SUR LES SURFACES DU TROISIÈME ORDRE

PAR

C. LE PAIGE
À LIÈGE.

Nous nous proposons de développer, dans ce mémoire, les modes de construction de la surface du troisième ordre, définie par dix-neuf points, que nous avons fait connaître fort rapidement dans deux notes insérées aux *Comptes-Rendus.* (¹)

La question que nous traitons nous paraît assez neuve pour mériter peut-être un accueil favorable des Géomètres.

En effet, les travaux de CHASLES sur les courbes du troisième ordre, suivis des remarquables mémoires de MM. DE JONQUIÈRES, KORTUM, etc. ont permis d'aborder les constructions des courbes des degrés supérieurs. (²)

Pour les surfaces, le champ parcouru est moins vaste.

Les constructions de la surface du second ordre, données par HESSE, SEYDEWITZ, SCHROETER, STEINER et quelques autres, sont, pensons-nous, les seules connues lorsque la surface est définie par la condition générale de la connaissance de points en nombre suffisant. (³)

(¹) C. R. 2 et 16 Juillet 1883.

(²) Dans cette voie, on peut signaler d'intéressantes recherches dues à MM. DEWULF et SCHOUTE.

(³) Ce n'est pas le lieu de mentionner les modes divers de transformation qui laissent déduire, d'une surface connue, des surfaces d'un degré supérieur: dans certains cas particuliers, cette méthode permet de résoudre le problème de la description des surfaces et des courbes gauches. Nous signalerons cependant, en particulier, les célèbres méthodes de M. CREMONA, certains mémoires de M. SALTEL et des travaux récents et fort intéressants dûs à MM. VANĚČEK.

Le caractère des méthodes de HESSE et de SCHROETER est bien différent. Tandis que la première s'appuie sur les propriétés de l'involution, la seconde a recours au mode de génération par les systèmes réciproques de MÖBIUS.

Cette dernière voie a été suivie par M. G. VON ESCHERICH, professeur à Graz, dans deux mémoires où il expose un mode général de description des surfaces supérieures à l'aide de systèmes réciproques. (1)

Ces mémoires ne contiennent qu'une analyse succincte de la méthode suivie et une indication rapide des résultats qu'elle permet d'obtenir, mais leur contenu nous révèle assez toute la fécondité du procédé employé. L'auteur nous y fait espérer qu'il publiera bientôt des recherches plus détaillées.

Peut-être pourrons-nous mentionner les travaux que nous avons consacrés, depuis plusieurs années déjà, aux courbes et aux surfaces des ordres supérieurs.

Nous avons essayé de faire usage des méthodes que mettent à notre disposition les systèmes d'éléments formant des involutions et des homographies d'ordres et de rangs quelconques.

Simultanément avec notre savant ami, M. EMILE WEYR, nous avons tâché de développer cette idée des involutions, due au génie de PONCELET, et dont M. DE JONQUIÈRES a, le premier, montré toute la valeur; nous avons, pour cela, résolu quelques uns des problèmes fondamentaux que ces involutions présentent et obtenu ainsi des moyens qui permettent d'effectuer un grand nombre de constructions.

Jusqu'à ces derniers temps, nous nous étions borné à faire connaître l'application de ces procédés à la détermination des courbes du troisième ordre et du quatrième, définies respectivement par neuf ou quatorze points: cependant il est facile de voir que le principe général permet de construire les courbes du n^{me} ordre, dès que l'on connaît la construction de celles du $(n - 1)^{me}$.

Nous avons fait voir récemment que ces méthodes sont applicables aux surfaces.

---

(1) Sitzungsberichte der k. Wiener Akademie, Bd LXXXV, p. 526 et 893. Ces travaux nous étaient inconnus quand nous avons publié notre méthode: nous les devons à une obligeante communication de M. V. ESCHERICH.

C'est ainsi que l'emploi de l'involution et de l'homographie du troisième ordre, conduit à une détermination fort rapide et qui, croyons-nous, n'est pas dénuée d'élégance, de la surface du second ordre.

Les mêmes principes ont été employés par nous, dans les deux notes signalées plus haut, à la construction de la surface du troisième ordre.

C'est ce dernier problème que nous voulons exposer ici avec tous les développements nécessaires.

Nous avons fait usage, comme nous venons de le dire, de l'involution et de l'homographie du troisième ordre et du second rang que nous avons étudiées avec détail dans des travaux antérieurs. (1)

Les propriétés de l'involution doivent néanmoins être exposées d'une manière spéciale pour conduire le plus rapidement possible au but que nous nous proposons; aussi, pour ne pas interrompre plus loin notre solution, nous diviserons cette étude en deux parties.

Dans la première, nous ferons connaître les propriétés des cubiques gauches et planes, et nous résoudrons les problèmes relatifs à ces courbes, que nous devrons employer.

Nous devrons donc y reproduire quelques résultats dûs à d'autres Géomètres ou à nous même: néanmoins cette partie contiendra aussi quelques choses nouvelles.

I.

Nous considérerons, en général, comme supports des séries de points, soit une conique C_2, soit une cubique gauche R_3, en partant de ce fait que les points de ces courbes peuvent s'obtenir individuellement et que les points de C_2 peuvent correspondre uniformément aux points de R_3.

Il en résulte immédiatement que pour définir une involution quadratique sur R_3, il suffit de construire tous les plans d'un faisceau dont l'axe rencontre R_3.

Cette simple remarque conduit à la description d'une R_3 par points.

---

(1) *Essais de Géométrie supérieure du troisième ordre* (Liège 1882).

En effet, imaginons que l'on se donne, sur R_3, six points AB, $A'B'$, MM'.

Les plans $\overline{ABM}$, $\overline{A'B'M}$ se coupent suivant une droite x qui caractérisera l'involution I_1^2 définie par les deux couples.

De même $\overline{AB'M}$, $\overline{A'BM}$ donneront une droite y.

Soit $\omega \equiv \overline{xy}$.

Ce plan qui coupe déjà R_3 en M, rencontre la cubique en deux points qui marquent le couple commun aux deux involutions AB, $A'B'$; AB' $A'B$.

Si nous faisons les constructions analogues en nous servant du point M', nous obtenons un plan ω'.

ω et ω' se coupent suivant une droite d, toujours réelle, qui passe par les deux points communs aux involutions quadratiques.

Tout autre point M'' de R_3 aurait donné un plan ω'' passant par d.

En conséquence, pour construire de nouveaux points de R_3, il suffit de mener par la droite d, définie comme il vient d'être dit, un plan ω''.

Ce plan ω'' rencontre les droites $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ en des points C, D, et les droites $\overline{AB'}$, $\overline{A'B}$ en des points C', D'. Les droites $\overline{CD}$, $\overline{C'D'}$ se coupent en un point M'' de R_3.

Cette construction de la cubique gauche, connue d'ailleurs, se justifie aisément par de simples considérations géométriques.

Il est facile, d'après cela, de construire les éléments doubles d'une involution donnée par deux couples AA', BB'.

Il suffira, en effet, de construire le couple commun aux deux involutions définies par les couples AB, $A'B'$; AB', $A'B$: ce couple sera ainsi représenté par une droite réelle.

Si les couples AA', BB' étaient imaginaires, on pourrait employer l'artifice suivant.

Par un point D de R_3, on mène une droite s'appuyant sur les deux droites réelles $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$. Soit r cette droite. Tous les plans du faisceau r coupent R_3 en des couples de l'involution donnée: il suffira donc de déterminer des couples réels de cette involution, pour appliquer la solution précédente.

On peut encore se proposer de déterminer les éléments unis de deux séries projectives dont on connaît trois couples AA', BB', CC'.

Il suffira de chercher le couple commun aux involutions (AB', BA'), (AC', CA'): on pourra, comme on l'a vu, construire la sécante de R_3, qui marque ce couple sur la courbe.

Voyons maintenant comment on peut résoudre, sur une R_3, les principaux problèmes relatifs à une I_2^3.(1)

Tous les plans d'une gerbe P coupent R_3 en des ternes de points qui appartiennent à une I_2^3. Chaque couple de points, pris sur R_3, détermine avec P un plan, permettant de construire le troisième point du terne.

D'un autre côté, une I_2^3, étant définie par trois groupes de trois éléments, caractérisera une gerbe, dont le sommet est le point d'intersection des plans contenant les ternes de points.

D'après ce que nous avons vu ces ternes peuvent être composés d'un point défini individuellement et d'un groupe de deux points qui peuvent être imaginaires.

En effet, un couple de points peut toujours être regardé comme le couple commun à deux I_1^2, ou comme les éléments doubles d'une I_1^2, ou comme les éléments unis d'une H_1^2: dans ces trois cas, nous avons appris à construire la sécante de R_3 qui les contient.

Cette sécante et le point donné suffisent pour déterminer un plan.

L'involution I_2^3 possède un couple d'éléments neutres; ce couple est marqué par la sécante de R_3, menée par P.

Or, pour construire celle-ci, il suffit d'observer que les éléments neutres constituent le couple commun à toutes les involutions quadratiques correspondant, dans une I_2^3, à tous les points du support.

Prenons, sur R_3, des points M, M'; ensuite menons des plans $PMAB$, $PMA'B'$. $M'AB$, $M'A'B'$ se coupent suivant une droite $M'X$.

Par PM', menons des plans $PM'A_1B_1$, $PM'A_1'B_1'$. MA_1B_1, $MA_1'B_1'$ se coupent suivant une droite MY. PMY, $PM'X$ se coupent suivant une droite PZ, qui est la droite cherchée.

Il suffira encore, pour ce qui va suivre, de savoir déterminer un groupe de trois points, sur une R_3, sans construire les point individuellement.

(1) Vois, sur ce sujet, divers mémoires dûs à MM. Appell, R. Sturm et Em. Weyr.

Un groupe de trois points peut toujours être regardé comme le groupe commun à trois I_2^3.

Or, nous pouvons déterminer les sommets des gerbes qui caractérisent les involutions données, et le plan des trois sommets sera le plan cherché.

Pour résoudre les problèmes que nous rencontrerons dans la suite, il sera nécessaire de faire correspondre point par point une R_3 à une droite.

Or il est évident qu'un faisceau de plans, dont l'axe est une sécante de R_3, projette uniformément tous les points de la courbe sur une droite quelconque.

L'on aura souvent à définir les deux points d'intersection d'un plan avec une R_3, lorsque l'on connaît un point de R_3 situé dans ce plan. Ce couple peut être regardé comme les éléments communs à deux involutions quadratiques dont les axes, situés dans le plan, passent par le point d'intersection connu *à priori*. Ces involutions se déterminent aisément, et, par un des problèmes résolus précédemment, il est alors facile de construire la droite qui contient les deux intersections inconnues.

Cette détermination est nécessaire parceque, à l'aide du mode de représentation que nous venons d'indiquer, on pourra définir, sur une droite, les deux points d'intersection que nous avons caractérisés.

On devra faire usage de ces procédés chaque fois qu'il s'agira des involutions I_1^3. En effet tous les plans d'un faisceau coupent R_3 en des ternes de points qui appartiennent à une involution cubique du premier rang.

La détermination du groupe commun à deux I_1^2 permet, on le voit, de trouver sur R_3, les images réelles ou imaginaires des points où une droite réelle rencontre une conique. Il faudra, pour cela, établir la correspondance entre le points de R_3 et ceux de la droite, puis regarder la conique comme engendrée par deux faisceaux homographiques. Ces faisceaux marquent sur la droite deux séries projectives dont les éléments unis seront les points cherchés.

Le probléme n'exige de considérations particulières que dans le cas où la conique est définie par quatre points imaginaires (conjugués deux à deux) et un point réel.

Soient D, D'; D_1, D_1' les deux couples de points imaginaires définis sur deux droites d, d_1, et A, le point réel.

Soit P l'intersection des droites d et d_1.

Il est facile de construire les conjugués harmoniques R et S de P par rapport aux deux couples imaginaires. $RS \equiv p$ est la polaire de P.

PA coupe p en X et si B est le conjugué harmonique de A par rapport à PX, B appartient à la conique. Le pôle de AB est situé sur p.

Maintenant il est facile d'obtenir les points EF où p rencontre la courbe.

Si de EF on projetait tous les points de la courbe sur d, on obtiendrait une involution dont les points doubles seraient D, D'. De même pour d_1.

Donc si de A, on projette sur p les involutions dont les points doubles sont D, D'; D_1, D'_1, le groupe commun sera EF.

Il n'est évidemment pas nécessaire de construire individuellement les points EF pour obtenir des couples de l'involution dont ces points sont les éléments doubles.

En projetant ces couples de A et B, on obtient deux faisceaux projectifs qui engendrent la conique.

Nous pouvons maintenant aborder le problème suivant: *Construire les points d'intersection d'une droite avec une cubique définie par neuf points.*

Pour traiter le problème avec toute la généralité désirable, nous supposerons que parmi les neuf points, il y en ait huit A, A'; B, B'; C, C'; D, D' définis par couples sur quatre droites réelles a, b, c, d. Soit P le neuvième point.

Nous supposerons d'abord que les quatre droites a, b, c, d ne concourent pas en P.

Considérons les cubiques décomposables

$$a(PBB'CC'), \qquad b(PAA'CC'), \qquad c(PAA'BB').$$

Ces cubiques marquent sur la droite donnée l, trois ternes de points caractérisant une I_2^3.

Nous pourrons toujours représenter ces ternes sur R_3, et cela à l'aide de simples constructions linéaires: nous définirons donc aisément le sommet de la gerbe qui caractérise l'involution.

Si nous répétons les constructions analogues pour les groupes $PAA'BB'DD'$, $PAA'CC'DD'$, nous obtiendrons sur R_3 deux autres I_2^3 et le groupe commun aux trois I_2^3 sera le terne cherché.

Dans les problèmes que nous aurons à traiter, il ne sera jamais nécessaire de déterminer les points du terne individuellement: la connaissance du plan qui les contient suffira toujours.

Imaginons maintenant que les quatre droites a, b, c, d concourent au neuvième point donné P.

Prenons les conjugués harmoniques A_1, B_1, C_1, D_1 de P par rapport aux quatre couples AA', BB', CC', DD'. $(PA_1B_1C_1D_1)$ définit une conique, polaire de P par rapport à la cubique à construire. La tangente en P, PX, à cette conique est aussi tangente à la cubique.

Il est facile, d'après ce que nous avons vu, de définir, sur PX, les ternes de points marqués par des cubiques passant par les huit points $AA'BB'CC'DD'$ en choisissant des neuvièmes points P_1, P_2, ... différents de P.

Toutes ces cubiques marquent sur PX des groupes en I_1^3.

Cette involution a un point double en P. Il suffira de déterminer le point de ramification O correspondant: ce point de ramification est, sur la cubique à construire, le point tangentiel de P.

On obtiendra aussi aisément le point tangentiel O_1 de O, par des constructions linéaires. À l'aide de O_1 et des points donnés, on appliquera la première solution.

Nous aurons encore à nous poser la question suivante:

Problème II. *Construire une cubique passant par trois points donnés et appartenant à un système triplement infini défini par quatre cubiques données.*

Soient C_3, C_3', C_3'', C_3''' les cubiques définissant le système et A, B, C les trois points donnés.

Toutes les cubiques du système, passant par A, appartiennent à un système doublement infini, qui sera caractérisé par trois courbes.

On peut choisir pour cela les courbes passant par A et respectivement par les intersections de C_3 avec C_3', C_3'', C_3'''. Il est inutile de faire voir comment ces courbes pourront se construire: les méthodes exposées jusqu'ici suffisent amplement: nous pourrons observer d'ailleurs qu'il ne s'agit que d'obtenir sur R_3, les images des points où une de ces cubiques est coupée par une droite l.

Ces trois cubiques définissent un système en I_2^3 auquel appartient la cubique cherchée.

Il suffira de compléter, dans l'involution marquée sur $\overline{BC}$, le terne dont on connait les éléments B, C. Nous trouverons ainsi un point A'.

La répétition du même procédé donnera autant de points de la courbe que l'on voudra.

Au surplus, s'il fallait construire les intersections de cette courbe avec une droite quelconque l, nous pourrions en employant successivement A, B, C, trouver sur l trois involutions I_2^3, dont le groupe commun serait le groupe cherché. [1]

Comme nous le verrons, il pourra être utile de construire d'une manière continue une surface du second ordre: nous rappellerons rapidement la solution que nous avons fait connaître.

Elle repose sur les propriétés suivantes:

I. Soient A, B, C trois points d'une surface du second ordre S_2, σ leur plan.	I'. Soient α, β, γ trois plans tangents à une surface de la seconde classe Σ_2, S leur intersection.
A, B, C déterminent trois plans tangents α, β, γ qui se coupent en un point P.	α, β, γ déterminent trois points de contact A, B, C qui se trouvent dans un plan ω.
Les jonctions de P avec BC, CA, AB sont trois plans α', β', γ'.	Les intersections de ω avec $\overline{\beta\gamma}$, $\overline{\gamma\alpha}$, $\overline{\alpha\beta}$ sont trois points A', B', C'.

(1) Si la construction précédente ne paraissait pas suffisamment justifiée, le court raisonnement suivant la démontrerait.

Soit

$$\lambda C_3 + \lambda' C_3' + \lambda'' C_3'' + \lambda''' C_3''' = 0,$$

l'équation qui définit le système triplement infini, et marquons par $(C_3^i)_0$ le résultat de la substitution dans C_3^i des coordonnées du point A.

On devrait donc avoir, pour toutes les courbes passant par A,

$$\lambda (C_3)_0 + \lambda' (C_3')_0 + \lambda'' (C_3'')_0 + \lambda''' (C_3''')_0 = 0.$$

L'équation des courbes passant par A devient donc en éliminant λ:

$$\lambda' [C_3' (C_3)_0 - C_3 (C_3')_0] + \lambda'' [C_3'' (C_3)_0 - C_3 (C_3'')_0] + \lambda''' [C_3''' (C_3)_0 - C_3 (C_3''')_0] = 0;$$

or la forme même de l'équation de ces courbes suffit pour établir les constructions dont nous avons fait usage.

$\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ sont deux trièdres homologiques dont l' est l'axe d'homologie.

Les jonctions des points de S_2 avec les droites BC, CA, AB forment trois faisceaux qui coupent l' suivant trois ponctuelles en I_2^3.

II. Si l'on joint, de toutes les manières possibles, les cotés a, b, c, d'un triangle à trois points PQR d'une droite l non située dans le plan du triangle, on obtient six points A_1, A_2, ... A_6. Ces six points sont sur une conique.

ABC, $A'B'C'$ sont deux triangles homologiques dont l est l'axe d'homologie.

Les intersections des plans tangents à Σ_2 avec $\overline{\beta\gamma}$, $\overline{\gamma\alpha}$, $\overline{\alpha\beta}$ sont trois ponctuelles dont les jonctions avec l forment trois faisceaux en I_2^3.

II'. Si l'on coupe, de toutes les manières possibles les arêtes a, b, c d'un trièdre par trois plans ω, χ, ρ menés par une droite l, ne passant pas par le sommet du trièdre, on obtient six plans α_1, α_2, ... α_6 tangents à un cône du second degré.

À l'aide des neuf points donnés, on construit aisément [1] les trièdres $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ dont il est question au théorème I, et, par suite, la droite l'.

Alors chaque point M de la surface, joint à $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ donne trois plans qui coupent l' en trois points PQR de l'involution I_2^3.

L'involution étant formée de groupes symétriques, on peut permuter de toutes les manières possibles les points PQR, sans que les différentes permutations cessent de donner des points de la surface.

On en obtient, de cette façon, six qui, d'après le théorème II, sont situés sur une conique et, par suite, donnent une section plane tout entière de la surface.

Chaque point de S_2 donne ainsi naissance à une section plane et il est bien facile de faire voir que toutes ces sections sont situées dans des plans passant par une droite fixe (la droite l du théorème II').

La construction tout à fait analogue s'applique aux surfaces de la seconde classe.

Pour montrer comment on peut, par ce procédé, construire autant de points, et par suite de sections planes, qu'on le veut, de la surface, il reste à faire connaître la détermination de nouveaux ternes de l'involution marquée sur l'.

---

(1) V. les notes que nous avons publiées aux Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 3^me série, t. V (1883).

Or cette involution a évidemment pour points triples le point où l' perce le plan σ et ceux où elle rencontre S_2.

De plus, il est visible que le point de rencontre de l' avec σ et le point P, compté deux fois, constituent un terne de l'involution. En outre chaque point connu de la surface donne un terne de l'involution.

On se trouve donc en présence de ce problème: *Construire des ternes d'une involution I_2^3 dont on connaît un point triple a_1, un groupe composé de a_1 et du point α_1 conjugué harmonique de a_1 par rapport aux deux autres points triples a_2, a_3, et un terne xyz.* Dans le cas actuel, il sera plus commode de supposer que les éléments donnés sont représentés sur une conique C_2.

Les tangentes à C_2 en a_1 et α_1 se coupent en un point t.

Si nous menons $\overline{xt}$ qui rencontre C_2 en p, les deux droites $\overline{a_1p}$, $\overline{yz}$ se coupent en un point k.

La droite $\overline{tk}$ est la hessienne des points triples.

On est donc ramené à construire des ternes d'une I_2^3 dont on connaît un point triple a_1 et les éléments neutres.

Soit, par exemple, $x'y'$ un couple qu'il s'agit de compléter. $\overline{x't}$ coupe C_2 en p'. $\overline{a_1p'}$ coupe $\overline{tk}$ en k' et $\overline{k'y'}$ coupe C_2 au point cherché z'.(1)

Les constructions que nous avons exposées dans cette première partie sont toutes, on le voit, purement linéaires.

II.

Nous possédons maintenant tous les éléments nécessaires pour aborder les questions relatives aux surfaces du troisième ordre.

Comme on le sait depuis longtemps cette surface peut être engendrée par les intersections de trois faisceaux de plans, liés par une relation homographique du troisième ordre et du second rang.

Cette méthode, qui a été développée par M. August peut être regardée comme un cas particulier de la seconde méthode de Steiner.

---

(1) Pour justifier cette construction, voir nos *Essais de Géom. sup. du 3me ordre*, p. 80.

Soient X, Y, Z les axes des trois faisceaux de plans: ces trois droites appartiennent à la surface. L'homographie H_2^3 étant caractérisée par sept ternes, il suffira de connaître sept points de la surface S_3 pour définir cette dernière.

Désignons respectivement par $\xi_i \eta_i \zeta_i$ ($i = 0, 1, 2, \ldots 6$) les sept ternes de plans passant par les droites x, y, z, et par A_i le point d'intersection des trois plans d'un terne.

Si par A_0, nous menons trois droites arbitraires x', y', z', les plans ξ_i, η_i, ζ_i marquent sur ces droites des points X_i Y_i, Z_i ($i = 1, 2, 3, \ldots 6$).

Nous obtenons ainsi six plans $X_i Y_i Z_i \equiv \beta_i$.

Ces six plans β_i et les trois faces du trièdre $x'y'z'$ sont neuf plans qui caractérisent une surface de la seconde classe Σ_2.

Tous les plans tangents à cette surface marquent sur $x'y'z'$ des ternes de points appartenant à une H_2^3. En effet deux points quelconques $X_k Y_k$ définissent un plan tangent et par suite un point Z_k.

Or cette homographie sera identique avec celle qui est marquée, sur ces mêmes droites, par tous les ternes de plans qui joignent les points de S_3 aux trois axes x, y, z.

Nous avons donc cette propriété:

»Si par un point A_0 d'une surface du troisième ordre, on mène trois droites arbitraires $x'y'z'$ les ternes de plans qui joignent tous les points de la surface à trois droites de celle-ci, x, y, z, ne se rencontrant pas deux à deux, marquent sur $x'y'z'$ des ternes de points dont les jonctions enveloppent une surface de la seconde classe tangente aux faces du trièdre $x'y'z'$.»

En d'autres termes:

Si un tétraèdre se déforme de telle façon que trois de ses faces passent par trois droites fixes, tandis que la quatrième reste tangente à une surface de la seconde classe Σ_2, et que trois de ses sommets parcourent trois droites concourantes formant un trièdre dont les faces soient tangentes à Σ_2, le quatrième sommet décrit une surface du troisième ordre passant par les trois droites fixes et par le sommet du trièdre.

Il résulte de là et de la construction que nous avons fait connaître plus haut de la surface du second ordre ou de la seconde classe, que nous pourrons construire autant de points que nous voudrons de la surface du troisième ordre.

Chaque plan tangent à Σ_2 donne naissance à six plans tangents passant par un point fixe et circonscrits à un cône du second ordre qui touche Σ_2.

Par conséquent, nous pouvons observer que chaque point que l'on détermine de la surface S_3, donne naissance à une courbe gauche G_6 de genre o, puisque chacun de ses points correspond à un plan tangent du cône du second degré.

Nous avons tantôt signalé les deux droites l et l', employées dans la construction des surfaces du second ordre.

Il est facile de voir que tous les cônes dont il s'agit ici ont leurs sommets sur la droite l' et que, par suite, les plans des courbes de contact avec Σ_2 passent par l.

Lorsqu'un plan tangent de Σ_2 tourne autour d'une génératrice de cette surface, il ne cesse pas de donner des points de S_3. D'après un théorème de Chasles, les points correspondant aux différentes positions du plan tangent sont situés sur une cubique gauche R_3. Cette cubique passe par A_0.

Nous pouvons observer que par chaque point de Σ_2 passent deux génératrices auxquelles correspondent deux R_3 situées sur S_3. Ces deux courbes passent toutes deux par A_0 et ont en outre un second point commun correspondant au plan tangent détérminé par les deux génératrices des deux systèmes.

On obtient ainsi sur S_3, deux systèmes de courbes R_3 qui jouent le même rôle que les génératrices des deux modes de Σ_2.

On voit qu'il serait facile de développer ce sujet, connu d'ailleurs. Nous pouvons faire une autre remarque.

Si nous considérons les trois faisceaux de plans, dont les intersections engendrent S_3, ces faisceaux marquent, sur une droite quelconque l, trois ponctuelles en H_2^3. Nous pouvons observer que dans chaque faisceaux existent deux éléments neutres: les six plans ainsi déterminés forment deux trièdres qui, outre les trois axes des faisceaux, donnent naissance à six autres droites situées sur S_3.

Lorsque la droite l, dont nous venons de parler, au lieu d'être arbitraire, passe par les sommets des deux trièdres conjugués, les plans des faisceaux x, y, z marquent, sur l, trois séries en H_2^3 pour lesquelles les éléments neutres des trois séries coïncident. Par suite, on a une involution I_2^3.

Les points unis de cette I_2^3 sont ceux où l rencontre S_3.

Supposons maintenant que l'on joigne x, y, z à un point M de S_3; on obtiendra, sur l, un terne PQR de l'involution. Les éléments d'une I_2^3 étant permutables, on pourra, en les joignant de toutes les manières possibles à x, y, z, construire cinq autres points de S_3.

En outre, il est possible de former avec les neuf droites des deux trièdres six ternes de droites que l'on peut regarder comme axes de trois faisceaux décrivant S_3. Ces faisceaux marqueront également des I_2^3 sur l et ces I_2^3 seront toutes identiques entre elles puisqu'elles auront les mêmes points triples.

Il en résulte que si l'on joint PQR aux droites d'un des ternes, on obtiendra six nouveaux points de S_3.

En résumé, lorsque l'on connaît deux trièdres conjugués, chaque point de la surface permet d'en déterminer trente-cinq autres par de simples constructions de plans. Les points de S_3 s'associent donc par groupes de trente-six.

Peut-être un jour reviendrons-nous sur ce sujet: pour le moment, reprenons la question que nous nous sommes proposée.

Nous devrons d'abord résoudre le problème suivant:

Construire la section, par un plan quelconque, d'une surface du troisième ordre dont on connaît trois droites et sept points.

Or, rien n'est plus aisé, d'après ce qui précède.

En effet, soit ω un plan quelconque: ce plan est rencontré par x, y, z en trois points A, B, C qui appartiennent à la section.

Tout plan passant par x coupe ω suivant une droite m. Or, à ce plan correspond, dans H_2^3, une H_1^2 facile à déterminer par ce que nous avons vu, et dont les plans correspondants engendrent, par leurs intersections, une surface du second ordre. Celle-ci coupe ω suivant une conique qui correspond à m.

On obtient donc, sur m, deux points réels ou imaginaires.

Comme on le voit, la section est une cubique engendrée par la méthode de Chasles. Néanmoins, on peut en construire *linéairement* autant de points qu'on le veut, en faisant usage des procédés que nous avons indiqués au commencement de cette note.

Mais il résulte encore de ce problème que l'on peut, sans difficulté, trouver sur une R_3 choisie une fois pour toutes, la représentation du groupe de trois points où une droite l rencontre la surface définie comme il vient d'être dit.

Il suffira, par l, de mener un plan ω, puis d'appliquer la méthode de la page 187.

Supposons maintenant que *la surface soit définie par une droite, trois groupes de trois points situés en ligne droite et six autres points.*

Soit l_1 la droite donnée,

$PP'P''$, trois points situés sur une droite l_2,
$QQ'Q''$, » » » » » » l_3,
$RR'R''$ » » » » » » l_4,

et $ABCDEF$ les six points donnés.

Nous devrons construire les intersections d'une droite l avec une surface ainsi définie.

Or considérons les surfaces caractérisées par les éléments:

$l_1 l_2 l_3$; $RR'R''ABCD$, et appelons cette surface S_3,
$l_1 l_3 l_4$; $PP'P''ABCD$, » » » » S'_3,
$l_1 l_4 l_2$; $QQ'Q''ABCD$, » » » » S''_3.

Ces trois surfaces sont définies comme dans le premier cas; par conséquent, il est facile de construire les plans α, α', α'' qui rencontrent la courbe R_3 en des points représentant les intersections de ces surfaces par la droite l.

Les surfaces S_3, S'_3, S''_3 définissent une I_2^3 à laquelle appartient la surface à construire Σ_3 et caractérisée par une gerbe G, dont le sommet est donné par les plans α, α', α''.

En employant, au lieu de $ABCD$, les éléments $ABCE$, $ABCF$, nous obtenons deux autres gerbes G', G'', et le plan $GG'G''$ coupe R_3 aux trois images des intersections de l et de Σ_3.

S'il s'agissait d'achever la construction de la surface Σ_3, on pourrait mener un plan quelconque par un des points donnés, par exemple F. Dans ce plan, et par F, on mènerait des droites sur lesquelles on déterminerait des couples de points appartenant à Σ_3. Il serait aisé, en employant un des problèmes de la première partie, de construire *linéairement* autant de points qu'on le voudrait, de la section plane. En menant tous les plans de la gerbe F on achèverait la surface.

Nous aborderons maintenant cette autre question:

Construire une surface du troisième ordre dont on connaît une droite, trois points en ligne droite et douze autres points.

Soit l_1 la droite donnée,

$$PP'P'', \text{ situés sur une droite } l_2,$$

$ABCDEFGHIKLM$, les douze points donnés.

Considérons les droites l_1, l_2, $AB \equiv l_3$, $CD \equiv l_4$, et les six points $EFGHIK$.

D'après ce qui vient d'être dit, nous pourrons considérer ces éléments comme caractérisant une surface S_3, et déterminer le plan α qui coupe R_3 aux points-images des intersections d'une droite l avec S_3.

En employant successivement $AC \equiv l'_3$, $BD \equiv l'_4$, et $AD \equiv l''_3$, $BC \equiv l''_4$, nous aurons des surfaces S'_3, S''_3, et des plans α', α''.

$\alpha\alpha'\alpha''$ donnent une gerbe G_1.

Si au lieu d'employer $EFGHIK$, nous employons successivement $EFGHIL$, $EFGHIM$, nous aurons de même des gerbes G'_1, G''_1.

Le plan $G_1 G'_1 G''_1$, marquera, sur R_3, les images des intersections de l avec la surface à construire.

S'il fallait achever la surface, par le point M par exemple, nous ferions passer un plan; dans ce plan, et par M, nous mènerions des droites l.

Le problème qui vient d'être résolu permettrait de définir, sur une de ces droites l, les deux autres intersections de la droite avec la surface cherchée: alors, en agissant comme plus haut, on achèverait la section plane et, par suite, la surface.

Nous sommes maintenant amené à cette autre question: *Construire une surface du troisième ordre dont on connaît trois points en ligne droite et seize autres points.*

Soient $RR'R''$ situés sur une droite l_1 et $ABCDEFGHIKLMNOPQ$, les points donnés.

En considérant l_1 comme une droite de la surface, $AB \equiv l_2$ comme une seconde droite contenant trois points de la surface et les douze points $CDEFGHIKLMNO$, on peut, par le problème précédent, construire une surface S_3 définie par ces éléments.

On sait donc déterminer, sur une droite l quelconque, les points où S_3 rencontre cette droite.

D'autres combinaisons des mêmes éléments donnent des surfaces S_3', S_3'' qui avec S_3 définissent un système en I_2^3.

À ce système appartient la surface cherchée Σ_3.

On voit qu'il suffit de répéter les raisonnements que nous avons faits déjà: en effet, en remplaçant successivement, dans les éléments caractéristiques, O par P et Q, on obtiendra deux autres systèmes en I_2^3.

Nous arrivons finalement à la question qui fait l'objet principal de ce travail:

Construire une surface du troisième ordre dont on connaît dix-neuf points.

Soient $RR'R''ABCDEFGHIKLMNOPQ$ les dix-neuf points donnés.

Désignons par Γ le groupe formé des seize derniers points et convenons de représenter par $(\Gamma - X \ldots + Y \ldots)$ le groupe obtenu en retirant de Γ un certain nombre de points et en y ajoutant d'autres.

Alors en prenant successivement des points S, S' situés sur les droites $AB \equiv l_1$; $CD \equiv l_1'$, les éléments

$$l_1,\ (\Gamma - AB + RR'),$$
$$l_1',\ (\Gamma - CD + RR'),$$

déterminent, par le problème précédent deux surfaces S_3, S_3' caractérisant un système en I_1^3 auquel appartient la surface à construire Σ_3.

Si maintenant par R'', on fait passer une droite l, il sera possible de définir, sur cette droite, les deux points réels ou imaginaires où l rencontre S_3.

Si l'on fait pivoter l dans un plan ω, on trouvera, par les problèmes de la première partie, à l'aide de constructions *linéaires*, autant de points que l'on voudra de la section faite par ω.

On peut aborder le même problème d'une façon différente.

Nous supposerons encore que l'on ait résolu le premier problème, c'est-à-dire que l'on sache déterminer une surface cubique dont on connaît trois droites et sept points.

Alors se présentera cette question:

Construire une surface du troisième ordre dont on connaît quatre groupes de trois points en ligne droite et sept autres points.

Soient

$PP'P''$,	trois	points	situés	sur	une	droite	l_1,
$QQ'Q''$,	»	»	»	»	»	»	l_2,
$RR'R''$,	»	»	»	»	»	»	l_3,
$SS'S''$,	»	»	»	»	»	»	l_4,

et $A_1 A_2 A_3 ABCD$ sept autres points.

Les trois droites l_1, l_2, l_3 et les sept points $SS'S''ABCD$, déterminent une surface S_3.

De même l_1, l_2, l_4, $RR'R''ABCD$ déterminent une surface S_3'.

On aurait, par les deux autres combinaisons des mêmes éléments, deux surfaces S_3'', S_3'''.

Ces surfaces coupent le plan $\omega \equiv A_1 A_2 A_3$ suivant quatre cubiques planes C_3, C_3', C_3'', C_3'''.

Il suffira de construire la cubique appartenant à ce système triplement infini et passant par $A_1 A_2 A_3$, pour avoir la section de la surface à construire Σ_3 par le plan ω.

Pour aborder les questions suivantes, il sera nécessaire de savoir construire les intersections de Σ_3 et d'une droite quelconque l.

Or, si nous prenons sur cette droite l deux points quelconques $X_1 Y_1$, ces deux points, joints à l_1, l_2, l_3, l_4, $ABCDA_1$, permettront de construire une surface S_3 et par suite de construire le troisième point Z_1 où l rencontre S_3. Cette construction est linéaire.

Nous pourrons, de cette façon, obtenir sur l, une involution I_2^3 caractérisée par les surfaces définies par les éléments donnés sauf A_2, A_3.

En employant successivement A_2 et A_3, au lieu de A_1, on obtiendra trois I_2^3 sur l et le groupe commun à ces trois involutions marquera les intersections cherchées.

Il est bien entendu qu'il ne s'agit encore une fois ici que de construire un plan qui, par ses intersections avec R_3, représenterait les points demandés.

Nous pouvons maintenant aborder directement ce problème:

Construire une surface du troisième ordre dont on connaît trois points en ligne droite et seize autres points.

Soient les points $PP'P''$ situés sur une droite l_1, et

$$ABCDEFGHIJKLMA_1A_2A_3,$$

les seize autres points.

En combinant tous les éléments sauf les derniers $A_1A_2A_3$ de la manière suivante:

l_1, $AB \equiv l_2$, $CD \equiv l_3$, $EF \equiv l_4$, $GHIJKLM$, on obtient par ce qui précède une surface S_3.

D'autres arrangements de ces mêmes éléments donnent des surfaces S_3', S_3'', S_3'''.

On peut toujours obtenir les intersections de ces surfaces par une droite l, c'est-à-dire, si l'on peut s'exprimer ainsi, on peut toujours obtenir virtuellement la section d'une de ces surfaces par un plan ω.

Si l'on choisit pour plan ω le plan $A_1A_2A_3$, il faudra, dans ce plan, construire la cubique d'un système triplement infini passant par $A_1A_2A_3$. Cette section pourra toujours s'obtenir effectivement. En d'autres termes on construira *linéairement* autant de points qu'on le voudra de la section.

Si l'on veut déterminer les intersections de la surface, définie par les dix-neuf éléments donnés, et d'une droite l, il faudra opérer comme pour le problème précédent, c'est-à-dire remplacer les points A_2A_3 par deux points X_1Y_1 situés sur l.

De cette manière, on trouverait un point Z_1. La suite du raisonnement n'a besoin d'être développée.

Nous sommes ramené, on le voit, à l'avant dernier problème traité par la première méthode.

Il n'est donc pas nécessaire d'aller plus loin.

Nous croyons avoir, dans ce mémoire, justifié entièrement toutes les assertions contenues dans nos deux notes insérées aux *Comptes-rendus.*

En effet, nous avons fait voir que l'on peut, étant donnés dix-neuf points dans l'espace, construire *linéairement* autant de points qu'on le veut d'une section, faite, dans la surface cubique définie par ces points, par un plan qui passe par un des dix-neuf points donnés.

Les constructions que nous avons indiquées sont malheureusement un peu longues: bien que, dans un sujet ainsi compliqué, il paraisse difficile d'obtenir des résultats très-simples, nous espérons que quelque Géomètre, plus heureux, parviendra à une méthode plus facile.

Quoiqu'il en soit, nous osons espérer que ce travail ne paraîtra pas dénué d'intérêt.

Peut-être nous sera-t-il donné de reprendre cette question et d'aborder certains cas particuliers qui méritent d'être examinés.

Aerschot, le 20 Septembre 1883.