Un problema sui sistemi di linee fra loro coniugate e sulle relative trasformazioni di Laplace.

(*Di* Pasquale Calapso, *a Palermo.*)

Allo studio delle equazioni lineari alle derivate parziali della forma

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = A \frac{\partial x}{\partial u} + B \frac{\partial x}{\partial v}, \tag{1'}$$

si collegano secondo Laplace due trasformazioni L, L^{-1} definite rispettivamente dalle formole

$$x_1 = x - \frac{1}{A} \frac{\partial x}{\partial v}, \tag{2'}$$

$$x_2 = x - \frac{1}{B} \frac{\partial x}{\partial u}. \tag{3'}$$

Applicando all'equazione (1') o l'una o l'altra di queste trasformazioni, la (1') si cambia in una nuova equazione della medesima forma.

Ricordiamo il significato geometrico di queste trasformazioni. Siano x, y, z, tre soluzioni della (1') e interpretiamo queste come coordinate cartesiane ortogonali di un punto P dello spazio; al variare di u e v il punto P descrive un sistema coniugato.

Applicando alle funzioni x, y, z la trasformazione L, queste si cambiano in cert'altre funzioni x_1, y_1, z_1; il punto P dello spazio si cambia in un punto P_1 e quest'ultimo al variare di u e v descrive un nuovo sistema coniugato.

Similmente applicando alle funzioni x, y, z la trasformazione L^{-1} il punto P si cambia in un punto P_2. il quale al variare di u e v descrive a sua volta un nuovo sistema coniugato.

Lo scopo della presente Memoria è la ricerca dei sistemi coniugati, per cui entrambi i sistemi derivati con le trasformazioni L, L^{-1} risultano ortogonali.

Ogni sistema coniugato che gode di questa proprietà lo chiameremo brevemente *un sistema coniugato* (G).

Per la trattazione del problema conviene giovarsi di due teoremi di GUICHARD (*) che possono enunciarsi nel modo seguente:

I) *Un sistema coniugato parallelo a un sistema coniugato* (G) *è ancor esso un sistema coniugato* (G).

II) *Per ogni sistema coniugato* (G) *esiste sempre un sistema coniugato ad esso parallelo che ammette gl'invarianti uguali.*

Questi teoremi permettono di limitare la ricerca alla formazione dei sistemi coniugati (G) a invarianti uguali; l'equazione di LAPLACE relativa a un siffatto sistema coniugato è in tal caso della forma

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}, \tag{4'}$$

e la determinazione della funzione φ dipende da un'equazione differenziale alle derivate parziali di 4.° ordine.

Nota la funzione φ per avere definitivamente le funzioni x, y, z occorre integrare un sistema di RICCATI.

Per le varie questioni relative al problema proposto è molto utile introdurre l'invariante H dell'equazione (4') definito dalla formola

$$H = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v}.$$

Si può allora domandare a che condizione deve soddisfare una funzione H affinchè si possa assumere come invariante per un'equazione della forma (4') relativa a un sistema coniugato (G).

La funzione H è caratterizzata dal fatto che le due equazioni nella funzione incognita ω

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \omega}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{H}\,\text{sen}\,\omega, \\ &\cos\omega = H^2 - H\frac{\partial^2 \log H}{\partial u\, \partial v}, \end{aligned}\right\} \tag{5'}$$

debbono ammettere una soluzione comune.

(*) *Sur les réseaux qui, par la méthode de* LAPLACE, *se transforment des deux côtés en réseaux orthogonaux* [Comptes Rendus, anno 1901, vol. 132, pg. 249].

Si riconosce frattanto una soluzione particolare del problema; invero possiamo soddisfare alle precedenti ponendo

$$\omega = 0,$$

$$H^2 - H\frac{\partial^2 \log H}{\partial u\, \partial v} = 1.$$

Quest'ultima col porre $H = e^{\Theta}$, assume la forma

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u\, \partial v} = 2 \operatorname{senh} \Theta. \tag{6'}$$

Similmente possiamo soddisfare alle (5') ponendo

$$\omega = \pi,$$

$$H^2 - H\frac{\partial^2 \log H}{\partial u\, \partial v} = -1.$$

Quest'ultima col porre $H = e^{\Theta}$, assume la forma

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u\, \partial v} = 2 \cosh \Theta. \tag{7'}$$

Dopo le ricerche da me esposte in una precedente Memoria (*), sappiamo che le due equazioni (6'), (7') sono quelle da cui dipende la ricerca delle *asintotiche virtuali* di un paraboloide qualunque a punti iperbolici.

Intorno a queste equazioni e alle varie questioni geometriche che vi si connettono, possediamo ormai le recenti Memorie del BIANCHI (**), in cui l'illustre geometra ha portato la teoria al massimo grado di sviluppo; per questa ragione non insistiamo su questa soluzione particolare del problema.

Escludendo d'ora innanzi questi casi, per ottenere l'invariante incognito H, elimineremo quest'ultimo fra le (5') ed avremo per la funzione ω l'equazione

(*) *Sulla deformazione delle quadriche* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, anno 1902, t. XVI, pg. 297].

(**) *Intorno alle superficie applicabili sui paraboloidi ed alle loro trasformazioni* [Atti della R. Accademia delle scienze di Torino, anno 1903, vol. XXXVIII, pg. 515].

Sulla deformazione dei paraboloidi [Annali di Matematica, anno 1904, serie III, vol. IX, pg. 247].

Sulla deformazione dei paraboloidi [Atti della Reale Accademia dei Lincei, anno 1905, serie V, vol. XIV, pg. 359].

differenziale di 4.° ordine

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right)+\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right)^{-1}=\cot\omega\,\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\,. \tag{8'}$$

Determinata nel modo più generale una soluzione ω di questa equazione se ne dedurrà immediatamente l'invariante incognito ponendo

$$H=\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right)^{-1}.$$

Qui è interessante risolvere il problema seguente:

Determinare tutti i sistemi coniugati (G) *a invarianti uguali, dato che sia l'invariante.*

Per quanto sopra abbiamo detto assegnare l'invariante H ad un sistema coniugato (G), è quanto assegnare la soluzione ω dell'equazione differenziale (8').

Per avere allora la funzione φ relativa all'equazione (4') del sistema coniugato (G), occorre integrare il sistema completo:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2\Omega}{\partial u^2}&=\frac{\partial(\Omega+\omega)}{\partial u}\left[\cot\frac{\Omega-\omega}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial u}\log\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right)\right]+\\
&\qquad+\frac{2W}{\operatorname{sen}\frac{\Omega+\omega}{2}}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right)^{-1}-\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}\,,\\
\frac{\partial^2\Omega}{\partial v^2}&=\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial v}\left[\cot\frac{\Omega+\omega}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial v}+\frac{\partial}{\partial v}\log\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right)\right]+\\
&\qquad+\frac{2W}{\operatorname{sen}\frac{\Omega-\omega}{2}}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right)^{-1}+\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}\,,\\
\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v}&=\frac{\operatorname{sen}\Omega}{\cos\omega-\cos\Omega}\frac{\partial(\Omega+\omega)}{\partial u}\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial v}-\frac{\operatorname{sen}\Omega}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\,,
\end{aligned}\right\} \tag{9'}$$

$$\left.\begin{aligned}
4W^2&=(\cos\omega-\cos\Omega)\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial(\Omega+\omega)}{\partial u}\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial v}-\\
&\qquad-(\cos\omega-\cos\Omega)^2\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right)^2,
\end{aligned}\right\} \tag{10'}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial u}&=-\frac{1}{2W}\operatorname{sen}\frac{\Omega-\omega}{2}\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial v}\,,\\
\frac{\partial\varphi}{\partial v}&=-\frac{1}{2W}\operatorname{sen}\frac{\Omega+\omega}{2}\frac{\partial(\Omega+\omega)}{\partial u}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{11'}$$

Dopo di che si conoscerà la funzione φ dell'equazione (4'), e integrando un sistema di Riccati si avranno definitivamente le funzioni x, y, z.

L'integrazione introdurrà manifestamente tre costanti arbitrarie. Possiamo dare altresì un procedimento mediante il quale si possono dedurre, da un *noto* sistema coniugato (G) ad invarianti uguali, infiniti sistemi coniugati (G), dipendenti da tre costanti arbitrarie, i quali hanno in comune col primo l'invariante; e sembra assai notevole che questo procedimento non richieda che soli calcoli algebrici e di derivazione.

Per esporre con chiarezza questo procedimento, chiameremo *superficie* Σ_1 ogni superficie di cui le linee di curvatura si possono far derivare mediante la trasformazione L da un sistema coniugato (G) a invarianti uguali; parimenti chiameremo *superficie* Σ_2 ogni superficie di cui le linee di curvatura si possono far derivare mediante la trasformazione L^{-1} da un sistema coniugato (G) a invarianti uguali.

Ora per le superficie Σ_1 e Σ_2 sussiste il seguente teorema:

L'inversione per raggi vettori reciproci (trasformazione I) trasforma una superficie Σ_1 in infinite nuove superficie Σ_1, e trasforma parimenti una superficie Σ_2 in infinite nuove superficie Σ_2.

Se ne deduce facilmente il procedimento in discorso, cioè:

Da un noto sistema coniugato (G) a invarianti uguali, applicando la trasformazione $L\,I\,L^{-1}$ (o la trasformazione $L^{-1}\,I\,L$), si hanno infiniti sistemi coniugati (G) a invarianti uguali dipendenti da tre costanti arbitrarie. Tali sistemi coniugati (G) avranno in comune col sistema coniugato iniziale l'invariante.

Risoluta coll'integrazione del sistema completo (9'), (10'), (11') la questione di determinare tutti i sistemi coniugati (G) che ammettono un assegnato invariante, riteniamo fare un passo verso la soluzione definitiva del problema collo stabilire una trasformazione per l'invariante, ossia una trasformazione per gl'integrali dell'equazione differenziale di 4.° ordine (8').

Tale trasformazione si riassume nel seguente teorema:

Se ω è una soluzione della (8'), *il sistema delle equazioni* (9'), (10') *è illimitatamente integrabile; si avrà dall'integrazione una funzione Ω con tre costanti arbitrarie che sarà una nuova soluzione dell'equazione differenziale di 4.° ordine* (8').

Completeremo infine il risultato ottenuto con un'ultima proposizione la quale può enunciarsi nel modo seguente:

Se x, y, z sono le coordinate d'un punto che descrive un sistema coniu-

gato (G) a invarianti uguali, ponendo

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \xi}{\partial u}=e^{-2\varphi}\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial u}=e^{-2\varphi}\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial u}=e^{-2\varphi}\frac{\partial z}{\partial u},\\
&\frac{\partial \xi}{\partial v}=-e^{-2\varphi}\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial v}=-e^{-2\varphi}\frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial v}=-e^{-2\varphi}\frac{\partial z}{\partial v},
\end{aligned}\right\} \tag{12'}$$

si avranno per quadrature tre funzioni ξ, η, ζ *che sono le coordinate di un punto che descrive un nuovo sistema coniugato (G) a invarianti eguali.*

Ora supposto il sistema iniziale (G) ottenuto partendo da una soluzione ω della $(8')$ e integrando il sistema completo $(9')$, $(10')$, $(11')$ l'invariante di (G) sarà

$$H=\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2 \omega}{\partial u\,\partial v}\right)^{-1},$$

e l'invariante del nuovo sistema coniugato sarà dato da

$$H_1=\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\Omega}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u\,\partial v}\right)^{-1}.$$

Le formole $(12')$ dànno adunque per quadrature una trasformazione per i sistemi coniugati (G) a invarianti uguali che chiameremo *trasformazione C*; mediante la quale la funzione ω si cambia in Ω e l'invariante H in H_1.

Frattanto rimane stabilito un metodo di trasformazioni per i sistemi coniugati (G) a invarianti uguali che consiste nel comporre la trasformazione $L\,I\,L^{-1}$ (o la trasformazione $L^{-1}\,I\,L$) colla trasformazione C.

Sembra assai notevole che l'applicazione successiva ed illimitata di questo metodo di trasformazioni richieda soltanto successive quadrature.

§ I. Condizioni caratteristiche per i sistemi coniugati (G).

1. Riferiamo una superficie S ad un sistema coniugato di linee, e siano

$$x=x(u,\ v),\quad y=y(u,\ v),\quad z=z(u,\ v), \tag{1}$$

le coordinate correnti di un punto della superficie.

Conservando le consuete notazioni, porremo

$$\sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2=E,\quad \sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}=F,\quad \sum\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2=G. \tag{2}$$

Denoteremo altresì con X, Y, Z i coseni direttori della normale, essendo le linee u e v coniugate si dovrà avere:

$$\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}=0,\quad \sum\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}=0. \tag{3}$$

Introdurremo inoltre le funzioni

$$D=-\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u},\quad D''=-\sum\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v}, \tag{4}$$

sicchè le due forme fondamentali della superficie saranno:

$$E\,d\,u^2+2\,F\,d\,u\,d\,v+G\,d\,v^2, \tag{5}$$

$$D\,d\,u^2+D''\,d\,v^2. \tag{6}$$

Introdurremo infine per la prima di queste forme i simboli di CHRISTOFFEL $\left\{\begin{matrix} i\,k \\ l \end{matrix}\right\}$.

Le funzioni x, y, z, X, Y, Z delle variabili u e v soddisfano al sistema simultaneo:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}&=\left\{\begin{matrix}1\,1\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial x}{\partial u}+\left\{\begin{matrix}1\,1\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial x}{\partial v}+D\,X,\\
\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}&=\left\{\begin{matrix}1\,2\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial x}{\partial u}+\left\{\begin{matrix}1\,2\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial x}{\partial v},\\
\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}&=\left\{\begin{matrix}2\,2\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial x}{\partial u}+\left\{\begin{matrix}2\,2\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial x}{\partial v}+D''\,X,
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\frac{\partial X}{\partial u}=\frac{-D}{E\,G-F^2}\left(G\frac{\partial x}{\partial u}-F\frac{\partial x}{\partial v}\right), \tag{8}$$

$$\frac{\partial X}{\partial v}=\frac{D''}{E\,G-F^2}\left(F\frac{\partial x}{\partial u}-E\frac{\partial x}{\partial v}\right), \tag{9}$$

colle analoghe in y e z, che è illimitatamente integrabile in forza delle relazioni

$$D\,D'' = \sqrt{E\,G - F^2}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{E\,G - F^2}}{G}\begin{Bmatrix} 2\;2 \\ 1 \end{Bmatrix}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E\,G - F^2}}{G}\begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 1 \end{Bmatrix}\right)\right], \tag{10}$$

$$\frac{\partial D}{\partial v} = \begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 1 \end{Bmatrix} D - \begin{Bmatrix} 1\;1 \\ 2 \end{Bmatrix} D'', \tag{11}$$

$$\frac{\partial D''}{\partial u} = \begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 2 \end{Bmatrix} D'' - \begin{Bmatrix} 2\;2 \\ 1 \end{Bmatrix} D, \tag{12}$$

che sono, com'è noto, necessarie e sufficienti.

Con queste notazioni le due trasformazioni di LAPLACE L, L^{-1} sono espresse rispettivamente dalle formole:

$$x_1 = x - \frac{1}{\begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 1 \end{Bmatrix}}\frac{\partial x}{\partial v}, \tag{13}$$

$$x_2 = x - \frac{1}{\begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 2 \end{Bmatrix}}\frac{\partial x}{\partial u}, \tag{14}$$

colle analoghe in y e z.

2. Per stabilire le condizioni caratteristiche per un sistema coniugato (G), conviene derivare le (13) e (14) rispetto ad u e v, eliminando per mezzo delle (7) le derivate delle funzioni x, y, z d'ordine superiore al primo. Avremo così:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial u} &= \frac{1}{\begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 1 \end{Bmatrix}}\left(\frac{\partial}{\partial u}\log\begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 2 \end{Bmatrix}\right)\frac{\partial x}{\partial v}, \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} &= -\frac{1}{\begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 1 \end{Bmatrix}}\left(\begin{Bmatrix} 2\;2 \\ 1 \end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} + D''\,X\right) + \\ &\quad + \frac{1}{\begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 1 \end{Bmatrix}}\left(\frac{\partial}{\partial v}\log\begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 2\;2 \\ 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 1 \end{Bmatrix}\right)\frac{\partial x}{\partial v}, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x_2}{\partial v} &= \frac{1}{\begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 2 \end{Bmatrix}} \left(\frac{\partial}{\partial v} \log \begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 1 \end{Bmatrix} \right) \frac{\partial x}{\partial u}, \\
\frac{\partial x_2}{\partial u} &= - \frac{1}{\begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 2 \end{Bmatrix}} \left(\begin{Bmatrix} 1\;1 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} + D X \right) + \\
&\quad + \frac{1}{\begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 2 \end{Bmatrix}} \left(\frac{\partial}{\partial u} \log \begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1\;1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 2 \end{Bmatrix} \right) \frac{\partial x}{\partial u}.
\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Donde, ponendo:

$$M = \left(\frac{\partial}{\partial v} \log \begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 1 \end{Bmatrix} \right) G - \begin{Bmatrix} 2\;2 \\ 1 \end{Bmatrix} F - \begin{Bmatrix} 2\;2 \\ 2 \end{Bmatrix} G,$$

$$N = \left(\frac{\partial}{\partial u} \log \begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 2 \end{Bmatrix} \right) E - \begin{Bmatrix} 1\;1 \\ 2 \end{Bmatrix} F - \begin{Bmatrix} 1\;1 \\ 1 \end{Bmatrix} E,$$

si ricava:

$$\sum \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{1}{\begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 1 \end{Bmatrix}^2} \left(\frac{\partial}{\partial u} \log \begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 2 \end{Bmatrix} \right) . M,$$

$$\sum \frac{\partial x_2}{\partial u} \frac{\partial x_2}{\partial v} = \frac{1}{\begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 2 \end{Bmatrix}^2} \left(\frac{\partial}{\partial v} \log \begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 1 \end{Bmatrix} \right) . N.$$

Escluderemo dalle nostre considerazioni il caso in cui si annulla l'espressione:

$$\frac{\partial}{\partial u} \log \begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

perchè in tal caso la superficie generata dal punto x_1, y_1, z_1 si riduce a una curva; escluderemo del pari il caso in cui si annulla l'espressione:

$$\frac{\partial}{\partial v} \log \begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Le condizioni caratteristiche per un sistema coniugato (G) sono dunque date dall'annullarsi delle quantità M ed N; saranno cioè:

$$\left(\frac{\partial}{\partial v}\log\left\{\begin{matrix}1\ 2\\1\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}1\ 2\\1\end{matrix}\right\}\right)G=\left\{\begin{matrix}2\ 2\\1\end{matrix}\right\}F+\left\{\begin{matrix}2\ 2\\2\end{matrix}\right\}G,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u}\log\left\{\begin{matrix}1\ 2\\2\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}1\ 2\\2\end{matrix}\right\}\right)E=\left\{\begin{matrix}1\ 1\\1\end{matrix}\right\}E+\left\{\begin{matrix}1\ 1\\2\end{matrix}\right\}F.$$

Queste a causa delle identità

$$\left\{\begin{matrix}2\ 2\\1\end{matrix}\right\}F+\left\{\begin{matrix}2\ 2\\2\end{matrix}\right\}G=\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v},$$

$$\left\{\begin{matrix}1\ 1\\1\end{matrix}\right\}E+\left\{\begin{matrix}1\ 1\\2\end{matrix}\right\}F=\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u},$$

si possono scrivere più semplicemente come segue:

$$\frac{\partial\log\sqrt{G}}{\partial v}=\frac{\partial}{\partial v}\log\left\{\begin{matrix}1\ 2\\1\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}1\ 2\\1\end{matrix}\right\}, \tag{17}$$

$$\frac{\partial\log\sqrt{E}}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial u}\log\left\{\begin{matrix}1\ 2\\2\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}1\ 2\\2\end{matrix}\right\}. \tag{18}$$

§ II. Semplificazione delle equazioni caratteristiche.

3. Volendo esprimere questo risultato sotto forma più semplice conviene introdurre come incognite principali le funzioni φ e ψ definite rispettivamente dalle formole

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}=\left\{\begin{matrix}1\ 2\\1\end{matrix}\right\},\qquad \frac{\partial\psi}{\partial u}=\left\{\begin{matrix}1\ 2\\2\end{matrix}\right\}. \tag{19}$$

In questo modo le (17) e (18) integrate dànno:

$$\log\sqrt{G}=\log\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\varphi+\lambda(u),$$

$$\log\sqrt{E}=\log\frac{\partial\psi}{\partial u}+\psi+\mu(v),$$

essendo $\lambda(u)$ funzione della sola u e $\mu(v)$ funzione della sola v.

D'altra parte dalle (19) la funzione φ è definita a meno di una funzione arbitraria della sola u, e parimenti la ψ è definita a meno di una funzione arbitraria della sola v; ond'è che senza ledere la generalità possiamo porre:

$$\log \sqrt{G} = \log \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \varphi,$$

$$\log \sqrt{E} = \log \frac{\partial \psi}{\partial u} + \psi,$$

e per conseguenza

$$\sqrt{E} = e^{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial u}, \qquad \sqrt{G} = e^{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial v}. \tag{20}$$

Ciò posto ricorriamo alle identità

$$\frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} = \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix} E + \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix} F,$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} = \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix} F + \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix} G.$$

Queste permettono di esprimere la F per mezzo delle funzioni φ e ψ in due modi differenti; invero sostituendo per le quantità $\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix}$ le espressioni (19) e per le funzioni E, G le espressioni (20) dopo semplificazione si ottiene:

$$F = e^{2\psi} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \, \partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right), \tag{21}$$

$$F = e^{2\varphi} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \, \partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right). \tag{22}$$

Ne deriva tra le funzioni φ e ψ la relazione fondamentale

$$\left. \begin{aligned} & e^{2\psi} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \, \partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) = \\ & = e^{2\varphi} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \, \partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right), \end{aligned} \right\} \tag{23}$$

che in modo più compendioso potremo scrivere

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(e^{\psi - \varphi} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(e^{\varphi - \psi} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right). \tag{24}$$

§ III. I TEOREMI DI GUICHARD.

4. Per la trattazione del problema proposto giovano due teoremi di GUICHARD, che nel presente paragrafo enuncieremo e dimostreremo direttamente.

I due teoremi in discorso possono enunciarsi sotto la forma seguente:

α) *Un sistema coniugato parallelo a un sistema coniugato* (G) *è ancor esso un sistema coniugato* (G).

β) *Per ogni sistema coniugato* (G), *esiste sempre un sistema coniugato ad esso parallelo che ammette gl'invarianti uguali.*

Per la dimostrazione assumiamo anzitutto un sistema coniugato (G) per il quale conserveremo le notazioni dei paragrafi precedenti.

Un sistema coniugato ad esso parallelo è definito dalle equazioni:

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{\partial \xi}{\partial u}=a\dfrac{\partial x}{\partial u}, & \dfrac{\partial \eta}{\partial u}=a\dfrac{\partial y}{\partial u}, & \dfrac{\partial \zeta}{\partial u}=a\dfrac{\partial z}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial v}=b\dfrac{\partial x}{\partial v}, & \dfrac{\partial \eta}{\partial v}=b\dfrac{\partial y}{\partial v}, & \dfrac{\partial \zeta}{\partial v}=b\dfrac{\partial z}{\partial v}, \end{array}\right\} \tag{25}$$

in cui a e b soddisfano al sistema

$$\frac{\partial a}{\partial v}=(b-a)\frac{\partial \varphi}{\partial v}, \qquad \frac{\partial b}{\partial u}=(a-b)\frac{\partial \psi}{\partial u}. \tag{26}$$

Sulla superficie luogo del punto ξ, η, ζ l'equazione di LAPLACE del sistema coniugato assume la forma

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\, \partial v}=\frac{b}{a}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u}+\frac{a}{b}\frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v},$$

e introducendo per la nuova superficie le quantità

$$E', \quad G', \quad \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix}', \quad \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix}'.$$

avremo:

$$\sqrt{E'}=a\sqrt{E}, \qquad \sqrt{G'}=b\sqrt{G}, \tag{27}$$

$$\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix}'=\frac{b}{a}\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix}, \qquad \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix}'=\frac{a}{b}\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix}. \tag{28}$$

Da queste per derivazione si ricava:

$$\frac{\partial \log \sqrt{G'}}{\partial v} = \frac{\partial \log b}{\partial v} + \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial v},$$

ossia per la (17)

$$\frac{\partial \log \sqrt{G'}}{\partial v} = \frac{\partial \log b}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial v} \log \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

Ancora derivando la prima delle (28) si ricava:

$$\frac{\partial}{\partial v} \log \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}' = \frac{\partial \log b}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial v} \log \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} - \frac{\partial \log a}{\partial v},$$

ossia per la prima delle (26]

$$\frac{\partial}{\partial v} \log \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}' = \frac{\partial \log b}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial v} \log \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \left(1 - \frac{b}{a}\right) \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

e per conseguenza

$$\frac{\partial}{\partial v} \log \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}' + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}' = \frac{\partial \log b}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial v} \log \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix};$$

si ha quindi

$$\frac{\partial \log \sqrt{G'}}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \log \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}' + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}'.$$

Similmente si dimostra aver luogo la relazione

$$\frac{\partial \log \sqrt{E'}}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \log \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix}' + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix}',$$

ed è così dimostrato il teorema I.

Per la dimostrazione del teorema II osserviamo che in forza della (24) esiste una funzione σ che soddisfa al sistema simultaneo

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial u} &= e^{\psi - \varphi} \frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\partial (\varphi + \psi)}{\partial u}, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial v} &= e^{\varphi - \psi} \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial (\varphi + \psi)}{\partial v}. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Assumendo una soluzione σ di questo sistema, potremo soddisfare alle (26) ponendo

$$a = e^{\psi+\sigma}, \qquad b = e^{\varphi+\tau}.$$

L'equazione di LAPLACE relativa al corrispondente sistema coniugato è in tal caso

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \, \partial v} = e^{\varphi-\psi} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \xi}{\partial u} + e^{\psi-\varphi} \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial v},$$

ed ha per la (24) gl'invarianti uguali.

§ IV. I SISTEMI CONIUGATI (G) A INVARIANTI UGUALI.

5. Dopo questi teoremi limiteremo le nostre considerazioni ai sistemi coniugati (G) che ammettono gl'invarianti uguali; le formole relative si otterranno da quelle dei paragrafi I e II ponendo $\psi = \varphi$; si avrà quindi:

$$\sqrt{E} = e^{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \qquad F = e^{2\varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \, \partial v}, \qquad \sqrt{G} = e^{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \tag{30}$$

e la (24) risulta verificata identicamente.

Le trasformazioni di LAPLACE saranno rappresentate analiticamente dalle formole

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x - \frac{1}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}} \frac{\partial x}{\partial v}, \\ x_2 &= x - \frac{1}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}} \frac{\partial x}{\partial u}, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

colle analoghe in y e z; la superficie luogo del punto $x_1\, y_1\, z_1$ sarà da noi detta superficie Σ_1, e la superficie luogo del punto $x_2\, y_2\, z_2$ sarà da noi detta superficie Σ_2; in altri termini chiameremo superficie Σ_1 ogni superficie di cui le linee di curvatura si possono far derivare mediante la trasformazione L da un sistema coniugato (G) a invarianti uguali; parimenti chiameremo superficie Σ_2 ogni superficie di cui le linee di curvatura si possono far derivare mediante la trasformazione L^{-1} da un sistema coniugato (G) a invarianti uguali.

6. Qui è molto utile stabilire la forma che assume l'elemento lineare delle superficie Σ_1 e Σ_2.

Secondo le notazioni introdotte la prima delle (15) si può mettere sotto la forma

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial u}=\left(\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\partial \varphi}{\partial v}-\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v}. \tag{32}$$

Donde derivando rispetto a v

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial^2 x_1}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\frac{\partial x_1}{\partial u}=&\left(\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log\frac{\partial \varphi}{\partial v}-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\,\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial v}+\\&+\left(\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\partial \varphi}{\partial v}-\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}.\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Inoltre si ha dalla prima delle (31)

$$\frac{\partial x_1}{\partial v}=\frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial v}}\left(\frac{\partial}{\partial v}\log\frac{\partial \varphi}{\partial v}+\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial v}}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}. \tag{34}$$

Dalle (32), (33), (34) eliminando la funzione x e riducendo si ottiene:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 x_1}{\partial u\,\partial v}=&\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)\frac{\partial x_1}{\partial v}+\\&+\left[\frac{\partial \varphi}{\partial v}-\frac{\partial}{\partial v}\log\frac{\partial \varphi}{\partial v}+\frac{\partial}{\partial v}\log\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v}-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\,\partial v}\right)\right]\frac{\partial x_1}{\partial u},\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

che è l'equazione di LAPLACE delle linee di curvatura di Σ_1.

D'altra parte denotando con

$$E_1\,du^2+G_1\,dv^2$$

l'elemento lineare della superficie Σ_1, l'equazione di LAPLACE delle sue linee di curvatura sarà:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial \log\sqrt{E_1}}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial u}+\frac{\partial \log\sqrt{G_1}}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v}.$$

Ed allora si dovrà avere:

$$\frac{\partial \log\sqrt{E_1}}{\partial v}=\frac{\partial \varphi}{\partial v}-\frac{\partial}{\partial v}\log\frac{\partial \varphi}{\partial v}+\frac{\partial}{\partial v}\log\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v}-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\,\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial \log\sqrt{G_1}}{\partial u}=\frac{\partial \varphi}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

Se ne deduce integrando:

$$\sqrt{E_1} = e^{\varphi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \cdot U,$$

$$\sqrt{G_1} = \frac{e^{\varphi}}{\frac{\partial \varphi}{\partial v}} \cdot V,$$

essendo U funzione della sola u, V funzione della sola v.

Ora per una conveniente scelta del parametro v, possiamo supporre senza ledere la generalità $V = 1$, quindi scriveremo:

$$\sqrt{G_1} = \frac{e^{\varphi}}{\frac{\partial \varphi}{\partial v}} \cdot \tag{36}$$

Per determinare definitivamente la quantità $\sqrt{E_1}$, basterà quadrare la (32), avremo così:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2,$$

colle analoghe in y e z, da cui sommando e semplificando:

$$E_1 = e^{2\varphi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2,$$

e per conseguenza:

$$\sqrt{E_1} = \pm e^{\varphi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \cdot$$

Per togliere l'incertezza del segno, sottragghiamo le (31); avremo così:

$$x_1 - x_2 = \frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial u}} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial v}} \frac{\partial x}{\partial v},$$

colle analoghe in y e z, da cui quadrando, sommando ed osservando le (30):

$$\sum (x_1 - x_2)^2 = 2 \frac{e^{2\varphi}}{\frac{\partial \varphi}{\partial u}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \cdot$$

Ora per le (30) la quantità $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ nel campo di variabilità che si considera è positiva; concludiamo perciò che l'espressione

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

rappresenta a meno di un fattor positivo il quadrato della distanza di due punti corrispondenti sulle superficie Σ_1 e Σ_2.

Essa è quindi positiva, sicchè scriveremo:

$$\sqrt{E_1} = e^{\varphi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right). \tag{37}$$

Similmente per una conveniente scelta del parametro u i coefficienti dell'elemento lineare della superficie Σ_2 avranno la forma:

$$\sqrt{E_2} = \frac{e^{\varphi}}{\frac{\partial \varphi}{\partial u}},$$

$$\sqrt{G_2} = e^{\varphi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right).$$

7. Stabilita così la forma che assume l'elemento lineare sulle superficie Σ_1 e Σ_2, possiamo facilmente ottenere le quantità D, D'' relative alla superficie iniziale S. Poniamo a tal uopo per semplicità:

$$m = - \frac{\left\{ {2\,2 \atop 1} \right\}}{\left\{ {1\,2 \atop 1} \right\}},$$

$$n = \frac{1}{\left\{ {1\,2 \atop 1} \right\}} \left[\frac{\partial}{\partial v} \log \left\{ {1\,2 \atop 1} \right\} + \left\{ {1\,2 \atop 1} \right\} - \left\{ {2\,2 \atop 2} \right\} \right],$$

sarà per la (17):

$$n = \frac{1}{\left\{ {1\,2 \atop 1} \right\}} \left[\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial v} - \left\{ {2\,2 \atop 2} \right\} \right],$$

e la seconda delle (15) si scriverà:

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = m \frac{\partial x}{\partial u} + n \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{D''}{\left\{ {1\,2 \atop 1} \right\}} X. \tag{38}$$

ossia:

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} - n\frac{\partial x}{\partial v} = m\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{D''}{\left\{\begin{matrix} 1\ 2 \\ 1 \end{matrix}\right\}} X. \tag{39}$$

Dalla (38) ed analoghe in y e z quadrando e sommando, si ha:

$$G_1 = E m^2 + G n^2 + \frac{D''^2}{\left\{\begin{matrix} 1\ 2 \\ 1 \end{matrix}\right\}^2} + 2 F m n.$$

Similmente dalla (39) quadrando, sommando e tenendo conto che

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial v} = 0,$$

si ottiene:

$$G_1 + G n^2 = E m^2 + \frac{D''^2}{\left\{\begin{matrix} 1\ 2 \\ 1 \end{matrix}\right\}^2} \cdot$$

Sommando colla precedente e semplificando si ottiene:

$$\frac{D''^2}{\left\{\begin{matrix} 1\ 2 \\ 1 \end{matrix}\right\}^2} = G_1 - m(E m + F n),$$

Quest'ultima a causa dell'identità

$$E m + F n = m\frac{E G - F^2}{G},$$

si può scrivere:

$$\frac{D''^2}{\left\{\begin{matrix} 1\ 2 \\ 1 \end{matrix}\right\}^2} = G_1 - \frac{E G - F^2}{G} m^2.$$

Ed ora ponendo per m la sua espressione effettiva e per G_1 l'espressione sopra stabilita (36) avremo definitivamente:

$$D''^2 = e^{2\varphi} - \frac{E G - F^2}{G}\left\{\begin{matrix} 2\ 2 \\ 1 \end{matrix}\right\}^2 . \tag{40}$$

Similmente:

$$D^2 = e^{2\varphi} - \frac{E G - F^2}{E}\left\{\begin{matrix} 1\ 1 \\ 2 \end{matrix}\right\}^2 . \tag{41}$$

8. Qui è interessante dimostrare che le funzioni D e D'' definite dalla (10) e dalla (40) verificano necessariamente la (12).

Invero la (10) si può scrivere:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{EG-F^2}}{G}\left\{\begin{matrix}2\,2\\1\end{matrix}\right\}\right)=\frac{D\,D''}{\sqrt{EG-F^2}}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{EG-F^2}}{G}\left\{\begin{matrix}1\,2\\1\end{matrix}\right\}\right),$$

ossia sviluppando la derivazione al 2.° membro e tenendo conto che

$$\frac{\partial\sqrt{EG-F^2}}{\partial v}=\sqrt{EG-F^2}\left(\left\{\begin{matrix}2\,2\\2\end{matrix}\right\}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right),$$

avremo:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{EG-F^2}}{G}\left\{\begin{matrix}2\,2\\1\end{matrix}\right\}\right)=\frac{D\,D''}{\sqrt{EG-F^2}}+$$

$$+\frac{\sqrt{EG-F^2}}{G}\left[\left\{\begin{matrix}2\,2\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\frac{1}{e}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial v}\right].$$

Ed ora in forza dell'identità

$$\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial v}=e^{\varphi}\left(\left\{\begin{matrix}2\,2\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\left\{\begin{matrix}2\,2\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right),$$

scriveremo definitivamente:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{EG-F^2}}{G}\left\{\begin{matrix}2\,2\\1\end{matrix}\right\}\right)=\frac{D\,D''}{\sqrt{EG-F^2}}-\frac{\sqrt{EG-F^2}}{G}\left\{\begin{matrix}2\,2\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\partial\varphi}{\partial v}. \tag{42}$$

Ciò posto scriviamo la (40) sotto la forma:

$$\frac{D''^2}{e^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2}=\frac{1}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2}-\left(\frac{\sqrt{EG-F^2}}{G}\left\{\begin{matrix}2\,2\\1\end{matrix}\right\}\right)^2.$$

Derivando rispetto ad u e tenendo presente la (42) otteniamo:

$$\frac{1}{e^{2\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2}\left[\frac{\partial\,(D''^2)}{\partial u}-2\,D''^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)\right]=$$

$$-\frac{2}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^3}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}-2\,\frac{\sqrt{EG-F^2}}{G}\left\{\begin{matrix}2\,2\\1\end{matrix}\right\}\left[\frac{D\,D''}{\sqrt{EG-F^2}}-\frac{\sqrt{EG-F^2}}{G}\left\{\begin{matrix}2\,2\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right],$$

ossia:

$$\frac{1}{e^{2\varphi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2}\left[\frac{\partial (D''^2)}{\partial u} - 2D''^2\left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\} + 2DD''\left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\}\right] =$$

$$= \frac{2}{e^{2\varphi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^3}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}\left[D''^2 - e^{2\varphi} + \frac{EG-F^2}{G}\left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\}^2\right].$$

Ma la parentesi del secondo membro è per la (40) identicamente nulla, ne segue:

$$\frac{\partial (D''^2)}{\partial u} - 2D''^2\left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\} + 2DD''\left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\} = 0,$$

cioè:

$$\frac{\partial D''}{\partial u} - D''\left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\} + D\left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\} = 0.$$

come volevasi dimostrare.

Similmente si dimostra che le funzioni D e D'' definite dalla (10) e dalla (41) verificano la (11); ed allora possiamo concludere che la condizione necessaria e sufficiente per la funzione incognita φ si otterrà eliminando D e D'' fra le (10), (40), (41).

9. Per presentare la condizione richiesta sotto la forma definitiva conviene introdurre l'invariante H dell'equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v},$$

cioè porremo

$$H = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}. \tag{43}$$

Sostituendo ai simboli di Christoffel i valori effettivi, avremo:

$$\left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\}(EG-F^2) = e^{4\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}H - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 H - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial H}{\partial v}\right], \tag{44}$$

$$\left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{matrix} \right\}(EG-F^2) = e^{4\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}H - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 H - \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial H}{\partial u}\right], \tag{45}$$

$$EG-F^2 = e^{4\varphi}\left(2H\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - H^2\right). \tag{46}$$

Ciò posto assumendo la (10) sotto la forma (42) e sostituendo in questa al simbolo $\begin{Bmatrix} 2\;2 \\ 1 \end{Bmatrix}$ la sua effettiva espressione dedotta dalla (44) e (46) dopo riduzione avremo:

$$
\begin{aligned}
D\,D''\,(E\,G - F^2)\,e^{-6\varphi} = {} & \left(H^2 - H\frac{\partial^2 \log H}{\partial u\,\partial v}\right)\left(2\,H\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - H^2\right) - \\
& - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}H^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 H^2 + H\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial H}{\partial v} + \\
& + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 H^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 H^2 - H\frac{\partial \varphi}{\partial v}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2\frac{\partial H}{\partial v} + \\
& + H\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial H}{\partial u} - H\frac{\partial \varphi}{\partial u}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2\frac{\partial H}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial H}{\partial v},
\end{aligned}
$$

ossia

$$
\begin{aligned}
D\,D''\,(E\,G - F^2)\,e^{-6\varphi} = {} & \left(H^2 - H\frac{\partial^2 \log H}{\partial u\,\partial v}\right)\left(2\,H\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - H\right) - \\
& - e^{-6\varphi}\begin{Bmatrix} 1\;1 \\ 2 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 2\;2 \\ 1 \end{Bmatrix}\frac{(E\,G - F^2)^2}{\sqrt{EG}},
\end{aligned}
$$

da cui semplificando

$$
D\,D'' = e^{2\varphi}\left(H^2 - H\frac{\partial^2 \log H}{\partial u\,\partial v}\right) - \frac{E\,G - F^2}{\sqrt{EG}}\begin{Bmatrix} 1\;1 \\ 2 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 2\;2 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{47}
$$

Frattanto la condizione richiesta per la funzione φ si può mettere sotto la forma:

$$
\left.\begin{aligned}
& \left[e^{2} - \frac{E\,G - F^2}{E}\begin{Bmatrix} 1\;1 \\ 2 \end{Bmatrix}^2\right]\left[e^{2\varphi} - \frac{E\,G - F^2}{G}\begin{Bmatrix} 2\;2 \\ 1 \end{Bmatrix}^2\right] = \\
= & \left[e^{\varphi}\left(H^2 - H\frac{\partial^2 \log H}{\partial u\,\partial v}\right) - \frac{E\,G - F^2}{\sqrt{EG}}\begin{Bmatrix} 1\;1 \\ 2 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 2\;2 \\ 1 \end{Bmatrix}\right]^2
\end{aligned}\right\} \tag{48}
$$

Possiamo quindi enunciare il risultato seguente:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione di LAPLACE

$$
\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}
$$

sia l'equazione di un sistema coniugato (G), è che la funzione φ sia una soluzione dell'equazione differenziale di 4.º ordine (48).

Nota una soluzione di questa equazione, se ne dedurranno le coordinate x, y, z del punto che descrive il sistema coniugato integrando il sistema completo (7), (8), (9).

§ V. Esame di alcuni casi particolari.

10. In questo paragrafo esamineremo alcune soluzioni particolari dell'equazione di 4.° ordine (48).

A tale scopo osserviamo che questa equazione risulta identicamente soddisfatta se si pone simultaneamente

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{E}}\left\{ \begin{matrix} 1\ 1 \\ 2 \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{\sqrt{G}}\left\{ \begin{matrix} 2\ 2 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \\ H^2 - H\frac{\partial^2 \log H}{\partial u\, \partial v} &= 1. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Noi dimostreremo che queste due equazioni ammettono effettivamente soluzioni comuni, che daranno manifestamente soluzioni particolari del nostro problema.

Per la dimostrazione di quanto abbiamo asserito scriveremo la prima delle (49), in forza della (44) e della (45), sotto la forma

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 - \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \log H}{\partial u} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \log H}{\partial v}, \tag{50}$$

ed associeremo a questa l'equazione

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - H. \tag{51}$$

Pensando queste due equazioni come un sistema simultaneo nella funzione incognita φ in cui H sia una soluzione qualunque dell'equazione di 2.° ordine

$$H^2 - H\frac{\partial^2 \log H}{\partial u\, \partial v} = 1, \tag{52}$$

si trova con un calcolo facile che esso è illimitatamente integrabile.

Concludiamo quindi che le (49) ammettono infinite soluzioni comuni dipendenti da due funzioni arbitrarie; per determinarle basterà assumere nel modo più generale una soluzione della (52) e integrare il sistema simultaneo (50), (51).

11. Similmente possiamo soddisfare alla (48) ponendo

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\begin{Bmatrix} 1\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{G}}\begin{Bmatrix} 2\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

$$H^2 - H\frac{\partial^2 \log H}{\partial u\, \partial v} = -1.$$

Invero si dimostra come precedentemente che queste equazioni ammettono infinite soluzioni comuni, le quali si ottengono assumendo nel modo più generale una soluzione dell'equazione

$$H^2 - H\frac{\partial^2 \log H}{\partial u\, \partial v} = -1, \tag{53}$$

e integrando il sistema

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 - \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \log H}{\partial u} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \log H}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - H.$$

La determinazione di queste soluzioni particolari dipende adunque dall'integrazione delle due equazioni (52), (53). Queste col porre $H = e^{\Theta}$ assumono rispettivamente la forma:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u\, \partial v} = 2 \operatorname{senh} \Theta,$$

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u\, \partial v} = 2 \cosh \Theta.$$

Risulta dalle ricerche da me esposte nella Memoria sopra citata che queste equazioni sono quelle da cui dipende la ricerca delle ***assintotiche virtuali*** di un paraboloide qualunque a punti iperbolici.

La teoria di queste equazioni e delle questioni geometriche che vi si connettono, ha ormai raggiunto dopo le Memorie del Bianchi il massimo grado di sviluppo; per questa ragione abbandoneremo l'esame di questi casi particolari e ritorneremo al problema sotto la forma più generale.

§ VI. Condizioni caratteristiche per l'invariante.

12. Ora vogliamo stabilire le condizioni a cui deve soddisfare una funzione H affinchè si possa assumere come invariante per un sistema coniugato (G).

Per condurre con semplicità i calcoli relativi introdurremo due funzioni ausiliarie λ e μ definite rispettivamente dalle formole:

$$\operatorname{sen} \lambda = \frac{D''}{e^{\varphi}}, \qquad \operatorname{sen} \mu = \frac{D}{e^{\varphi}}. \tag{54}$$

In forza delle (40) e (41) possiamo porre senza ledere la generalità:

$$\cos \lambda = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{e^{\varphi}\sqrt{G}} \left\{ \begin{matrix} 2\ 2 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \qquad \cos \mu = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{e^{\varphi}\sqrt{E}} \left\{ \begin{matrix} 1\ 1 \\ 2 \end{matrix} \right\}. \tag{55}$$

Con questa notazione la (48) si può scrivere:

$$\cos(\lambda - \mu) = H^2 - H \frac{\partial^2 \log H}{\partial u \, \partial v}. \tag{56}$$

Dalle (54) inoltre per derivazione tenendo presenti le (54) stesse e le (55), (11), (12), si ha:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial u} &= - \frac{e^{\varphi}\sqrt{G}}{\sqrt{EG - F^2}} \operatorname{sen} \mu, \\ \frac{\partial \mu}{\partial v} &= - \frac{e^{\varphi}\sqrt{E}}{\sqrt{EG - F^2}} \operatorname{sen} \lambda. \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

Donde moltiplicando ed osservando la (46):

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u}\frac{\partial \mu}{\partial v} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} \operatorname{sen} \lambda \operatorname{sen} \mu}{2H\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - H^2}. \tag{58}$$

Questa relazione si può scrivere altresì:

$$\frac{H}{\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v}} = 2 - \frac{\operatorname{sen} \lambda \operatorname{sen} \mu}{H \frac{\partial \lambda}{\partial u}\frac{\partial \mu}{\partial v}},$$

e finalmente sostituendo al primo membro per H la sua espressione effettiva e rammentando le (39), otteniamo dopo riduzione:

$$\frac{F}{\sqrt{EG}} = \frac{\operatorname{sen}\lambda \operatorname{sen}\mu}{H \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial \mu}{\partial v}} - 1. \tag{59}$$

13. Ora derivando le (57) avremo:

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial v} = -\frac{e^\varphi \sqrt{G}}{\sqrt{EG - F^2}} \left[\cos\mu \frac{\partial \mu}{\partial v} + \operatorname{sen}\mu \left(\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial v} - \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 2 \end{Bmatrix}\right)\right],$$

che in forza dell'identità

$$\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial v} - \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{F}{G}$$

potremo scrivere:

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial v} = -\frac{e^\varphi \sqrt{G}}{\sqrt{EG - F^2}} \left[\cos\mu \frac{\partial \mu}{\partial v} + \operatorname{sen}\mu \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{F}{G}\right],$$

ossia per le (55) e (57):

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial v} = \cot\mu \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial \mu}{\partial v} - \frac{F}{\sqrt{EG}} \cot\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial \mu}{\partial v},$$

ed infine per la (59):

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial v} = \left(\cot\lambda + \cot\mu\right) \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial \mu}{\partial v} - \frac{1}{H} \cos\lambda \operatorname{sen}\mu. \tag{60}$$

Similmente si ricava:

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial u \partial v} = \left(\cot\mu + \cot\lambda\right) \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial \mu}{\partial v} - \frac{1}{H} \operatorname{sen}\lambda \cos\mu. \tag{61}$$

Da queste sottraendo si deduce:

$$\frac{\partial^2 (\lambda - \mu)}{\partial u \partial v} = \frac{1}{H} \operatorname{sen}(\lambda - \mu). \tag{62}$$

Questa e la (56) ponendo $\lambda - \mu = \omega$ si potranno scrivere:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = \frac{1}{H} \operatorname{sen}\omega, \\ &\cos\omega = H^2 - H \frac{\partial^2 \log H}{\partial u \partial v}. \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

14. Frattanto si vede che affinchè una funzione H si possa assumere come invariante per un sistema coniugato (G) è necessario che le (63) nella funzione incognita ω debbono ammettere una soluzione comune.

Eliminando fra esse l'invariante H (*) avremo per la funzione ω l'equazione differenziale alle derivate parziali di 4° ordine:

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right)+\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right)^{-1}=\cot\omega\,\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\,. \tag{64}$$

Viceversa dimostreremo in seguito il seguente teorema, che chiameremo teorema fondamentale:

Se ω è una soluzione dell'equazione di 4° ordine (64), *esistono ∞^3 sistemi coniugati* (G) *a invarianti uguali per cui l'invariante è dato dalla formola:*

$$H=\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right)^{-1},$$

15. Qui è opportuno stabilire un sistema di formole molto utili per il seguito della presente memoria.

Derivando rispetto ad u la prima della (57) e tenendo presenti le (57) stesse, si ha:

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial u^2}=\cot\mu\,\frac{\partial\lambda}{\partial u}\,\frac{\partial\mu}{\partial u}+\frac{\partial\lambda}{\partial u}\left[\frac{\partial\log\sqrt{G}}{\partial u}-\left\{\begin{matrix}1\ 1\\ 1\end{matrix}\right\}\right]. \tag{65}$$

D'altra parte ricordiamo l'identità:

$$\left\{\begin{matrix}1\ 1\\ 1\end{matrix}\right\}=\frac{\partial\log\sqrt{E}}{\partial u}-\left\{\begin{matrix}1\ 1\\ 2\end{matrix}\right\}\frac{F}{E}.$$

Questa per la seconda delle (55) si può scrivere:

$$\left\{\begin{matrix}1\ 1\\ 1\end{matrix}\right\}=\frac{\partial\log\sqrt{E}}{\partial u}-\frac{e^{\varphi}\sqrt{G}}{\sqrt{EG-F^2}}\cos\mu\,\frac{F}{\sqrt{EG}},$$

ed ancora per la prima delle (57) e per la (59):

$$\left\{\begin{matrix}1\ 1\\ 1\end{matrix}\right\}=\frac{\partial\log\sqrt{E}}{\partial u}+\cot\mu\,\frac{\partial\lambda}{\partial u}\left(\frac{\operatorname{sen}\lambda\operatorname{sen}\mu}{H\frac{\partial\lambda\,\partial\mu}{\partial u\,\partial v}}-1\right).$$

(*) Qui escludiamo dalle nostre considerazioni i casi in cui si abbia $\omega=0$ oppure $\omega=\pi$, che forniscono le soluzioni particolari osservate al § V.

Ed ora sostituendo nella (65) avremo:

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u^2} = \cot \mu \, \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial (\lambda + \mu)}{\partial u} + \frac{\partial \lambda}{\partial u} \left(\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} - \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial u} - \frac{\operatorname{sen} \lambda \cos \mu}{H \dfrac{\partial \mu}{\partial v}} \right). \tag{66}$$

Infine osserviamo che per le (54), (55), (57) possiamo scrivere:

$$- \frac{\operatorname{sen} \lambda \cos \mu}{H \dfrac{\partial \mu}{\partial v}} = \frac{1}{H} \frac{E G - F^2}{e^{2\varphi} E} \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{matrix} \right\},$$

ossia per la (45):

$$- \frac{\operatorname{sen} \lambda \cos \mu}{H \dfrac{\partial \mu}{\partial v}} = \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \log H}{\partial u}.$$

Sostituendo in (66) e semplificando coll'osservare le (30) avremo:

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u^2} = \cot \mu \, \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial (\lambda + \mu)}{\partial u} - \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial \log H}{\partial u} - \frac{\dfrac{\partial \lambda}{\partial u}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}} H,$$

E questa per le (54) e (57) scriveremo definitivamente:

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u^2} = \cot \mu \, \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial (\lambda + \mu)}{\partial u} - \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial \log H}{\partial u} + \frac{H}{\operatorname{sen} \lambda} \frac{D D''}{\sqrt{E G - F^2}}. \tag{67}$$

Similmente si ricava:

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial v^2} = \cot \lambda \, \frac{\partial \mu}{\partial v} \frac{\partial (\lambda + \mu)}{\partial v} - \frac{\partial \mu}{\partial v} \frac{\partial \log H}{\partial v} + \frac{H}{\operatorname{sen} \mu} \frac{D D''}{\sqrt{E G - F^2}}. \tag{68}$$

16. Inoltre si ha dalle (54):

$$D D'' = e^{2\varphi} \operatorname{sen} \lambda \operatorname{sen} \mu,$$

ossia per le (57):

$$\frac{D D''}{E G - F^2} = \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial \mu}{\partial v}.$$

Donde moltiplicando membro a membro e tenendo presente le (30):

$$\frac{D^2 D''^2}{EG-F^2} = \operatorname{sen}\lambda \operatorname{sen}\mu \frac{\dfrac{\partial\lambda}{\partial u}\dfrac{\partial\mu}{\partial v}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}},$$

e per la (58):

$$\frac{D^2 D''^2}{EG-F^2} = \frac{2}{H}\operatorname{sen}\lambda \operatorname{sen}\mu \frac{\partial\lambda}{\partial u}\frac{\partial\mu}{\partial v} - \frac{1}{H^2}\operatorname{sen}^2\lambda \operatorname{sen}^2\mu. \tag{69}$$

Da questa infine ponendo:

$$W = \frac{D D''}{\sqrt{EG-F^2}} \tag{70}$$

derivando e sostituendo per le derivate seconde di λ e μ le espressioni (60), (61), (67), (68) dopo semplificazione si ottiene:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial u} &= \operatorname{sen}\mu \frac{\partial\mu}{\partial v} + (\cot\lambda+\cot\mu)\frac{\partial\lambda}{\partial u} W + \cot\mu \frac{\partial\mu}{\partial u} W - \frac{\partial \log H}{\partial u} W,\\ \frac{\partial W}{\partial v} &= \operatorname{sen}\lambda \frac{\partial\lambda}{\partial u} + (\cot\lambda+\cot\mu)\frac{\partial\mu}{\partial v} W + \cot\lambda \frac{\partial\lambda}{\partial v} W - \frac{\partial \log H}{\partial v} W.\end{aligned}\right\} \tag{71}$$

17. Stabilite così queste formole fondamentali, introdurremo la funzione Ω definita dalla relazione:

$$\Omega = \lambda + \mu.$$

Sarà allora:

$$\lambda = \frac{1}{2}(\Omega+\omega), \qquad \mu = \frac{1}{2}(\Omega-\omega), \tag{72}$$

e sostituendo nella (60), (67), (68) per λ e μ queste espressioni e tenendo presenti le (63) otteniamo il sistema seguente:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2\Omega}{\partial u^2} &= \frac{\partial(\Omega+\omega)}{\partial u}\left[\cot\frac{\Omega-\omega}{2}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u}\log\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right)\right] +\\ &\quad + \frac{2W}{\operatorname{sen}\dfrac{\Omega+\omega}{2}}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right)^{-1} - \frac{\partial^2\omega}{\partial u^2},\\ \frac{\partial^2\Omega}{\partial v^2} &= \frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial v}\left[\cot\frac{\Omega+\omega}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial v}\log\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right)\right]\\ &\quad + \frac{2W}{\operatorname{sen}\dfrac{\Omega-\omega}{2}}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right)^{-1} + \frac{\partial^2\omega}{\partial v^2},\\ \frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v} &= \frac{\operatorname{sen}\Omega}{\cos\omega-\cos\Omega}\frac{\partial(\Omega+\omega)}{\partial u}\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial v} - \frac{\operatorname{sen}\Omega}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}.\end{aligned}\right\} \tag{73}$$

Similmente sostituendo nella (69) per λ e μ le espressioni (72) e per H l'espressione (63). avremo:

$$\left.\begin{aligned} 4W^2 = (\cos\omega - \cos\Omega)\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial(\Omega+\omega)}{\partial u}\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial v} - \\ - (\cos\omega - \cos\Omega)^2\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right)^2. \end{aligned}\right\} \quad (74)$$

Infine analogamente operando sulle (71), avremo:

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{\partial W}{\partial u} &= \operatorname{sen}\frac{\Omega-\omega}{2}\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial v} + \frac{2W\operatorname{sen}\Omega}{\cos\omega - \cos\Omega}\frac{\partial(\Omega+\omega)}{\partial u} + \\ &\quad + W\cot\frac{\Omega-\omega}{2}\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial u} + 2W\frac{\partial}{\partial u}\log\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right), \\ 2\frac{\partial W}{\partial v} &= \operatorname{sen}\frac{\Omega+\omega}{2}\frac{\partial(\Omega+\omega)}{\partial u} + \frac{2W\operatorname{sen}\Omega}{\cos\omega - \cos\Omega}\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial v} + \\ &\quad + W\cot\frac{\Omega+\omega}{2}\frac{\partial(\Omega+\omega)}{\partial v} + 2W\frac{\partial}{\partial v}\log\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right). \end{aligned}\right\} \quad (75)$$

Queste sono le formole che volevamo stabilire.

Intorno al sistema (73), (74) si possono verificare le seguenti proprietà:

1.° Dalle (73) e (74) seguono le (75).

2.° Il sistema (73), (74) è illimitatamente integrabile in forza della (64).

§ VII. Rappresentazione sferica di Gauss.

18. I teoremi dimostrati al § III lasciano prevedere che i sistemi coniugati (G) si possono definire mediante proprietà caratteristiche della loro rappresentazione sferica.

Noi pertanto procederemo alla ricerca di queste proprietà.

Denotando con:

$$d\,s'^2 = e\,d\,u^2 + 2\,f\,d\,u\,d\,v + g\,d\,v^2, \quad (76)$$

l'elemento lineare sferico, si ha da formole note:

$$e = \frac{G\,D^2}{E\,G - F^2}, \qquad f = -\frac{F\,D\,D''}{E\,G - F^2}, \qquad g = \frac{E\,D''^2}{E\,G - F^2}.$$

Quindi osservando le (54) e (57) avremo:

$$e = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u}\right)^2, \qquad g = \left(\frac{\partial \mu}{\partial v}\right)^2.$$

Inoltre essendo:

$$F = \sqrt{EG} - e^{2\varphi} H,$$

potremo scrivere:

$$f = \frac{e^{2\varphi} H - \sqrt{EG}}{EG - F^2} \cdot e^{2\varphi} \operatorname{sen} \lambda \operatorname{sen} \mu,$$

e per la (46) e (57):

$$f = -\frac{\partial \lambda}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v} + \frac{H}{2H\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - H^2} \operatorname{sen} \lambda \operatorname{sen} \mu.$$

Infine per la (58):

$$f = \frac{\partial \lambda}{\partial u}\frac{\partial \mu}{\partial v} - \frac{1}{H} \operatorname{sen} \lambda \operatorname{sen} \mu.$$

Dopo i risultati conseguiti nel paragrafo precedente potremo esprimere le quantità e, f, g per mezzo delle funzioni ω e Ω; sicchè scriveremo:

$$\left.\begin{aligned}
e &= \frac{1}{4}\left[\frac{\partial(\Omega+\omega)}{\partial u}\right]^2, \\
g &= \frac{1}{4}\left[\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial v}\right]^2, \\
f &= \frac{1}{4}\frac{\partial(\Omega+\omega)}{\partial u}\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial v} - \frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} \operatorname{sen}\frac{\Omega+\omega}{2} \operatorname{sen}\frac{\Omega-\omega}{2}.
\end{aligned}\right\} \tag{77}$$

Ne deriva facilmente per la (74):

$$eg - f^2 = W^2.$$

19. In ciò che segue ci proponiamo di stabilire le proprietà relative alla forma (76) in cui le quantità e, f, g sono definite dalle (77). A tale scopo sarà utile calcolare i simboli $\begin{Bmatrix} i & k \\ l \end{Bmatrix}'$ relativi alla (76).

Frattanto ricorriamo alle identità:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} &= \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 \end{Bmatrix}' \sqrt{e} + \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 \end{Bmatrix}' \frac{f}{\sqrt{e}}, \\
\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} &= \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 \end{Bmatrix}' \frac{f}{\sqrt{g}} + \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 \end{Bmatrix}' \sqrt{g}.
\end{aligned}\right\} \tag{78}$$

Inoltre dalle (77) abbiamo:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon \sqrt{e} &= \frac{1}{2} \frac{\partial(\Omega + \omega)}{\partial u}, \qquad (\varepsilon = \pm 1) \\ \varepsilon' \sqrt{g} &= \frac{1}{2} \frac{\partial(\Omega - \omega)}{\partial v}. \qquad (\varepsilon' = \pm 1) \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

Da queste derivando ed eliminando per mezzo delle (73) le derivate di 2.° ordine della Ω, otteniamo:

$$\varepsilon \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} = \frac{\operatorname{sen} \Omega}{2(\cos\omega - \cos\Omega)} \frac{\partial(\Omega + \omega)}{\partial u} \frac{\partial(\Omega - \omega)}{\partial v} + \frac{\operatorname{sen}\omega - \operatorname{sen}\Omega}{2 \operatorname{sen}\omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \, \partial v},$$

$$\varepsilon' \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} = \frac{\operatorname{sen} \Omega}{2(\cos\omega - \cos\Omega)} \frac{\partial(\Omega + \omega)}{\partial u} \frac{\partial(\Omega - \omega)}{\partial v} - \frac{\operatorname{sen}\omega + \operatorname{sen}\Omega}{2 \operatorname{sen}\omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \, \partial v}.$$

Portando queste espressioni e le (77) nelle (78) queste forniscono per le quantità incognite $\left\{\begin{matrix} 1 & 2 \\ \multicolumn{2}{c}{1} \end{matrix}\right\}'$, $\left\{\begin{matrix} 1 & 2 \\ \multicolumn{2}{c}{2} \end{matrix}\right\}'$ le espressioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned} \left\{\begin{matrix} 1 & 2 \\ \multicolumn{2}{c}{1} \end{matrix}\right\}' &= \frac{1}{2} \cot \frac{\Omega - \omega}{2} \frac{\partial(\Omega - \omega)}{\partial v}, \\ \left\{\begin{matrix} 1 & 2 \\ \multicolumn{2}{c}{2} \end{matrix}\right\}' &= \frac{1}{2} \cot \frac{\Omega + \omega}{2} \frac{\partial(\Omega + \omega)}{\partial u}; \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

ossia:

$$\left.\begin{aligned} \left\{\begin{matrix} 1 & 2 \\ \multicolumn{2}{c}{1} \end{matrix}\right\}' &= \varepsilon' \sqrt{g} \cot \frac{\Omega - \omega}{2}, \\ \left\{\begin{matrix} 1 & 2 \\ \multicolumn{2}{c}{2} \end{matrix}\right\}' &= \varepsilon \sqrt{e} \cot \frac{\Omega + \omega}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{81}$$

In secondo luogo ricorriamo alle identità:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \log W}{\partial u} &= \left\{\begin{matrix} 1 & 1 \\ \multicolumn{2}{c}{1} \end{matrix}\right\}' + \left\{\begin{matrix} 1 & 2 \\ \multicolumn{2}{c}{2} \end{matrix}\right\}', \\ \frac{\partial \log W}{\partial v} &+ \left\{\begin{matrix} 2 & 2 \\ \multicolumn{2}{c}{2} \end{matrix}\right\}' + \left\{\begin{matrix} 1 & 2 \\ \multicolumn{2}{c}{1} \end{matrix}\right\}'. \end{aligned}\right\} \tag{81'}$$

Sostituendo in queste per le derivate della W le espressioni (75) e per i simboli $\left\{\begin{matrix} 1 & 2 \\ \multicolumn{2}{c}{1} \end{matrix}\right\}'$, $\left\{\begin{matrix} 1 & 2 \\ \multicolumn{2}{c}{2} \end{matrix}\right\}'$ le (80), avremo:

$$\left.\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 & \end{Bmatrix}' &= \frac{1}{2W} \operatorname{sen} \frac{\Omega - \omega}{2} \frac{\partial (\Omega - \omega)}{\partial v} + \cot \frac{\Omega - \omega}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial u} + \\
&\qquad + \frac{\partial}{\partial u} \log \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \, \partial v} \right), \\
\begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ & 2 & \end{Bmatrix}' &= \frac{1}{2W} \operatorname{sen} \frac{\Omega + \omega}{2} \frac{\partial (\Omega + \omega)}{\partial u} + \cot \frac{\Omega + \omega}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial v} + \\
&\qquad + \frac{\partial}{\partial v} \log \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \, \partial v} \right).
\end{aligned}\right\} \tag{82}$$

Infine ricordando le identità:

$$\frac{\partial \sqrt{e}}{\partial u} = \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 & \end{Bmatrix}' \sqrt{e} + \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 2 & \end{Bmatrix}' \frac{f}{\sqrt{e}},$$

$$\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial v} = \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ & 1 & \end{Bmatrix}' \frac{f}{\sqrt{g}} + \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ & 2 & \end{Bmatrix}' \sqrt{g},$$

e tenendo presenti le (77), (82), (74) otteniamo dopo riduzione:

$$\left.\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 2 & \end{Bmatrix}' &= \varepsilon \sqrt{e} \cdot \frac{1}{W} \operatorname{sen} \frac{\Omega - \omega}{2}, \\
\begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ & 1 & \end{Bmatrix}' &= \varepsilon' \sqrt{g} \cdot \frac{1}{W} \operatorname{sen} \frac{\Omega + \omega}{2}.
\end{aligned}\right\} \tag{83}$$

20. Ciò posto se fra le (79) e (81) eliminiamo le funzioni Ω, ω avremo le condizioni richieste, cioè:

$$\left.\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 & \end{Bmatrix}' \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial v} &= \frac{\partial}{\partial v} \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 & \end{Bmatrix}' + \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 & \end{Bmatrix}'^2 + g, \\
\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 & \end{Bmatrix}' \frac{\partial \log \sqrt{e}}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial u} \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 & \end{Bmatrix}' + \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 & \end{Bmatrix}'^2 + e.
\end{aligned}\right\} \tag{84}$$

Similmente eliminando fra le (83) e (79) le funzioni Ω, ω tenendo presenti le (81), avremo altresì:

$$\left.\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 2 & \end{Bmatrix}' \frac{\partial \log \sqrt{e}}{\partial v} &= \frac{\partial}{\partial v} \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 2 & \end{Bmatrix}' + \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 2 & \end{Bmatrix}' \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ & 2 & \end{Bmatrix}', \\
\begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ & 1 & \end{Bmatrix}' \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial u} \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ & 1 & \end{Bmatrix}' + \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ & 1 & \end{Bmatrix}' \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 & \end{Bmatrix}'.
\end{aligned}\right\} \tag{85}$$

Qui è interessante osservare che dalla coesistenza delle (84) e (85) segue che la forma (76) ha la curvatura $= +1$, e viceversa dall'ipotesi che la forma (76) ha la curvatura $= +1$ e dalle (85) seguono le (84).

Possiamo quindi enunciare il risultato seguente:

Se ω *è una soluzione dell'equazione differenziale* (64), *e* Ω *è una soluzione del sistema completo* (73), (74), *ponendo:*

$$e = \frac{1}{4}\left[\frac{\partial(\Omega+\omega)}{\partial u}\right]^2,$$

$$g = \frac{1}{4}\left[\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial v}\right]^2,$$

$$f = \frac{1}{4}\frac{\partial(\Omega+\omega)}{\partial u}\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial v} - \operatorname{sen}\frac{\Omega+\omega}{2}\operatorname{sen}\frac{\Omega-\omega}{2}\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v},$$

la forma differenziale

$$d s'^2 = e\,d u^2 + e f\,d u\,d v + g\,d v^2 \tag{86}$$

avrà la curvatura $= +1$, *e i suoi coefficienti soddisfaranno alle condizioni* (85).

§ VIII. Dimostrazione del teorema fondamentale.

21. È qui il momento di dimostrare il teorema fondamentale, per il che mostreremo anzitutto che un sistema coniugato la cui rappresentazione sferica soddisfa le (85) è necessariamente un sistema coniugato (G).

Invero un sistema coniugato si può ritenere definito a meno di movimenti dalla sua rappresentazione sferica e da due funzioni D e D'' che verificano le relazioni:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial v} &= \left\{\begin{matrix}1\,2\\1\end{matrix}\right\}' D - \left\{\begin{matrix}1\,1\\2\end{matrix}\right\}' D'', \\ \frac{\partial D''}{\partial u} &= \left\{\begin{matrix}1\,2\\2\end{matrix}\right\}' D'' - \left\{\begin{matrix}2\,2\\1\end{matrix}\right\}' D. \end{aligned}\right\} \tag{87}$$

Si avrà allora:

$$E = \frac{g D^2}{e g - f^2}, \quad F = -\frac{f D D''}{e g - f^2}, \quad G = \frac{e D''}{e g - f^2}, \tag{88}$$

$$\left\{\begin{matrix}1\,2\\1\end{matrix}\right\} = -\frac{D''}{D}\left\{\begin{matrix}1\,1\\2\end{matrix}\right\}', \quad \left\{\begin{matrix}1\,2\\2\end{matrix}\right\} = -\frac{D}{D''}\left\{\begin{matrix}2\,2\\1\end{matrix}\right\}'. \tag{89}$$

Da queste per derivazione tenendo presenti le (87) si ricava:

$$\frac{\partial}{\partial v}\log\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 1\end{Bmatrix}=\frac{\partial\log D''}{\partial v}+\frac{\partial}{\partial v}\log\begin{Bmatrix}1\ 1\\ 2\end{Bmatrix}'-\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 1\end{Bmatrix}',$$

$$\frac{\partial\log\sqrt{G}}{\partial v}=\frac{\partial\log D'}{\partial v}+\frac{\partial\log\sqrt{e}}{\partial v}-\begin{Bmatrix}2\ 2\\ 2\end{Bmatrix}'-\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 1\end{Bmatrix}',$$

e per la prima delle (85):

$$\frac{\partial\log\sqrt{G}}{\partial v}=\frac{\partial}{\partial v}\log\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 1\end{Bmatrix};$$

similmente si ricava:

$$\frac{\partial\log\sqrt{E}}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial u}\log\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 2\end{Bmatrix},$$

ed è così dimostrato quanto sopra abbiamo asserito.

Adunque da una soluzione ω dell'equazione (64) integrando il sistema completo (73) (74), si deduce la forma (86) che si può assumere come rappresentazione sferica per infiniti sistemi coniugati (G), dipendentemente dalle soluzioni del sistema (87).

22. Ora possiamo soddisfare a questo sistema ponendo in particolare:

$$\frac{\partial\log D}{\partial u}=\frac{1}{2}\cot\frac{\Omega-\omega}{2}\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial u}-\frac{1}{2W}\operatorname{sen}\frac{\Omega-\omega}{2}\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial v},$$

$$\frac{\partial\log D}{\partial v}=\frac{1}{2}\cot\frac{\Omega-\omega}{2}\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial v}-\frac{1}{2W}\operatorname{sen}\frac{\Omega+\omega}{2}\frac{\partial(\Omega+\omega)}{\partial u},$$

$$D''=D\frac{\operatorname{sen}\frac{\Omega+\omega}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\Omega-\omega}{2}}.$$

Sarà allora per le (89) e (83)

$$\left.\begin{aligned}\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 1\end{Bmatrix}&=-\frac{1}{2W}\operatorname{sen}\frac{\Omega+\omega}{2}\frac{\partial(\Omega+\omega)}{\partial u},\\ \begin{Bmatrix}1\ 2\\ 2\end{Bmatrix}&=-\frac{1}{2W}\operatorname{sen}\frac{\Omega-\omega}{2}\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial v}.\end{aligned}\right\}\tag{90}$$

Da queste, tenendo presenti le (73), (74), (75) si trovano con calcoli facili le relazioni:

$$\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}=\frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix},$$

$$H=\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}$$

$$=\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right)^{-1}.$$

Così il teorema fondamentale è pienamente dimostrato.

§ IX. Le superficie Σ_1, Σ_2.

23. Abbiamo visto nel paragrafo IV che l'elemento lineare di una superficie Σ_1 è dato dalle formole:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{E_1}&=e^{\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right),\\ \sqrt{G_1}&=\frac{e^{\varphi}}{\frac{\partial\varphi}{\partial v}}.\end{aligned}\right\}\qquad(91)$$

Abbiamo visto altresì (32) che le derivate parziali delle funzioni x_1, y_1, z_1 rispetto alla variabile u sono legate alle derivate parziali delle funzioni x, y, z dalle relazioni:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial u}=\left(\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v},$$

ossia:

$$\frac{1}{\frac{\partial\varphi}{\partial v}}\frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{1}{\frac{\partial\log\sqrt{G_1}}{\partial u}}\frac{\partial x_1}{\partial u}.$$

Sostituendo nelle (31) avremo:

$$x=x_1-\frac{1}{\frac{\partial\log\sqrt{G_1}}{\partial u}}\frac{\partial x_1}{\partial u},\qquad(92)$$

che è la rappresentazione analitica della trasformazione L^{-1} applicata alle linee di curvatura di Σ_1, e che trasforma queste nel sistema coniugato iniziale (G).

Introducendo inoltre le quantità D_1, D''_1 relative ad una superficie Σ_1 e le quantità X_3, Y_3, Z_3 che dànno i coseni direttori della normale avremo per le funzioni x_1, y_1, z_1, X_3, Y_3, Z_3 il sistema completo seguente:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} &= \frac{1}{2E_1}\frac{\partial E_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial u} - \frac{1}{2G_1}\frac{\partial E_1}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial v} + D_1 X_3, \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v} &= \frac{\partial \log\sqrt{E_1}}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial \log\sqrt{G_1}}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2} &= -\frac{1}{2E_1}\frac{\partial G_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{1}{2G_1}\frac{\partial G_1}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial v} + D'' X_3, \end{aligned}\right\} \tag{93}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X_3}{\partial u} &= -\frac{D_1}{E_1}\frac{\partial x}{\partial u}, \\ \frac{\partial X_3}{\partial v} &= -\frac{D''_1}{G_1}\frac{\partial x}{\partial v}, \end{aligned}\right\} \tag{94}$$

24. Se deriviamo la (92) rispetto ad u ed eliminiamo per la prima delle (93) la derivata seconda della funzione x_1, avremo:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} = &\left[1 + \frac{1}{\left(\frac{\partial \log\sqrt{G_1}}{\partial u}\right)^2}\left(\frac{\partial^2 \log\sqrt{G_1}}{\partial u^2} - \frac{\partial \log\sqrt{E_1}}{\partial u}\frac{\partial \log\sqrt{G_1}}{\partial u}\right)\right]\frac{\partial x_1}{\partial u} + \\ &+ \frac{1}{\frac{\partial \log\sqrt{G_1}}{\partial u}}\frac{1}{2G_1}\frac{\partial E_1}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial v} - \frac{D_1}{\frac{\partial \log\sqrt{G_1}}{\partial u}}X_3 . \end{aligned}\right\} \tag{95}$$

Ciò posto dalle (91) derivando e tenendo presenti le (91) stesse otteniamo:

$$e^{\varphi}\frac{\partial \log\sqrt{G_1}}{\partial u} = \sqrt{E_1}; \tag{96}$$

e se inoltre fra questa e le (91) eliminiamo la φ, troviamo per le funzioni $\sqrt{E_1}$, $\sqrt{G_1}$ la relazione:

$$\frac{\partial^2 \log\sqrt{G_1}}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \log\sqrt{E_1}}{\partial v}\frac{\partial \log\sqrt{G_1}}{\partial u} + \frac{\sqrt{E_1}}{\sqrt{G_1}} = 0. \tag{97}$$

Ancora dalla (96) per derivazione ricaviamo:

$$e^{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial u}=-\frac{\sqrt{E_1}}{\left(\frac{\partial\log\sqrt{G_1}}{\partial u}\right)^2}\left[\frac{\partial^2\log\sqrt{G_1}}{\partial u^2}-\frac{\partial\log\sqrt{E_1}}{\partial u}\frac{\partial\log\sqrt{G_1}}{\partial u}\right]. \tag{98}$$

Ed ora ricorrendo alla (95) e alle analoghe in y e z, quadrando sommando e tenendo presente che:

$$\sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2=e^{2\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2,$$

otteniamo infine:

$$\left.\begin{aligned}2\frac{\partial^2\log\sqrt{G_1}}{\partial u^2}-2\frac{\partial\log\sqrt{E_1}}{\partial u}\frac{\partial\log\sqrt{G_1}}{\partial u}+\left(\frac{\partial\log\sqrt{G_1}}{\partial u}\right)^2+\\+\left(\frac{1}{\sqrt{G_1}}\frac{\partial\sqrt{E_1}}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{D_1}{\sqrt{E_1}}\right)^2=0.\end{aligned}\right\} \tag{99}$$

Possiamo quindi enunciare il risultato seguente:

Le linee di curvatura di una superficie Σ_1 soddisfano alle condizioni (97), (99).

25. Viceversa è importante dimostrare che ogni superficie le cui linee di curvatura soddisfano alle condizioni (97), (99) è necessariamente una superficie Σ_1; cioè le sue linee di curvatura si possono far derivare mediante la trasformazione L da un sistema coniugato (G) a invarianti uguali.

Infatti supponiamo che le linee di curvatura di una superficie soddisfacciano alle condizioni (97), (99); e definiamo una funzione φ mediante la formola (96).

Dalla coesistenza della (96) e (97), avremo:

$$\sqrt{G_1}=\frac{e^{\varphi}}{\frac{\partial\varphi}{\partial v}},$$

e per conseguenza:

$$\sqrt{E_1}=e^{\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right),$$

e la (99) si potrà scrivere sotto la forma:

$$e^{-2\varphi}E_1-2e^{-\varphi}\sqrt{E_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\left(\frac{1}{\sqrt{G_1}}\frac{\partial\sqrt{E_1}}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{D_1}{\sqrt{E_1}}\right)^2=0. \tag{100}$$

Ciò posto scriviamo la trasformazione L^{-1} nel modo seguente:

$$x = x_1 - \frac{e^\varphi}{\sqrt{E_1}} \frac{\partial x_1}{\partial u},$$

e deriviamo avendo cura di eliminare colle (93) le derivate di 2.° ordine di x_1; avremo tenuto conto della (96):

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \left(1 - \frac{e^\varphi}{\sqrt{E_1}} \frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) \frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{e^\varphi}{G_1} \frac{\partial \sqrt{E_1}}{\partial v} \frac{\partial x_1}{\partial v} - e^\varphi \frac{D_1}{\sqrt{E_1}} X_3,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{e^\varphi}{\sqrt{E_1}} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial x_1}{\partial u},$$

colle analoghe in y e z.

Da queste quadrando e sommando e tenendo conto della (100) segue facilmente:

$$\Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = e^{2\varphi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2,$$

$$\Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = e^{2\varphi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2.$$

Infine se fra le equazioni

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \left(1 - \frac{e^\varphi}{\sqrt{E_1}} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{e^\varphi}{\sqrt{E_1}} \frac{\partial \log \sqrt{E_1}}{\partial u}\right) \frac{\partial x_1}{\partial u} - \frac{e^\varphi}{\sqrt{E_1}} \frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{e^\varphi}{\sqrt{E_1}} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial x_1}{\partial u},$$

eliminiamo la funzione x_1, otteniamo la nuova equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}.$$

Concludiamo quindi che il sistema derivato dalle linee di curvatura di una superficie soddisfacente alle condizioni (97,) (99) è un sistema coniugato ad invarianti uguali; per esso si ha altresì:

$$\sqrt{E} = e^\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad \sqrt{G} = e^\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

$$\left\{ \begin{matrix} 1\ 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \quad \left\{ \begin{matrix} 1\ 2 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{\partial \varphi}{\partial u},$$

e per conseguenza:

$$\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \log \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix},$$

$$\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \log \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix}.$$

Le condizioni (97) e (99) sono adunque caratteristiche per le linee di curvatura di una superficie Σ_1.

Con un procedimento analogo si vede che una superficie Σ_2 è perfettamente caratterizzata dalle condizioni:

$$\frac{\partial^2 \log \sqrt{E_2}}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \log \sqrt{E_2}}{\partial v} \frac{\partial \log \sqrt{G_2}}{\partial u} + \frac{\sqrt{G_2}}{\sqrt{E_2}} = 0,$$

$$2 \frac{\partial^2 \log \sqrt{E_2}}{\partial v^2} - 2 \frac{\partial \log \sqrt{E_2}}{\partial v} \frac{\partial \log \sqrt{G_2}}{\partial v} + \left(\frac{\partial \log \sqrt{E_2}}{\partial v} \right)^2 +$$

$$+ \left(\frac{1}{\sqrt{E_2}} \frac{\partial \sqrt{G_2}}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{D''_2}{\sqrt{G_2}} \right)^2 = 0.$$

§ X. Le trasformazioni delle superficie Σ_1, Σ_2.

26. Intorno alle superficie Σ_1 e Σ_2 sussistono alcune trasformazioni che si fondano sul seguente teorema:

L'inversione per raggi vettori reciproci (trasformazione I*) trasforma una superficie Σ_1 in infinite nuove superficie Σ_1, e trasforma parimenti una superficie Σ_2 in infinite nuove superficie Σ_2.*

Consideriamo anzitutto una superficie Σ_1; secondo i risultati da me stabiliti in una precedente Memoria (*), ponendo:

$$\rho = (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 + (z_1 - c)^2 \qquad (101)$$

(*) *Sulle superficie a linee di curvatura isoterme.* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XVII, p. 275].

avremo per la superficie trasformata:

$$\left.\begin{aligned}
E_1^{(1)} &= \frac{1}{\rho^2} E_1, \quad G_1^{(1)} = \frac{1}{\rho^2} G_1, \\
\frac{D_1^{(1)}}{\sqrt{E_1^{(1)}}} &= \frac{D_1}{\sqrt{E_1}} + \sqrt{E_1^{(1)}} \sum 2 X_3 (x_1 - a), \\
\frac{D''^{(1)}_1}{\sqrt{G_1^{(1)}}} &= \frac{D''_1}{\sqrt{G_1}} + \sqrt{G_1^{(1)}} \sum 2 X_3 (x_1 - a).
\end{aligned}\right\} \tag{102}$$

La funzione ρ definita dalla (101) soddisfa al sistema simultaneo:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2} &= \frac{1}{2E_1} \frac{\partial E_1}{\partial u} \frac{\partial \rho}{\partial u} - \frac{1}{2G_1} \frac{\partial E_1}{\partial v} \frac{\partial \rho}{\partial v} + 2 E_1 + D_1 \sum 2 X_3 (x_1 - a), \\
\frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} &= \frac{\partial \log \sqrt{E_1}}{\partial v} \frac{\partial \rho}{\partial u} + \frac{\partial \log \sqrt{G_1}}{\partial u} \frac{\partial \rho}{\partial v}, \\
\frac{\partial^2 \rho}{\partial v^2} &= -\frac{1}{2E_1} \frac{\partial G_1}{\partial u} \frac{\partial \rho}{\partial u} + \frac{1}{2G_1} \frac{\partial G_1}{\partial v} \frac{\partial \rho}{\partial v} + 2 G_1 + D''_1 \sum 2 X_3 (x_1 - a).
\end{aligned}\right\} \tag{103}$$

Dalle (102) derivando otteniamo:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \log \sqrt{G_1^{(1)}}}{\partial u} &= \frac{\partial \log \sqrt{G_1}}{\partial u} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial u}, \\
\frac{\partial \log \sqrt{G_1^{(1)}}}{\partial v} &= \frac{\partial \log \sqrt{G_1}}{\partial v} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial v}, \\
\frac{\partial \log \sqrt{E_1^{(1)}}}{\partial u} &= \frac{\partial \log \sqrt{E_1}}{\partial u} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial u}, \\
\frac{\partial \log \sqrt{E_1^{(1)}}}{\partial v} &= \frac{\partial \log \sqrt{E_1}}{\partial v} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial v},
\end{aligned}\right\} \tag{104}$$

Da queste derivando ancora e tenendo presente le (103), avremo:

$$\frac{\partial^2 \log \sqrt{G_1^{(1)}}}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \log \sqrt{G_1}}{\partial u \partial v} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial u} \frac{\partial \rho}{\partial v} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \log \sqrt{E_1}}{\partial v} \frac{\partial \rho}{\partial u} + \frac{\partial \log \sqrt{G_1}}{\partial u} \frac{\partial \rho}{\partial v} \right).$$

D'altra parte:

$$\frac{\partial \log \sqrt{E_1^{(1)}}}{\partial v} \frac{\partial \log \sqrt{G_1^{(1)}}}{\partial u} = \frac{\partial \log \sqrt{E_1}}{\partial v} \frac{\partial \log \sqrt{G_1}}{\partial u} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial u} \frac{\partial \rho}{\partial v} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \log \sqrt{E_1}}{\partial v} \frac{\partial \rho}{\partial u} + \frac{\partial \log \sqrt{G_1}}{\partial u} \frac{\partial \rho}{\partial v} \right).$$

Quindi sottraendo:

$$\frac{\partial^2 \log \sqrt{G_1^{(1)}}}{\partial u \, \partial v} - \frac{\partial \log \sqrt{E_1^{(1)}}}{\partial v} \frac{\partial \log \sqrt{G_1^{(1)}}}{\partial u} = \frac{\partial^2 \log \sqrt{G_1}}{\partial u \, \partial v} - \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u}.$$

Ma si ha inoltre:

$$\frac{\sqrt{E_1^{(1)}}}{\sqrt{G_1^{(1)}}} = \frac{\sqrt{E_1}}{\sqrt{G_1}};$$

e sommando colla precedente e tenendo presente la (97) si ricava adunque:

$$\frac{\partial^2 \log \sqrt{G_1^{(1)}}}{\partial u \, \partial v} - \frac{\partial \log \sqrt{E_1^{(1)}}}{\partial v} \frac{\partial \log \sqrt{G_1^{(1)}}}{\partial u} + \frac{\sqrt{E_1^{(1)}}}{\sqrt{G_1^{(1)}}} = 0. \tag{105}$$

27. Ciò posto conviene esaminare la quantità $\sum 2 X_3 (x_1 - a)$, che scriviamo per disteso; cioè:

$$\sum 2 X_3 (x_1 - a) = \frac{1}{\sqrt{E_1 G_1}} \begin{vmatrix} 2(x_1 - a) & 2(y_1 - b) & 2(z_1 - c) \\ \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial y_1}{\partial u} & \frac{\partial z_1}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial y_1}{\partial v} & \frac{\partial z_1}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Quadrando e tenendo presente la (101), avremo:

$$\left[\sum 2 X_3 (x_1 - a)\right]^2 = \frac{1}{E_1 G_1} \begin{vmatrix} 4\rho & \frac{\partial \rho}{\partial u} & \frac{\partial \rho}{\partial v} \\ \frac{\partial \rho}{\partial u} & E_1 & 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial v} & 0 & G_1 \end{vmatrix}$$

ossia:

$$\left[\sum 2 X_3 (x_1 - a)\right]^2 = 4\rho - \frac{1}{E_1}\left(\frac{\partial \rho}{\partial u}\right)^2 - \frac{1}{G_1}\left(\frac{\partial \rho}{\partial v}\right)^2.$$

Ora quadrando le (102) e tenendo presente quest'ultima ricaviamo:

$$\left(\frac{D_1^{(1)}}{\sqrt{E_1^{(1)}}}\right)^2 = \left(\frac{D_1}{\sqrt{E_1}}\right)^2 + 2\frac{D_1}{\rho} \sum 2 X_3 (x_1 - a) +$$

$$+ \frac{4 E_1}{\rho} - \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial u}\right)^2 - \frac{E_1}{\rho^2 G_1}\left(\frac{\partial \rho}{\partial v}\right)^2.$$

Infine derivando le (104) ed eliminando colle (103) le derivate seconde di ρ, dopo riduzione otteniamo:

$$2\frac{\partial^2 \log\sqrt{G_1^{(1)}}}{\partial u^2} - 2\frac{\partial \log\sqrt{G_1^{(1)}}}{\partial u}\frac{\partial \log\sqrt{E_1^{(1)}}}{\partial u} + \left(\frac{\partial \log\sqrt{G_1^{(1)}}}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{G_1^{(1)}}}\frac{\partial\sqrt{E_1^{(1)}}}{\partial v}\right)^2 =$$

$$= 2\frac{\partial^2 \log\sqrt{G_1}}{\partial u^2} - 2\frac{\partial \log\sqrt{G_1}}{\partial u}\frac{\partial \log\sqrt{E_1}}{\partial u} + \left(\frac{\partial \log\sqrt{G_1}}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{G_1}}\frac{\partial\sqrt{E_1}}{\partial v}\right)^2 -$$

$$- 2\frac{D_1}{\rho}\sum 2X_3(x_1 - a) - \frac{4E_1}{\rho} + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial u}\right)^2 - \frac{E_1}{\rho^2 G_1}\left(\frac{\partial\rho}{\partial v}\right)^2.$$

Sommando colla precedente ed osservando la (99) si ricava:

$$\left.\begin{aligned}&2\frac{\partial^2 \log\sqrt{G_1^{(1)}}}{\partial u^2} - 2\frac{\partial \log\sqrt{G_1^{(1)}}}{\partial u}\frac{\partial \log\sqrt{E_1^{(1)}}}{\partial u} + \left(\frac{\partial \log\sqrt{G_1^{(1)}}}{\partial u}\right)^2 +\\ &\qquad + \left(\frac{1}{\sqrt{G_1^{(1)}}}\frac{\partial\sqrt{E_1^{(1)}}}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{D_1^{(1)}}{\sqrt{E_1^{(1)}}}\right)^2 = 0.\end{aligned}\right\} \quad (106)$$

Adunque le linee di curvatura della superficie trasformata soddisfano ancora le (105) e (106); possiamo quindi concludere che la superficie trasformata è ancor essa una superficie Σ_1.

In modo analogo si dimostra che l'inversione per raggi reciproci trasforma una superficie Σ_2 in infinite nuove superficie Σ_2.

È utile osservare che in forza delle (91) l'invariante $\frac{\sqrt{E_1}}{\sqrt{G_1}}$ della superficie Σ_1 rispetto all'inversione, coincide con l'invariante H dell'equazione di LAPLACE relativa al sistema coniugato iniziale (G); similmente l'invariante $\frac{\sqrt{G_2}}{\sqrt{E_2}}$ della superficie Σ_2 coincide con l'invariante H.

§ XI. DETERMINAZIONE DEI SISTEMI CONIUGATI (G) A INVARIANTI UGUALI, ASSEGNATONE L'INVARIANTE.

28. Per quanto abbiamo visto precedentemente, assegnare l'invariante di un sistema coniugato (G) equivale ad assegnare una soluzione dell'equazione di 4.° ordine (64).

Sappiamo inoltre dal § VIII che data una soluzione ω dell'equazione (64) si hanno ∞^3 sistemi coniugati (G) a invarianti uguali, che ammettono per invariante la funzione

$$H = \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \, \partial v}\right)^{-1}.$$

Per determinarli effettivamente occorre integrare il sistema completo (73), (74); indi si pôrrà:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = -\frac{1}{2W} \operatorname{sen} \frac{\Omega - \omega}{2} \frac{\partial (\Omega - \omega)}{\partial v},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\frac{1}{2W} \operatorname{sen} \frac{\Omega + \omega}{2} \frac{\partial (\Omega + \omega)}{\partial u}.$$

Nota in questo modo la funzione φ, si avranno dalle (30) le funzioni E, F, G, e dalle (40), (41), (47) le funzioni D, D''.

Determinate così le quantità E, F, G, D, D'' si determineranno le funzioni x, y, z integrando il sistema completo (7), (8), (9).

29. Però dopo i risultati ottenuti al paragrafo precedente possiamo stabilire un metodo mediante il quale si possono dedurre *con soli calcoli algebrici e di derivazione* da un noto sistema coniugato (G) a invarianti uguali ∞^3 sistemi coniugati (G) a invarianti uguali aventi in comune col primo l'invariante.

Invero da quanto è dimostrato nel sudetto paragrafo discende facilmente la proposizione:

Da un noto sistema coniugato (G) a invarianti uguali, applicando la trasformazione $L I L^{-1}$ (o la trasformazione $L^{-1} I L$) si hanno infiniti sistemi coniugati (G) a invarianti uguali dipendenti da tre costanti arbitrarie. Tali sistemi coniugati (G) avranno in comune col sistema coniugato iniziale l'invariante.

§ XII. Le trasformazioni degl'invarianti dell'equazione (64).

30. Abbiamo risoluta nel paragrafo precedente la questione di determinare i sistemi coniugati (G) a invarianti uguali assegnatone l'invariante; ora vogliamo stabilire una trasformazione per l'invariante, ossia una trasformazione per gl'integrali dell'equazione (64).

Tale trasformazione si riassume nel seguente teorema:

Se ω è una soluzione della (64) *il sistema di equazioni* (73), (74) *è illimitatamente integrabile; si avrà dall'integrazione una funzione Ω con tre costanti arbitrarie che sarà una nuova soluzione dell'equazione differenziale di 4.° ordine* (64).

Per la dimostrazione scriviamo la terza delle (73) sotto la forma:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\Omega}\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v}=\frac{1}{\cos\omega-\cos\Omega}\frac{\partial(\Omega+\omega)}{\partial u}\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial v}-\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\,. \tag{107}$$

Tenendo presente quest'ultima si ricava facilmente che la (74) si può anche scrivere come segue:

$$\left.\begin{aligned}4\,W^2=(\cos\Omega-\cos\omega)\frac{1}{\operatorname{sen}\Omega}\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial(\Omega+\omega)}{\partial v}\frac{\partial(\omega-\Omega)}{\partial v}-\\ -(\cos\Omega-\cos\omega)^2\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\Omega}\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v}\right)^2.\end{aligned}\right\} \tag{108}$$

Ora dalla (107) per derivazione tenendo conto delle (73), (74), (107) dopo riduzione si ottiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}\log\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\Omega}\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\log\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right)+\cot\frac{\Omega-\omega}{2}\frac{\partial(\Omega+\omega)}{\partial u}+\\ +\frac{1}{W}\operatorname{sen}\frac{\Omega-\omega}{2}\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial v}\,.\end{aligned}$$

Inoltre da questa derivando rispetto a v e tenendo sempre conto delle (73), (74), (107) si ha:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\Omega}\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v}\right)=\cot\Omega\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v}+\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right)^{-1}-\\ -\frac{1}{2W^2}\operatorname{sen}\frac{\Omega+\omega}{2}\operatorname{sen}\frac{\Omega-\omega}{2}\frac{\partial(\Omega+\omega)}{\partial u}\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial v}\,,\end{aligned}$$

ossia per la (74):

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\Omega}\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v}\right)=\cot\Omega\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v}-\\ -\frac{1}{4\,W^2}(\cos\omega-\cos\Omega)^2\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\end{aligned}$$

Infine facendo uso della (107) scriveremo:

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\Omega}\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v}\right)=\cot\Omega\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v}+\frac{1}{4\,W^2}(\cos\omega-\cos\Omega)^2\frac{1}{\operatorname{sen}\Omega}\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v}-$$
$$-\frac{1}{4\,W^2}(\cos\omega-\cos\Omega)\frac{\partial(\Omega+\omega)}{\partial u}\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial v},$$

e per la (108):

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\Omega}\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v}\right)=\cot\Omega\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v}-\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\Omega}\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v}\right)^{-1},$$

ed è così stabilita la proposizione.

§ XIII. Le trasformazioni dei sistemi coniugati (G) a invarianti uguali.

31. Completeremo i risultati ottenuti nel paragrafo precedente dimostrando il seguente teorema:

Se x, y, z sono le coordinate d'un punto che descrive un sistema coniugato (G) a invarianti uguali, ponendo:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\xi}{\partial u}&=e^{-2\varphi}\frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial\eta}{\partial u}&=e^{-2\varphi}\frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial\zeta}{\partial u}&=e^{-2\varphi}\frac{\partial z}{\partial u},\\ \frac{\partial\xi}{\partial v}&=-e^{-2\varphi}\frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial\eta}{\partial v}&=-e^{-2\varphi}\frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial\zeta}{\partial v}&=-e^{-2\varphi}\frac{\partial z}{\partial v},\end{aligned}\right\}\tag{109}$$

si avranno per quadrature tre funzioni ξ, η, ζ che sono le coordinate di un nuovo punto che descrive un nuovo sistema coniugato (G) a invarianti uguali.

Infatti si verifica facilmente che le (109) sono coesistenti; inoltre sulla superficie luogo del punto ξ, η, ζ le linee u v sono coniugate, e si ha:

$$E'=e^{-2\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2,\quad G'=e^{-2\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2,$$

$$\left\{\begin{matrix}1&2\\&1\end{matrix}\right\}'=-\frac{\partial\varphi}{\partial v},\quad \left\{\begin{matrix}1&2\\&2\end{matrix}\right\}'=-\frac{\partial\varphi}{\partial u},$$

e per conseguenza:

$$\frac{\partial \log \sqrt{G'}}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \log \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\}' + \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\}',$$

$$\frac{\partial \log \sqrt{E'}}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \log \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\}' + \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\}'.$$

32. Ora supposto il sistema iniziale (G) ottenuto col procedimento indicato al § XI, denotando con H_1 l'invariante del nuovo sistema coniugato, sarà:

$$H_1 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \, \partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

$$H_1 = 2 \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} - H,$$

e sostituendo per H e φ le loro espressioni effettive:

$$H_1 = \frac{1}{2 W^2} \operatorname{sen} \frac{\Omega - \omega}{2} \operatorname{sen} \frac{\Omega + \omega}{2} \frac{\partial (\Omega + \omega)}{\partial u} \frac{\partial (\Omega - \omega)}{\partial v} - \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \, \partial v} \right)^{-1}.$$

Questa infine tenendo presente la (74), la (107) e la (108) facilmente si riduce alla forma:

$$H_1 = \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \Omega} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \, \partial v} \right)^{-1}.$$

Le formole (109) dànno adunque per quadrature una trasformazione per i sistemi coniugati (G) a invarianti uguali che chiameremo *trasformazione* G; mediante la quale la funzione ω si cambia in Ω e l'invariante H in H_1.

Frattanto rimane stabilito un metodo di trasformazioni per i sistemi coniugati (G) a invarianti eguali, che consiste nel comporre la trasformazione $L I L^{-1}$ (o la trasformazione $L^{-1} I L$) colla trasformazione G.

Sembra assai notevole che l'applicazione successiva ed illimitata di questo metodo di trasformazioni richiede soltanto successive quadrature.