

Faculté des Sciences Service de Physique des Solides Orsay (S. et O.) France

Excitations électroniques dans les supraconducteurs purs de 2ème espèce

II. Excitations de basse énergie

Par

C. CAROLI et J. MATRICON

Avec 3 figures

(Reçu le 21 juillet 1964)

Nous étudions le spectre des états de basse énergie d'un supraconducteur de seconde espèce dans l'état mixte, contenant une faible densité de lignes de vortex ($H \ll H_{c2}$). La description locale de CYROT (Section I) ne convient pas pour les états localisés dans le coeur d'une ligne. Ce sont ces états qui correspondent aux régions de plus basse énergie du spectre. Le «gap» d'énergie pour ces excitations, de l'ordre de $\frac{A_\infty^2}{2E_F}$ (A_∞ est le gap en champ nul, E_F l'énergie de Fermi) est considérablement inférieur au gap en champ nul. La densité d'états correspondante est de l'ordre de $N(0) \frac{B}{H_{c2}}$ (B étant l'induction macroscopique dans le matériau).

Ces états gouvernent les propriétés de basse température ($T \ll T_c$) du supraconducteur. Ils donnent une atténuation ultrasonore anisotrope mais extrêmement faible. Le régime de relaxation des spins nucléaires est différent suivant que la diffusion de l'aimantation nucléaire est lente ou rapide par rapport à la relaxation directe. Dans les deux régimes la relaxation de basse température est nettement plus rapide que dans le supraconducteur en champ nul.

We study the low energy spectrum of a type II superconductor in the mixed state, with a low density of vortex lines ($H \ll H_{c2}$). The states which are localized in the core of a line cannot be described in the frame work of the local approximation (CYROT -- Section I). These states correspond precisely to the lowest part of the energy spectrum. The energy gap for these excitations of order $\frac{A_\infty^2}{2E_F}$ (A_∞ is the gap in zero magnetic field, E_F the Fermi energy) is considerably smaller than the gap in zero field. The corresponding density of states is of order $N(0) \frac{B}{H_{c2}}$ (B being the macroscopic induction in the material).

These states determine the low temperature ($T \ll T_c$) properties of the superconductor. In that range of temperature:

1. the ultrasonic attenuation is anisotropic but extremely small.
2. there are two regimes for the relaxation of nuclear spins, depending on whether the diffusion of the nuclear magnetization is slow or fast with respect to the direct relaxation. In both regimes the relaxation is much faster than in a superconductor in zero field.

Wir untersuchen das Spektrum der Zustände kleiner Energie eines Supraleiters zweiter Art im „gemischten Zustand“, der nur eine kleine Dichte von Vortex-Linien besitzt ($H \ll H_{c2}$). Die lokale Approximation von CYROT (I. Abschnitt) ist für die Beschreibung der Zustände im Kern der Vortex-Linien nicht geeignet. Es sind gerade diese Zustände, die zu den Gebieten tiefster Energien des Energiespektrums gehören. Die Energielücke für diese Anregungen ist von der Größenordnung $\frac{A_\infty^2}{2E_F}$ (A_∞ ist die Energielücke im Feld Null, E_F die Fermi-Energie)

und damit bedeutend kleiner als die Energielücke im Feld Null. Die zugehörige Zustandsdichte ist von der Größenordnung $N(0) \frac{B}{H_{c2}}$ (B ist die makroskopische Induktion des Materials).

Diese Zustände beherrschen die Tieftemperatur-Eigenschaften des Supraleiters ($T \ll T_c$). Sie ergeben eine anisotrope, aber sehr schwache Ultraschallabsorption. Die Kernspin-Relaxation hängt davon ab, ob die Diffusion der Kernmagnetisierung — verglichen mit der Kontakt-Wechselwirkung zwischen den Spins und den in den Vortex-Linien lokalisierten Zuständen — rasch oder langsam ist. In beiden Fällen ist die Relaxation viel schneller als im Supraleiter im Feld Null.

Introduction

Nous discutons ici les excitations de type fermion de très basse énergie dans un supraconducteur de seconde espèce ($E \ll \Delta_\infty$, où Δ_∞ est le gap en champ nul), les excitations d'énergie plus élevée ont été étudiées séparément [1]. Aux basses énergies les caractéristiques du spectre sont les suivantes:

— le gap E_0 pour les excitations est très petit ($E_0 \simeq \Delta_\infty^2/2E_F$, E_F étant l'énergie de Fermi du matériau).

— les excitations ont une extension infinie dans la direction du champ magnétique, et un rayon fini $r \lesssim \xi$ (ξ est la longueur de cohérence du matériau) dans le plan perpendiculaire au champ.

— la densité d'états est $N(E) \sim N(0) B/H_{c2}$ (B étant l'induction macroscopique dans le supraconducteur), c'est à dire que chaque ligne de vortex est à peu près équivalente à un cylindre de métal normal de rayon ξ pour tous les effets ne faisant pas intervenir la forme spatiale détaillée des excitations (par exemple la chaleur spécifique).

Nous appliquons ces résultats au calcul de l'atténuation des ultra sons et du temps de relaxation des spins nucléaires à très basse température.

I. Spectre d'excitations de basse énergie*

Ces états sont localisés dans le «coeur» des lignes de vortex où le paramètre d'ordre varie rapidement, on ne peut donc pas utiliser une approximation de variation lente [1]. Nous devons chercher les solutions propres du système d'équations couplées de BOGOLIUBOV [2].

$$\begin{cases} E u(\mathbf{r}) = \left[\frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e\mathbf{A}}{c} \right)^2 - E_F \right] u(\mathbf{r}) + W(\mathbf{r}) v(\mathbf{r}) \\ E v(\mathbf{r}) = \left[-\frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} + \frac{e\mathbf{A}}{c} \right)^2 + E_F \right] v(\mathbf{r}) + W^*(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}). \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

$W(\mathbf{r})$ étant le paramètre d'ordre en présence d'un ensemble de lignes de vortex. Les énergies d'excitation sont les valeurs propres positives** de ce système.

Comme dans le calcul des états d'énergie plus élevée [1], nous nous limitons à des matériaux dans lesquels:

— le paramètre de LANDAU-GINSBURG $\kappa = \lambda/\xi \gg 1$.

(λ est la profondeur de pénétration.)

* Un résumé des calculs de cette section a été donné dans la référence [12].

** Si (u) est une solution correspondant à $E > 0$, il existe toujours une solution parasite (u^*) de (I.1) associée à l'énergie $-E < 0$.

— le champ magnétique H est très inférieur au champ critique supérieur H_{c2} (mais supérieur au champ de première pénétration H_{c1})

$$H_{c1} \lesssim H \ll H_{c2}.$$

La distance d entre lignes de vortex est très supérieure à ξ , donc au rayon des états qui nous intéressent, nous pouvons donc à une bonne approximation considérer les lignes comme indépendantes et calculer les excitations autour d'une ligne isolée.

Il existe une jauge dans laquelle le potentiel de paires $W(\mathbf{r})$ a la forme*

$$W(\mathbf{r}) = \Delta(\mathbf{r}) e^{-i\Theta}.$$

$\Delta(r)$ est réel, nul à $r = 0$, linéaire pour $r \ll \xi$ et tend pour $r \gg \xi$ vers la limite finie Δ_∞ [3].

On élimine la phase de W des équations (I.1) en posant

$$\begin{aligned} u &= e^{-i\Theta/2} u' \\ v &= e^{i\Theta/2} v'. \end{aligned}$$

Ce qui revient simplement à faire un changement de jauge.

Les équations (I.1) s'écrivent alors:

$$\begin{aligned} E u' &= \left\{ \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e\mathbf{A}}{c} - \frac{\hbar \nabla \Theta}{2} \right)^2 - E_{\mathbf{F}} \right\} u' + \Delta v' \\ E v' &= - \left\{ \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} + \frac{e\mathbf{A}}{c} + \frac{\hbar \nabla \Theta}{2} \right)^2 - E_{\mathbf{F}} \right\} v' + \Delta u'. \end{aligned} \quad (\text{I.2})$$

Nous utilisons pour simplifier l'écriture une notation spinorielle.

Nous posons $\hat{\varphi} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $\hat{\varphi}' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$

$$E \hat{\varphi}' = \sigma_z \left\{ \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e|\mathbf{A}|}{c} - \sigma_z \frac{\hbar \nabla \Theta}{2} \right)^2 - E_{\mathbf{F}} \right\} \hat{\varphi}' + \sigma_x \Delta \hat{\varphi}'. \quad (\text{I.3})$$

σ_x , σ_y , σ_z sont les matrices de PAULI.

On peut remarquer que $\frac{e|\mathbf{A}|}{c} \sim \frac{eHr}{c}$, $\frac{\hbar|\nabla\Theta|}{2} \sim \frac{\hbar}{2r}$.

Nous nous intéressons aux excitations de portée $r \lesssim \xi$. Dans ce cas

$$\frac{e|\mathbf{A}|}{c} / \frac{\hbar|\nabla\Theta|}{2} \sim \frac{Hr^2}{\Phi_0} \lesssim \frac{H\xi^2}{\Phi_0} \sim \frac{H}{H_{c2}}.$$

($\Phi_0 = \frac{hc}{2e}$ est le quantum de flux).

Nous avons supposé $H/H_{c2} \ll 1$. Nous négligeons donc les termes de champ magnétique.

La forme de l'équation (I.3) (qui contient un «potentiel» dépendant uniquement de la variable radiale) suggère de chercher des solutions de la forme:

$$\hat{\varphi}' = e^{ikz} e^{i\mu\Theta} \hat{f}(r). \quad (\text{I.4})$$

$\hat{\varphi}'$ doit être uniforme**, 2μ est donc un entier impair**, et nous posons

$$k = k_{\mathbf{F}} \cos \alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi.$$

* (r, Θ, z) sont des coordonnées cylindriques, l'axe z est l'axe de la ligne de vortex.

** Nous remercions Dr. M. WORTIS qui nous a fait remarquer que la propriété d'uniformité de $\hat{\varphi}'$ entraîne μ demi entier, et non μ entier, comme nous l'avions écrit dans un article précédent [12].

Nous nous limitons pour le moment à $|k| \leq k_F$.

L'équation (I.3) s'écrit alors:

$$\sigma_z \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ -\frac{d^2 \hat{f}}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\hat{f}}{dr} + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma_z \right)^2 \frac{\hat{f}}{r^2} - k_F^2 \sin^2 \alpha \hat{f} \right\} + \sigma_x \Delta(r) \hat{f} = E \hat{f}. \quad (\text{I.5})$$

On peut résoudre cette équation complètement dans différents domaines de valeurs de μ et α . Nous traitons d'abord, et de façon plus détaillée, le domaine $1/2 \leq \mu \ll k_F \xi$, $\sin \alpha \gg 1/(k_F \xi)^{2/3}$ qui fournit la contribution principale à la densité d'états de basse énergie.

1. Région $1/2 \leq \mu \ll k_F \xi$, $\sin \alpha \gg 1/(k_F \xi)^{2/3}$

Nous choisissons un rayon de coupure r_c tel que:

— pour $r < r_c$ le terme $\Delta(r)$ dans (I.5) soit négligeable. Ceci impose $r_c \ll \xi$. (On sait par l'étude du cas $\mu \sim k_F \xi$ que l'abandon de ce terme dans la région intérieure n'entraîne qu'une erreur négligeable sur l'énergie.)

Dans ce cas $\hat{f} = \begin{pmatrix} f_+ \\ f_- \end{pmatrix}$ a la forme

$$f_{\pm}(r) = A_{\pm} J_{\mu \pm 1/2} [(k_F \sin \alpha + q) r], \quad (\text{I.6})$$

où A_{\pm} sont des constantes arbitraires, J des fonctions de Bessel, et $q = \frac{E}{\hbar v_F \sin \alpha}$.

On a supposé que $q \ll k_F \sin \alpha$, soit $E/E_F \ll \sin^2 \alpha$. On verra que dans le domaine que nous considérons ici $E \sim \Delta_{\infty}^2/E_F$, cette inégalité est satisfaite.

— pour $r > r_c$ nous posons:

$$\hat{f}(r) = \hat{g}(r) H_m^+(k_F r \sin \alpha) + \text{cc}. \quad (\text{I.7})$$

$$(m = \sqrt{\mu^2 + 1/4})$$

H_m^+ sont les fonctions de Hankel, $\hat{g}(r)$ une enveloppe à variation lente par rapport à la longueur d'onde $\frac{1}{k_F \sin \alpha}$ de la fonction de Hankel.

On vérifie a posteriori que cette condition de variation lente n'est remplie que dans le domaine $\sin \alpha \gg \frac{1}{(k_F \xi)^{2/3}}$. \hat{g} satisfait à l'équation*

$$-\sigma_z \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \hat{g}}{dr^2} - \sigma_z \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d\hat{g}}{dr} \left[\frac{2}{H_m} \frac{dH_m}{dr} + \frac{1}{2} \right] + \sigma_x \Delta(r) \hat{g} = \left(E + \frac{\mu \hbar^2}{2m r^2} \right) \hat{g}. \quad (\text{I.8})$$

Si $k_F r_c \sin \alpha \gg m$, $\frac{dH_m}{dr} \cdot \frac{1}{H_m} \simeq -\frac{1}{2r} + i k_F \sin \alpha$. Nous supposons cette condition remplie et nous négligeons $\frac{d^2 \hat{g}}{dr^2}$ par rapport à $k_F \sin \alpha \frac{d\hat{g}}{dr}$. (I.8) devient

$$-i \sigma_z \hbar v_F \sin \alpha \frac{d\hat{g}}{dr} + \sigma_x \Delta(r) \hat{g} = \left(E + \frac{\mu \hbar^2}{2m r^2} \right) \hat{g}. \quad (\text{I.9})$$

Si $E \ll \Delta_{\infty}$ et $r^2 \gg \mu \frac{\xi}{k_F}$, le second membre de (I.9) pourra être traité comme une petite perturbation.

* On voit dans le second membre de l'équation (I.9) qu'il s'ajoute à l'énergie un terme

$$\frac{\mu \hbar^2}{2m r^2} = \frac{\hbar}{2m r} \frac{\mu \hbar}{r} = -v_S(r) \cdot |\nabla_{\Theta} e^{i\mu \Theta}|$$

(où v_S est la vitesse superfluide). Ce terme traduit un effet de CORIOLIS (interaction entre la «vitesse d'entraînement» $v_S(r)$ et la «vitesse de rotation» $\hbar\mu/r$). Ce terme (dépendant du signe de μ) est analogue au terme $\hbar \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{k}$ de la formule [4] de CYROT.

Comme $r \geq r_c$, il faut pour cela que $\xi \gg r_c \gg \sqrt{\mu \frac{\xi}{k_F}}$.

Ces deux conditions ne sont compatibles que si $\mu \ll k_F \xi^*$.

Nous commençons alors, en première approximation, par résoudre l'équation (I.9) pour $E = \mu = 0$.

$$-i \sigma_z \hbar v_F \sin \alpha \frac{d\hat{g}^{(0)}}{dr} + \sigma_x \Delta(r) \hat{g}^{(0)} = 0, \quad (\text{I.10})$$

et nous obtenons:

$$\hat{g}^{(0)} = \text{Cte} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{-K(r)},$$

$$K(r) = \frac{1}{\hbar v_F \sin \alpha} \int_0^r \Delta(r') dr'. \quad (\text{I.11})$$

Nous cherchons maintenant la solution à l'ordre suivant $\hat{g}^{(1)} = \begin{pmatrix} g_+^{(1)} \\ g_-^{(1)} \end{pmatrix}$ sous la forme

$$g_+^{(1)} = a_+ e^{-K(r)}$$

$$g_-^{(1)} = -i a_- e^{-K(r)}.$$

Nous nous limitons à un calcul au premier ordre en E et μ en prenant $a_+ + a_- = 2$. Nous trouvons alors:

$$a_+ = 1 + i \frac{\Psi}{2} = e^{+i\Psi/2}$$

$$a_- = 1 - i \frac{\Psi}{2} = e^{-i\Psi/2}, \quad (\text{I.12})$$

où

$$\Psi(r) = - \int_r^\infty \exp\{2K(r) - 2K(r')\} \left(2q + \frac{\mu}{k_F r'^2 \sin \alpha} \right) dr'.$$

(Nous avons pris $1 \pm i \frac{\Psi}{2} = e^{\pm i\Psi/2}$ car ces égalités sont vraies au premier ordre en E et μ).

Finalement, à cet ordre:

$$\hat{g} = \text{Cte} \begin{pmatrix} e^{i\Psi/2} \\ -i e^{-i\Psi/2} \end{pmatrix} e^{-K(r)}. \quad (\text{I.13})$$

Nous écrivons maintenant que les deux solutions (I.6) et (I.13) se raccordent à $r = r_c$. Comme $r_c \gg \sqrt{\mu \frac{\xi}{k_F}}$ entraîne $\mu \pm \frac{1}{2} \ll k_F r_c$, nous développons la solution (I.6) d'après:

$$J_n(z) = A_n z^{-1/2} \sin \left[z + \frac{n^2}{2z} - \frac{\pi}{2} \left(n - \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (z \gg n)$$

* Suivant les valeurs de $\sin \alpha$, la condition $\xi \gg r_c \gg \sqrt{\mu \frac{\xi}{k_F}}$ peut être plus ou moins restrictive que $\xi \gg r_c \frac{\mu}{k_F \sin \alpha}$.

De toutes façons la compatibilité des deux inégalités auxquelles doit satisfaire r_c impose toujours qu'on se restreigne aux basses énergies $E \ll \Delta_\alpha$.

Par ailleurs, comme $r_c \ll \xi$

$$\Psi(r_c) \simeq -\frac{\mu}{k_F r_c \sin \alpha} + 2q r_c - 2 \int_0^{\infty} dr' e^{-2K(r')} \left(q - \frac{\mu \Delta(r')}{k_F v_F r' \sin^2 \alpha} \right), \quad (\text{I.14})$$

et la condition de raccordement s'écrit finalement:

$$\Psi(r_c) = 2q r_c - \frac{\mu}{k_F r_c \sin \alpha}. \quad (\text{I.15})$$

On voit que les termes dépendant de r_c s'éliminent bien de l'équation (I.15), qui fournit ainsi la relation entre E , μ et α

$$E_{\mu\alpha} = q v_F \sin \alpha = \frac{\mu}{k_F \sin \alpha} \frac{\int_0^{\infty} \frac{\Delta(r)}{r} e^{-2K(r)} dr}{\int_0^{\infty} e^{-2K(r)} dr}, \quad (\text{I.16})$$

ou

$$E_{\mu\alpha} = \frac{\mu \Delta'}{k_F \sin \alpha} g(\alpha), \quad \left(\Delta' = \left[\frac{d\Delta}{dr} \right]_{r=0} \right)$$

avec

$$g(\alpha) = \frac{\int_0^{\infty} \frac{\delta(\varrho)}{\varrho} e^{-2K(\varrho)} d\varrho}{\int_0^{\infty} e^{-2K(\varrho)} d\varrho} \left(\varrho = \frac{\Delta' r}{\Delta_\infty}, \quad \delta(\varrho) = \frac{\Delta(\varrho)}{\Delta_\infty} \right).$$

$g(\alpha)$ est une fonction sans dimensions qui dépend de la forme exacte du paramètre d'ordre $\Delta(r)$, mais est de toutes façons toujours de l'ordre de 1. Nous représentons Fig. 1 la fonction $g(\alpha)$ calculée à partir du paramètre d'ordre solution des équations de LANDAU-GINSBURG [3] (done valable près de T_c) et dans le cas

$$\Delta' = \left[\left(\frac{d\Delta}{dr} \right) \right]_{r=0} \simeq \frac{\Delta_\infty}{\xi},$$

les énergies données par (I.16) sont donc de l'ordre de $\frac{\mu \Delta_\infty}{k_F \xi \sin \alpha}$.

Les conditions de validité de ce résultat s'écrivent toutes les deux $E \ll \Delta_\infty$. Nous ne décrivons donc ici que des excitations de basse énergie. Enfin la condition $\mu \geq 1/2$ entraîne

$$E \geq E_{\min} \simeq \frac{\Delta_\infty^2}{2E_F} \ll \Delta_\infty.$$

Les équations (I.9) montrent que ces excitations ont dans le plan perpendiculaire au champ magnétique une portée $r \sim \xi$.

Pour ces états nous pouvons maintenant écrire explicitement les fonctions f_+ et f_- dans la région $r > r_c$

$$\begin{aligned} f_{\mu\alpha}^+(r) &= 2 C_m(r) e^{-K(r)} \cos \left[k_F r \sin \alpha + \frac{m^2}{2 k_F r \sin \alpha} - \frac{\pi \mu}{2} + \frac{\Psi(r)}{2} \right] \\ f_{\mu\alpha}^-(r) &= 2 C_m(r) e^{-K(r)} \sin \left[k_F r \sin \alpha + \frac{m^2}{2 k_F r \sin \alpha} - \frac{\pi \mu}{2} - \frac{\Psi(r)}{2} \right] \\ C_m(r) &= \left(\frac{2}{\pi \sqrt{k_F^2 r^2 \sin^2 \alpha - m^2}} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (\text{I.17})$$

Enfin la densité d'états $N_l(E)$ associée à ces niveaux (que nous appellerons «liés») est donnée (pour une seule direction de spin et une seule ligne) par:

$$N_l(E) = \frac{k_F^2}{2\pi A'} \int_0^\pi d\alpha \frac{\sin^2 \alpha}{g(\alpha)}, \quad \left(\frac{\Delta_\infty^2}{2E_F} \leq E \ll \Delta_\infty \right). \quad (I.18)$$

L'intégrale en $d\alpha$ est de l'ordre de $\pi/2$. Avec le $g(\alpha)$ calculé à partir des équations de LANDAU-GINSBURG $\int_0^\pi d\alpha \frac{\sin^2 \alpha}{g(\alpha)} = 1,92$.

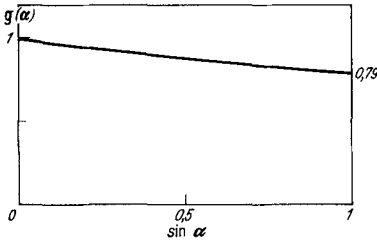


Fig. 1. Variation exacte de la fonction $g(\alpha)$ de l'équation (I. 16) calculée par intégration numérique. En ordre de grandeur, l'estimation $g(\alpha) \simeq 1$ est justifiée

Donc $N_l(E) \simeq N(0)\xi^2$ pour une seule ligne, c'est à dire que, pour ces états de basse énergie (et de faible extension spatiale), chaque ligne est équivalente à un cylindre de métal normal de rayon $\sim \xi$. Pour un ensemble de lignes correspondant à une induction macroscopique B

$$N_l(E) \sim N(0) \frac{B}{H_{c2}}$$

Nous allons maintenant décrire plus rapidement les calculs que nous avons faits pour d'autres domaines de valeurs de μ et de α .

Nous verrons que seul le domaine que nous venons d'étudier contient des états de très basse énergie.

2. Cas $\mu \sim k_F \xi, |k| < k_F$

Nous transformons (I.5) en posant:

$$\hat{f} = \hat{g}^{(+)} H_m^{(+)}(k_F r \sin \alpha) + \hat{g}^{(-)} H_m^{(-)}(k_F r \sin \alpha) \quad (I.19)$$

que nous symboliserons par $\hat{f} = \hat{g}^{(\eta)} H_m^{(\eta)}(k_F r \sin \alpha)$,

$$m = \sqrt{\mu^2 + 1/4}, \quad \eta = \pm 1.$$

H_+ et H^- sont les fonctions de Hankel.

(I.5) devient:

$$\begin{aligned} -\sigma_z \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \hat{g}^{(\eta)}}{dr^2} - \sigma_z \frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{2}{H_m^{(\eta)}} \frac{dH_m^{(\eta)}}{dr} + \frac{1}{r} \right] \frac{d\hat{g}^{(\eta)}}{dr} + \sigma_x \Delta(r) \hat{g}^{(\eta)} \\ = \dots = \left(E + \frac{\mu \hbar^2}{2mr^2} \right) \hat{g}^{(\eta)}. \end{aligned} \quad (I.20)$$

Comme $m \sim \mu \sim k_F \xi \gg 1, \frac{1}{H_m} \cdot \frac{dH_m}{dr} \gg \frac{1}{r}$. De plus nous posons

$$\frac{1}{H_m^{(\eta)}} \frac{dH_m^{(\eta)}}{dr} = k_F \sin \alpha S_m(k_F r \sin \alpha),$$

et nous prendrons partout $\sqrt{\mu^2 + 1/4} = \mu$.

Enfin nous négligeons $d^2 \hat{g} / dr^2$ par rapport à $k_F \sin \alpha S_\mu(d\hat{g}/dr)$. En effet nous verrons que le rayon des états en cause est de l'ordre de $\xi \sqrt{\sin \alpha}$. Cette approximation est donc légitime pour

$$\sin \alpha \gg \frac{1}{(k_F \xi)^{2/3}}.$$

L'équation (I.20) devient alors :

$$-\sigma_z \hbar v_F \sin \alpha S_\mu^{(\eta)}(k_F r \sin \alpha) \cdot \frac{d\hat{g}^{(\eta)}}{dr} + \sigma_x \Delta(r) \hat{g}^{(\eta)} = \left(E + \frac{\mu \hbar^2}{2m r^2} \right) \hat{g}^{(\eta)}. \quad (\text{I.21})$$

$$\text{Si } k_F r \sin \alpha > \mu, \quad S_\mu^{(\eta)} \simeq i \eta \sqrt{1 - \frac{\mu^2}{k_F^2 r^2 \sin^2 \alpha}}.$$

$$\text{Si } k_F r \sin \alpha < \mu, \quad S_\mu^{(\eta)} \simeq - \sqrt{\frac{\mu^2}{k_F^2 r^2 \sin^2 \alpha} - 1}.$$

En effet nous nous intéressons à $\mu \sim k_F \xi \gg 1$. La fonction S_μ change de détermination pour

$$r = \frac{\mu}{k_F \sin \alpha} \sim \frac{\xi}{\sin \alpha}.$$

Nous obtenons la condition aux limites en remarquant que \hat{g} doit être régulier à l'origine. Donc il faut que :

$$\begin{pmatrix} g_+ \\ g_- \end{pmatrix}_{r=0}^{(\eta=+1)} = \begin{pmatrix} g_+ \\ g_- \end{pmatrix}_{r=0}^{(\eta=-1)}.$$

L'équation (I.21) est réelle pour $r < \frac{\mu}{k_F \sin \alpha}$, et pour $r > \frac{\mu}{k_F \sin \alpha}$

$$\hat{g}^{(\eta=+1)} = \sigma_x \hat{g}^{(\eta=-1)}.$$

La condition aux limites s'écrit donc :

$$\begin{pmatrix} g_+ \\ g_- \end{pmatrix}_{r=\frac{\mu}{k_F \sin \alpha}}^{(\eta=+1)} = \begin{pmatrix} g_- \\ g_+ \end{pmatrix}_{r=\frac{\mu}{k_F \sin \alpha}}^{(\eta=+1)} = \pm 1. \quad (\text{I.22})$$

Nous avons résolu l'équation (I.21) numériquement dans deux cas :

$\alpha \sin \alpha = 1$ ($k = 0$). Nous avons utilisé la forme du paramètre d'ordre $\Delta(r)$ donnée par les équations de LANDAU-GINSBURG pour $\kappa \rightarrow \infty$ *. Les résultats sont représentés sur la Fig. 2. La pente à l'origine de la courbe est donnée par (I.16), où il faut utiliser la valeur de $g(\alpha)$ du domaine de LANDAU et GINSBURG (Fig. 1).

$\beta \sin \alpha \neq 1$. Dans ce cas, le rayon des états est de l'ordre de $\xi \sqrt{\sin \alpha}$. Nous avons fait le calcul en utilisant un paramètre d'ordre linéaire, ce qui est justifié pour $\sin \alpha \ll 1$ - .

Dans cette approximation de paramètre d'ordre linéaire nous avons aussi pu résoudre l'équation (I.28) par une méthode très analogue à celle utilisée pour le cas 1 ($1/2 \leq \mu \leq k_F \xi$). Ce cal-

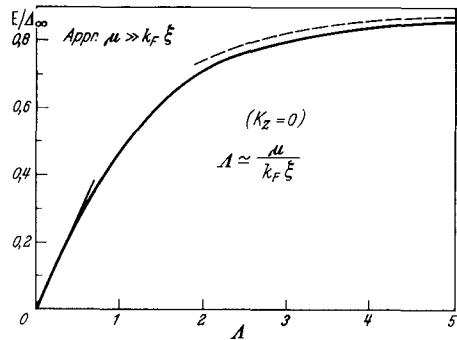


Fig. 2. Spectre des états liés pour $\mu \sim k_F \xi \gg 0$ et $k = 0$. Le trait plein correspond à une intégration numérique tenant compte de la forme exacte de la fonction $\Delta(r)$. Le trait pointillé est le spectre obtenu par approximation semi-classique valable pour μ très grand

* Cette forme $\Delta(r)$ a été calculée par ABRIKOSOV [3], et, pour un problème formellement analogue par PITAEVSKIÏ [5]. Toutefois, les courbes données par ces auteurs sont assez imprécises, et nous avons dû recalculer $\Delta(r)$ numériquement.

cul donne pour les états les plus bas en énergie un spectre :

$$E = \frac{\mu}{k_F \xi \sin \alpha} (\hbar v_F A')^{1/2} \simeq \frac{\mu A'}{k_F \sin \alpha}, \tag{I.23}$$

(Cette branche du spectre correspond à $(g_+/g_-)_{\mu/k_F \sin \alpha} = +1$).

Donc pour $\mu \sim k_F \xi$ on obtient un spectre très peu différent de celui du domaine $\mu \ll k_F \xi$ (la seule différence réside dans le facteur $g(\alpha)$ qui est comme nous l'avons vu de l'ordre de 1).

Enfin nous avons déterminé numériquement deux branches du spectre plus élevées en énergie, dans la même approximation.

Le calcul algébrique permet d'avoir une idée de la forme de ces branches dans la limite où $|\mu| \ll k_F \xi (\sin \alpha)^{3/2}$. Si on appelle branche d'ordre 0 la branche donnée par (I.29), les branches d'ordre $\nu \geq 1$ sont de la forme :

$$E^{(\nu)} \simeq \left[\sqrt{2\nu} + C_\nu \frac{\mu^2}{k_F^2 \xi^2 \sin^3 \alpha} \right] \Delta_\infty \sqrt{\sin \alpha} \quad (\mu > 0)$$

$$\left(\frac{1}{(k_F \xi)^{2/3}} < \sin \alpha \ll 1 \right).$$

C_ν est une constante numérique.

$$E^{(\nu)} \simeq \Delta_\infty \sqrt{\sin \alpha} \left[\sqrt{2\nu} + C'_\nu \frac{\mu^2}{k_F^2 \xi^2 \sin^3 \alpha} \right] \quad (\mu < 0).$$

La branche d'ordre ν satisfait à la condition aux limites $(g_+/g_-)_{\mu/k_F \sin \alpha} = (-1)^\nu$.

Les constantes C_ν et C'_ν (relatives à $\mu < 0$ et $\mu > 0$) sont en général assez peu différentes. Elles décroissent quand ν croît. Les résultats sont représentés Fig. 3.

Les branches d'ordre $\nu \geq 1$ du spectre peuvent être considérées comme des branches de haute énergie par rapport aux états d'énergie $\sim \Delta_\infty / k_F \xi$ que nous avons trouvés dans le cas $1/2 < \mu \ll k_F \xi$ puisque

$$E^{(1)} / \frac{\Delta_\infty \mu}{k_F \xi \sin \alpha} \sim \frac{k_F \xi (\sin \alpha)^{3/2}}{\mu} \gg 1.$$

De plus on peut vérifier que la densité d'états correspondante

$$N(E) \propto \left(\frac{E}{\Delta_\infty} \right)^6 \cdot \frac{N(0)}{k_F \xi} \cdot \frac{B}{H_{c2}} \ll N_1(E),$$

est négligeable, aux basses énergies ($E \ll \Delta_\infty$) par rapport à la densité d'états $N_1(E)$.

3. Cas $\mu \gg k_F \xi$, $\sin \alpha > \frac{1}{(k_F \xi)^{2/3}}$

On fait ici les mêmes approximations (état de grand rayon, $\mu \gg 1$) que dans le cas $\mu \sim k_F \xi$, il faut donc résoudre l'équation (I.2). Comme dans le cas précédent on peut traduire la condition de régularité de f à l'origine par une con-

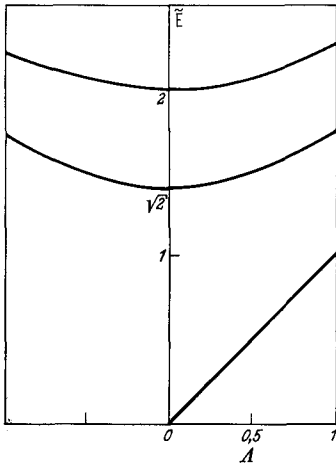


Fig. 3. Spectre des états lié pour $\mu \sim k_F \xi \gg 0$ et $k \neq 0$. L'approximation d'une variation linéaire de $\Delta(r)$ est correcte ici et permet une intégration complète des équations aux valeurs propres, non seulement pour la branche linéaire, mais aussi pour les branches correspondant à des excitations plus élevées. Il faut noter que l'origine doit être exclue de la branche linéaire, car le calcul n'est pas valable pour $\mu = 0$. Approximation gap linéaire

$$\tilde{E} = \frac{E}{\sqrt{\hbar v_F A' \sin \alpha}} \simeq \frac{E}{\Delta_\infty \sqrt{\sin \alpha}}$$

$$A = \frac{\mu}{(\sin \alpha)^{3/2}} \sqrt{\frac{A'}{2 k_F E_F}} \simeq \frac{\mu}{(\sin \alpha)^{3/2}} \frac{\Delta_\infty}{E_F}$$

dition au point $r = \frac{\mu}{k_F \sin \alpha}$:

$$\left(\frac{g_+}{g_-} \right)_{\frac{\mu}{k_F \sin \alpha}}^{(\eta = +1)} = \pm 1.$$

On se borne donc à étudier la région $r > \frac{\mu}{k_F \sin \alpha} \gg \xi$, dans laquelle $\Delta(r) \simeq \Delta_\infty$. On fait alors les deux changements de variables successifs

$$\begin{aligned} \cos \varphi = \frac{\mu}{k_F \sin \alpha} \quad \text{et} \quad t = \frac{1}{\Omega} \cdot \operatorname{tg} \varphi \quad (\text{I.2}) \text{ devient :} \\ -i \sigma_z \frac{d\hat{g}^{(\eta)}}{dt} + \sigma_x \frac{\Delta(r)}{\Delta_\infty} \hat{g}^{(\eta)} = \left(\tilde{E} + \frac{\Omega}{2} \cdot \frac{1}{1 + \Omega^2 t^2} \right) \hat{g}^{(\eta)}, \end{aligned} \quad (\text{I.24})$$

où

$$\Omega \simeq \frac{k_F \xi \sin^2 \alpha}{\mu} \ll 1, \quad \tilde{E} = \frac{E}{\Delta_\infty}.$$

Le «potentiel» dans cette équation varie à l'échelle $1/\Omega \gg 1$, on peut donc utiliser une méthode de type semi-classique. On obtient très facilement la plus basse branche du spectre correspondant.

$$E = \Delta_\infty \left(1 - \frac{\lambda^2 k_F \xi}{2 \mu} \right). \quad (\text{I.25})$$

Nous avons tracé la courbe (I.31) pour le cas $\sin \alpha = 1$ (Fig. 2).

Elle se raccorde bien à la partie $\mu \lesssim k_F \xi$ du spectre.

Les états (I.25) ont une énergie voisine de Δ_∞ , ils font donc partie du spectre calculé par CYROT [1] par une méthode différente. On a vérifié ici que le «potentiel» intervenant pour ces états, dans les équations de BOGOLIUBOV, varie lentement à l'échelle de la longueur de cohérence, ce qui est une justification supplémentaire de l'approximation locale de CYROT.

En conclusion les états de basse énergie correspondent à $\frac{1}{2} \leq \mu \ll k_F \xi$ et $\sin \alpha \gg \frac{1}{(k_F \xi)^{2/3}}$. Ils sont localisés dans le coeur d'une ligne. Le seuil d'énergie pour ces excitations est de l'ordre de $\Delta_\infty^2 / 2 E_F$. Au point de vue de la densité d'états de basse énergie une ligne de vortex est équivalente à un cylindre de métal normal de rayon ξ . Ces états sont les seuls qui interviendront dans les propriétés de très basse température ($T \ll T_c$), d'un supraconducteur dans l'état mixte.

Remarquons enfin que pour les états les plus bas en énergie, E est linéaire en μ , donc négative pour $\mu < 0$. On peut vérifier facilement sur les équations de départ (I.1) que les solutions à énergie négative correspondant à $\mu < 0$ sont bien les solutions non physiques du système de BOGOLIUBOV. Il n'existe donc pas d'états de basse énergie pour $\mu < 0$. Cette dissymétrie entre les deux sens de polarisation circulaire autour de la ligne de vortex peut se comprendre intuitivement: le superfluide a une circulation de signe bien défini autour de la ligne; il faut fournir moins d'énergie à une excitation pour la faire tourner dans le sens opposé à celui de la vitesse superfluide v_s que dans le même sens, comme le montre le terme «d'interaction» $-v_s \cdot |\nabla_\theta e^{i\mu\theta}|$.

Cette propriété est apparente pour les excitations plus élevées en énergie décrites par l'équation (4) de CYROT.

II. Atténuation des ultrasons à basse température

Nous ne pouvons calculer l'atténuation des ultrasons par les excitations de basse énergie qu'à très basse température. En effet pour que seuls les états de basse énergie contribuent il faut que

— $T \ll T_c$ (ce qui assure qu'ils sont seuls excités)

— $\hbar\omega \ll \Delta_\infty$ (ω étant la fréquence de l'onde ultrasonore). Cette condition est en général vérifiée quand $T \ll T_c$, car les fréquences d'hypersons produites en pratique ne dépassent pas 10^4 Mc (donc $\hbar \cdot \omega \leq 1$ °K). Cette condition assure qu'il n'y a pas (ou très peu) de transitions entre les états de basse énergie et les états d'énergie plus élevée calculés par CYROT [1] (et que nous appellerons à partir de maintenant états «localement uniformes»).

Nous négligeons tous les effets dûs aux mouvements de lignes de vortex ou aux interactions entre ces mouvements et les fermions.

L'hamiltonien d'interaction entre un métal et une onde ultrasonore longitudinale de vecteur d'onde \mathbf{Q} et de fréquence $\omega = c_s Q$ (c_s est la vitesse du son dans le matériau, typiquement $c_s \simeq 10^5$ cm/s dans des matériaux du type $V_3\text{Ga}$) s'écrit

$$\mathcal{H}_{e-p} = \Gamma_{\mathbf{Q}} \sum_{\sigma} \int d^3\mathbf{r} \Psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r}) \Psi_{\sigma}(\mathbf{r}) [a_{\mathbf{Q}} e^{i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}} - a_{\mathbf{Q}}^{\dagger} e^{-i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}}]. \quad (\text{II.1})$$

σ est un indice de spin.

$\Psi^{\dagger}(\mathbf{r})$ et $\Psi(\mathbf{r})$ sont les opérateurs de création et d'annihilation de fermions en un point, $a_{\mathbf{Q}}^{\dagger}$ et $a_{\mathbf{Q}}$ les opérateurs de création et d'annihilation d'un phonon de vecteur d'onde \mathbf{Q} . L'élément de matrice $\Gamma_{\mathbf{Q}}$ est le même dans le métal normal et dans le supraconducteur.

Nous faisons la transformation de BOGOLIUBOV classique [2]:

$$\begin{aligned} \Psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) &= \sum_n [u_n^*(\mathbf{r}) \gamma_{n\uparrow}^{\dagger} + v_n(\mathbf{r}) \gamma_{n\downarrow}], \\ \Psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) &= \sum_n [u_n^*(\mathbf{r}) \gamma_{n\downarrow}^{\dagger} - v_n(\mathbf{r}) \gamma_{n\uparrow}]. \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

L'indice n décrit les excitations de basse énergie qui ici sont les seules importantes.

Nous obtenons ainsi en posant $A_{\mathbf{Q}}(\mathbf{r}) = a_{\mathbf{Q}} e^{i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}} - a_{\mathbf{Q}}^{\dagger} e^{-i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{e-p} &= \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 \\ \mathcal{H}_1 &= \Gamma_{\mathbf{Q}} \sum_{nn'} \int d^3\mathbf{r} A_{\mathbf{Q}}(\mathbf{r}) [u_n^*(\mathbf{r}) u_{n'}(\mathbf{r}) - v_n^*(\mathbf{r}) v_{n'}(\mathbf{r})] (\gamma_{n\uparrow}^{\dagger} \cdot \gamma_{n'\uparrow} + \gamma_{n\downarrow}^{\dagger} \cdot \gamma_{n'\downarrow}), \\ \mathcal{H}_2 &= \Gamma_{\mathbf{Q}} \sum_{nn'} \int d^3\mathbf{r} A_{\mathbf{Q}}(\mathbf{r}) \{ [u_n^*(\mathbf{r}) v_{n'}^*(\mathbf{r}) + u_{n'}^*(\mathbf{r}) v_n^*(\mathbf{r})] \gamma_{n\uparrow}^{\dagger} \cdot \gamma_{n'\downarrow}^{\dagger} + \\ &+ [u_{n'}(\mathbf{r}) v_n(\mathbf{r}) + u_n(\mathbf{r}) v_{n'}(\mathbf{r})] \gamma_{n\downarrow} \cdot \gamma_{n'\uparrow} \}. \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

\mathcal{H}_1 décrit la diffusion d'une excitation avec création ou absorption d'un phonon \mathcal{H}_2 décrit les processus où un phonon apparaît (disparaît) et une paire d'excitations disparaît (apparaît).

Dans un supraconducteur de première espèce (ou de seconde espèce en champ nul) les processus de paires ne contribuent à l'atténuation que si $\hbar\omega \geq 2\Delta$. Cette condition n'est remplie à des fréquences d'ultrasons réalisables que pour $T \simeq T_c$.

Dans un supraconducteur contenant des lignes de vortex le seuil d'excitation est abaissé à $E_{\min} = \Delta^2 / 2 E_F \ll \Delta_\infty$. On obtiendra à basse température un effet

de paires non nul si $\frac{\Delta_\infty^2}{2E_F} \lesssim 1^\circ\text{K}$ (cette énergie limite correspond à $\frac{\omega}{2\pi} \sim 10^4 \text{Mc}$). $\Delta_\infty \sim 10$ à 20°K , il faut donc que

$$\Delta_\infty/E_F < \frac{1}{10} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{20}.$$

Par exemple dans Nb_3Sn la masse effective des électrons est de l'ordre de $m^* = 100 m$ et $E_F \sim 10^3^\circ\text{K}$, $\Delta_\infty \sim 30^\circ\text{K}$,

$$\frac{\Delta_\infty^2}{E_F} \sim 0,9^\circ\text{K}.$$

On ne peut donc pas négliger les processus de paires. Enfin il faut distinguer deux géométries, selon que \mathbf{Q} est parallèle ou perpendiculaire aux lignes, et on s'attend à ce que l'atténuation soit différente dans ces deux cas.

1. Effets de paires

α) $\mathbf{Q} \parallel \vec{\mathbf{Oz}}$ Les règles de sélection s'écrivent, pour le processus $(\hbar\omega, \mathbf{Q}) \rightleftharpoons (\mathbf{k}, \mu) + (\mathbf{k}', \mu')$

$$\begin{aligned} \mathbf{k} + \mathbf{k}' &= \mathbf{Q} \\ \mu + \mu' &= 0 \\ E + E' &= \hbar\omega. \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

Comme nous l'avons remarqué dans la section I, les états de basse énergie correspondent à $\mu > 0$ (les états du coeur avec $\mu < 0$ ont des énergies plus élevées et contribuent peu à la densité d'états).

Donc la dissymétrie entre les états de polarisations circulaires différentes annule l'effet des paires dans cette géométrie.

β) $\mathbf{Q} \perp \vec{\mathbf{Oz}}$. Nous prenons par exemple $\mathbf{Q} \parallel \mathbf{Ox}$. En utilisant la décomposition

$$e^{iQx} = 2J_0(Qr) + \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{i\nu\pi/2} J_\nu(Qr) \cos \nu\Theta$$

on trouve les règles de sélection

$$\begin{aligned} \mathbf{k} + \mathbf{k}' &= 0 \\ \mu + \mu' &= \pm \nu \\ E + E' &= \hbar\omega \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

ν est un entier ≥ 0 .

En éliminant comme dans le cas précédent les états $\mu < 0$, on voit que les transitions de basse énergie se font avec $\nu \geq 1$.

L'élément de matrice pour une transition (II.5) est de la forme

$$M_\perp = \int_0^\infty r dr J_\nu(Qr) [f_{\mathbf{k},\mu}^+(r) f_{-\mathbf{k},\nu-\mu}^-(r) + f_{-\mathbf{k},\nu-\mu}^+(r) f_{\mathbf{k},\mu}^-(r)]. \quad (\text{II.6})$$

Pour évaluer cet élément de matrice nous faisons la remarque suivante: d'après les équations (I.13), pour $r > r_c$

$$\begin{aligned} f_{\alpha\mu}^+(r) &= \frac{1}{\sqrt{A_{\alpha\mu}}} 2C_m(r) e^{-K(r)} \cos \left[k_F r \sin \alpha + \frac{m^2}{2k_F r \sin \alpha} - \frac{\pi\mu}{2} + \frac{\Psi(r)}{2} \right], \\ f_{\alpha\mu}^-(r) &= \frac{1}{\sqrt{A_{\alpha\mu}}} 2C_m(r) e^{-K(r)} \sin \left[k_F r \sin \alpha + \frac{m^2}{2k_F r \sin \alpha} - \frac{\pi\mu}{2} - \frac{\Psi(r)}{2} \right]. \end{aligned}$$

$A_{\alpha\mu}$ est une constante de normalisation qui assure que

$$\int d^3r [|u_n(r)|^2 + |v_n(r)|^2] = 1.$$

Cette forme de f^+ et f^- est vraie partout sauf pour $r < r_c \ll \xi$. Nous négligeons cette région qui est petite par rapport au coeur d'une ligne (et dans laquelle les fonctions qui nous intéressent ne sont pas singulières) et nous étendons l'expression (I.13) à tout l'espace pour le calcul de M_{\perp} .

f^+ et f^- sont donc le produit de fonctions oscillant avec une longueur d'onde $\sim \frac{1}{k_F \sin \alpha} \ll \xi$ par une enveloppe lentement variable de portée ξ . Nous pouvons donc (à une erreur de l'ordre de $1/k_F \xi$ près) remplacer dans les intégrales ces fonctions oscillantes par leur valeur moyenne sur une période.

Enfin, comme $\omega \lesssim 10^4$ Mc, $Q\xi \ll 1$, et $Q \ll k_F$.

Avec ces approximations, on voit que $M_{\perp} \sim 1/k_F \xi$, et, en ordre de grandeur, on obtient le coefficient d'absorption due aux paires α_P

$$\begin{aligned} \alpha_{P\perp} &< \alpha_n \frac{B}{Hc^2} (Q\xi) \frac{Q}{k_F} \ll \alpha_n \quad \text{si } \hbar\omega > \frac{\Delta_{\infty}}{E_F}, \\ \alpha_{P\perp} &= 0 \quad \quad \quad \text{si } \hbar\omega < \frac{\Delta_{\infty}}{E_F}. \end{aligned}$$

α_n est le coefficient d'atténuation dans le métal normal. Les effets de paires donnent donc une atténuation extrêmement faible $\alpha_{P\perp}/\alpha_n \lesssim 10^{-4}$ et certainement non mesurable.

Nous nous sommes intéressés ici à des ondes ultrasonores longitudinales. Pour les ondes transverses on obtient une atténuation du même ordre de grandeur.

2. Effets de diffusion

Ce sont les effets décrits par le couplage \mathcal{H}_1 . Comme pour les effets de paires il faut distinguer les deux géométries.

α) $Q \parallel \vec{Oz}$. Les règles de sélection pour une transition $(\mathbf{k}, \mu) \rightarrow (\mathbf{k}', \mu') + (\hbar\omega, Q)$ s'écrivent:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}' &= \mathbf{k} - \mathbf{Q} \\ \mu' &= \mu \\ E' &= E - \hbar\omega_Q. \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

Ici évidemment les effets de polarisation circulaire ne jouent pas un rôle crucial. L'élément de matrice pour la transition (II.7) a la forme:

$$N = \int_0^{\infty} r dr [f_{\mathbf{k}\mu}^+(r) f_{\mathbf{k}-\mathbf{Q},\mu}^+(r) - f_{\mathbf{k}\mu}^-(r) f_{\mathbf{k}-\mathbf{Q},\mu}^-(r)]. \quad (\text{II.8})$$

β) $Q \perp \vec{Oz}$. Ici, les règles de sélection s'écrivent:

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \mathbf{k}' \\ \mu &= \mu' \pm \nu \\ E' &= E - \hbar\omega_Q \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

ν est un entier ≥ 0 .

Les transitions avec $\nu = 0$ ne sont pas possibles (elles ne conservent pas l'énergie) donc $\nu \geq 1$. L'élément de matrice correspondant est :

$$N_{\perp}^{(\nu)} = \int_0^{\infty} r dr J_{\nu}(Qr) [f_{k\mu}^+ f_{k,\mu\pm\nu}^+ - f_{k\mu}^- f_{k,\mu\pm\nu}^-]. \quad (\text{II.10})$$

Nous évaluons N_{\parallel} et N_{\perp} avec les hypothèses utilisées pour évaluer M_{\perp} . On se convainc aisément que N_{\perp} et N_{\parallel} sont nuls à l'ordre zéro en $1/k_F \xi^*$, donc :

$$N_{\parallel} \sim \frac{1}{k_F \xi}, \quad N_{\perp}^{(\nu)} \simeq (Q\xi)^{\nu} \frac{1}{k_F \xi}.$$

Finalement le coefficient d'atténuation dû à la diffusion des excitations est donné en ordre de grandeur dans chacune des deux géométries par :

$$\begin{aligned} \alpha_{D\parallel} &\sim \alpha_n \frac{B}{H_{c2}} \frac{1}{(k_F \xi)^3} \left(\frac{v_F}{c_s}\right)^{5/2} \frac{k_B T}{E_F} \left(\frac{k_B T}{\Delta_{\infty}}\right)^{1/2} \cdot F_{\parallel} \left[\frac{\Delta_{\infty}}{k_B T} \left(\frac{\Delta_{\infty}}{E_F} \cdot \frac{v_F}{c_s}\right)^{1/3} \right], \\ \alpha_{D\perp} &\sim \alpha_n \frac{B}{H_{c2}} \frac{1}{(k_F \xi)^3} \frac{\Delta_{\infty}}{k_B T} \left(\frac{\Delta_{\infty}}{E_F}\right)^2 \left(\frac{v_F}{c_s}\right)^3 \cdot F_{\perp} \left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

avec

$$F_{\parallel}(u) = \int_u^{\infty} dx x^{3/2} \cdot f(x) \frac{df}{dx}$$

$$F_{\perp}(u) = \int_u^{\infty} dx x f(x) \frac{df}{dx}$$

$$f(x) = \frac{1}{e^x + 1}.$$

L'atténuation présente donc une anisotropie, mais il faut remarquer que dans les deux géométries :

$$\alpha_D \lesssim 10^{-5} \cdot \alpha_n \frac{B}{H_{c2}}.$$

L'atténuation est donc extrêmement faible à basse température, et l'anisotropie n'est probablement pas visible expérimentalement. (Il faut se rappeler que d'autres causes d'atténuation existent et peuvent être dominantes en pratique : en particulier les phonons sont couplés aux mouvements collectifs des lignes de vortex). La faible valeur de α n'est pas seulement due au petit nombre d'excitations de basse énergie (qui donne le facteur B/H_{c2}) mais surtout, comme nous l'avons déjà remarqué, au fait que les excitations de basse énergie donnent pour les ultrasons un très faible facteur de cohérence. Enfin l'ordre de grandeur de α que nous avons obtenu est valable aussi pour l'atténuation d'ondes ultrasonores transverses.

* Cette très faible valeur du facteur de cohérence traduit simplement qu'on s'intéresse à des états de basse énergie $E \sim \Delta_{\infty}^2/2E_F$ formés à partir d'électrons et de trous très voisins du niveau de Fermi, qui jouent des rôles presque équivalents, et se mélangent en proportions presque égales. On trouve pour la même raison, dans le modèle de BCS, lorsque $\xi \sim \Delta_{\infty}^2/2E_F$ un facteur de cohérence pour les ultrasons $u^2 - v^2 \sim 1/k_F \xi$.

Ce même facteur de cohérence intervient dans le calcul du moment diamagnétique d'une excitation, qui est donc très petit (d'ordre $\frac{\mu_B \mu}{k_F \xi}$, μ_B étant le magnéton de Bohr). Par contre le facteur de cohérence relatif au moment paramagnétique est de la forme $u^2 + v^2$, et les excitations de basse énergie ont un moment paramagnétique parallèle à Oz $M_{\mu\alpha}^{(\infty)} = (\mu - \frac{1}{2})\mu_B$.

En conclusion, il ne semble pas que l'atténuation des ultrasons puisse fournir des renseignements très directs sur nos excitations de basse énergie et sur leur seuil ($\sim \Delta_\infty^2/2E_F$). Nous allons voir maintenant que les expériences de relaxation nucléaire sont, elles mieux adaptées au problème qui nous intéresse.

III. Relaxation des spins nucléaires

Comme pour l'atténuation des ultrasons, nous calculons le temps de relaxation des spins nucléaires à basse température seulement ($T \ll T_c$), de façon à ce que l'effet dominant vienne des excitations de basse énergie. Nous négligeons encore les effets de vibration du réseau de lignes de vortex. Nous évaluons le temps de relaxation T_1 de la façon suivante [8]:

— Nous calculons le temps de relaxation en chaque point $T_1(\mathbf{r})$, dû à l'interaction de contact avec les excitations de type fermion.

— Nous résolvons l'équation de diffusion de l'aimantation nucléaire dans chaque maille du réseau de lignes par une méthode du type Wigner-Seitz.

1. Calcul de $1/T_1(\mathbf{r})$

L'hamiltonien d'interaction entre un spin nucléaire \mathbf{I} au site \mathbf{R} et les fermions s'écrit:

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = \Gamma \mathbf{I} \sum_{\sigma\sigma'} \int \Psi_\sigma^+(\mathbf{r}) (\sigma | \mathbf{S} | \sigma') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \Psi_{\sigma'}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \quad (\text{III.1})$$

σ et σ' sont des indices de spin.

Les excitations de paires sont négligeables car, la distance en énergie entre deux niveaux nucléaires est très petite devant le seuil $\Delta_\infty^2/2E_F$. En ne gardant donc dans (III.1) que les termes de diffusion d'un fermion, on obtient [9]

$$\frac{1}{T_1(\mathbf{R})} = L(\mathbf{R}) \frac{\text{tr } \mathcal{H}_z^2 + 2 \text{tr } \mathcal{H}_{\text{ad}}^2}{\text{tr } \mathcal{H}_z^2 + \text{tr } \mathcal{H}_{\text{ad}}^2} \quad (\text{III.2})$$

$$L(\mathbf{R}) = \frac{2\pi}{\hbar} \Gamma^2 \sum_{nn'} f(E') [1 - f(E)] |u_n^*(\mathbf{R}) u_{n'}(\mathbf{R}) + v_n^*(\mathbf{R}) v_{n'}(\mathbf{R})|^2 \delta(E - E' + \hbar\omega).$$

$\hbar\omega \sim 10^{-4}$ K est la distance entre deux niveaux nucléaires. \mathcal{H}_z et \mathcal{H}_{ad} sont les hamiltoniens Zeeman et dipole-dipole pour les spins nucléaires.

Quand $H > H_{c1}$ les champs au voisinage de la ligne sont au minimum de l'ordre de $2H_{c1}$, donc en général très supérieurs au champ dipolaire qui intervient dans \mathcal{H}_{ad} et nous pouvons écrire simplement

$$\frac{1}{T_1(\mathbf{R})} = L(\mathbf{R}).$$

Puisque $\hbar\omega \ll \Delta_\infty$, l'interaction avec les spins nucléaires n'induit pratiquement pas de transitions entre états de basse énergie et états localement uniformes.

Ceci nous permet de calculer séparément les contributions des deux sortes d'états. D'autre part les états localement uniformes ont une faible amplitude dans la région du coeur d'une ligne, alors que les états de basse énergie sont localisés dans cette région.

Nous négligeons donc dans le domaine $r \leq \xi$ le temps de relaxation dû aux états localement uniformes (ce qui nous permet de traiter ces états dans l'approximation locale de CYROT [I]).

α) Effet des états localisés. Soit $(1/T_1(\mathbf{R}))$ le terme dû à ces états.

D'après (I.13) les parties radiales des fonctions $u_{\alpha\mu}$ et $v_{\alpha\mu}$ relatives à ces états s'écrivent, pour $r > r_c$

$$\begin{aligned} f_{\alpha\mu}^+(r) &= \frac{1}{\sqrt{A_{\alpha\mu}}} 2 C_m(r) e^{-K(r)} \cos \left[k_F r \sin \alpha + \frac{m^2}{2k_F r \sin \alpha} - \frac{\pi\mu}{2} + \frac{\Psi(r)}{2} \right], \\ f_{\alpha\mu}^-(r) &= \frac{1}{\sqrt{A_{\mu\alpha}}} 2 C_m(r) e^{-K(r)} \sin \left[k_F r \sin \alpha + \frac{m^2}{2k_F r \sin \alpha} - \frac{\pi\mu}{2} - \frac{\Psi(r)}{2} \right], \\ C_m(r) &= \left(\frac{2}{\pi \sqrt{k_F^2 r^2 \sin^2 \alpha - m^2}} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Etant donnée la forme (III.2) de $1/T_1(\mathbf{R})$ nous devons les étudier en fonction de la variable $\sin \alpha$.

Elles sont le produit de fonctions oscillant avec une longueur d'onde $\sim 1/k_F r$ (car $\Psi(r)$ et $\frac{m^2}{2k_F r \sin \alpha}$ varient beaucoup plus lentement que $k_F r \sin \alpha$) par une enveloppe lentement variable dont la portée est celle de e^{-K} , soit $\sin \alpha \sim r^2/\xi^2$.

La longueur d'onde des oscillations est très inférieure à cette portée quand $r \gg r_1$ avec $r_1 = (\xi^2/k_F)^{1/3} \ll \xi$.

Comme dans le cas des ultrasons, nous remplaçons dans les intégrales les parties oscillantes par leurs valeurs moyennes sur une période (l'erreur dans la région $r > r_1$ est d'ordre $1/k_F \xi \ll 1$).

Nous étendons formellement l'expression de $(1/T_1(\mathbf{R}))_1$ ainsi obtenue à la région $r < r_1$ et $r < r_c$ (où les expressions (I.13) ne sont pas valables). En effet r_1 et r_c sont très inférieurs à ξ , et un traitement plus exact dans cette petite région centrale ne donnerait dans le résultat que de très petites corrections.

Nous prenons $C_m^2(r) \simeq \frac{2}{\pi k_F r \sin \alpha}$ car $m^2 \ll k_F^2 r^2 \sin^2 \alpha$ quand

$$r \gg \frac{m}{k_F \sin \alpha} \sim \frac{E}{\Delta_\infty} \xi \ll \xi.$$

Enfin dans l'expression du spectre de basse énergie $E = \frac{\mu \Delta'}{k_F \sin \alpha} g(\alpha)$ nous faisons $g(\alpha) = 1$, et nous utilisons partout ailleurs pour $\Delta(r)$ une forme analytique simple

$$\Delta(r) = \Delta_\infty \operatorname{tgh} \left(\frac{\Delta' r}{\Delta_\infty} \right), \quad \left(\frac{\Delta'}{\Delta} \simeq \frac{1}{\xi} \right).$$

Cette forme assure pour $\Delta(r)$ un bon comportement pour $r \rightarrow 0$ et $r \rightarrow \infty$. (La forme détaillée de $\Delta(r)$ n'intervient dans les résultats que par des coefficients numériques peu importants).

Toutes ces approximations permettent de calculer la constante de normalisation $A_{\mu\alpha}$ relative à un niveau $E_{\mu\alpha}$

$$A_{\mu\alpha} = \frac{k_F \Delta' \sin \alpha}{L \Delta_\infty} \frac{\Gamma \left(\frac{\gamma}{\sin \alpha} + \frac{1}{2} \right)}{8 \sqrt{\pi} \Gamma \left(\frac{\gamma}{\sin \alpha} \right)}. \quad (\text{III.3})$$

L est la dimension du spécimen dans la direction du champ magnétique, Γ la fonction d'Euler, γ une constante $\simeq 1$ ($\gamma = 0,7$). Avec les mêmes approximations

on obtient :

$$\left(\frac{1}{T_1(\mathbf{R})}\right)_1 = \frac{\Gamma^2 k_F^4}{\pi^4 \hbar \Delta_\infty^2} \frac{1}{R^2} I^2(\mathbf{R}) \int dE dE' f(E') [1 - f(E)] \delta(E - E' + \hbar \omega), \quad (\text{III.4})$$

$$I(\mathbf{R}) = \int_0^{\pi/2} \sin^2 \alpha \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma}{\sin \alpha} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{\sin \alpha}\right)} \frac{1}{\left[\cosh^2\left(\frac{r \Delta'}{\Delta_\infty}\right)\right]^{\gamma/\sin \alpha}} d\alpha.$$

Nous permettons à $\sin \alpha$ de prendre des valeurs très petites car ces faibles valeurs n'introduisent qu'une erreur d'ordre $1/k_F \xi$.

Nous pouvons obtenir le comportement de $I(R)$ aux courtes ($r \ll \xi$) et aux longues ($r \gg \xi$) distances.

$$r \ll \xi, \quad I(R) \simeq 0,7$$

$$r \gg \xi, \quad I(R) \simeq \frac{\Gamma\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\gamma)} \sqrt{\frac{\pi \Delta_\infty}{2 \gamma \Delta' R}} \left[\cosh \frac{R \Delta'}{\Delta_\infty}\right]^{-2\gamma}. \quad (\text{III.5})$$

$1/T_1(\mathbf{R})_1$ a donc une portée de l'ordre de ξ , au delà de laquelle il décroît à peu près comme $1/T_{1n} \cdot \xi^3/R^3 e^{-2R/\xi}$, où T_{1n} est le temps de relaxation dans la phase normale.

Enfin $\hbar \omega \sim 10^{-4} \text{ }^\circ\text{K}$ est très inférieur à toutes les énergies en cause, nous faisons $\hbar \omega = 0$ puisque la densité d'états est régulière.

Si $k_B T \gg \Delta_\infty^2/2 E_F$:

$$F(T) = \int dE dE' f(E') [1 - f(E)] \delta(E - E' + \hbar \omega) \simeq \frac{k_B T}{2}.$$

Si $k_B T < \Delta_\infty^2/2 E_F$ cette intégrale devient exponentiellement petite. On obtient donc finalement,

$$\left[\frac{1}{T_1(\mathbf{R})}\right]_1 \simeq \frac{\xi^2}{R^2} \cdot \frac{1}{T_{1n}} I^2(R) \frac{2F(T)}{k_B T}. \quad (\text{III.6})$$

Si $k_B T \gg \Delta_\infty^2/2 E_F$, T_{11} obéit en chaque point à une loi de KORRINGA, comme on l'attend à partir de la forme de la densité d'états et la moyenne sur tout l'espace de $1/T_1(R)$ est

$$\frac{1}{T_1(R)} = \frac{1}{V} \int \frac{1}{T_1(R)} d^3R \simeq \frac{B}{H_{c2}} \frac{1}{T_{1n}}.$$

β) **Effet des états localement uniformes.** Nous supposons pour calculer le terme $[1/T_1(R)]_u$ que

$$\hbar \omega \ll k_B T \ll P_F v_s(\mathbf{R}) < \Delta_\infty$$

où, suivant les notations de CYROT, v_s est la vitesse superfluide en un point \mathbf{R} .

La première inégalité est en pratique toujours satisfaite.

$P_F v_s(R) < \Delta_\infty$ est la condition de validité de la description en états localement uniformes.

Dans la région ($\xi < r < \xi T_c/T$) où ces inégalités sont satisfaites, on calcule facilement $[1/T_1(R)]_u$ par une méthode analogue à celle de SLICHTER et [9] HEBEL.

$$\left[\frac{1}{T_1(R)}\right]_u = \frac{\pi \Gamma^2}{\hbar} [N(0)]^2 \left(\frac{v_c}{v_s(R)}\right)^2 \frac{k_B T}{\Delta_\infty} (k_B T) e^{-(\Delta_\infty - p_F v_s(R))/k_B T}, \quad (\text{III.7})$$

$$\left(\xi < r < \xi \frac{T_c}{T}\right)$$

v_c est la vitesse critique du matériau ($p_F v_c = \Delta_\infty$)

$$\left[\frac{1}{T_1(R)} \right]_u \simeq \frac{1}{T_{1n}} \left(\frac{v_c}{v_s(R)} \right)^2 \frac{2k_B T}{\Delta_\infty} e^{-(\Delta_\infty - p_F v_s(R))/k_B T}. \quad (\text{III.8})$$

La portée de ce terme est celle de l'exponentielle, soit

$$R \sim \xi \frac{T_c}{T_c - T} \ll \xi \frac{T_c}{T}.$$

La condition $P_F v_s \ll kT$ restreint la validité de (III.7) à la région de l'espace

$$r < \xi \frac{T_c}{T} \left(\frac{T_c}{T} \gg 1 \right).$$

On opérera autant que possible en champ uniforme pour éliminer les effets d'élargissement inhomogène. Il faut donc que la distance d'entre les lignes soit inférieure à la profondeur de pénétration λ .

Notre approximation décrit donc tout l'espace (évidemment à l'exclusion des coeurs) si

$$\frac{\lambda}{\xi} < \frac{T_c}{T}.$$

Avec par exemple $T_c \sim 20^\circ\text{K}$, $T \simeq 2^\circ\text{K}$, cette condition limite le paramètre de LANDAU et GINSBURG à $\varkappa < 10$.

De toutes façons nous verrons qu'il n'est pas très important d'avoir une forme analytique exacte de $(1/T_1(R))_u$ aux très longues distances ($r \gg \xi$). Le seul résultat important est que, lorsque

$P_F v_s < k_B T$ (soit $r > \xi T_c/T \gg \xi$), on sait qualitativement que

$$\left[\frac{1}{T_1(R)} \right]_u \simeq \left(\frac{1}{T_1} \right)_{\text{BCS}}.$$

La vitesse totale de relaxation au point R est donnée par :

$$\frac{1}{T_1(R)} = \left(\frac{1}{T_1(R)} \right)_l + \left(\frac{1}{T_1(R)} \right)_u. \quad (\text{III.9})$$

Le terme dû aux états localisés est dominant jusqu'à de longues distances.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{T_1(R)} \right)_l &> \left(\frac{1}{T_1(R)} \right)_u \quad \text{pour } r < r_0 \\ r_0 &\sim \xi \frac{T_c}{T} \gg \xi. \end{aligned}$$

Il faut donc aller assez loin d'une ligne pour que l'effet des états localement uniformes devienne important. De plus, dans la plus grande partie de l'espace

$$\left(r > \xi \frac{T_c}{T_c - T} \right), \left[\frac{1}{T_1(R)} \right]_u \simeq \left(\frac{1}{T_1} \right)_{\text{BCS}}.$$

Comme nous nous plaçons à basse température ($T \ll T_c$), $(1/T_1)_{\text{BCS}}$ est très petit ($\propto e^{-\Delta_\infty/k_B T}$).

Nous étudierons donc le terme $[1/T_1(R)]_u$ comme une correction à l'effet des états localisés.

2. Résolution de l'équation de diffusion

L'aimantation nucléaire p obéit à l'équation de diffusion [10]

$$-\frac{\partial(p_0 - p)}{\partial t} = -D \Delta(p_0 - p) + \frac{p_0 - p}{T_1(r)}. \quad (\text{III.10})$$

p_0 est l'aimantation à l'équilibre thermique des spins nucléaires.

Le coefficient de diffusion D tient compte des interactions spin-spin (interactions dipole-dipole, Ruderman-Kittel, etc. ...). Nous supposons que les inhomogénéités du champ magnétique $h(r)$ sont suffisamment faibles pour ne pas gêner la diffusion. Numériquement ceci suppose:

a $|\partial h/\partial r| < \Delta H$ où a est la distance interatomique et ΔH la largeur de raie nucléaire.

Il faut ajouter à cette équation des conditions aux limites. Les lignes de vortex ont tendance à s'ordonner en réseau triangulaire [11]. L'établissement d'un ordre à longue distance peut être gêné par les défauts du matériau, mais de toutes façons il s'établit certainement un ordre à courte distance caractérisé par une distance moyenne $2R$ entre 2 lignes proches voisines. Nous tiendrons compte de cet ordre en utilisant pour calculer l'aimantation une méthode cellulaire:

— dans chaque cellule de rayon R centrée sur une ligne i nous prenons pour temps de relaxation

$$\left[\frac{1}{T_1(R)} \right]_i = \left[\frac{1}{T_1(R)} \right]_u + \left[\frac{1}{T_1(R)} \right]_{li} \quad \text{où} \quad [T_1(R)]_{li}$$

est le terme correspondant aux états de basse énergie centrée sur la ligne i .

— les conditions aux limites sont celles de Wigner-Seitz

$$\left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=R} = p'(R) = 0. \quad (\text{III.11})$$

— $p = p_0$ au centre de chaque ligne, où la relaxation est presque instantanée (elle ne l'est pas tout à fait car $(1/T_1)_{r=0}$ n'est infini que dans l'approximation où on néglige une région $r < r_c$ très petite par rapport aux dimensions du coeur).

D'après la forme (III.9) de $1/T_1(r)$, la région dans laquelle la relaxation par couplage avec les spins électroniques est la plus efficace est celle du coeur, où $1/T_1(r) \simeq C/r^2$. L'équation de diffusion montre qu'on peut distinguer 2 régimes selon la valeur de C/D .

($C/D \sim \xi^2/T_{1n}D$ lorsque $k_B T > \Delta_\infty^2/2E_F$) (qui croît avec le numéro atomique du matériau utilisé). En général $D \sim 10^{-13} \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1}$. Pour des métaux lourds $T_{1n} \sim 0,5 \text{ sec}$. à 1°K , donc C/D ne devient pas plus petit que 10^{-1} environ tant que kT reste supérieur à $\Delta_\infty^2/2E_F$. Par contre quand $kT < \Delta_\infty^2/2E_F$, le coefficient C devient exponentiellement petit, et C/D peut devenir très petit.

Nous étudierons seulement les cas extrêmes: $C/D \ll 1$ et $C/D \gg 1$.

a) Diffusion rapide ($C/D \ll 1$). Ce cas ne se rencontrera sans doute qu'à très basse température ($kT < \Delta_\infty^2/2E_F$), ou peut être pour $kT > \Delta_\infty^2/2E_F$ dans des matériaux à très courte longueur de cohérence, par exemple Nb_3Sn .

Dans ce régime, la seule région où $T_1(r)$ contribue notablement à la relaxation est la région du coeur où $1/T_1(r)$ est grand.

Aux plus longues distances, le temps de diffusion est beaucoup plus court que $T_1(r)$ (et a fortiori que $(T_1)_{\text{BCS}}$), le temps de relaxation dépend donc faiblement de la forme exacte de $1/T_1(r)$ à longue distance (ceci nous permet en particulier de négliger la relaxation due aux états localement uniformes).

Nous simplifions donc le calcul en prenant pour $1/T_1(r)$ la forme suivante:

$$\frac{1}{T_1(r)} = \begin{cases} \frac{C}{r^2} & r < l \\ 0 & r > l. \end{cases}$$

Pour l'instant l est une longueur quelconque qui devrait être optimisée par un calcul variationnel. Ce calcul serait très compliqué, mais nous verrons que la dépendance en l de T_1 est lente. D'autre part la forme vraie de $1/T_1(r)$ montre que grossièrement $l \sim \xi$. Ces ordres de grandeurs nous suffiront pour estimer T_1 .

Le problème de diffusion se résout de la façon suivante [12]: on cherche les fonctions propres stationnaires $p_1(r), p_2(r) \dots$ etc. de l'équation (III.10) et les temps propres correspondants $\tau_1, \tau_2 \dots$. Donc $p_i(r, t) = p_i(r) e^{-t/\tau_i}$.

Toute distribution d'aimantation $p(r)$ à l'instant $t = 0$ satisfaisant aux conditions aux limites se développe sur l'ensemble complet des $p_i(r)$ en

$$p(r) = \sum_i \alpha_i p_i(r)$$

et évolue dans le temps en

$$p(r, t) = \sum_i \alpha_i p_i(r) e^{-t/\tau_i}.$$

Si l'un des temps propres, par exemple τ_1 , est nettement plus grand que tous les autres, au bout d'un temps très court

$$p(r, t) \simeq \alpha_1 p_1(r) e^{-t/\tau_1}$$

donc la relaxation est à peu près exponentielle.

Nous posons $\delta p = p_0 - p$ la solution nulle à l'origine de (III.10) est

$$\delta p = J_{\sqrt{\frac{C}{D}}} \left(\frac{r}{\sqrt{D\tau}} \right) \quad (r < l)$$

(J est une fonction de Bessel) (III.12)

$$\delta p = B J_0 \left(\frac{r}{\sqrt{D\tau}} \right) + B' N_0 \left(\frac{r}{\sqrt{D\tau}} \right) \quad (r > l)$$

B et B' sont des constantes à déterminer.

Comme $\sqrt{\frac{C}{D}} \ll 1$, $J_{\sqrt{\frac{C}{D}}}$ a son premier maximum à une très petite valeur de son argument. On s'attend donc, en imposant que $\delta p'(R) = 0$ à ce que $\frac{R}{\sqrt{D\tau_1}} \ll 1$ (si τ_1 est le plus grand temps propre).

Nous utilisons cette hypothèse que nous vérifierons a posteriori. Dans ce cas, la condition à $r = R$ et le raccordement à $r = l$ montrent que τ_1 satisfait à l'équation

$$\frac{D\tau_1}{R^2} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{D}{C}} + \ln \frac{2\sqrt{D\tau_1}}{\gamma l} \right) \quad (III.13)$$

où $\ln \gamma = 0,577$ est la constante d'Euler.

En première approximation:

$$\tau_1 \simeq \frac{R^2}{2\sqrt{CD}}$$

(ce qui justifie l'approximation de départ $\sqrt{D\tau_1} \gg R$).

En seconde approximation:

$$\frac{D\tau_1}{R^2} \simeq \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{D}{C}} + \ln \left[\frac{\sqrt{2}}{\gamma} \frac{R}{l} \left(\frac{D}{C} \right)^{1/4} \right] \right).$$

La variation de τ_1 avec l n'est que logarithmique, donc lente. On sait qualitativement que la valeur de l que donnerait un calcul variationnel est $\sim \xi$, il est donc peu important de connaître la valeur exacte de l .

$$l \sim \xi, \quad R \lesssim \lambda \quad \text{donc,} \quad \frac{R}{l} \left(\frac{D}{C} \right)^{1/4} \lesssim \kappa \left(\frac{D}{C} \right)^{1/4}.$$

Si $D/C \gg 1$ le terme logarithmique est petit devant $\sqrt{D/C}$.

Enfin nous négligeons le temps $T_1(r)$ dû aux états localement uniformes. Cet effet n'a qu'une portée $\sim \xi \frac{T_c}{T_c - T}$, au delà de laquelle $[T_1(r)] \sim (T_1)_{\text{BCS}}$ et $(T_1)_{\text{BCS}}$ est beaucoup plus grand que le temps de diffusion. Cet effet n'interviendrait donc que pour modifier légèrement la valeur optimum de l .

On obtient ainsi:

$$\tau_1 \simeq \frac{R^2}{2\sqrt{CD}}.$$

Enfin nous pouvons avoir le second temps propre τ_2 . D'après (III.12) il correspond à la seconde racine de l'équation

$$BJ'_0 \left(\frac{R}{\sqrt{D\tau_2}} \right) + B'N'_0 \left(\frac{R}{\sqrt{D\tau_2}} \right) = 0$$

donc

$$\frac{R}{\sqrt{D\tau_2}} \sim 1$$

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} \simeq \sqrt{\frac{C}{D}} \ll 1.$$

τ_1 est donc beaucoup plus élevé que tous les autres temps propres, et la relaxation est quasi-exponentielle. Des mesures de τ_1 dans ce domaine devraient permettre de déterminer C et d'étudier sa variation en température surtout dans le domaine ($k_B T < \Delta_\infty^2 / 2 E_F$) où il est exponentiellement petit.

b) Diffusion lente ($C/D \gg 1$). C'est probablement ce qu'on rencontrera dans des matériaux lourds, où les fonctions d'onde électroniques ont de très forts pics près des noyaux, quand $k_B T > \Delta_\infty^2 / E_F$.

Nous prenons de nouveau comme forme d'essai

$$\left(\frac{1}{T_1(r)} \right)_1 = \begin{cases} \frac{C}{r^2} & r < l \\ 0 & r > l. \end{cases}$$

Comme dans le cas précédent on peut représenter l'effet des états localement uniformes par un déplacement du rayon de coupure l , et un temps de relaxation $(1/T_1)_{\text{BCS}}$ au delà de l . La diffusion ne peut être considérée comme lente que dans la région du coeur. En effet comme $T \ll T_c$, $(T_1)_{\text{BCS}}$ est encore grand par rapport au temps de diffusion T_D . Nous négligerons donc le terme $(1/T_1)_{\text{BCS}}$.

On obtient alors, comme dans le régime de diffusion rapide:

$$\delta p(r) = J \sqrt{\frac{C}{D}} \left(\frac{r}{\sqrt{D\tau}} \right) \quad r < l.$$

$$\delta p(r) = BJ_0 \left(\frac{r}{\sqrt{D\tau}} \right) + B'N_0 \left(\frac{r}{\sqrt{D\tau}} \right) \quad (r > l).$$

Mais ici

$$\sqrt{\frac{C}{D}} \gg 1, \text{ donc } J_{\sqrt{\frac{C}{D}}} \left(\frac{l}{\sqrt{D\tau}} \right) \simeq \left(\frac{l}{\sqrt{D\tau}} \right) \sqrt{\frac{C}{D}} \ll 1$$

car on vérifiera a posteriori que

$$\frac{l}{\sqrt{D\tau}} \ll \sqrt{\frac{C}{D}}.$$

On peut donc, à une bonne approximation, considérer le «potentiel» $1/T_1(r)$ comme celui d'un cylindre dur de rayon l .

Nous supposons de plus $\frac{l}{\sqrt{D\tau}} \ll 1$, et nous obtenons alors en écrivant les conditions de raccordement et la condition de Wigner-Seitz.

$$\frac{1}{\tau_1} \simeq \frac{D\pi^2}{16R^2} \quad (\text{III.14})$$

donc $\frac{l}{\sqrt{D\tau_1}} \simeq \frac{l}{R} \ll 1$ puisque $H \ll H_{c2}$, ce qui vérifie l'hypothèse précédente.

Enfin les autres temps propres τ_2, τ_3, τ_n sont donnés par

$$\frac{1}{\tau_n} \simeq \frac{D\pi^2}{R^2} \left(n + \frac{1}{4} \right)^2.$$

On voit que:

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} \simeq \frac{1}{25}.$$

Donc dans ce régime la relaxation est encore en gros exponentielle, avec un temps de relaxation

$$\tau_1 \simeq 1.6 \frac{R^2}{D}.$$

Cette forme de τ_1 n'est évidemment qu'une approximation d'ordre zéro en D/C , mais on voit que dans ce régime le temps de relaxation dépend très peu de la valeur exacte de C , et de la forme détaillée de $T_1(R)$. Les mesures du temps de relaxation nucléaire dans ce régime (basse température et diffusion lente) devraient donc permettre d'évaluer le coefficient de diffusion de spin.

Nous remercions le Professeur P. G. DE GENNES qui nous a aidés et dirigés tout au long de ce travail.

Bibliographie

- [1] CYROT, M.: (article précédent).
- [2] BOGOLUBOV, N. N., V. V. TOLMACHEV, and D. V. SHIRKOV: A new method in the theory of superconductivity, Consultants Bureau Inc. New York, 1959.
- [3] ABRIKOSOV, A. A.: J. Exptl. Theoret. Phys. (USSR) **32**, 1442 (1957). Trad: Soviet Phys.-JETP **5**, 1174 (1957).
- [4] DE GENNES, P. G.: Cours de supraconductivité, Orsay 1963.
- [5] GINSBURG, V. L., and L. P. PITAEFSKII: J. Exptl. Theor. Phys. (USSR) **34**, 1240 (1958). Trad: Soviet Phys.-JETP **7**, 858 (1958).
- [6] DE GENNES, P. G., and J. MATRICON: Rev. Modern Phys. **36**, 45 (1964).
- [7] BARDEEN, J., L. N. COOPER, and J. R. SCHRIEFFER: Phys. Rev. **108**, 1175 (1957).
- [8] DE GENNES, P. G.: J. Phys. Chem. Solids **7**, 345 (1958).
- [9] HEBEL, L. C., et C. P. SLICHTER: Phys. Rev. **113**, 1504 (1959).
- [10] ABRAGAM, A.: The principles of nuclear magnetism (Oxford-Clarendon Press 1961).
- [11] MATRICON, J.: Phys. Letters **9**, 289 (1964).
KLEINER, W. H., L. M. ROTH et S. H. AUTLER: Phys. Rev. A **1226** (1964).
- [12] CAROLL, C., P. G. DE GENNES, and J. MATRICON: Phys. Letters **9**, 307 (1964).