{(r-s-1)!}\mu_1^s\,x^{(r-s-1)},$$

ce dernier déterminant se transforme directement dans un déterminant dans lequel les $\alpha-1$ premières lignes sont

$$\left\{\begin{array}{l} \overbrace{0\,0\,0\ldots 0}^{r_1-1} \quad (r_1-1)! \quad 0\,0\,0\ldots 0; \quad r_1=1,\,2,\ldots,\,r-1 \\ x^{(r_1)} \quad \dfrac{r_1!}{(r_1-1)!}m_1\,x^{(r_1-1)} \quad \dfrac{r_1!}{(r_1-2)!}m_1^2\,x^{(r_1-2)}\ldots r_1!\,m_1^{r_1-1}x \quad r_1!\,m_1^{r_1} \quad 0\,0\,0\ldots 0; \\ \qquad\qquad r_1=r, \quad r+1, \quad r+2,\ldots, \quad \alpha-1. \end{array}\right.$$

tandis que les $n-\alpha$ autres lignes sont déterminées respectivement par les formules suivantes dans lesquelles $\nu_t=m_t-m_1$

$$0\,0\,0\ldots 0 \quad (r_1-1)! \quad r_1!\,\nu_2 \quad \frac{(r_1+1)!}{2}\nu_2^2\ldots\frac{(n-2)!}{(n-r_1-1)!}\nu_2^{n-r_1-1};$$
$$r_1=1,\,2,\,3,\ldots,\,\beta,$$
$$0\,0\,0\ldots 0 \quad (r_1-1)! \quad r_1!\,\nu_3 \quad \frac{(r_1+1)!}{2}\nu_3^2\ldots\frac{(n-2)!}{(n-r_1-1)!}\nu_3^{n-r_1-1};$$
$$r_1=1,\,2,\,3,\ldots,\,\gamma,$$

. . . .

$$0\ 0\ 0 \ldots 0 \quad (r_1-1)! \quad r_1!\, \nu_p \quad \frac{(r_1+1)!}{2}\nu_p^2 \ldots \frac{(n-2)!}{(n-r_1-1)!}\nu_p^{n-r_1-1};$$

$$r_1 = 1,\ 2,\ 3, \ldots, \lambda.$$

Ainsi, le déterminant Δ_{n-1} prend la forme

$$\Delta_{n-1} = \frac{1!\,2!\,3!\ldots(\alpha-1)!}{(r-1)!}\, m_1^{(\alpha-r)(r-1)}\, \Delta_{n-r+1} \tag{109}$$

où Δ_{n-r+1} est le déterminant d'ordre $n-r+1$ dans lequel les $\alpha-r+1$ premières lignes sont

$$\frac{x^{(r_1)}}{r_1!} \quad \frac{m_1\, x^{(r_1-1)}}{(r_1-1)!} \quad \frac{m_1^2\, x^{(r_1-2)}}{(r_1-2)!} \cdots m_1^{r_1-1}\, x^{(1)} \quad m_1^{r_1} \quad 0\ 0 \ldots 0;$$

$$r_1 = 1,\ 2,\ 3, \ldots, (\alpha - r)$$

tandis que les $n-\alpha$ autres lignes sont respectivement

$$\frac{(r-1)!}{(r-r_1)!}\nu_2^{r-r_1} \quad \frac{r!}{(r-r_1+1)!}\nu_2^{r-r_1+1} \quad \frac{(r+1)!}{(r-r_1+2)!}\nu_2^{r-r_1+2} \cdots \frac{(n-2)!}{(n-r_1-1)!}\nu_2^{n-r_1-1};$$

$$r_1 = 1,\ 2,\ 3, \ldots, \beta,$$

$$\frac{(r-1)!}{(r-r_1)!}\nu_3^{r-r_1} \quad \frac{r!}{(r-r_1+1)!}\nu_3^{r-r_1+1} \quad \frac{(r+1)!}{(r-r_1+2)!}\nu_3^{r-r_1+2} \cdots \frac{(n-2)!}{(n-r_1-1)!}\nu_3^{n-r_1-1};$$

$$r_1 = 1,\ 2,\ 3, \ldots, \gamma,$$

. . . .

$$\frac{(r-1)!}{(r-r_1)!}\nu_p^{r-r_1} \quad \frac{r!}{(r-r_1+1)!}\nu_p^{r-r_1+1} \quad \frac{(r+1)!}{(r-r_1+2)!}\nu_p^{r-r_1+2} \cdots \frac{(n-2)!}{(n-r_1-1)!}\nu_p^{n-r_1-1};$$

$$r_1 = 1,\ 2,\ 3, \ldots, \lambda.$$

Mais, on voit directement que les $\alpha-r+1$ premières lignes de Δ_{n-r+1} données plus haut peuvent se remplacer respectivement par ces autres

$$\overbrace{0\ 0\ 0 \ldots 0}^{r_1-1} \quad \frac{(x+r_1-1)\, m_1^{r_1-1}}{r_1} \quad m_1^{r_1} \quad 0\ 0 \ldots 0$$

$$r_1 = 1,\ 2,\ 3, \ldots, \alpha - r.$$

Ainsi, en développant ce déterminant Δ_{n-r+1} par rapport aux mineurs d'ordre $\alpha - r + 1$ qui se trouvent dans ses $\alpha - r + 1$ premières lignes, on arrive à l'équation

$$\Delta_{n-r+1} = \sum_{s=0}^{s=\alpha-r} \varepsilon_{r,s} D_s(x, m_1) E_s \tag{110}$$

où $\varepsilon_{r,s}$ représente une puissance convenable de -1 et $D_s(x, m_1)$ et E_s sont des déterminants d'ordres $\alpha - r$, $n - \alpha + 1$ définis comme il suit: les s premières lignes du déterminant $D_s(x, m_1)$ sont

$$\underbrace{0\ 0\ 0 \ldots 0}_{r-1} \quad \frac{(x-r_1-1)!\, m_1^{r_1-1}}{r_1} \quad m_1^{r_1} \quad 0\ 0\ 0 \ldots 0$$

$$r_1 = 1, 2, 3, \ldots, s$$

et ses $\alpha - r - s$ autres lignes sont

$$\underbrace{0\ 0\ 0 \ldots 0}_{r_1-1} \quad \frac{(x+r_1)\, m_1^{r_1}}{r_1+1} \quad m_1^{r_1+1} \quad 0\ 0\ 0 \ldots 0$$

$$r_1 = s, \quad s+1, \quad s+2, \ldots, \quad \alpha - r - 1$$

de sorte que

$$D_s(x, m_1) = m_1^{\frac{(\alpha-r)(\alpha-r+1)}{2}} \frac{(x+s-1)^{(s)}}{s!}, \tag{111}$$

tandis que les lignes du déterminant E_s sont

$$\frac{(r+s-1)!}{\Gamma(r+s-r_1+1)} \nu_2^{r+s-r_1} \quad \frac{\alpha!}{\Gamma(\alpha-r_1)} \nu_2^{\alpha-r_1+1} \quad \frac{(\alpha+1)!}{\Gamma(\alpha-r_1+1)} \nu_2^{\alpha-r_1+2} \ldots$$

$$\ldots \frac{(n-2)!}{\Gamma(n-r_1)} \nu_2^{n-r_1-1}; \quad r_1 = 1, 2, 3, \ldots, \beta$$

$$\frac{(r+s-1)!}{\Gamma(r+s-r_1+1)} \nu_3^{r+s-r_1} \quad \frac{\alpha!}{\Gamma(\alpha-r_1)} \nu_3^{\alpha-r_1+1} \quad \frac{(\alpha+1)!}{\Gamma(\alpha-r_1+1)} \nu_3^{\alpha-r_1+2} \ldots$$

$$\ldots \frac{(n-2)!}{\Gamma(n-r_1)} \nu_3^{n-r_1-1}; \quad r_1 = 1, 2, 3, \ldots, \gamma$$

. . . .

$$\frac{(r+s-1)!}{\Gamma(r+s-r_1+1)} \nu_p^{r+s-r_1} \quad \frac{\alpha!}{\Gamma(\alpha-r_1)} \nu_p^{\alpha-r_1+1} \quad \frac{(\alpha+1)!}{\Gamma(\alpha-r_1+1)} \nu_p^{\alpha-r_1+2} \ldots$$

$$\ldots \frac{(n-2)!}{\Gamma(n-r_1)} \nu_p^{n-r_1-1}; \quad r_1 = 1, 2, 3, \ldots, \lambda.$$

Enfin, pour la valeur spéciale $s = \alpha - r$ (pour laquelle il suffit dans le but que nous avons en vue d'évaluer E_s) il résulte sans difficulté, d'après la relation $\nu_t = m_t - m_1$, que

$$\left.\begin{aligned} E_{\alpha-r} = \frac{t_0\,[(m_2-m_1)^{\alpha-1}]^\beta\,[(m_3-m_1)^{\alpha-1}(m_3-m_2)^\beta]^\gamma\ldots}{1\,!\,2\,!\,3\,!\ldots(\alpha-1)\,!} \\ \frac{\ldots[(m_p-m_1)^{\alpha-1}(m_p-m_2)^\beta\ldots(m_p-m_{p-1})^\chi]^\lambda}{1\,!\,2\,!\,3\,!\ldots(\alpha-1)\,!} \end{aligned}\right\} \quad (112)$$

où t_0 est défini par l'équation (107).

Par conséquent, en se rappelant les relations (110) et (112) et en observant que $\varepsilon_{r,\alpha-r} = 1$, on arrive à l'équation

$$\Delta_{n-r+1} = (x+\alpha-r-1)^{(\alpha-r)}\,\frac{E_{\alpha-r}\,m_1^{\frac{(\alpha-r)(\alpha-r+1)}{2}}}{(\alpha-r)\,!\,m_1^\alpha}\left[1+\frac{\eta_1}{(x+\alpha-r-1)^{(1)}}+\right.$$
$$\left.+\frac{\eta_2}{(x+\alpha-r-1)^{(2)}}+\cdots+\frac{\eta_{\alpha-r}}{(x+\alpha-r-1)^{(\alpha-r)}}\right]$$

où $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_{\alpha-r}$ représentent des quantités indépendantes de x.

D'après les équations (109) et (110) nous pouvons donc écrire

$$Q_r(x) = (x+\alpha-r-1)^{(\alpha-r)}\left(\frac{\sigma}{m_1}\right)^x q_r(x)\,; \qquad (1 \leqq r \leqq \alpha)$$

où

$$\left.\begin{aligned} q_r(x) = \frac{1}{(r-1)\,!\,(\alpha-r)\,!}\,1\,!\,2\,!\,3\,!\ldots(\alpha-1)\,!\,1\,!\,2\,!\ldots \\ \ldots(\beta-1)\,!\ldots 1\,!\,2\,!\ldots(\lambda-1)\,!\,m_1^{\frac{(\alpha-r)(\alpha+r+1)}{2}}\times \\ \times[(m_2-m_1)^{\alpha-1}]^\beta\,[(m_3-m_1)^{\alpha-1}(m_3-m_2)^\beta]^\gamma\ldots \\ \ldots[(m_p-m_1)^{\sigma-1}(m_p-m_2)^\beta\ldots(m_p-m_{p-1})^\chi]^\lambda\times \\ \times\left[1+\frac{\eta_1}{(x+\alpha-r-1)^{(1)}}+\frac{\eta_2}{(x-\alpha-r-1)^{(2)}}+\cdots+\right. \\ \left.+\frac{\eta_{\sigma-r}}{(x-\alpha-r-1)^{(\alpha-r)}}\right], \end{aligned}\right\} \quad (113)$$

les quantités $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{\alpha-r}$ étant indépendantes de x de sorte que $\lim\limits_{x=\infty} q_r(x) = k_r = $ *une constante* $\neq 0$.

De la même manière on peut démontrer une relation analogue pour l'expression $Q_r(x)$ lorsque $\beta+1\leq r\leq\gamma$, lorsque $\gamma+1\leq r\leq\delta,\ldots,$ lorsque $\chi+1\leq r\leq\lambda$. Par conséquent, en posant $\sigma_r=\frac{\sigma}{m_r}$ et en se servant des relations générales (84) on peut écrire

$$\left.\begin{aligned}A(x)=\sigma_1^x\sum_{r=1}^{r=\alpha}c_r(x+\alpha-r-1)^{(\alpha-r)}q_r(x)+&\\+\sigma_2^x\sum_{r=1}^{r=\beta}c_{\alpha+r}(x+\beta-r-1)^{(\beta-r)}q_{\alpha+r}(x)+&\\+\sigma_3^x\sum_{r=1}^{r=\gamma}c_{\alpha+\beta+r}(x+\gamma-r-1)^{(\gamma-r)}q_{\alpha+\beta+r}(x)+\cdots+&\\+\sigma_p^x\sum_{r=1}^{r=\lambda}c_{n-\lambda+r}(x+\lambda-r-1)^{(\lambda-r)}q_{n-\lambda+r}(x)&\end{aligned}\right\}\tag{114}$$

où les expressions $q_r(x)$, $1\leq r\leq n$ sont telles que $\lim_{x=\infty}q_r(x)=k_r=const.\neq0$. En même temps, on obtient une expression analogue pour la fonction $\bar q(x,x_1)$ en remplaçant les constantes $c_1, c_2,\ldots, c_n$ de l'expression (114) par les fonctions $f_1(x_1), f_2(x_1),\ldots, f_n(x_1)$ respectivement.

Cela posé, représentons par θ le plus grand des nombres $\alpha, \beta, \gamma,\ldots, \lambda$. Nous pouvons alors écrire

$$\left.\begin{aligned}A(x)=(x+\theta-2)^{\theta-1}\Big\{\sigma_1^x\sum_{r=1}^{r=\alpha}c_r\,\omega_r(x)+\sigma_2^x\sum_{r=1}^{r=\beta}c_{\alpha+r}\,\omega_{\alpha+r}(x)+\cdots+&\\+\sigma_p^x\sum_{r=1}^{r=\lambda}c_{n-\lambda+r}\,\omega_{n-\lambda+r}(x)\Big\}&\end{aligned}\right\}\tag{115}$$

et

$$\left.\begin{aligned}\bar q(x,x_1)=(x+\theta-2)^{\theta-1}\Big\{\sigma_1^x\sum_{r=1}^{r=\alpha}f_r(x_1)\,\omega_r(x)+&\\+\sigma_2^x\sum_{r=1}^{r=\beta}f_{\alpha+r}(x_1)\,\omega_{\alpha+2}(x)+\cdots+&\\+\sigma_p^x\sum_{r=1}^{r=\lambda}f_{n-\lambda+r}(x_1)\,\omega_{n-\lambda+r}(x)\Big\},&\end{aligned}\right\}\tag{116}$$

les expressions $\omega_1(x), \omega_2(x),\ldots, \omega_n(x)$ étant des fonctions de x qui tendent vers certaines limites $\xi_1, \xi_2,\ldots, \xi_n$ respectivement lorsque $x=\infty$. De plus, une au moins de ces limites est différente de zéro.

Mais (comme dans le cas précédent) nous avons

$$\varepsilon_n f_r(x) = \sum_{s=0}^{s=n} \varepsilon_s \Delta^{n-s} [(a_s - \alpha_s) z_r] ; \quad \varepsilon_s = (-1)^s,$$

de sorte que nous pouvons écrire dans le cas actuel

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_n f_r(x) &= x^{(r-1)} m_1^x \sum_{s=0}^{s=n} \varepsilon_s \frac{\Delta^{n-s}[(a_s - \alpha_s) x^{(r-1)} m_1^x]}{x^{(r-1)} m_1^x} = \\
&= x^{(r-1)} m_1^x \overline{(a-\alpha)}\, g_r(x), \quad 1 \leqq r \leqq \alpha \\
\varepsilon_n f_{\alpha+r}(x) &= x^{(r-1)} m_2^x \sum_{s=0}^{s=n} \varepsilon_s \frac{\Delta^{n-s}[(a_s - \alpha_s) x^{(r-1)} m_2^x]}{x^{(r-1)} m_2^x} = \\
&= x^{(r-1)} m_2^x \overline{(a-\alpha)}\, g_{\alpha+r}(x), \quad 1 \leqq r \leqq \beta \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varepsilon_n f_{n-\lambda+r}(x) &= x^{(r-1)} m_p^x \sum_{s=0}^{s=n} \varepsilon_s \frac{\Delta^{n-s}[(a_s - \alpha_s) x^{(r-1)} m_p^x]}{x^{(r-1)} m_p^x} = \\
&= x^{(r-1)} m_p^x \overline{(a-\alpha)}\, g_{n-\lambda+r}(x), \quad 1 \leqq r \leqq \lambda
\end{aligned}\right\} \qquad (117)$$

où $\overline{a-\alpha}$ représente la plus grande des valeurs $a_s - \alpha_s$, $0 \leqq s \leqq n$ considérées pour une valeur donnée de x et où $g_r(x)$, $1 \leqq r \leqq n$ est une fonction de x qui tend vers une limite bien définie lorsque $x = \infty$.

Ainsi, l'expression $\bar{q}(x, x_1)$ prend la forme

$$\begin{aligned}
\bar{q}(x, x_1) = \varepsilon_n (x + \theta - 2)^{(\theta-1)} [\overline{a(x_1) - \alpha}] \Big\{ & \sigma_1^x m_1^{x_1} \sum_{r=1}^{r=\alpha} x_1^{(r-1)} g_r(x_1)\, \omega_r(x) + \\
& + \sigma_2^x m_2^{x_1} \sum_{r=1}^{r=\beta} x_1^{(r-1)} g_{\alpha+r}(x_1)\, \omega_{\alpha+r}(x) + \cdots + \\
& + \sigma_p^x m_p^{x_1} \sum_{r=1}^{r=\lambda} x_1^{(r-1)} g_{n-\lambda+r}(x_1)\, \omega_{n-\lambda+r}(x) \Big\}
\end{aligned}$$

ou

$$\bar{q}(x, x_1) = x^{\theta-1} [\overline{a(x_1) - \alpha}]\, x_1^{\theta-1} \sum_{t=1}^{t=p} \sigma_t^x m_t^{x_1} h_t(x, x_1) \qquad (118)$$

où la fonction $h_t(x, x_1)$ considérée pour toutes les valeurs de x et x_1 suffisamment grandes est telle que $|h_t(x, x_1)| < h = const.$ indépendante de x et x_1.

De plus, la formule (115) nous permet d'écrire

$$A(x) = x^{\theta-1} \sum_{t=1}^{t=p} \sigma_t^x j_t(x) \tag{119}$$

où la fonction $j_t(x)$ considérée pour toutes les valeurs de x suffisamment grandes est telle que $|j_t(x)| < j = const.$ indépendante de x.

Par conséquent, dans le cas actuel les expressions

$$\Phi(x, x_1) = \frac{\bar{q}(x+1, x_1)}{a_0(x_1+n)\, Q(x_1+1)}, \quad \Psi(x, x_1) = A(x_1+1)\, \Phi(x, x_1)$$

qui jouent un rôle essentiel dans le théorème II, peuvent s'exprimer sous les formes suivantes:

$$\Phi(x, x_1) = \frac{(x+1)^{\theta-1}\, \overline{[a(x_1) - \alpha]}\, x_1^{\theta-1}}{a_0(x_1+n)\, q} \sum_{t=1}^{t=p} \frac{\sigma_t^{x-x_1} h_t(x+1, x_1)}{m_t}, \tag{120}$$

$$\left.\begin{aligned} \Psi(x, x_1) = {} & \frac{(x+1)^{\theta-1}\, \overline{[a(x_1) - \alpha]}\, x_1^{\theta-1}(x_1+1)^{\theta-1}}{a_0(x_1+n)\, q} \\ & \sum_{t=1}^{t=p} \sum_{u=1}^{u=p} \sigma_t^{x+1} \left(\frac{m_t}{m_u}\right)^{x_1+1} h_t(x+1, x_1)\, j_u(x_1+1). \end{aligned}\right\} \tag{121}$$

En se servant des propriétés des fonctions $h_t(x, x_1)$ et $j_t(x)$ il résulte maintenant que si l'on suppose que chacune des différences $a_s(x) - \alpha_s$, $0 \leq s \leq n$ devient un infiniment petit d'un ordre aussi grand que celui de l'expression $\frac{\tau(x)}{x^{2\theta-1}}$ où $\tau(x)$ a les propriétés indiqués dans les paragraphes précédents, alors, en supposant aussi que toutes les racines $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_p$ ont le même module ρ, on peut écrire

$$\Phi(x, x_1) = \left(\frac{x}{x_1}\right)^{\theta-1} \rho^{(n-1)(x-x_1)} M(x, x_1), \tag{122}$$

$$\Psi(x, x_1) = x^{\theta-1} \rho^{(n-1)(x+1)} N(x, x_1), \tag{123}$$

les fonctions $M(x, x_1)$, $N(x, x_1)$ étant telles que pour toutes les valeurs de x et x_1 suffisamment grandes les relations suivantes existent:

$$\left.\begin{aligned} & |M(x, x_1)| < \Omega_2 \frac{\tau(x_1)}{x_1} \\ & \qquad\qquad (\Omega_2,\ \Omega_3\ \textit{consts.}\ \text{indépendantes de } x \text{ et } x_1) \\ & |N(x, x_1)| < \Omega_3 \frac{\tau(x_1)}{x_1}. \end{aligned}\right\} \tag{124}$$

Ainsi, on peut écrire aussi

$$u_m(x) = \Phi(x, x_1)\,\Phi(x_1, x_2)\ldots\Phi(x_{m-2}, x_{m-1})\,\Psi(x_{m-1}, x_m) =$$
$$= x^{\theta-1}\,\rho^{(n-1)(x+1)}\,P(x, x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

où $P(x, x_1, x_2, \ldots, x_m)$ a les propriétés de la fonction $P(x, x_1, x_2, \ldots, x_m)$ de l'équation (100).

Il résulte maintenant, comme dans le cas du § 13, que pour toutes les valeurs de x suffisamment grandes la série infinie (qui se trouve dans l'énoncé du théorème II) $|u_1(x)| + |u_2(x)| + \cdots + |u_n(x)| + \cdots$ converge et a une somme $U(x)$ de la forme $U(x) = \theta(x)\,x^{\theta-1}\,\rho^{(n-1)(x+1)}$ où $\theta(x) < \Omega_4 =$ *const.* indépendante de x. De plus, d'après la relation (119) on peut écrire aussi

$$|\Phi(x, x_1)|\,U(x_1) = x^{\theta-1}\,\rho^{(n-1)(x+1)}\,\theta(x, x_1) \tag{125}$$

où pour toutes les valeurs suffisamment grandes de x et x_1 on a

$$\theta(x, x_1) < \Omega_5\,\frac{\tau(x_1)}{x_1}, \quad \Omega_5 = \textit{const.}\ \text{indépendante de } x \text{ et } x_1$$

de sorte que cette expression a les propriétés demandées par le théorème II. En même temps, il résulte que

$$Y(x_1)\,f_r(x_1) = f_r(x_1)\sum_{m=1}^{m=\infty} u_m(x_1) =$$
$$= \frac{f_r(x_1)}{a_0(x_1+n)}\left[\frac{A(x_1+1)}{Q(x_1+1)} + \frac{\theta_3(x_1)\,x_1^{\theta-1}\,\rho^{(n-1)(x_1+1)}}{Q(x_1+1)}\right]$$

où pour toutes le valeurs de x_1 suffisamment grandes on a $|\theta_3(x_1)| \leqq 1$.

Mais, d'après notre hypothèse relative aux différences $a_s - \alpha_s$ et les relations (117), on voit que pour une valeur quelconque de r, $1 \leqq r \leqq n$ on peut écrire

$$f_r(x_1) = \theta_4(x_1, r)\,\frac{\rho^{x_1}}{x_1^{\theta-1}},$$
$$|\theta_4(x_1, r)| \leqq \Omega_6\,\frac{\tau(x_1)}{x_1}, \quad \Omega_6 = \textit{const.}\ \text{indépendante de } x_1,$$

x_1 étant suffisamment grand. Par conséquent, le produit $Y(x_1)\,f_r(x_1)$ prend la forme

$$\frac{\theta_4(x_1, r)}{a_0(x_1+n)}\left[\frac{A(x_1+1)\,\rho^{x_1}}{x_1^{\theta-1}\,Q(x_1+1)} + \frac{\theta_3(x_1)\,\rho^{(n-1)(x_1+1)+x_1}}{Q(x_1+1)}\right]$$

et cette expression a les propriétés signalées dans le théorème II, ce qui résulte immédiatement des équations (108) et (115) puisque les expressions

$$\frac{\rho^{x_1}}{x_1^{\theta-1}}\left|\frac{A(x_1+1)}{Q(x_1+1)}\right| \quad \text{et} \quad \frac{\rho^{(n-1)(x_1+1)+x_1}}{|Q(x_1+1)|}$$

considérées pour toutes les valeurs de x_1 suffisamment grandes ne dépassent jamais certaines valeurs constantes.

Toutes les conditions demandées par le théorème II sont donc remplies en prenant nos fonctions actuelles $z_1, z_2, \ldots, z_n$ pour fonctions auxiliaires et en adoptant notre hypothèse actuelle sur les différences $a_s - \alpha_s$, $s = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Nous allons considérer en plus de détail la forme de la série actuelle $Y(x)$.

Il résulte directement des équations (108) et (114) qu'on a

$$\left.\begin{aligned} Y(x) = \frac{1}{m_1^{x+1}} \sum_{r=1}^{r=\alpha} c_r (x+\alpha-r)^{(\alpha-r)} q_r(x+1) + \\ + \frac{1}{m_2^{x+1}} \sum_{r=1}^{r=\beta} c_{\alpha+r} (x+\beta-r)^{(\beta-r)} q_{\alpha+r}(x+1) + \cdots + \\ + \frac{1}{m_p^{x+1}} \sum_{r=1}^{r=\lambda} c_{n-\lambda+r} (x+\lambda-r)^{(\lambda-r)} q_{n-\lambda+r}(x+1) + \xi(x) \end{aligned}\right\} \tag{126}$$

où

$$\begin{aligned} \xi(x) = -\frac{a_0(x+n)-\alpha_0}{a_0(x+n)} \Bigg[\frac{1}{m_1^{x+1}} \sum_{r=1}^{r=\alpha} c_r (x+\alpha-r)^{(\alpha-r)} q_r(x+1) + \\ + \frac{1}{m_2^{x+1}} \sum_{r=1}^{r=\beta} c_{\alpha+r} (x+\beta-r)^{(\beta-r)} q_{\alpha+r}(x+1) + \cdots + \\ + \frac{1}{m_p^{x+1}} \sum_{r=1}^{r=\lambda} c_{n-\lambda+r} (x+\lambda-r)^{(\lambda-r)} q_{n-\lambda+r}(x+1) \Bigg] + \\ + \frac{1}{q\, a_0 (x+n)\, \sigma^{x+1}} [u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_m(x) + \cdots]. \end{aligned}$$

Mais, d'après ce que nous avons dit des termes $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_m(x), \ldots$, de la série $Y(x)$ nous avons $u_m(x) = x^{\theta-1} \rho^{(n-1)(x+1)} V_m(x)$ où $V_m(x)$ satisfait à la relation (102). Ainsi, en vertu de notre hypothèse relative aux différences $a_s - \alpha_s$, nous voyons que la fonction $\xi(x)$ a la forme $\dfrac{x^{\theta-1}\eta(x)}{\rho^{x+1}}$ où $\eta(x)$ devient un infiniment petit d'un ordre aussi grand que celui de

$$\tau_1(x) = \sum_{x_1=x+1}^{x_1=\infty} \frac{\tau(x_1)}{x_1}$$

lorsque $x = \infty$.

De plus, en nous rappelant que l'expression $(x-\alpha-r)^{(\alpha-r)}\,q_r(x+1)$ est un polynôme de degré $\alpha-r$ en x nous voyons que le premier terme du second membre de l'équation (126) a la forme

$$\frac{1}{m_1^{x+1}}\sum_{r=1}^{r=\alpha} c'_r\, x^{r-1},$$

$c'_1,\ c'_2,\ldots,\ c'_\alpha$ étant des constantes arbitraires. De la même manière, le deuxième, troisième,..., $p^{ième}$ termes du second membre de l'équation (126) ont respectivement les formes

$$\frac{1}{m_2^{x+1}}\sum_{r=1}^{r=\beta} c'_{\alpha+r}\, x^{r-1},\quad \frac{1}{m_3^{x+1}}\sum_{r=1}^{r=\gamma} c'_{\alpha+\beta+r}\, x^{r-1},\ldots,\quad \frac{1}{m_p^{x+1}}\sum_{r=1}^{r=\lambda} c'_{n-\lambda+r}\, x^{r-1},$$

$c'_{\alpha+1},\ c'_{\alpha+2},\ldots,\ c'_n$ étant des constantes arbitraires.

Pour toutes les valeurs suffisamment grandes de x nous pouvons donc écrire

$$\left.\begin{aligned} Y(x)=\frac{1}{m_1^{x+1}}\sum_{r=1}^{r=\alpha} c'_r\, x^{r-1}+\frac{1}{m_2^{x+1}}\sum_{r=1}^{r=\beta} c'_{\alpha+r}\, x^{r-1}+\cdots+\\ +\frac{1}{m_p^{x+1}}\sum_{r=1}^{r=\lambda} c'_{n-\lambda+r}\, x^{r-1}+\frac{x^{\theta-1}\,\eta(x)}{\rho^{x+1}},\end{aligned}\right\}\quad(127)$$

les constantes $c'_1,\ c'_2,\ldots,\ c'_n$ et la fonction $\eta(x)$ ayant les propriétés données plus haut.

Nous avons donc établi l'équation (127) en supposant que toutes les racines $m_1,\ m_2,\ldots,\ m_p$ ont le même module ρ. Si cette condition n'est pas remplie et que $m_1,\ldots,\ m_2,\ m_h\ (h<p)$ représentent celles de ces racines dont le module est maximum, on trouve directement l'équation analogue

$$\begin{aligned} Y(x)=\frac{1}{m_1^{x+1}}\sum_{r=1}^{r=\alpha} c'_n\, x^{r-1}+\frac{1}{m_2^{x+1}}\sum_{r=1}^{r=\beta} c'_{\alpha+r}\, x^{r-1}+\cdots+\\ +\frac{1}{m_h^{x+1}}\sum_{r=1}^{r=\zeta} c_{\alpha+\beta+\cdots+\varepsilon+r}\, x^{r-1}+\frac{x^{\theta-1}\,\eta(x)}{\rho^{x+1}},\end{aligned}$$

les constantes $c'_1,\ c'_2,\ldots,\ c'_{\alpha+\beta+\cdots+\varepsilon+\zeta}$ et la fonction $\eta(x)$ ayant les propriétés signalées plus haut. En effet, il suffit pour établir cette relation de suivre encore la marche de la recherche analogue du § 13.

Ainsi, en appliquant le théorème II et en faisant encore les observations relatives à l'équation (104) nous arrivons au résultat général suivant:

THÉORÈME IV : *Si, dans le théorème III, les racines* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *de l'équation algébrique*

$$B_0 \lambda^m + B_1 \lambda^{m-1} + \cdots + B_n = 0$$

ne sont pas distinctes, la racine λ_1 *se répétant* α *fois, la racine* λ_2 *se répétant* β *fois, ..., la racine* λ_p *se répétant* ω *fois :* $(\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \omega = n)$ *ce théorème (les autres conditions étant les mêmes) reste encore vrai pourvu qu'en posant* $\theta =$ *le plus grand des nombres* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \omega$, *on remplace l'expression* $\frac{\tau(x)}{x}$ *par* $\frac{\tau(x)}{x^{2\theta-1}}$ *(*$\tau(x)$ *ayant la même signification qu'auparavant) et qu'on remplace les formes*

$$\left\{ \begin{array}{l} y(x) = c_1 \lambda_1^x + c_2 \lambda_2^x + \cdots + c_n \lambda_n^x + \lambda^x \varepsilon(x) \\ y(x) = c_1 \lambda_1^x + c_2 \lambda_2^x + \cdots + c_h \lambda_h^x + \lambda^x \varepsilon(x) \end{array} \right.$$

par ces autres

$$\left\{ \begin{array}{l} y(x) = \lambda_1^x \sum\limits_{r=1}^{r=\alpha} c_r x^{r-1} + \lambda_2^x \sum\limits_{r=1}^{r=\beta} c_{\alpha+r} x^{r-1} + \cdots + \lambda_p^x \sum\limits_{r=1}^{r=\omega} c_{n-\omega+r} x^{r-1} + x^{\theta-1} \lambda^x \varepsilon(x) \\ y(x) = \lambda_1^x \sum\limits_{r=1}^{r=\alpha} c_r x^{r-1} + \lambda_2^x \sum\limits_{r=1}^{r=\beta} c_{\alpha+r} x^{r-1} + \cdots + \lambda_h^x \sum\limits_{r=1}^{r=\zeta} c_{\alpha+\beta+\cdots+\varepsilon+r} x^{r-1} + x^{\theta-1} \lambda^x \varepsilon(x) \end{array} \right.$$

respectivement, les quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ $(h < p)$ *étant celles des racines* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ *dont le module est minimum et les constantes* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *étant encore arbitraires.*

Ann Arbor, Etats-Unis, décembre, 1906.