

Als charakteristisches Merkmal dieses speciellen orthogonalen Systems wurde bisher die Eigenschaft angesehen, dass seine Coefficienten, wenn man sie, der beim Systeme (O) angewandten Bezeichnung entsprechend, durch $c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}; \dots; c_{41}, c_{42}, c_{43}, c_{44}$ repräsentirt, den Bedingungen $c_{\mu\nu} = c_{\nu\mu}$, $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$, genügen, oder, mit anderen Worten, dass das System zugleich ein involutorisches ist. Dieser Anschauung entsprechend wurde denn auch, um zu einer Verallgemeinerung der auf dem Systeme (\bar{O}) basirenden RIEMANN'schen Thetaformel zu gelangen, bei der betreffenden, in der Einleitung zur vorhergehenden Arbeit erwähnten Untersuchung ebenfalls ein involutorisches orthogonales Gleichungssystem zu Grunde gelegt, d. h. ein orthogonales Gleichungssystem von der Form (O), bei dem die Coefficienten c noch der weiteren Bedingung $c_{\mu\nu} = c_{\nu\mu}$ für jedes μ und ν von 1 bis n unterworfen sind. Da aber die Thetaformel, welche einem solchen durch die Bedingung $c_{\mu\nu} = c_{\nu\mu}$ specialisirten orthogonalen Systeme entspricht, von der in der vorhergehenden Arbeit abgeleiteten, dem allgemeinen orthogonalen Systeme (O) entsprechenden Formel (θ) nur unwesentlich verschieden ist, insofern als sie ohne Weiteres in diese übergeht, sobald man allgemein $c_{\mu\nu}$ mit $c_{\nu\mu}$ als identisch betrachtet, so kann die erwähnte Formel nicht mehr als eine der RIEMANN'schen Thetaformel an die Seite zu stellende allgemeinere Formel angesehen werden, da nichts von dem, was für jene charakteristisch ist, erhalten geblieben, und es drängt sich daher jetzt die Frage auf, worin denn eigentlich das wahre Wesen der RIEMANN'schen Thetaformel oder, was auf dasselbe hinauskommt, des ihr zu Grunde liegenden orthogonalen Systems (\bar{O}) zu suchen sei. Ist das wahre Wesen des Systems (\bar{O}) ergründet, so wird sich auch die naturgemässe Verallgemeinerung desselben und damit zugleich die naturgemässe Verallgemeinerung der RIEMANN'schen Thetaformel ergeben.

Verschiedene specielle Untersuchungen haben uns nun zu der Erkenntniss geführt, dass als wesentliche Eigenschaft des orthogonalen Systems (\bar{O}) nicht die zu betrachten ist, dass dasselbe involutorisch ist, sondern vielmehr die, dass die vier bei ihm auf der linken Seite stehenden Formen:

$$\begin{aligned} x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)} + x^{(4)}, & \quad x^{(1)} + x^{(2)} - x^{(3)} - x^{(4)}, \\ x^{(1)} - x^{(2)} + x^{(3)} - x^{(4)}, & \quad x^{(1)} - x^{(2)} - x^{(3)} + x^{(4)} \end{aligned}$$

einander congruent sind nach der auf der rechten Seite stehenden Zahl z als Modul, wenn man allgemein zwei lineare Formen:

$$a_1 x^{(1)} + a_2 x^{(2)} + \dots + a_n x^{(n)}, \quad b_1 x^{(1)} + b_2 x^{(2)} + \dots + b_n x^{(n)}$$

mit ganzzahligen Coefficienten a, b einander congruent nennt nach einer ganzen Zahl m als Modul, sobald:

$$a_1 \equiv b_1 \pmod{m}, a_2 \equiv b_2 \pmod{m}, \dots, a_n \equiv b_n \pmod{m}$$

ist, und die Aufgabe, die wir im Folgenden zunächst lösen werden, besteht darin, zu zeigen, dass das ursprünglich nur der Bedingung der Orthogonalität unterworfen System (O), sobald man für dasselbe die weitere Bedingung einführt, dass die n bei ihm auf der linken Seite stehenden Formen:

$$c_{11} x^{(1)} + \dots + c_{1n} x^{(n)}, c_{21} x^{(1)} + \dots + c_{2n} x^{(n)}, \dots, c_{n1} x^{(1)} + \dots + c_{nn} x^{(n)}$$

einander congruent sind nach der auf der rechten Seite stehenden, zunächst noch unbestimmten ganzen Zahl r als Modul, sowohl in dem Falle, wo n eine ungerade, als auch in dem Falle, wo n eine gerade Zahl ist, von Unwesentlichem abgesehen, in ein in jeder Beziehung wohl bestimmtes System von Gleichungen übergeht. Es wird sich dann weiter ergeben, dass das im letzteren Falle, also bei geradem n , entstehende System für $n = 4$ auf das System ($\bar{0}$) führt, und dass den beiden allgemeinen Systemen Thetaformeln entsprechen, welche alle die RIEMANN'sche Thetaformel auszeichnenden Eigenthümlichkeiten besitzen.

1.

Der erste Theil der gestellten Aufgabe besteht darin, die Coefficienten c des Systems:

$$(O) \quad \begin{aligned} c_{11} x^{(1)} + c_{12} x^{(2)} + \dots + c_{1n} x^{(n)} &= ry^{(1)}, \\ c_{21} x^{(1)} + c_{22} x^{(2)} + \dots + c_{2n} x^{(n)} &= ry^{(2)}, \\ \dots & \\ c_{n1} x^{(1)} + c_{n2} x^{(2)} + \dots + c_{nn} x^{(n)} &= ry^{(n)}, \end{aligned}$$

bei beliebig gegebenem n als ganze Zahlen so zu bestimmen, dass nicht nur dieses System ein orthogonales wird, sondern auch die n auf der linken Seite desselben stehenden linearen Formen einander congruent werden nach der auf der rechten Seite stehenden, zunächst noch unbestimmten ganzen Zahl r als Modul. Der ersten Bedingung entsprechend haben die Zahlen c die Gleichungen:

$$(I_0) \quad c_{1\mu}c_{1\mu'} + c_{2\mu}c_{2\mu'} + \dots + c_{n\mu}c_{n\mu'} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \mu' \geq \mu, \\ r^2, & \text{wenn } \mu' = \mu, \end{cases}$$

oder, was dasselbe, die damit äquivalenten Gleichungen:

$$(I) \quad c_{\mu 1}c_{\mu' 1} + c_{\mu 2}c_{\mu' 2} + \dots + c_{\mu n}c_{\mu' n} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \mu' \geq \mu, \\ r^2, & \text{wenn } \mu' = \mu, \end{cases}$$

für jedes μ und μ' von 1 bis n zu erfüllen, während sie nach Hinzutritt der zweiten Bedingung ausserdem noch den Congruenzen:

$$(II) \quad c_{1\nu} \equiv c_{2\nu} \equiv \dots \equiv c_{n\nu} \pmod{r}$$

für jedes ν von 1 bis n genügen müssen. Bei der folgenden Untersuchung sollen zwei Systeme von je n^2 Zahlen c , die man sich immer in quadratischer Anordnung geschrieben zu denken hat, als nicht verschieden betrachtet werden, wenn man das eine der beiden Systeme aus dem anderen dadurch erhalten kann, dass man die Verticalreihen des letzteren in passender Weise umstellt und die sämtlichen Glieder gewisser der Verticalreihen mit -1 multiplicirt. Diese Auffassung erscheint gerechtfertigt, einmal, weil alle durch die genannten Operationen aus einem Systeme von Grössen c hervorgehenden neuen Systeme den für diese Grössen oben gestellten Bedingungen (I), (II) genügen, sobald das ursprüngliche System es thut, dann aber auch, weil die den so entstehenden Systemen von Grössen c entsprechenden Gleichungssysteme (O) sämtlich aus dem ursprünglichen dadurch erhalten werden können, dass man in demselben die Grössen x in passender Weise ihre Plätze wechseln lässt und zugleich gewisse derselben mit negativem Zeichen versieht.

Man setze jetzt zur Abkürzung:

$$c_{11} = p_1, c_{12} = p_2, \dots, c_{1n} = p_n,$$

und bringe das System $c_{\mu 1}, c_{\mu 2}, \dots, c_{\mu n}$ für jedes μ von 2 bis n in die Form:

$$c_{\mu 1} = p_1 + q_{\mu 1}r, \quad c_{\mu 2} = p_2 + q_{\mu 2}r, \quad \dots, \quad c_{\mu n} = p_n + q_{\mu n}r;$$

es müssen dann, wenn anders die Congruenzen (II) erfüllt sein sollen, die q sämtlich ganze Zahlen sein. Führt man diese Ausdrücke an Stelle der Grössen c in die Gleichungen (I) ein, nachdem man dieselben in der Form:

$$\begin{aligned} c_{11}^2 + c_{12}^2 + \dots + c_{1n}^2 &= r^2, \\ c_{\mu 1}^2 + c_{\mu 2}^2 + \dots + c_{\mu n}^2 &= r^2, \\ c_{11}c_{\mu 1} + c_{12}c_{\mu 2} + \dots + c_{1n}c_{\mu n} &= 0, \\ c_{\mu 1}c_{\mu' 1} + c_{\mu 2}c_{\mu' 2} + \dots + c_{\mu n}c_{\mu' n} &= 0, \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} \mu = 2, 3, \dots, n, \\ \mu' = 3, \dots, n, \\ \mu' > \mu, \end{array} \right)$$

geschrieben hat, so ergeben sich für die ganzen Zahlen p und q zunächst die Gleichungen:

$$\begin{aligned} p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2 &= r^2, \\ (p_1^2 + \dots + p_n^2) + 2(p_1q_{\mu 1} + \dots + p_nq_{\mu n})r + (q_{\mu 1}^2 + \dots + q_{\mu n}^2)r^2 &= r^2, \\ (p_1^2 + \dots + p_n^2) + (p_1q_{\mu 1} + \dots + p_nq_{\mu n})r &= 0, \\ (p_1^2 + \dots + p_n^2) + (p_1q_{\mu 1} + \dots + p_nq_{\mu n})r + (p_1q_{\mu' 1} + \dots + p_nq_{\mu' n})r \\ + (q_{\mu 1}q_{\mu' 1} + \dots + q_{\mu n}q_{\mu' n})r^2 &= 0, \end{aligned}$$

und weiter dann, durch passende Verbindung derselben, die damit äquivalenten Gleichungen:

$$\begin{aligned} (1) \quad p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2 &= r^2, \\ (2) \quad p_1q_{\mu 1} + p_2q_{\mu 2} + \dots + p_nq_{\mu n} &= -r, \\ (3) \quad q_{\mu 1}^2 + q_{\mu 2}^2 + \dots + q_{\mu n}^2 &= 2, \\ (4) \quad q_{\mu 1}q_{\mu' 1} + q_{\mu 2}q_{\mu' 2} + \dots + q_{\mu n}q_{\mu' n} &= 1, \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} \mu = 2, 3, \dots, n, \\ \mu' = 3, \dots, n, \\ \mu' > \mu, \end{array} \right)$$

deren Erfülltsein umgekehrt immer auch das Erfülltsein der Gleichungen (I) nach sich zieht.

Zunächst folgt nun aus der Gleichung (3), dass von den n derselben Horizontalreihe angehörig Zahlen q immer $n - 2$ den Werth 0 haben müssen, eine jede der beiden anderen aber einen der Werthe $+ 1, - 1$ besitzen muss. Allgemein sollen für die μ^{te} Horizontalreihe die beiden von 0 verschiedenen Grössen q mit $q_{\mu\rho_\mu}, q_{\mu\sigma_\mu}$ bezeichnet werden, sodass also ρ_μ, σ_μ die diesen beiden Grössen q entsprechenden Stellenzahlen in der Reihe $1, 2, \dots, n$ sind; welche der beiden Stellenzahlen aber mit ρ_μ , welche mit σ_μ zu bezeichnen ist, das soll erst später festgesetzt werden. Die Gleichung (4) zeigt dann weiter, dass irgend zwei, zu zwei verschiedenen Horizontalreihen gehörige, Zahlenpaare $\rho, \sigma -- \rho_\mu, \sigma_\mu$ das eine, ρ_μ', σ_μ' das andere — immer in der Beziehung zu einander stehen, dass eine Zahl des einen Paares mit einer Zahl des anderen Paares übereinstimmt, während die beiden noch übrigen Zahlen von einander verschieden sind; auch ergibt sich zugleich, dass die den beiden gleichen Stellenzahlen entsprechenden Grössen q denselben Werth, $+ 1$ oder $- 1$, besitzen müssen.

Man kann nun dem Gefundenen entsprechend zunächst in der zweiten und dritten Horizontalreihe die Bezeichnung für die Stellenzahlen der beiden jedesmal von 0 verschiedenen Grössen q so einrichten, dass $\rho_3 = \rho_2$ ist; es ist dann $\sigma_3 \geq \sigma_2$. In Bezug auf die beiden zur vierten Horizontalreihe gehörigen Zahlen ρ_4, σ_4 sind jetzt, bei passender Wahl der Bezeichnung, nur die beiden folgenden Fälle möglich: entweder ist $\rho_4 = \rho_3 = \rho_2$ und folglich σ_4 sowohl von σ_2 wie von σ_3 verschieden; oder aber es ist $\rho_4 = \sigma_2$ und folglich $\sigma_4 = \sigma_3$. Im letzteren Falle existirt zu den drei Zahlenpaaren $\rho_2, \sigma_2; \rho_3, \sigma_3; \rho_4, \sigma_4$ überhaupt kein viertes Zahlenpaar, welches der Bedingung genügt, mit jedem der drei Zahlenpaare eine und nur eine Zahl gemeinsam zu haben. Dieser Fall kann also nur für $n = 4$ eintreten und soll im Späteren besonders behandelt werden. Im ersten Falle dagegen muss von den beiden der fünften Horizontalreihe zugehörigen Zahlen ρ_5, σ_5 die eine mit $\rho_4 = \rho_3 = \rho_2$ übereinstimmen; dieselbe sei mit ρ_5 bezeichnet; die andere, σ_5 , ist dann von σ_2, σ_3 und σ_4 verschieden. Aus denselben Gründen muss aber weiter von den beiden der sechsten Horizontalreihe zugehörigen Zahlen ρ_6, σ_6 die eine, die mit ρ_6 bezeichnet werde, mit $\rho_5 = \dots = \rho_2$ übereinstimmen; die andere, σ_6 , ist dann von $\sigma_2, \dots, \sigma_5$ verschieden. Indem man diese Schlussweise unter Beibehaltung der bisher angewandten Bezeichnungsart fortsetzt, findet man allgemein

bei der jetzt noch die n Grössen p als ganze Zahlen und die an Stelle der q getretenen Grössen ε als Zahlen ± 1 so zu bestimmen sind; dass auch die Bedingungen (1), (2) erfüllt werden.

Für $n = 4$ tritt, wie schon oben erwähnt, noch ein specielles System hinzu, das durch die Beziehungen $\rho_3 = \rho_2$, $\rho_4 = \sigma_2$, $\sigma_4 = \sigma_3$ charakterisirt ist, und das, wenn man ähnlich wie oben:

$$\rho_2 = 1, \quad \sigma_2 = 2, \quad \sigma_3 = 3,$$

auch:

$$q_{21} = q_{31} = \varepsilon_1, \quad q_{22} = q_{42} = -\varepsilon_2, \quad q_{33} = q_{43} = -\varepsilon_3$$

setzt, die Gestalt annimmt:

$$\begin{array}{cccc}
 p_1 & , & p_2 & , & p_3 & , & p_4, \\
 p_1 + \varepsilon_1 r, & p_2 - \varepsilon_2 r, & p_3 & , & p_4, \\
 (\sigma) & & & & & & \\
 p_1 + \varepsilon_1 r, & p_2 & , & p_3 - \varepsilon_3 r, & p_4, \\
 p_1 & , & p_2 - \varepsilon_2 r, & p_3 - \varepsilon_3 r, & p_4.
 \end{array}$$

Die noch ausstehende Bestimmung der Grössen p und ε auf Grund der Gleichungen (1), (2) soll jetzt zunächst bei dem allgemeinen Systeme (Σ) durchgeführt werden. Berücksichtigt man, dass von den n in der Gleichung (2) vorkommenden Grössen $q_{\mu 1}, \dots, q_{\mu n}$ nur die beiden Grössen $q_{\mu 1}$ und $q_{\mu \mu}$ einen von Null verschiedenen Werth besitzen, und dass $q_{\mu 1} = \varepsilon_1$, $q_{\mu \mu} = -\varepsilon_\mu$ gesetzt wurde, so erkennt man, dass die Grössen p und ε den Gleichungen:

$$p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2 = r^2,$$

$$\varepsilon_1 p_1 - \varepsilon_\mu p_\mu = -r, \quad (\mu = 2, 3, \dots, n)$$

gemäss zu bestimmen sind. Aus der zweiten dieser Gleichungen folgt, da stets $\varepsilon_1^2 = 1$, $\varepsilon_\mu^2 = 1$ ist, für jedes μ von 2 bis n :

$$p_\mu = \varepsilon_1 \varepsilon_\mu (p_1 + \varepsilon_1 r),$$

und man erhält dann weiter, wenn man

$$p_1 + \varepsilon_1 r = P$$

setzt:

$$p_1 = P - \varepsilon_1 r, \quad p_\mu = \varepsilon_1 \varepsilon_\mu P, \quad p_\mu - \varepsilon_\mu r = \varepsilon_1 \varepsilon_\mu (P - \varepsilon_1 r). \quad (\mu = 2, 3, \dots, n)$$

Führt man die gewonnenen Ausdrücke an Stelle der Grössen p in die erste der beiden vorher aufgestellten Gleichungen ein, so geht dieselbe über in:

$$P(nP - 2\varepsilon_1 r) = 0,$$

und es können daher für P nur die beiden Werthe:

$$P = 0, \quad P = \frac{2\varepsilon_1 r}{n}$$

auftreten. Im ersten dieser beiden Fälle erhält man für die Grössen p die ganzzahligen Werthe:

$$p_1 = -\varepsilon_1 r, \quad p_2 = 0, \quad \dots, \quad p_n = 0,$$

und das vorher aufgestellte, mit (Σ) bezeichnete System der Grössen c nimmt durch Einführung dieser Werthe die Form an:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & -\varepsilon_1 r, & 0, & \dots, & 0, & & \\
 & 0, & -\varepsilon_2 r, & \dots, & 0, & & \\
 (\Sigma) & & & & & & \\
 & & & & & & \\
 & 0, & 0, & \dots, & -\varepsilon_n r. & &
 \end{array}$$

Im zweiten Falle dagegen erhält man für die Grössen p die Werthe:

$$p_1 = \varepsilon_1 \left(\frac{2r}{n} - r \right), \quad p_2 = \varepsilon_2 \frac{2r}{n}, \quad \dots, \quad p_n = \varepsilon_n \frac{2r}{n},$$

zugleich aber auch noch, da die Grössen p stets ganze Zahlen sein müssen, für die ganze Zahl r die Bedingung, dass $2r$ durch n theilbar ist. Nimmt

Es ist jetzt schliesslich noch das im Falle $n = 4$ hinzugetretene System (σ') näher zu untersuchen. Bei demselben setze man:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = + 1$$

und berücksichtige, dass die ganze Zahl r bei diesem Systeme durch 2 theilbar, also von der Form $r = 2k$ sein muss, wo k eine ganze Zahl bezeichnet. Ebenso wie früher kann man sich aber auch hier unbeschadet der Allgemeinheit auf den Werth $k = 1$ beschränken und erhält dann aus dem Systeme (σ) ein System von Grössen c , dem als Gleichungssystem (O) das im Folgenden mit (o) bezeichnete System entspricht. Man hat daher, wenn man das aus (O₂) für $\nu = 2$ hervorgehende specielle, im Folgenden mit (o) bezeichnete, System noch hinzunimmt, im Falle $n = 4$ die beiden Systeme:

$$\begin{aligned} & - x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)} + x^{(4)} = 2y^{(1)}, \\ & x^{(1)} - x^{(2)} + x^{(3)} + x^{(4)} = 2y^{(2)}, \\ (o) \quad & x^{(1)} + x^{(2)} - x^{(3)} + x^{(4)} = 2y^{(3)}, \\ & x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)} - x^{(4)} = 2y^{(4)}, \\ & - x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)} + x^{(4)} = 2y^{(1)}, \\ & x^{(1)} - x^{(2)} + x^{(3)} + x^{(4)} = 2y^{(2)}, \\ (o') \quad & x^{(1)} + x^{(2)} - x^{(3)} + x^{(4)} = 2y^{(3)}, \\ & - x^{(1)} - x^{(2)} - x^{(3)} + x^{(4)} = 2y^{(4)}, \end{aligned}$$

die zunächst als verschieden zu betrachten sind, da das Coefficientensystem des einen nicht aus dem des anderen dadurch erhalten werden kann, dass man die Verticalreihen des letzteren in passender Weise umstellt und die sämtlichen Glieder gewisser der Verticalreihen mit $- 1$ multiplicirt.

Nun kann man aber das System (o') aus dem Systeme (o) dadurch erhalten, dass man in der letzten Gleichung desselben $y^{(4)}$ durch $-y^{(4)}$ ersetzt und zugleich linke und rechte Seite dieser Gleichung mit -1 multiplicirt. Die dem Systeme (o) entsprechende Thetaformel, die aus der Formel (θ_2) des Art. 3 für $r = 2$ hervorgeht, wird daher in die dem Systeme (o') entsprechende übergehen, wenn man das System $(-v^{(4)})$ an Stelle des Systems $(v^{(4)})$ setzt. Da aber eine jede der in dieser Formel vorkommenden Thetafunctionen in ihrer Charakteristik nur halbe Zahlen als Elemente enthält und folglich entweder eine gerade oder eine ungerade Function ist, so bewirkt die Änderung des Argumentensystems $(v^{(4)})$ in $(-v^{(4)})$ bei dem auf der rechten Seite hinter dem Summenzeichen als allgemeines Glied stehenden Thetaproducte nur die Ausscheidung eines Factors, der entweder den Werth $+1$ oder den Werth -1 besitzt, und es bleibt daher der Typus der ursprünglichen Formel, der darin besteht, dass die sämtlichen Thetafunctionen eines Productes dieselbe Charakteristik besitzen, erhalten. Aus diesem Grunde sind die Systeme (o) , (o') als nicht verschieden zu betrachten, und da zudem das System (o') in das der RIEMANN'schen Thetaformel zu Grunde liegende System (\bar{o}) dadurch übergeführt werden kann, dass man bei demselben die sämtlichen Coefficienten der ersten Verticalreihe mit -1 multiplicirt und dann die Verticalreihen der Coefficienten in passender Weise umstellt, so folgt schliesslich, dass auch die RIEMANN'sche Thetaformel von der dem Systeme (o) entsprechenden Thetaformel nicht wesentlich verschieden ist, und es ist daher die dem Systeme (O_2) entsprechende, für eine beliebige gerade Zahl $n = 2\nu$ auftretende Thetaformel (Formel (θ_2) des Art. 3) im engeren Sinne als die Verallgemeinerung der RIEMANN'schen Thetaformel anzusehen, während die dem Systeme (O_1) entsprechende Thetaformel (Formel (θ_1) des Art. 2) als die zu einer beliebigen ungeraden Zahl $n = 2\nu + 1$ gehörige analoge Thetaformel erscheint. Diese Thetaformeln sollen jetzt hergestellt werden.

Congruenzen, oder, was auf dasselbe hinauskommt, mit den Lösungen der Congruenz:

$$2x^{(1)} + 2x^{(2)} + \dots + 2x^{(r)} \equiv 0 \pmod{r}.$$

Diese Congruenz besitzt aber r^{r-1} nach dem Modul r incongruente Lösungen; man erhält dieselben, wenn man in den Gleichungen:

$$x^{(1)} = \xi^{(1)}, \quad x^{(2)} = \xi^{(2)}, \quad \dots, \quad x^{(r-1)} = \xi^{(r-1)}, \quad x^{(r)} = \xi^{(r)}$$

an Stelle des Systems der $r - 1$ Zahlen $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(r-1)}$ der Reihe nach die sämtlichen r^{r-1} Variationen der Elemente $0, 1, \dots, r - 1$ zur $(r - 1)^{\text{ten}}$ Classe mit Wiederholung treten lässt und jedesmal dann für $\xi^{(r)}$ diejenige einzige Zahl aus der Reihe $0, 1, \dots, r - 1$ setzt, welche der Congruenz:

$$2\xi^{(r)} \equiv -2\xi^{(1)} - 2\xi^{(2)} - \dots - 2\xi^{(r-1)} \pmod{r}$$

genügt. Es ist demnach $s = r^{r-1}$.

Die auf der rechten Seite der aufgestellten Thetaformel bei der Ausführung der Summation auftretenden r^{2rp} Thetaproducte können mit Hilfe der Relationen:

$$\begin{aligned} \vartheta \left[\begin{matrix} g_1 \dots g_\mu + 1 \dots g_p \\ h_1 \dots h_\mu \dots h_p \end{matrix} \right] (v) &= \vartheta \left[\begin{matrix} g_1 \dots g_\mu \dots g_p \\ h_1 \dots h_\mu \dots h_p \end{matrix} \right] (v), \\ \vartheta \left[\begin{matrix} g_1 \dots g_\mu \dots g_p \\ h_1 \dots h_\mu + 1 \dots h_p \end{matrix} \right] (v) &= \vartheta \left[\begin{matrix} g_1 \dots g_\mu \dots g_p \\ h_1 \dots h_\mu \dots h_p \end{matrix} \right] (v) e^{2g_\mu \pi i} \end{aligned}$$

auf eine geringere Anzahl reducirt werden. Zu dem Ende setze man für $\mu = 1, 2, \dots, p$:

$$\begin{aligned} 2\alpha_\mu^{(1)} + 2\alpha_\mu^{(2)} + \dots + 2\alpha_\mu^{(r)} &= A_\mu, \\ 2\beta_\mu^{(1)} + 2\beta_\mu^{(2)} + \dots + 2\beta_\mu^{(r)} &= B_\mu, \end{aligned}$$

und bringe die Grössen $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ in die Form:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_\mu^{(1)} &= A_\mu - r\alpha_\mu^{(1)}, \quad \bar{\alpha}_\mu^{(2)} = A_\mu - r\alpha_\mu^{(2)}, \quad \dots, \quad \bar{\alpha}_\mu^{(r)} = A_\mu - r\alpha_\mu^{(r)}, \\ \bar{\beta}_\mu^{(1)} &= B_\mu - r\beta_\mu^{(1)}, \quad \bar{\beta}_\mu^{(2)} = B_\mu - r\beta_\mu^{(2)}, \quad \dots, \quad \bar{\beta}_\mu^{(r)} = B_\mu - r\beta_\mu^{(r)}. \end{aligned}$$

Unter Benutzung der soeben angeschriebenen Hilfsformeln erhält man dann die Relation:

$$\vartheta \begin{bmatrix} \frac{\alpha^{(\nu)}}{r} \\ \frac{\beta^{(\nu)}}{r} \end{bmatrix} \langle\langle rv^{(\nu)} \rangle\rangle = \vartheta \begin{bmatrix} \frac{A}{r} - \alpha^{(\nu)} \\ \frac{B}{r} - \beta^{(\nu)} \end{bmatrix} \langle\langle rv^{(\nu)} \rangle\rangle = \vartheta \begin{bmatrix} \frac{A}{r} \\ \frac{B}{r} \end{bmatrix} \langle\langle rv^{(\nu)} \rangle\rangle e^{-\frac{2}{r} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} A_{\mu} \beta_{\mu}^{(\nu)} \pi i},$$

für $\nu = 1, 2, \dots, r$, und weiter, da für $\mu = 1, 2, \dots, p$:

$$\beta_{\mu}^{(1)} + \beta_{\mu}^{(2)} + \dots + \beta_{\mu}^{(r)} = \frac{B_{\mu}}{2}$$

ist, die Gleichung:

$$\vartheta \begin{bmatrix} \frac{\alpha^{(1)}}{r} \\ \frac{\beta^{(1)}}{r} \end{bmatrix} \langle\langle rv^{(1)} \rangle\rangle \dots \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\alpha^{(r)}}{r} \\ \frac{\beta^{(r)}}{r} \end{bmatrix} \langle\langle rv^{(r)} \rangle\rangle = \vartheta \begin{bmatrix} \frac{A}{r} \\ \frac{B}{r} \end{bmatrix} \langle\langle rv^{(1)} \rangle\rangle \dots \vartheta \begin{bmatrix} \frac{A}{r} \\ \frac{B}{r} \end{bmatrix} \langle\langle rv^{(r)} \rangle\rangle e^{-\frac{1}{r} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} A_{\mu} B_{\mu} \pi i}$$

Dabei ist, wie es bisher stets geschehen, durchgehends eine Charakteristik von der Form $\begin{bmatrix} g_1 \dots g_p \\ h_1 \dots h_p \end{bmatrix}$ abgekürzt durch $\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$ bezeichnet. Auf Grund der letzten Gleichung nimmt nun die aufgestellte Thetaformel, wenn man darin noch an Stelle von s den dafür gefundenen Werth r^{r-1} einführt und, indem man berücksichtigt, dass die ganzen Zahlen A, B sämmtlich gerade sind,

$$e^{-\frac{1}{r} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} A_{\mu} B_{\mu} \pi i} \quad \text{durch} \quad e^{\frac{r-1}{r} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} A_{\mu} B_{\mu} \pi i}$$

ersetzt, zunächst die Gestalt an:

$$r^{(2r-1)r} \vartheta \langle\langle ru^{(1)} \rangle\rangle \dots \vartheta \langle\langle ru^{(r)} \rangle\rangle = \sum_{\alpha, \beta}^{0, 1, \dots, r-1} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{A}{r} \\ \frac{B}{r} \end{bmatrix} \langle\langle rv^{(1)} \rangle\rangle \dots \vartheta \begin{bmatrix} \frac{A}{r} \\ \frac{B}{r} \end{bmatrix} \langle\langle rv^{(r)} \rangle\rangle e^{\frac{r-1}{r} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} A_{\mu} B_{\mu} \pi i}$$

Bei der Ausführung der auf der rechten Seite dieser Formel angedeuteten Summation durchläuft jede der $2p$ in der Charakteristik:

$$\begin{bmatrix} \frac{A}{r} \\ \frac{B}{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_1}{r} \dots \frac{A_p}{r} \\ \frac{B_1}{r} \dots \frac{B_p}{r} \end{bmatrix}$$

sowie in dem hinter dem Thetaproducte stehenden Exponentialfactor vorkommenden Grössen $A_1, \dots, A_p, B_1, \dots, B_p$ unabhängig von den anderen die Reihe der r^n ganzen Zahlen, die aus

$$2x^{(1)} + 2x^{(2)} + \dots + 2x^{(r)}$$

hervorgehen, wenn man an Stelle des Systems der r Grössen $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(r)}$ der Reihe nach die sämtlichen Variationen der Elemente $0, 1, \dots, r-1$ zur r^{ten} Classe mit Wiederholung treten lässt. Berücksichtigt man nun, dass die Congruenz:

$$2x^{(1)} + 2x^{(2)} + \dots + 2x^{(r)} \equiv 0 \pmod{r},$$

wie schon oben angegeben, r^{r-1} nach dem Modul r incongruente Lösungen besitzt, dass aber auch eine jede der $r-1$ aus der Congruenz:

$$2x^{(1)} + 2x^{(2)} + \dots + 2x^{(r)} \equiv \rho \pmod{r}$$

für $\rho = 1, 2, \dots, r-1$ hervorgehenden Congruenzen r^{r-1} nach dem Modul r incongruente Lösungen hat, welche in jedem Falle aus einer beliebigen unter ihnen erhalten werden können, indem man zu derselben der Reihe nach die r^{r-1} Lösungen der Congruenz:

$$2x^{(1)} + 2x^{(2)} + \dots + 2x^{(r)} \equiv 0 \pmod{r}$$

addirt und die dabei auftretenden Zahlen auf ihre kleinsten positiven Reste nach dem Modul r reducirt, so erkennt man, dass von den r^r an Stelle einer jeden der $2p$ Grössen $A_1, \dots, A_p, B_1, \dots, B_p$ auftretenden ganzen Zahlen r^{r-1} der Zahl 0 , r^{r-1} der Zahl $1, \dots$, endlich r^{r-1} der Zahl $r-1$ congruent sind nach dem Modul r . Dieses Resultat kann man aber, wenn man zwei Charakteristiken, deren entsprechende Elemente sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, congruent nennt, auch dahin aussprechen, dass die Charakteristik:

$$\begin{bmatrix} A \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & \dots & A_p \\ r & \dots & r \\ B_1 & \dots & B_p \\ r & \dots & r \end{bmatrix}$$

bei der Ausführung der Summation $(r^{r-1})^{2p}$ -mal einer jeden derjenigen r^{2p} speciellen Charakteristiken congruent wird, welche aus

$$\begin{bmatrix} \frac{\varepsilon}{r} \\ \frac{\varepsilon'}{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_1}{r} \dots \frac{\varepsilon_p}{r} \\ \frac{\varepsilon'_1}{r} \dots \frac{\varepsilon'_p}{r} \end{bmatrix}$$

hervorgehen, wenn man darin an Stelle des Systems der $2p$ Buchstaben $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_p$ der Reihe nach die sämtlichen Variationen der Elemente $0, 1, \dots, r-1$ zur $2p^{\text{ten}}$ Classe mit Wiederholung treten lässt, und welche in der Folge Normalcharakteristiken genannt werden sollen. Nun ändert aber das auf der rechten Seite der obigen Thetaformel hinter dem Summenzeichen stehende Thetaproduct, wie aus den früher aufgestellten Hilfsformeln folgt, seinen Werth nicht, wenn man die Charakteristik

$$\begin{bmatrix} \frac{A}{r} \\ \frac{B}{r} \end{bmatrix}$$

durch eine ihr congruente ersetzt, und da auch die hinter dem Theta-

producte stehende Exponentialgrösse, weil $r-1$ eine gerade Zahl ist, ungeändert bleibt, wenn man die $2p$ Zahlen A, B um ganze Vielfache von r ändert, so kann man die Summe von r^{2rp} Gliedern, welche die rechte Seite der in Rede stehenden Formel bildet, durch das $(r^{r-1})^{2p}$ -fache derjenigen Summe ersetzen, die entsteht, wenn man in dem Ausdrücke:

$$\vartheta \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon}{r} \\ \frac{\varepsilon'}{r} \end{bmatrix} ((rv^{(1)})) \dots \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon}{r} \\ \frac{\varepsilon'}{r} \end{bmatrix} ((rv^{(r)})) e^{\frac{r-1}{r} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \varepsilon_{\mu} \varepsilon'_{\mu} \pi i}$$

an Stelle des Systems der $2p$ Buchstaben $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_p$ der Reihe nach die sämtlichen Variationen der Elemente $0, 1, \dots, r-1$ zur $2p^{\text{ten}}$ Classe mit Wiederholung treten lässt und die Summe der so entstehenden r^{2p} Terme bildet. Dividirt man dann noch linke und rechte Seite der auf diese Weise entstandenen Formel durch $(r^{r-1})^{2p} = r^{(2r-2)p}$, so

und man erhält, wenn man die, in der Formel (A) der vorhergehenden Arbeit als specielle Fälle enthaltenen, Formeln:

$$\begin{aligned} & \vartheta \left[\begin{array}{c} \frac{\varepsilon}{r} \\ \frac{\varepsilon'}{r} \end{array} \right] \left(\left(rv^{(\nu)} + \left| \begin{array}{c} \frac{\eta}{r} \\ \frac{\eta'}{r} \end{array} \right| \right) \right) \\ &= \vartheta \left[\begin{array}{c} \frac{\varepsilon + \eta}{r} \\ \frac{\varepsilon' + \eta'}{r} \end{array} \right] \langle \langle rv^{(\nu)} \rangle \rangle e^{-\frac{1}{r^2} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} \eta_{\mu} \eta_{\mu'} - \frac{2}{r} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \eta_{\mu} \left(rv_{\mu}^{(\nu)} + \frac{\varepsilon'_{\mu}}{r} \pi i + \frac{\eta'_{\mu}}{r} \pi i \right)} , \\ & \hspace{15em} (\nu=1, 2, \dots, r) \\ & \vartheta \left(\left(ru^{(\nu)} + \left| \begin{array}{c} \frac{\eta}{r} \\ \frac{\eta'}{r} \end{array} \right| \right) \right) \\ &= \vartheta \left[\begin{array}{c} \frac{\eta}{r} \\ \frac{\eta'}{r} \end{array} \right] \langle \langle ru^{(\nu)} \rangle \rangle e^{-\frac{1}{r^2} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} \eta_{\mu} \eta_{\mu'} - \frac{2}{r} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \eta_{\mu} \left(ru_{\mu}^{(\nu)} + \frac{\eta'_{\mu}}{r} \pi i \right)} \end{aligned}$$

anwendet und unter Berücksichtigung der Relation:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=r} u_{\mu}^{(\nu)} = \sum_{\nu=1}^{\nu=r} v_{\mu}^{(\nu)} \quad (\mu=1, 2, \dots, p)$$

die den beiden Seiten gemeinsamen Exponentialfactoren durch Division entfernt, zunächst:

$$\begin{aligned} & r^p \vartheta \left[\begin{array}{c} \frac{\eta}{r} \\ \frac{\eta'}{r} \end{array} \right] \langle \langle ru^{(1)} \rangle \rangle \dots \vartheta \left[\begin{array}{c} \frac{\eta}{r} \\ \frac{\eta'}{r} \end{array} \right] \langle \langle ru^{(r)} \rangle \rangle \\ &= \sum_{\substack{0, 1, \dots, r-1 \\ \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_p}} \vartheta \left[\begin{array}{c} \frac{\varepsilon + \eta}{r} \\ \frac{\varepsilon' + \eta'}{r} \end{array} \right] \langle \langle rv^{(1)} \rangle \rangle \dots \vartheta \left[\begin{array}{c} \frac{\varepsilon + \eta}{r} \\ \frac{\varepsilon' + \eta'}{r} \end{array} \right] \langle \langle rv^{(r)} \rangle \rangle e^{\frac{r-1}{r} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \varepsilon_{\mu} \varepsilon'_{\mu} \pi i - \frac{2}{r} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \eta_{\mu} \varepsilon'_{\mu} \pi i} \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung setze man nun für jedes μ von 1 bis p :

$$\varepsilon_{\mu} = \dot{\varepsilon}_{\mu} - \eta_{\mu}, \quad \varepsilon'_{\mu} = \dot{\varepsilon}'_{\mu} - \eta'_{\mu};$$

es geht dann das hinter dem Summenzeichen stehende allgemeine Glied über in:

$$\vartheta \begin{bmatrix} \frac{\dot{\epsilon}}{r} \\ \frac{\dot{\epsilon}'}{r} \end{bmatrix} \langle\langle rv^{(1)} \rangle\rangle \dots \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\dot{\epsilon}}{r} \\ \frac{\dot{\epsilon}'}{r} \end{bmatrix} \langle\langle rv^{(r)} \rangle\rangle e^{\frac{r-1}{r} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \dot{\epsilon}_\mu \dot{\epsilon}'_\mu \pi i} \cdot e^{-\frac{r-1}{r} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \eta_\mu \eta'_\mu \pi i} \cdot e^{\frac{r-1}{r} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} (\eta_\mu \dot{\epsilon}'_\mu - \eta'_\mu \dot{\epsilon}_\mu) \pi i},$$

und da bei der Ausführung der Summation die Charakteristik $\begin{bmatrix} \frac{\dot{\epsilon}}{r} \\ \frac{\dot{\epsilon}'}{r} \end{bmatrix}$ ein

und nur ein Mal einer jeden der r^{2p} Normalcharakteristiken congruent wird, weiter auch das soeben angeschriebene allgemeine Glied der Summe sich nicht ändert, wenn man die Zahlen $\dot{\epsilon}_1, \dots, \dot{\epsilon}_p, \dot{\epsilon}'_1, \dots, \dot{\epsilon}'_p$ durch irgend welche ihnen nach dem Modul r congruente, speciell also durch ihre kleinsten positiven Reste nach dem Modul r ersetzt, so kann die Summation in Bezug auf die Grössen $\dot{\epsilon}, \dot{\epsilon}'$ auch in der Weise ausgeführt

werden, dass die Charakteristik $\begin{bmatrix} \frac{\dot{\epsilon}}{r} \\ \frac{\dot{\epsilon}'}{r} \end{bmatrix}$ die Reihe der r^{2p} Normalcharakteristiken durchläuft. Man gelangt so, wenn man schliesslich noch die Punkte bei den Buchstaben $\dot{\epsilon}, \dot{\epsilon}'$ unterdrückt, zu der Formel:

$$\begin{aligned} (\theta_1) \quad & r^p \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\eta}{r} \\ \frac{\eta'}{r} \end{bmatrix} \langle\langle ru^{(1)} \rangle\rangle \dots \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\eta}{r} \\ \frac{\eta'}{r} \end{bmatrix} \langle\langle ru^{(r)} \rangle\rangle e^{\frac{r-1}{r} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \eta_\mu \eta'_\mu \pi i} \\ & = \sum_{\substack{0, 1, \dots, r-1 \\ \dot{\epsilon}_1, \dots, \dot{\epsilon}_p \\ \dot{\epsilon}'_1, \dots, \dot{\epsilon}'_p}} e^{\frac{r-1}{r} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} (\eta_\mu \dot{\epsilon}'_\mu - \eta'_\mu \dot{\epsilon}_\mu) \pi i} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\epsilon}{r} \\ \frac{\epsilon'}{r} \end{bmatrix} \langle\langle rv^{(1)} \rangle\rangle \dots \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\epsilon}{r} \\ \frac{\epsilon'}{r} \end{bmatrix} \langle\langle rv^{(r)} \rangle\rangle e^{\frac{r-1}{r} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \epsilon_\mu \epsilon'_\mu \pi i} \end{aligned}$$

Lässt man jetzt weiter, indem man unter $\rho_\mu^{(\nu)}, \rho_\mu^{(\nu)}, \mu=1, 2, \dots, p, \nu=1, 2, \dots, r, 2rp$ ganze Zahlen versteht, welche für jedes μ von 1 bis p den Bedingungen:

$$\rho_\mu^{(1)} + \rho_\mu^{(2)} + \dots + \rho_\mu^{(r)} = 0, \quad \rho_\mu^{(1)} + \rho_\mu^{(2)} + \dots + \rho_\mu^{(r)} = 0$$

genügen, auf der rechten Seite der letzten Formel die Systeme:

$$(rv^{(1)}, \dots, (rv^{(r)}) \text{ übergehen in } \left(rv^{(1)} + \begin{vmatrix} \frac{\rho^{(1)}}{r} \\ \frac{\rho^{(1)}}{r} \end{vmatrix}, \dots, \left(rv^{(r)} + \begin{vmatrix} \frac{\rho^{(r)}}{r} \\ \frac{\rho^{(r)}}{r} \end{vmatrix}, \right.$$

so gehen dadurch gleichzeitig die auf der linken Seite stehenden Systeme:

$$(ru^{(1)}, \dots, (ru^{(r)}) \text{ über in } \left(ru^{(1)} - \begin{vmatrix} \frac{\rho^{(1)}}{r} \\ \frac{\rho^{(1)}}{r} \end{vmatrix}, \dots, \left(ru^{(r)} - \begin{vmatrix} \frac{\rho^{(r)}}{r} \\ \frac{\rho^{(r)}}{r} \end{vmatrix}, \right.$$

und man erhält, indem man die Formeln:

$$\begin{aligned} & \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon}{r} \\ \frac{\varepsilon'}{r} \end{bmatrix} \left(rv^{(\nu)} + \begin{vmatrix} \frac{\rho^{(\nu)}}{r} \\ \frac{\rho^{(\nu)}}{r} \end{vmatrix} \right) \\ &= \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon + \rho^{(\nu)}}{r} \\ \frac{\varepsilon' + \rho^{(\nu)}}{r} \end{bmatrix} \langle\langle rv^{(\nu)} \rangle\rangle e - \frac{1}{r^2} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} \rho_{\mu}^{(\nu)} \rho_{\mu'}^{(\nu)} - \frac{2}{r} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \rho_{\mu}^{(\nu)} \left(rv_{\mu}^{(\nu)} + \frac{\varepsilon'_{\mu}}{r} \pi i + \frac{\rho_{\mu}^{(\nu)}}{r} \pi i \right), \\ & \hspace{25em} (\nu=1, 2, \dots, r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\eta}{r} \\ \frac{\eta'}{r} \end{bmatrix} \left(ru^{(\nu)} - \begin{vmatrix} \frac{\rho^{(\nu)}}{r} \\ \frac{\rho^{(\nu)}}{r} \end{vmatrix} \right) \\ &= \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\eta - \rho^{(\nu)}}{r} \\ \frac{\eta' - \rho^{(\nu)}}{r} \end{bmatrix} \langle\langle ru^{(\nu)} \rangle\rangle e - \frac{1}{r^2} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} \rho_{\mu}^{(\nu)} \rho_{\mu'}^{(\nu)} + \frac{2}{r} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \rho_{\mu}^{(\nu)} \left(ru_{\mu}^{(\nu)} + \frac{\eta'_{\mu}}{r} \pi i - \frac{\rho_{\mu}^{(\nu)}}{r} \pi i \right), \end{aligned}$$

anwendet und unter Berücksichtigung der Relation:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=r} \rho_{\mu}^{(\nu)} u_{\mu}^{(\nu)} = - \sum_{\nu=1}^{\nu=r} \rho_{\mu}^{(\nu)} v_{\mu}^{(\nu)} \quad (\mu=1, 2, \dots, p)$$

die den beiden Seiten gemeinsamen Exponentialfactoren durch Division entfernt, schliesslich die Formel:

$$\begin{aligned}
 (\theta'_1) \quad & r^p \vartheta \left[\begin{array}{c} \frac{\eta - \rho^{(1)}}{r} \\ \frac{\eta' - \rho'^{(1)}}{r} \end{array} \right] \langle\langle ru^{(1)} \rangle\rangle \dots \vartheta \left[\begin{array}{c} \frac{\eta - \rho^{(r)}}{r} \\ \frac{\eta' - \rho'^{(r)}}{r} \end{array} \right] \langle\langle ru^{(r)} \rangle\rangle e^{\frac{r-1}{r} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \eta_\mu \eta'_\mu \pi i} = \\
 & \sum_{\substack{0,1,\dots,r-1 \\ \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_p}} e^{\frac{r-1}{r} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} (\eta_\mu \varepsilon'_\mu - \eta'_\mu \varepsilon_\mu) \pi i} \vartheta \left[\begin{array}{c} \frac{\varepsilon + \rho^{(1)}}{r} \\ \frac{\varepsilon' + \rho'^{(1)}}{r} \end{array} \right] \langle\langle rv^{(1)} \rangle\rangle \dots \vartheta \left[\begin{array}{c} \frac{\varepsilon + \rho^{(r)}}{r} \\ \frac{\varepsilon' + \rho'^{(r)}}{r} \end{array} \right] \langle\langle rv^{(r)} \rangle\rangle e^{\frac{r-1}{r} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \varepsilon_\mu \varepsilon'_\mu \pi i}
 \end{aligned}$$

Diese Formel umfasst die Formeln (θ_1) , (θ'_1) als specielle Fälle und ist zugleich die allgemeinste derartige Formel.

Die Formeln (θ_1) , (θ'_1) , (θ'_1') entsprechen beziehlich den Formeln (θ) , (θ') , (θ'') der vorhergehenden Arbeit, und es hätte, ebenso wie (θ_1) aus (θ) abgeleitet wurde, auch (θ'_1) aus (θ') , (θ'_1') aus (θ'') direct abgeleitet werden können; nachdem aber einmal die Formel (θ_1) gewonnen war, erschien das hier zur Herstellung der Formeln (θ'_1) , (θ'_1') eingeschlagene Verfahren als das einfachere.

Setzt man in der Formel (θ'_1') :

$$\begin{aligned}
 & \vartheta \left[\begin{array}{c} \frac{\varepsilon + \rho^{(1)}}{r} \\ \frac{\varepsilon' + \rho'^{(1)}}{r} \end{array} \right] \langle\langle rv^{(1)} \rangle\rangle \dots \vartheta \left[\begin{array}{c} \frac{\varepsilon + \rho^{(r)}}{r} \\ \frac{\varepsilon' + \rho'^{(r)}}{r} \end{array} \right] \langle\langle rv^{(r)} \rangle\rangle e^{\frac{r-1}{r} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \varepsilon_\mu \varepsilon'_\mu \pi i} = x_{[\varepsilon]}, \\
 & \vartheta \left[\begin{array}{c} \frac{\eta - \rho^{(1)}}{r} \\ \frac{\eta' - \rho'^{(1)}}{r} \end{array} \right] \langle\langle ru^{(1)} \rangle\rangle \dots \vartheta \left[\begin{array}{c} \frac{\eta - \rho^{(r)}}{r} \\ \frac{\eta' - \rho'^{(r)}}{r} \end{array} \right] \langle\langle ru^{(r)} \rangle\rangle e^{\frac{r-1}{r} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \eta_\mu \eta'_\mu \pi i} = x'_{[\eta]},
 \end{aligned}$$

wobei die den Buchstaben x , x' beigefügten Zeichen $[\varepsilon]$, $[\eta]$ die Complexe $\left[\begin{array}{c} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_p \end{array} \right]$, $\left[\begin{array}{c} \eta_1 \dots \eta_p \\ \eta'_1 \dots \eta'_p \end{array} \right]$ beziehlich vertreten sollen, und setzt zugleich, indem man zur Abkürzung $e^{\frac{r-1}{r} \pi i}$ mit τ , $\sum_{\mu=1}^{\mu=p} (\eta_\mu \varepsilon'_\mu - \eta'_\mu \varepsilon_\mu)$ mit $[\eta][[\varepsilon]$ bezeichnet:

von den anderen die Werthe $0, 1, \dots, r - 1$ durchläuft; wobei endlich s die noch zu bestimmende Anzahl der nach dem Modul r incongruenten oder, was auf dasselbe hinauskommt, der ausschliesslich von Zahlen aus der Reihe $0, 1, \dots, r - 1$ als Elementen gebildeten Lösungen des Congruenzsystems:

$$\begin{aligned} (1 - r)x^{(1)} + x^{(2)} + \dots + x^{(2r)} &\equiv 0 \pmod{r}, \\ x^{(1)} + (1 - r)x^{(2)} + \dots + x^{(2r)} &\equiv 0 \pmod{r}, \\ \dots & \\ x^{(1)} + x^{(2)} + \dots + (1 - r)x^{(2r)} &\equiv 0 \pmod{r}, \end{aligned}$$

bezeichnet.

Um den Werth der Zahl s zu bestimmen, berücksichtige man, dass die $2r$ Formen, welche die linken Seiten der soeben aufgestellten Congruenzen bilden, in früher angegebenem Sinne einander congruent sind nach dem Modul r , und dass in Folge dessen die Lösungen des Congruenzsystems identisch sind mit den Lösungen einer einzigen der in ihm enthaltenen Congruenzen, oder, was auf dasselbe hinauskommt, mit den Lösungen der Congruenz:

$$x^{(1)} + x^{(2)} + \dots + x^{(2r)} \equiv 0 \pmod{r}.$$

Diese Congruenz besitzt aber r^{2r-1} nach dem Modul r incongruente Lösungen; man erhält dieselben, wenn man in den Gleichungen:

$$x^{(1)} = \xi^{(1)}, \quad x^{(2)} = \xi^{(2)}, \quad \dots, \quad x^{(2r-1)} = \xi^{(2r-1)}, \quad x^{(2r)} = \xi^{(2r)}$$

an Stelle des Systems der $2r - 1$ Zahlen $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(2r-1)}$ der Reihe nach die sämtlichen r^{2r-1} Variationen der Elemente $0, 1, \dots, r - 1$ zur $(2r - 1)$ ten Classe mit Wiederholung treten lässt und jedesmal dann für $\xi^{(2r)}$ diejenige einzige Zahl aus der Reihe $0, 1, \dots, r - 1$ setzt, welche der Congruenz:

$$\xi^{(2r)} \equiv -\xi^{(1)} - \xi^{(2)} - \dots - \xi^{(2r-1)} \pmod{r}$$

genügt. Es ist demnach $s = r^{2r-1}$.

Die auf der rechten Seite der aufgestellten Thetaformel bei Aus-

führung der Summation auftretenden $r^{A/p}$ Thetaproducte können mit Hilfe der Relationen:

$$\vartheta \begin{bmatrix} g_1 \dots g_{\mu-1} \dots g_p \\ h_1 \dots h_{\mu-1} \dots h_p \end{bmatrix} \langle v \rangle = \vartheta \begin{bmatrix} g_1 \dots g_{\mu} \dots g_p \\ h_1 \dots h_{\mu} \dots h_p \end{bmatrix} \langle v \rangle, \quad (\mu=1, 2, \dots, p)$$

$$\vartheta \begin{bmatrix} g_1 \dots g_{\mu} \dots g_p \\ h_1 \dots h_{\mu} + 1 \dots h_p \end{bmatrix} \langle v \rangle = \vartheta \begin{bmatrix} g_1 \dots g_{\mu} \dots g_p \\ h_1 \dots h_{\mu} \dots h_p \end{bmatrix} \langle v \rangle e^{2g_{\mu}\pi i}$$

auf eine geringere Anzahl reducirt werden. Zu dem Ende setze man für $\mu = 1, 2, \dots, p$:

$$\alpha_{\mu}^{(1)} + \alpha_{\mu}^{(2)} + \dots + \alpha_{\mu}^{(2r)} = A_{\mu},$$

$$\beta_{\mu}^{(1)} + \beta_{\mu}^{(2)} + \dots + \beta_{\mu}^{(2r)} = B_{\mu},$$

und bringe die Grössen $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ in die Form:

$$\bar{\alpha}_{\mu}^{(1)} = A_{\mu} - r\alpha_{\mu}^{(1)}, \quad \bar{\alpha}_{\mu}^{(2)} = A_{\mu} - r\alpha_{\mu}^{(2)}, \quad \dots, \quad \bar{\alpha}_{\mu}^{(2r)} = A_{\mu} - r\alpha_{\mu}^{(2r)},$$

$$\bar{\beta}_{\mu}^{(1)} = B_{\mu} - r\beta_{\mu}^{(1)}, \quad \bar{\beta}_{\mu}^{(2)} = B_{\mu} - r\beta_{\mu}^{(2)}, \quad \dots, \quad \bar{\beta}_{\mu}^{(2r)} = B_{\mu} - r\beta_{\mu}^{(2r)}.$$

Unter Benutzung der soeben angeschriebenen Hilfsformeln erhält man dann die Relation:

$$\vartheta \begin{bmatrix} \frac{\bar{\alpha}^{(\nu)}}{r} \\ \frac{\bar{\beta}^{(\nu)}}{r} \end{bmatrix} \langle rv^{(\nu)} \rangle = \vartheta \begin{bmatrix} \frac{A}{r} - \alpha^{(\nu)} \\ \frac{B}{r} - \beta^{(\nu)} \end{bmatrix} \langle rv^{(\nu)} \rangle = \vartheta \begin{bmatrix} \frac{A}{r} \\ \frac{B}{r} \end{bmatrix} \langle rv^{(\nu)} \rangle e^{-\frac{2}{r} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} A_{\mu} \beta_{\mu}^{(\nu)} \pi i}$$

für $\nu = 1, 2, \dots, 2r$, und weiter, da für $\mu = 1, 2, \dots, p$:

$$\beta_{\mu}^{(1)} + \beta_{\mu}^{(2)} + \dots + \beta_{\mu}^{(2r)} = B_{\mu}$$

ist, die Gleichung:

$$\vartheta \begin{bmatrix} \frac{\bar{\alpha}^{(1)}}{r} \\ \frac{\bar{\beta}^{(1)}}{r} \end{bmatrix} \langle rv^{(1)} \rangle \dots \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\bar{\alpha}^{(2r)}}{r} \\ \frac{\bar{\beta}^{(2r)}}{r} \end{bmatrix} \langle rv^{(2r)} \rangle = \vartheta \begin{bmatrix} \frac{A}{r} \\ \frac{B}{r} \end{bmatrix} \langle rv^{(1)} \rangle \dots \vartheta \begin{bmatrix} \frac{A}{r} \\ \frac{B}{r} \end{bmatrix} \langle rv^{(2r)} \rangle e^{-\frac{2}{r} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} A_{\mu} B_{\mu} \pi i}$$

Dabei ist, wie es bisher stets geschehen, durchgehends eine Charakteristik von der Form $\begin{bmatrix} g_1 & \dots & g_p \\ h_1 & \dots & h_p \end{bmatrix}$ abgekürzt durch $\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$ bezeichnet. Auf Grund der letzten Gleichung nimmt nun die aufgestellte Thetaformel, wenn man darin noch an Stelle von s den dafür gefundenen Werth r^{2r-1} einführt, zunächst die Gestalt an:

$$r^{(4r-1)p} \vartheta(\langle ru^{(1)} \rangle) \dots \vartheta(\langle ru^{(2r)} \rangle) = \sum_{\alpha, \beta}^{0, 1, \dots, r-1} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{A}{r} \\ \frac{B}{r} \end{bmatrix} (\langle rv^{(1)} \rangle) \dots \vartheta \begin{bmatrix} \frac{A}{r} \\ \frac{B}{r} \end{bmatrix} (\langle rv^{(2r)} \rangle) e^{-\frac{2}{r} \sum_{\mu=1}^p A_{\mu} B_{\mu} \pi i}$$

Bei der Ausführung der auf der rechten Seite dieser Formel angedeuteten Summation durchläuft jede der $2p$, in der Charakteristik:

$$\begin{bmatrix} \frac{A}{r} \\ \frac{B}{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_1}{r} & \dots & \frac{A_p}{r} \\ \frac{B_1}{r} & \dots & \frac{B_p}{r} \end{bmatrix}$$

sowie in dem hinter dem Thetaproducte stehenden Exponentialfactor vorkommenden, Grössen $A_1, \dots, A_p, B_1, \dots, B_p$ unabhängig von den anderen die Reihe der r^{2r} ganzen Zahlen, die aus:

$$x^{(1)} + x^{(2)} + \dots + x^{(2r)}$$

hervorgehen, wenn man an Stelle des Systems der $2r$ Grössen $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(2r)}$ der Reihe nach die sämtlichen Variationen der Elemente $0, 1, \dots, r-1$ zur $2r^{\text{ten}}$ Classe mit Wiederholung treten lässt. Berücksichtigt man nun, dass die Congruenz:

$$x^{(1)} + x^{(2)} + \dots + x^{(2r)} \equiv 0 \pmod{r},$$

wie schon oben angegeben, r^{2r-1} nach dem Modul r incongruente Lösungen besitzt, dass aber auch eine jede der $r-1$ aus der Congruenz:

$$x^{(1)} + x^{(2)} + \dots + x^{(2r)} \equiv \rho \pmod{r}$$

für $\rho = 1, 2, \dots, r-1$ hervorgehenden Congruenzen r^{2r-1} nach dem

Modul r incongruente Lösungen hat, welche in jedem Falle aus einer beliebigen unter ihnen erhalten werden können, indem man zu derselben der Reihe nach die r^{2r-1} Lösungen der Congruenz:

$$x^{(1)} + x^{(2)} + \dots + x^{(2r)} \equiv 0 \pmod{r}$$

addirt und die dabei auftretenden Zahlen auf ihre kleinsten positiven Reste nach dem Modul r reducirt, so erkennt man, dass von den r^{2r} an Stelle einer jeden der $2p$ Grössen $A_1, \dots, A_p, B_1, \dots, B_p$ auftretenden ganzen Zahlen r^{2r-1} der Zahl 0 , r^{2r-1} der Zahl $1, \dots, r^{2r-1}$ der Zahl $r - 1$ congruent sind nach dem Modul r . Dieses Resultat kann man aber, wenn man zwei Charakteristiken, deren entsprechende Elemente sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, congruent nennt, auch dahin aussprechen, dass die Charakteristik:

$$\left[\begin{array}{c} \frac{A}{r} \\ \frac{B}{r} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} \frac{A_1}{r} & \frac{A_p}{r} \\ \frac{B_1}{r} & \frac{B_p}{r} \end{array} \right]$$

bei der Ausführung der Summation $(r^{2r-1})^{2p}$ -mal einer jeden derjenigen r^{2p} speciellen Charakteristiken congruent wird, welche aus:

$$\left[\begin{array}{c} \frac{\varepsilon}{r} \\ \frac{\varepsilon'}{r} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} \frac{\varepsilon_1}{r} & \frac{\varepsilon_p}{r} \\ \frac{\varepsilon'_1}{r} & \frac{\varepsilon'_p}{r} \end{array} \right]$$

hervorgehen, wenn man darin an Stelle des Systems der $2p$ Buchstaben $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_p$ der Reihe nach die sämtlichen Variationen der Elemente $0, 1, \dots, r - 1$ zur $2p^{\text{ten}}$ Classe mit Wiederholung treten lässt, und welche in der Folge Normalcharakteristiken genannt werden sollen. Nun ändert aber das auf der rechten Seite der obigen Thetaformel hinter dem Summenzeichen stehende Thetaproduct, wie aus den früher aufgestellten Hilfsformeln folgt, seinen Werth nicht, wenn man die Charakteristik

$\left[\begin{array}{c} \frac{A}{r} \\ \frac{B}{r} \end{array} \right]$ durch eine ihr congruente ersetzt, und da auch die hinter dem Thetaproducte stehende Exponentialgrösse ungeändert bleibt, wenn man die $2p$

Lässt man auf der rechten Seite der gewonnenen Formel (θ_2), indem man unter $\eta_1, \dots, \eta_p, \eta'_1, \dots, \eta'_p$ beliebige ganze Zahlen versteht, die Systeme:

$$(rv^{(1)}), \dots, (rv^{(2r)}) \text{ übergehen in } \left(rv^{(1)} + \begin{vmatrix} \frac{\eta}{r} \\ \frac{\eta'}{r} \end{vmatrix} \right), \dots, \left(rv^{(2r)} + \begin{vmatrix} \frac{\eta}{r} \\ \frac{\eta'}{r} \end{vmatrix} \right),$$

so gehen dadurch gleichzeitig die auf der linken Seite stehenden Systeme:

$$(ru^{(1)}), \dots, (ru^{(2r)}) \text{ über in } \left(ru^{(1)} + \begin{vmatrix} \frac{\eta}{r} \\ \frac{\eta'}{r} \end{vmatrix} \right), \dots, \left(ru^{(2r)} + \begin{vmatrix} \frac{\eta}{r} \\ \frac{\eta'}{r} \end{vmatrix} \right),$$

und man erhält, indem man die im vorhergehenden Artikel an der entsprechenden Stelle angeschriebenen Hilfsformeln für $\nu = 1, 2, \dots, 2r$ anwendet und wieder unter Berücksichtigung der Relation:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=2r} u_{\mu}^{(\nu)} = \sum_{\nu=1}^{\nu=2r} v_{\mu}^{(\nu)} \quad (\mu=1, 2, \dots, p)$$

die den beiden Seiten gemeinsamen Exponentialfaktoren durch Division entfernt, zunächst:

$$\begin{aligned} & r^p \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\eta}{r} \\ \frac{\eta'}{r} \end{bmatrix} \langle\langle ru^{(1)} \rangle\rangle \dots \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\eta}{r} \\ \frac{\eta'}{r} \end{bmatrix} \langle\langle ru^{(2r)} \rangle\rangle \\ &= \sum_{\substack{0, 1, \dots, r-1 \\ \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_p}} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon + \eta}{r} \\ \frac{\varepsilon' + \eta'}{r} \end{bmatrix} \langle\langle rv^{(1)} \rangle\rangle \dots \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon + \eta}{r} \\ \frac{\varepsilon' + \eta'}{r} \end{bmatrix} \langle\langle rv^{(2r)} \rangle\rangle e^{-\frac{2}{r} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \varepsilon_{\mu} \varepsilon'_{\mu} \pi i} - \frac{4}{r} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \eta_{\mu} \varepsilon'_{\mu} \pi i} \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung setze man nun für jedes μ von 1 bis p :

$$\varepsilon_{\mu} = \dot{\varepsilon}_{\mu} - \eta_{\mu}, \quad \varepsilon'_{\mu} = \dot{\varepsilon}'_{\mu} - \eta'_{\mu};$$

es geht dann das hinter dem Summenzeichen stehende allgemeine Glied über in:

$$\vartheta \begin{bmatrix} \frac{\dot{\epsilon}}{r} \\ \frac{\dot{\epsilon}'}{r} \end{bmatrix} \langle\langle rv^{(1)} \rangle\rangle \dots \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\dot{\epsilon}}{r} \\ \frac{\dot{\epsilon}'}{r} \end{bmatrix} \langle\langle rv^{(2r)} \rangle\rangle e^{-\frac{2}{r} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \dot{\epsilon}_\mu \dot{\epsilon}'_\mu \pi i} \cdot e^{\frac{2}{r} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \eta_\mu \eta'_\mu \pi i} \cdot e^{-\frac{2}{r} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} (\eta_\mu \dot{\epsilon}'_\mu - \eta'_\mu \dot{\epsilon}_\mu) \pi i},$$

und da bei der Ausführung der Summation die Charakteristik $\begin{bmatrix} \frac{\dot{\epsilon}}{r} \\ \frac{\dot{\epsilon}'}{r} \end{bmatrix}$ ein

und nur ein Mal einer jeden der r^{2p} Normalcharakteristiken congruent wird, weiter auch das soeben angeschriebene allgemeine Glied der Summe sich nicht ändert, wenn man die Zahlen $\dot{\epsilon}_1, \dots, \dot{\epsilon}_p, \dot{\epsilon}'_1, \dots, \dot{\epsilon}'_p$ durch irgend welche ihnen nach dem Modul r congruente, speciell also durch ihre kleinsten positiven Reste nach dem Modul r ersetzt, so kann die Summation in Bezug auf die Grössen $\dot{\epsilon}, \dot{\epsilon}'$ auch in der Weise ausgeführt werden,

dass die Charakteristik $\begin{bmatrix} \frac{\dot{\epsilon}}{r} \\ \frac{\dot{\epsilon}'}{r} \end{bmatrix}$ die Reihe der r^{2p} Normalcharakteristiken

durchläuft. Man gelangt so, wenn man schliesslich noch die Punkte bei den Buchstaben $\dot{\epsilon}, \dot{\epsilon}'$ unterdrückt, zu der Formel:

$$\begin{aligned} (\theta'_2) \quad & r^p \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\eta}{r} \\ \frac{\eta'}{r} \end{bmatrix} \langle\langle rv^{(1)} \rangle\rangle \dots \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\eta}{r} \\ \frac{\eta'}{r} \end{bmatrix} \langle\langle rv^{(2r)} \rangle\rangle e^{-\frac{2}{r} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \eta_\mu \eta'_\mu \pi i} \\ & = \sum_{\substack{0, 1, \dots, r-1 \\ \epsilon_1, \dots, \epsilon_p \\ \epsilon'_1, \dots, \epsilon'_p}} e^{-\frac{2}{r} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} (\eta_\mu \epsilon'_\mu - \eta'_\mu \epsilon_\mu) \pi i} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\epsilon}{r} \\ \frac{\epsilon'}{r} \end{bmatrix} \langle\langle rv^{(1)} \rangle\rangle \dots \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\epsilon}{r} \\ \frac{\epsilon'}{r} \end{bmatrix} \langle\langle rv^{(2r)} \rangle\rangle e^{-\frac{2}{r} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \epsilon_\mu \epsilon'_\mu \pi i} \end{aligned}$$

Lässt man jetzt weiter, indem man unter $\rho_\mu^{(\nu)}, \rho'^{(\nu)}$, $\mu = 1, 2, \dots, p$, $\nu = 1, 2, \dots, 2r$, $4rp$ ganze Zahlen versteht, welche für jedes μ von 1 bis p den Bedingungen:

$$\rho_\mu^{(1)} + \rho_\mu^{(2)} + \dots + \rho_\mu^{(2r)} = 0, \quad \rho'^{(1)} + \rho'^{(2)} + \dots + \rho'^{(2r)} = 0$$

genügen, auf der rechten Seite der letzten Formel die Systeme:

$$(rv^{(1)}), \dots, (rv^{(2r)}) \text{ übergehen in } \left(rv^{(1)} + \left| \begin{array}{c} \frac{\rho^{(1)}}{r} \\ \frac{\rho^{(1)}}{r} \end{array} \right| \right), \dots, \left(rv^{(2r)} + \left| \begin{array}{c} \frac{\rho^{(2r)}}{r} \\ \frac{\rho^{(2r)}}{r} \end{array} \right| \right),$$

so gehen dadurch gleichzeitig die auf der linken Seite stehenden Systeme:

$$(ru^{(1)}), \dots, (ru^{(2r)}) \text{ über in, } \left(ru^{(1)} - \left| \begin{array}{c} \frac{\rho^{(1)}}{r} \\ \frac{\rho^{(1)}}{r} \end{array} \right| \right), \dots, \left(ru^{(2r)} - \left| \begin{array}{c} \frac{\rho^{(2r)}}{r} \\ \frac{\rho^{(2r)}}{r} \end{array} \right| \right),$$

und man erhält, indem man die im vorhergehenden Artikel an der entsprechenden Stelle angeschriebenen Hilfsformeln für $\nu = 1, 2, \dots, 2r$ anwendet und wieder unter Berücksichtigung der Relation:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=2r} \rho_{\mu}^{(\nu)} u_{\mu}^{(\nu)} = - \sum_{\nu=1}^{\nu=2r} \rho_{\mu}^{(\nu)} v_{\mu}^{(\nu)} \quad (\mu=1, 2, \dots, p)$$

die den beiden Seiten gemeinsamen Exponentialfactoren durch Division entfernt, schliesslich die Formel:

$$(\theta'_2) \quad r^p \vartheta \left[\begin{array}{c} \frac{\eta - \rho^{(1)}}{r} \\ \frac{\eta' - \rho^{(1)}}{r} \end{array} \right] \langle\langle ru^{(1)} \rangle\rangle \dots \vartheta \left[\begin{array}{c} \frac{\eta - \rho^{(2r)}}{r} \\ \frac{\eta' - \rho^{(2r)}}{r} \end{array} \right] \langle\langle ru^{(2r)} \rangle\rangle e^{-\frac{2}{r} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \eta_{\mu} \eta'_{\mu} \pi i} =$$

$$\sum_{\substack{0, 1, \dots, r-1 \\ \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_p}} e^{-\frac{2}{r} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} (\eta_{\mu} \varepsilon_{\mu} - \eta'_{\mu} \varepsilon'_{\mu}) \pi i} \vartheta \left[\begin{array}{c} \frac{\varepsilon + \rho^{(1)}}{r} \\ \frac{\varepsilon' + \rho^{(1)}}{r} \end{array} \right] \langle\langle rv^{(1)} \rangle\rangle \dots \vartheta \left[\begin{array}{c} \frac{\varepsilon + \rho^{(2r)}}{r} \\ \frac{\varepsilon' + \rho^{(2r)}}{r} \end{array} \right] \langle\langle rv^{(2r)} \rangle\rangle e^{-\frac{2}{r} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \varepsilon_{\mu} \varepsilon'_{\mu} \pi i}$$

Diese Formel umfasst die Formeln (θ_2) , (θ'_2) als specielle Fälle und ist zugleich die allgemeinste derartige Formel.

Die Formeln (θ_2) , (θ'_2) , (θ'_2) entsprechen beziehlich den Formeln (θ) , (θ') , (θ'') der vorhergehenden Arbeit, und es hätte, ebenso wie (θ_2) aus (θ) abgeleitet wurde, auch (θ'_2) aus (θ') , (θ'_2) aus (θ'') direct abgeleitet werden können.

Setzt man in der Formel (θ_2') :

$$\vartheta \left[\begin{array}{c} \varepsilon + \rho^{(1)} \\ r \\ \varepsilon' + \rho'^{(1)} \\ r \end{array} \right] \langle \langle rv^{(1)} \rangle \rangle \dots \vartheta \left[\begin{array}{c} \varepsilon + \rho^{(2r)} \\ r \\ \varepsilon' + \rho'^{(2r)} \\ r \end{array} \right] \langle \langle rv^{(2r)} \rangle \rangle e^{-\frac{2}{r} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \varepsilon_{\mu} \varepsilon'_{\mu} \pi i} = x_{[\varepsilon]},$$

$$\vartheta \left[\begin{array}{c} \eta - \rho^{(1)} \\ r \\ \eta' - \rho'^{(1)} \\ r \end{array} \right] \langle \langle ru^{(1)} \rangle \rangle \dots \vartheta \left[\begin{array}{c} \eta - \rho^{(2r)} \\ r \\ \eta' - \rho'^{(2r)} \\ r \end{array} \right] \langle \langle ru^{(2r)} \rangle \rangle e^{-\frac{2}{r} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \eta_{\mu} \eta'_{\mu} \pi i} = x'_{[\eta]},$$

wobei die den Buchstaben x, x' beigefügten Zeichen $[\varepsilon], [\eta]$ die Complexe $[\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p], [\eta_1 \dots \eta_p]$ beziehlich vertreten sollen, und setzt zugleich, indem man zur Abkürzung $e^{-\frac{2}{r} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} (\eta_{\mu} \varepsilon'_{\mu} - \eta'_{\mu} \varepsilon_{\mu}) \pi i}$ mit $\tau, \sum_{\mu=1}^{\mu=p} (\eta_{\mu} \varepsilon'_{\mu} - \eta'_{\mu} \varepsilon_{\mu})$ mit $[\eta][\varepsilon]$ bezeichnet:

$$e^{-\frac{2}{r} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} (\eta_{\mu} \varepsilon'_{\mu} - \eta'_{\mu} \varepsilon_{\mu}) \pi i} = \tau^{[\eta][\varepsilon]},$$

so entsteht aus der genannten Formel die Gleichung:

$$r^p x'_{[\eta]} = \sum_{[\varepsilon]} \tau^{[\eta][\varepsilon]} x_{[\varepsilon]},$$

und es ist dabei die auf der rechten Seite angedeutete Summation über alle Terme zu erstrecken, die aus dem allgemeinen Gliede hervorgehen, indem man darin an Stelle des Systems der $2p$ in $[\varepsilon]$ vorkommenden Buchstaben $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_p$ der Reihe nach die sämtlichen r^{2p} Variationen der Elemente $0, 1, \dots, r-1$ zur $2p$ ten Classe mit Wiederholung treten lässt. Die letzte Gleichung umfasst, da das mit $x'_{[\eta]}$ bezeichnete Theta-product ungeändert bleibt, wenn man die Grössen $\eta_1, \dots, \eta_p, \eta'_1, \dots, \eta'_p$ um ganze Vielfache von r ändert, im Ganzen nur r^{2p} verschiedene specielle Gleichungen; man erhält dieselben, wenn man an Stelle des Systems der $2p$ in $[\eta]$ vorkommenden Buchstaben $\eta_1, \dots, \eta_p, \eta'_1, \dots, \eta'_p$ der Reihe nach die r^{2p} soeben angeführten Variationen setzt. Das auf diese Weise entstehende System von r^{2p} linearen Gleichungen, dem man durch passend gewählte Anordnung eine übersichtliche Gestalt verleihen kann,

lässt sich für die Untersuchung der aus der Formel (θ_2') entspringenden Relationen zwischen Thetafunctionen mit Vortheil verwenden.

Vergleicht man jetzt die Endformel (θ_1') des vorhergehenden Artikels mit der hier gewonnenen Formel (θ_2') , so erscheinen diese beiden Formeln zwar in Ansehung dessen, dass die erste einem beliebigen ungeraden $n = 2\nu + 1 = r$, die zweite einem beliebigen geraden $n = 2\nu = 2r$ entspricht, als gleichberechtigt, nicht aber, wenn man die ganze Zahl r , die durch ihr Auftreten als gemeinsamer Nenner bei den Charakteristiken-elementen eine Gruppe zusammengehöriger Thetafunctionen fixirt, und die mit Rücksicht darauf als die eigentliche Fundamentalconstante in den Formeln zu betrachten ist, als gegeben ansieht. Alsdann zeigt sich vielmehr ein wesentlicher Unterschied zwischen den beiden Formeln. Nicht nur gilt die Formel (θ_2') für beliebiges r , während die Formel (θ_1') auf ungerades r beschränkt ist, sondern es erscheint auch bei ungeradem r die Formel (θ_2') als die allgemeinere, weil sie zu gegebenem Werthe von r eine weit grössere Anzahl von Thetarelationen zu liefern vermag als die Formel (θ_1') .

Was schliesslich die Bedeutung der in der vorliegenden Arbeit gewonnenen Formeln betrifft, so mag hier nur kurz bemerkt werden, dass dieselben die Mittel gewähren, um die Relationen zwischen jenen Thetafunctionen zu gewinnen, deren Charakteristiken aus beliebigen rationalen Zahlen als Elementen gebildet sind, während die Anwendbarkeit der RIEMANN'schen Thetaformel auf den Fall, wo diese Elemente halbe Zahlen sind, beschränkt ist. Diese allgemeineren Thetafunctionen sind aber für die Theorie der ABEL'schen Functionen und der algebraischen Gleichungen von nicht geringerer Bedeutung wie die zuletzt erwähnten, bis jetzt fast ausschliesslich betrachteten speciellen. Durch die Gewinnung der Formeln (θ_1') , (θ_2') ist somit der mathematischen Speculation ein Gebiet zugänglich gemacht, in das einzudringen bisher mit den grössten Schwierigkeiten verknüpft war. Bezüglich der Anwendung der gewonnenen Formeln auf einen speciellen Fall möge auf eine im 22^{ten} Bande der *Mathematischen Annalen* erscheinende Arbeit: »Über Thetafunctionen, deren Charakteristiken aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind« verwiesen werden.

Würzburg, im Mai 1883.
