SUR LES FORMES QUADRATIQUES TERNAIRES INDÉFINIES
À INDÉTERMINÉES CONJUGUÉES
ET SUR LES FONCTIONS HYPERFUCHSIENNES CORRESPONDANTES.

PAR

EMILE PICARD

À PARIS.

Dans le tome 1^{er} de ce recueil, j'ai rapidement montré comment les formes quadratiques ternaires indéfinies à indéterminées conjuguées et à coefficients entiers pouvaient conduire à une classe étendue de groupes discontinus de substitutions linéaires pour le cas de deux variables; j'ai fait voir en outre que l'on pouvait former des fonctions de deux variables indépendantes qui ne changent pas quand on effectue sur les variables une substitution quelconque du groupe. Je donnerai dorénavant à de telles fonctions le nom de *fonctions hyperfuchsiennes,* indiquant ainsi l'analogie qui existe entre ces fonctions de deux variables indépendantes et les fonctions d'une variable qui ont été appelées *fuchsiennes* par M. Poincaré.

L'objet de ce mémoire est l'étude des principales propriétés des fonctions et des groupes hyperfuchsiens, dont l'existence seule a été établie dans le travail que je viens de rappeler. Je ne considère que le cas où la forme quadratique ternaire indéfinie a pour coefficients des nombres entiers complexes de la forme $a + bi$, mais on verrait facilement que des considérations analogues pourraient être appliquées si les coefficients étaient des entiers formés avec les racines d'une équation du second degré à racines imaginaires.

J'ai dû commencer par faire l'étude arithmétique des formes quadratiques ternaires indéfinies à indéterminées conjuguées, et à ce point de vue ce travail est la suite de celui que j'ai publié dans les Annales de l'École Normale (Janvier et Février 1884) et où j'ai développé la théorie des formes binaires. Le premier chapitre a pour objet cette étude arithmétique, dans le second et le troisième je m'occupe particulièrement du groupe hyperfuchsien que je fais correspondre à toute forme indéfinie, et enfin le quatrième chapitre est consacré à l'examen des propriétés les plus importantes et les plus simples des fonctions hyperfuchsiennes.

I.

1. Considérons la forme quadratique ternaire à indéterminées x et x_0, y et y_0, z et z_0

$$F = axx_0 + a'yy_0 + a''zz_0 + byz_0 + b_0y_0z + b'zx_0 + b'_0z_0x + b''xy_0 + b''_0x_0y \tag{1}$$

où a, a' et a'' sont réels, les coefficients b et b_0, b' et b'_0, b'' et b''_0 sont des quantités imaginaires conjuguées, forme que nous désignerons par (a, a', a'', b, b', b''). On établit bien facilement que, si le discriminant de cette forme, c'est à dire la quantité réelle

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b'' & b'_0 \\ b''_0 & a' & b \\ b' & b_0 & a'' \end{vmatrix}$$

n'est pas nul, on peut la mettre sous l'une des formes suivantes

$$\pm(uu_0 + vv_0 + ww_0)$$
$$\pm(uu_0 + vv_0 - ww_0)$$

où u, v, w sont des expressions linéaires en x, y, z et indépendantes. Soit

$$u = \alpha x + \beta y + \gamma z$$
$$v = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z$$
$$w = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z.$$

Dans les deux premiers cas, la forme ayant un signe invariable est dite définie; dans les deux autres cas la forme est indéfinie.

Les résultats précédents donnent tout ce qui concerne l'équivalence algébrique des formes F; nous supposerons dans la suite que la forme F est indéfinie et à coefficients entiers, et qu'elle appartient au type

$$uu_0 + vv_0 - ww_0$$

c'est à dire qu'on peut la ramener à cette forme par une substitution linéaire.

2. Commençons par résondre le problème suivant: Trouver la transformation linéaire la plus générale transformant en elle-même

$$uu_0 + vv_0 - ww_0.$$

Soit donc

$$(1)\qquad \begin{aligned} U &= Mu + Pv + Rw \\ V &= M'u + P'v + R'w \\ W &= M''u + P''v + R''w \end{aligned}$$

une substitution telle que

$$UU_0 + VV_0 - WW_0 = uu_0 + vv_0 - ww_0.$$

On aura les relations

$$\begin{aligned} MM_0 + M'M'_0 - M''M''_0 &= 1 \\ PP_0 + P'P'_0 - P''P''_0 &= 1 \\ RR_0 + R'R'_0 - R''R''_0 &= -1 \\ MP_0 + M'P'_0 - M''P''_0 &= 0 \\ MR_0 + M'R'_0 - M''R''_0 &= 0 \\ PR_0 + P'R'_0 - P''R''_0 &= 0. \end{aligned}$$

Comme d'autre part les équations (1) résolues par rapport à u, v et w donnent

$$\begin{aligned} u &= \quad M_0 U + M_0' V - M_0'' W \\ v &= \quad P_0 U + P_0' V - P_0'' W \\ w &= - R_0 U - R_0' V + R_0'' W, \end{aligned}$$

ces six équations sont équivalentes à celles-ci:

$$\begin{aligned} MM_0 + PP_0 - RR_0 &= 1 \\ M'M_0' + P'P_0' - R'R_0' &= 1 \\ M''M_0'' + P''P_0'' - R''R_0'' &= -1 \\ M_0 M' + P_0 P' - R_0 R' &= 0 \\ M_0 M'' + P_0 P'' - R_0 R'' &= 0 \\ M_0' M'' + P_0' P'' - R_0' R'' &= 0. \end{aligned}$$

On tire de la quatrième et de la cinquième de ces équations

$$\frac{M_0}{P''R' - P'R''} = \frac{P_0}{M'R'' - M''R'} = \frac{R_0}{M'P'' - M''P'}.$$

Désignons par k la valeur commune de ces rapports: en portant les valeurs de M_0, P_0, R_0 dans la première équation, on aura

$$\begin{aligned} 1 = kk_0[&(M'M_0' + P'P_0' - R'R_0')(R''R_0'' - M''M_0'' - P''P_0'') \\ &- (M_0'M'' + P_0'P'' - R_0'R'')(M'M_0'' + P'P_0'' - R'R_0'')] \end{aligned}$$

et par conséquent $kk_0 = 1$.

Le système des six équations peut donc se remplacer par le suivant

$$M_0 = k(P''R' - P'R''), \quad P_0 = k(M'R'' - M''R'), \quad R_0 = k(M'P'' - M''P')$$

$$\begin{aligned} M'M_0' + P'P_0' - R'R_0' &= 1 \\ M''M_0'' + P''P_0'' - R''R_0'' &= -1 \\ M_0'M'' + P_0'P'' - R_0'R'' &= 0. \end{aligned}$$

3. Ceci posé, revenons *à la forme indéfinie F à coefficients entiers,* forme qui peut s'écrire

$$F = uu_0 + vv_0 - ww_0$$

où u, v et w ont les significations indiquées (§ 1), les α, β, γ n'étant pas nécessairement des entiers. En même temps que la forme indéfinie proposée, j'envisage la forme définie

$$\Phi = UU_0 + VV_0 + WW_0$$

où U, V, W sont les expressions linéaires en u, v, w définies dans le paragraphe précédent. On aura donc

$$\Phi = \text{Norme}(Mu + Pv + Rw) + \text{Norme}(M'u + P'v + R'w) \\ + \text{Norme}(M''u + P''v + R''w)$$

et d'après les relations auxquelles satisfont les M, P, R on peut écrire

$$\Phi = -(uu_0 + vv_0 - ww_0)(M''M''_0 + P''P''_0 - R''R''_0) \\ + 2(M''u + P''v + R''w)(M''_0u_0 + P''_0v_0 + R''_0w_0);$$

elle ne contient plus que les lettres M'', P'' et R'' d'ailleurs liées par la relation

$$M''M''_0 + P''P''_0 - R''R''_0 = -1.$$

On doit concevoir d'ailleurs que u, v et w sont remplacés par leur valeur en x, y et z; la forme Φ est donc une forme quadratique ternaire définie aux indéterminées conjuguées x, y, z, x_0, y_0, z_0. Elle renferme trois paramètres arbitraires M'', P'' et R'' liés par la relation écrite ci dessus.

Je ferai immédiatement la remarque suivante: En effectuant dans Φ une substitution S on obtiendra une nouvelle forme φ; soit de même f la transformée obtenue en faisant dans F la substitution S, on voit très facilement que φ peut se déduire de f d'après le mode même de formation de Φ au moyen de F.

4. Il est nécessaire de rappeler maintenant les résultats relatifs à la réduction des formes *définies*. En nous bornant aux formes quadratiques ternaires, on peut énoncer la proposition suivante: Étant donnée une forme quadratique ternaire définie à coefficients quelconques, on pourra toujours par une substitution linéaire à coefficients entiers et de déterminant un, transformer la forme en une forme équivalente ayant pour expression:

$$\mu_1 \operatorname{Norme}(x + \varepsilon_{12}y + \varepsilon_{13}z) + \mu_2 \operatorname{Norme}(y + \varepsilon_{23}z) + \mu_3 \operatorname{Norme} z$$

où μ_1, μ_2, μ_3 sont positifs avec les conditions

$$\mu_2 \geqq \frac{1}{2}\mu_1, \qquad \mu_3 \geqq \frac{1}{2}\mu_2.$$

Dans chacune des quantités complexes ε, la partie réelle et la partie imaginaire ne surpassent pas $\frac{1}{2}$ en valeur absolue.

On donne le nom de *réduites* aux formes jouissant de ces propriétés et on établit qu'une forme définie donnée n'est arithmétiquement équivalente qu'à un nombre limité de formes réduites.

Le procédé de réduction, conduisant au théorème qui vient d'être énoncé, est dû à MM. Korkine et Zolotareff (Mathematische Annalen t. 6). Il s'étend d'ailleurs à un nombre quelconque de variables. On trouvera développée cette théorie de la réduction des formes quadratiques *définies* à indéterminées conjuguées dans le beau mémoire de M. Jordan sur l'équivalence des formes algébriques (Journal de l'École Polytechnique t. 29).

Reprenons la forme définie Φ du paragraphe précédent, elle ne sera pas réduite en générale; supposons que pour certaines valeurs des paramètres on cherche une substitution à coefficients entiers qui la réduise; cette substitution réduira Φ tant que les paramètres M'', P'' et R'' satisferont à certaines conditions. Si on suppose que ces paramètres varient d'une manière continue (en satisfaisant, bien entendu, à la relation indiquée), il faudra à un certain moment employer une autre substitution pour réduire Φ, et c'est à ces opérations de réductions successives de la forme Φ quand M'', P'' et R'' varient d'une manière continue que nous donnons le nom de réduction continuelle de cette forme.

Nous dirons qu'une forme indéfinie F est réduite, quand la forme définie correspondante Φ est elle-même réduite pour certaines valeurs des paramètres M'', P'' et R''. Le premier point à établir est *que le nombre des formes réduites arithmétiquement équivalentes à une forme donnée est fini.*

5. Cherchons quelles relations d'inégalités entre les coefficients entraîne la condition qu'une forme définie est réduite. Soit:

$$Axx_0 + A'yy_0 + A''zz_0 + Byz_0 + B_0y_0z + B'zx_0 + B'_0z_0x + B''xy_0 + B''_0x_0y$$

une telle forme, supposée positive; les valeurs de μ_1, μ_2, μ_3 et des ε en fonction des A et B se trouvent immédiatement. On en déduit les conditions suivantes: dans B'' et B' la partie réelle et le coefficient de i sont moindres en valeur absolue que $\frac{1}{2}A$; puis

$$AA' - B''B''_0 > \frac{1}{2}A^2;$$

dans $(AB - B''_0B'_0)$ la partie réelle et le coefficient de i sont moindres en valeur absolue que $\frac{1}{2}(AA' - B''B''_0)$ (cette dernière expression est nécessairement positive puisque la forme est définie). Enfin l'on a

$$(A'A - B''B''_0)^2 < 2A\Delta$$

en désignant par Δ le déterminant de la forme.

Ces diverses conditions d'inégalité expriment complètement que la forme est réduite. On peut en déduire d'autres: cherchons en particulier quelques fonctions des coefficients limités en fonction de l'invariant Δ.

On a, avec les notations du paragraphe 4,

$$\mu_2 \geqq \frac{1}{2}\mu_1, \qquad \mu_3 \geqq \frac{1}{4}\mu_1$$

et comme $\Delta = \mu_1\mu_2\mu_3$, on en déduit

$$\mu_1^3 \leqq 2^3\Delta, \qquad \mu_2^2\mu_1 \leqq 2\Delta, \qquad \mu_2\mu_1^2 \leqq 4\Delta, \qquad \mu_3\mu_1^2 \leqq 2\Delta.$$

Puisque $A = \mu_1$ on voit que A est limité en fonction de Δ, et il en est alors de même de la partie réelle et de la partie imaginaire de B' et B''. Puisque

$$A'A - B''B_0'' < \sqrt{2A\Delta}$$

on en conclut que AA' est aussi limité;

or $$AA' = \mu_1(\mu_1 \operatorname{Norme} \varepsilon_{12} + \mu_2);$$

par suite $\mu_1\mu_2$ est également limité. On a de suite

$$\mu_1\mu_2 \leqq 2\Delta^{\frac{2}{3}}.$$

On voit aussi que $AA'A''$ est limité aussi que A^2A'' et il en est de même de la partie réelle et de la partie imaginaire dans BB', BB'' et $BB'B''$.

Je ferai encore la remarque que les produits

$$(AA'' - B'B_0')(AA' - B''B_0'') \quad \text{et} \quad (AA' - B''B_0'')^2(A'A'' - BB_0)$$

sont limités et de même le produit

$$(AA' - B''B_0'')(AA'' - B'B_0')(A'A'' - BB_0).$$

Démontrons le fait pour ce dernier produit; il peut s'écrire

$$A^2A'^2A''^2 + BB_0\ B'B_0'\,.\,B''B_0'' - A^2A'A''BB_0 - AA'A''^2B''B_0''$$
$$- AA''A'^2B'B_0' + AA'BB_0B'B_0' + AA''BB_0B''B_0'' + A'A''B'B_0'B''B_0''.$$

Tous les termes seront limités; prenons par exemple

$$A^2A''BB_0$$

qui sera

$$\mu_1^2(\mu_1 \mathrm{N}\,\varepsilon_{12} + \mu_2)(\mu_1 \mathrm{N}\,\varepsilon_{13} + \mu_2 \mathrm{N}\,\varepsilon_{23} + \mu_3)\,\mathrm{N}\,(\mu_1\varepsilon_{12}\varepsilon_{13} + \mu_2\varepsilon_{23});$$

c'est un polygone en μ_1, μ_2 et μ_3, contenant des termes qui sont tous limités.

Nous signalerons encore les expressions

$$ABB_0, \quad A'B'B_0', \quad A''B''B_0''$$

et, je le repète, toutes les expressions qui viennent d'être indiquées sont limitées en fonction de l'invariant Δ.

6. Revenons maintenant à la forme définie Φ associée à la forme indéfinie F (paragraphe 3).

Nous avons

$$\Phi = -(uu_0 + vv_0 - ww_0)(M''M''_0 + P''P''_0 - R''R''_0) + 2(M''u + P''v + R''w)(M''_0u_0 + P''_0v_0 + R''_0w_0)$$

et soit en développant

$$\Phi = Axx_0 + A'yy_0 + A''zz_0 + Byz_0 + B_0y_0z + B'zx_0 + B'_0z_0x + B''xy_0 + B''_0x_0y.$$

Tout d'abord les coefficients de xx_0, yy_0 et zz_0 dans F sont inférieurs en valeur absolue aux coefficients correspondants de Φ. Prenons par exemple a, on aura

$$a = \alpha\alpha_0 + \alpha'\alpha'_0 - \alpha''\alpha''_0$$

et on a

$$A = \alpha\alpha_0 + \alpha'\alpha'_0 - \alpha''\alpha''_0 + 2\,\mathrm{Norme}\,(M''\alpha + P''\alpha' + R''\alpha'')$$

et le fait apparait immédiatement si a est positif. Si a est négatif on remarquera que A peut s'écrire

$$A = -(\alpha\alpha_0 + \alpha'\alpha'_0 - \alpha''\alpha''_0) + 2\,\mathrm{Norme}\,(M\alpha + P\alpha' + R\alpha'') + 2\,\mathrm{Norme}\,(M'\alpha + P'\alpha' + R'\alpha'')$$

et par suite on peut écrire dans tous les cas

$$|a| \leqq A, \quad |a'| \leqq A', \quad |a''| \leqq A''$$

en entendant par $|a|$ la valeur absolue de a.

Or en désignant par $-\Delta$ le discriminant évidemment négatif de F, le discriminant de Φ sera Δ.

Si la forme F *est réduite,* la forme Φ sera réduite pour certaines valeurs de M'', P'' et R''. Les expressions A, AA', A^2A'', $AA'A''$ étant alors limitées en fonction de Δ, il en sera de même de

$$a, \quad aa', \quad a^2a'' \quad \text{et} \quad aa'a''.$$

Je dis encore que l'on a

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
(aa' - b''b_0'') &\leqq AA' - B''B_0'' \\
(aa'' - b'b_0') &\leqq AA'' - B'B_0' \\
(a'a'' - bb_0) &\leqq A'A'' - BB_0 .
\end{aligned}
$$

Il suffit évidemment de montrer qu'il en est ainsi pour les deux formes

$$
\begin{gathered}
uu_0 + vv_0 - ww_0 \\
uu_0 + vv_0 + ww_0 ,
\end{gathered}
$$

or on a, dans la première,

$$
\begin{aligned}
aa' - b''b_0'' = (\alpha\alpha_0 + \alpha'\alpha_0' - \alpha''\alpha_0'')(\beta\beta_0 + \beta'\beta_0' - \beta''\beta_0'') \\
- \text{Norme}\,(\alpha\beta + \alpha'\beta' - \alpha''\beta'')
\end{aligned}
$$

et dans la seconde

$$
\begin{aligned}
AA' - B''B_0'' = (\alpha\alpha_0 + \alpha'\alpha_0' + \alpha''\alpha_0'')(\beta\beta_0 + \beta'\beta_0' + \beta''\beta_0'') \\
- \text{Norme}\,(\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'').
\end{aligned}
$$

Or on peut écrire

$$
\begin{aligned}
AA' - B''B_0'' = \text{Norme}\,(\alpha\beta_0' - \alpha'\beta_0) + \text{Norme}\,(\alpha'\beta_0'' - \alpha''\beta_0') \\
+ \text{Norme}\,(\alpha''\beta_0 - \alpha\beta_0'')
\end{aligned}
$$

tandis que

$$
\begin{aligned}
aa' - b''b_0'' = \text{Norme}\,(\alpha\beta_0' - \alpha'\beta_0) - \text{Norme}\,(\alpha'\beta_0'' - \alpha''\beta_0') \\
- \text{Norme}\,(\alpha''\beta_0 - \alpha\beta_0'')
\end{aligned}
$$

et les inégalités annoncées deviennent évidentes.

On en conclut que

$$
aa' - b''b_0'', \quad (aa' - b''b_0'')(aa'' - b'b_0'), \quad (aa' - b''b_0'')^2(a'a'' - bb_0)
$$

sont limités en fonction de Δ, puisque les combinaisons analogues où les petites lettres sont remplacées par des grandes sont limitées.

Des inégalités (1) on déduit encore immédiatement que

$$abb_0, \quad a'b'b'_0, \quad a''b''b''_0 \quad \text{et} \quad \text{Norme}\, bb'b''$$

sont limités en fonction de Δ

Nous ajouterons enfin l'expression $a^2(aa'' - b'b'_0)$ qui est limitée puisque $A^2(AA'' - B'B'_0)$ est limité.

Nous nous proposons maintenant d'établir ce théorème fondamental *que le nombre des réduites ayant un déterminant donné est limité.*

7. Nous allons d'abord donner la démonstration en supposant que a n'est pas nul.

Les produits aa' et a^2a'' étant comme nous l'avons vu limités a, a' et a'' seront limités en fonction de Δ.

La norme de b sera aussi limitée puisque abb_0 l'est également.

Il en est de même de b'' et b' puisque nous avons montré que

$$aa' - b''b''_0 \quad \text{et} \quad a^2(aa'' - b'b'_0)$$

sont limités.

Les six coefficients qui sont des entiers ont donc leur norme limitée en fonction du déterminant Δ, et *le théorème est alors établi.*

Tout ceci suppose essentiellement que a n'est pas nul; la démonstration est encore bien facile quand, a étant nul, le produit $b'b''$ est différent de zéro, car

$$a'b'b'_0, \quad a''b''b''_0 \quad \text{et} \quad bb'b''$$

étant limités, on conclut de suite que a', a'', b, b' et b'' sont limités.

Supposons maintenant que, a étant nul, l'un des coefficients b' ou b'' soit nul: soit par exemple $b' = 0$ avec $a = 0$.

Le déterminant de la forme se réduit à $-a''b''b''_0$; a'' et b'' sont donc limités et on voit que a'' sera positif. Il faut montrer que a' et b ne peuvent dépasser une certaine limite dépendant seulement de Δ. Nous remarquerons d'abord que la limitation de

$$(b''b''_0)^2(a'a'' - bb_0)$$

nous montre que $a'a'' - bb_0$ est limité.

Soit

$$F = a'yy_0 + a''zz_0 + byz_0 + b_0y_0z + b''xy_0 + b''_0x_0y$$

et posons $\delta = a'a'' - bb_0$ que, pour fixer les idées, nous supposerons positif: δ, comme nous venons de le dire, est limité. Nous pouvons écrire

$$a''F = (a''z + b_0y)(a''z + by_0) + \frac{1}{\delta}(\delta y + a''b''x)(\delta y_0 + a''b''_0x_0) - \frac{a''^2b''b''_0}{\delta}xx_0$$

et la forme Φ correspondant à la forme $a''F$, sera

$$\begin{aligned}\Phi = & - a''(MM_0 + PP_0 - RR_0)(a''zz_0 + byz_0 + b_0y_0z + a'yy_0 + b''xy_0 + b''_0x_0y) \\ & + 2\left[\frac{a''b''}{\sqrt{\delta}}(P + R)x + (Mb_0 + P\sqrt{\delta})y + Ma''z\right] \\ & \times \left[\frac{a''b''_0}{\sqrt{\delta}}(P_0 + R_0)x_0 + (M_0b + P_0\sqrt{\delta})y_0 + M_0a''z_0\right]\end{aligned}$$

en écrivant M, P, R au lieu de M'', P'', R'' comme nous l'avions fait plus haut. On a d'ailleurs

$$MM_0 + PP_0 - RR_0 = -1.$$

La forme Φ est définie pour certaines valeurs de M, P et R.

Le coefficient $\frac{2a''^2b''b''_0}{\delta}(P + R)(P_0 + R_0)$ de xx_0 est limité en fonction de l'invariant $a''^3\Delta$ de $a''F$; on a ainsi:

$$\frac{2a''^2b''_0b''}{\delta}(P + R)(P_0 + R_0) < 2a''\Delta.$$

Le coefficient de xz_0 dans F est $\frac{2a''^2b''}{\sqrt{\delta}}M_0(P + R)$; sa norme doit être plus grande que la moitié du carré du coefficient de xx_0. On a donc:

$$\frac{4a''^4b''b''_0}{\delta}MM_0(P + R)(P_0 + R_0) < 2\left(\frac{a''^2b''b''_0}{\delta}\right)(P + R)^2(P_0 + R_0)^2.$$

On déduit des inégalités précédentes que MM_0 est limité en fonction de Δ.

Or dans Φ le coefficient de zz_0 est

$$a''^2(MM_0 + RR_0 - PP_0)$$

ou bien

$$a''^2(2MM_0 + 1).$$

Ce coefficient est donc limité. Mais le coefficient de zz_0 étant limité dans Φ, il doit en être de même du coefficient de yy_0; en effet si on désigne par A, A' et A'' les coefficients de xx_0, yy_0 et zz_0 dans une forme définie réduite, on aura:

$$A' < 2A'' + \frac{A}{2},$$

comme il résulte immédiatement des conditions de la réduction; si donc A'' est limité, comme A l'est toujours, il en sera de même de A'; nous concluons de là que $a'a''$ est limité, par suite a' est limité, il en est alors de même de bb_0; *tous les coefficients sont donc encore limités.*

Il nous reste à examiner le cas où $a = b'' = 0$. On voit de suite que a' et b' sont limités, car le déterminant de la forme, qui est supposé différent de zéro, est égal à $-a'b'b'_0$. Nous avons à montrer que les deux autres coefficients a'' et b sont limités.

Soit

$$F = a'yy_0 + a''zz_0 + byz_0 + b_0y_0z + b'xz_0 + b'_0x_0z;$$

on aura

$$\Phi = F + 2\,\text{Norme}\,[(M\alpha + P\alpha' + R\alpha'')x + (M\beta + P\beta' + R\beta'')y + (M\gamma + P\gamma' + R\gamma'')z].$$

Les équations de condition pour la réduction de la forme Φ donnent

$$\text{Norme}\,(M\beta + P\beta' + R\beta'') < \frac{1}{2}\,\text{Norme}\,(M\alpha + P\alpha' + R\alpha'')$$

et dans

$$\frac{1}{a'}\left(b - b'_0\frac{M\beta + P\beta' + R\beta''}{M\alpha + P\alpha' + R\alpha''}\right)$$

la partie réelle et le coefficient de i sont moindres que $\frac{1}{2}$ en valeur absolue; des deux conditions précédentes on conclut que b est limité.

Il reste seulement à faire voir que a'' est limité; nous allons faire voir que $\delta = a'a'' - bb_0$ est limité. On va supposer dans ce calcul a' et δ positifs mais un calcul analogue peut être fait dans tous les cas.

Ecrivons

$$a'F = \text{Norme}\,(a'y + b_0 z) + \text{Norme}\left(\frac{a'b'x + \delta z}{\sqrt{\delta}}\right) - \text{Norme}\,\frac{a'b'x}{\sqrt{\delta}};$$

la forme Φ adjointe à $a'F$ sera

$$\Phi = (a'^2 yy_0 + a'a''zz_0 + a'byz_0 + a'b_0y_0z + a'b'xz_0 + a'b'_0x_0z)(RR_0 - MM_0 - PP_0)$$
$$+ 2\,\text{Norme}\left[\frac{a'b'}{\sqrt{\delta}}(P + R)x + Ma'y + (Mb_0 + P\sqrt{\delta})z\right].$$

Le coefficient de xy_0 est

$$2\frac{a'^2b'}{\sqrt{\delta}}(P + R)M_0$$

et celui de xx_0

$$2\frac{a'^2b'b'_0}{\delta}(P + R)(P_0 + R_0).$$

Donc dans $b'\frac{M_0}{P_0 + R_0}$ le coefficient de i et la partie réelle sont moindres en valeur absolue que $\frac{1}{2}\frac{b'b'_0}{\sqrt{\delta}}$.

Le coefficient de xz_0 est

$$a'b'(RR_0 - MM_0 - PP_0) + 2\frac{a'b'}{\sqrt{\delta}}(P + R)(M_0 b + P_0\sqrt{\delta})$$

ou

$$a'b'[RR_0 + PP_0 - MM_0 + 2RP_0 + \frac{2b}{\sqrt{\delta}}M_0(P + R)]$$

et dans cette expression le coefficient de i et la partie réelle sont moindres que

$$\frac{a'^2b'b'_0}{\delta}(P + R)(P_0 + R_0).$$

Dans le quotient de ces deux quantités, la partie réelle est donc comprise entre -1 et $+1$. Or ce quotient peut s'écrire:

$$\frac{(P+R)(P_0+R_0)+P_0R-R_0P-MM_0+\frac{2b}{\sqrt{\delta}}M_0(P+R)}{\frac{a'b'_0}{\delta}(P+R)(P_0+R_0)}$$

et en posant $\frac{M}{P+R}=\lambda$, on aura donc

$$1-\lambda\lambda_0+\frac{2b}{\sqrt{\delta}}\lambda_0+\frac{2b_0}{\sqrt{\delta}}\lambda<\frac{a'\sqrt{b'b'_0}}{\delta}\sqrt{2}.$$

On a de plus

$$\lambda\lambda_0<\frac{1}{2}\frac{b'b'_0}{\delta}.$$

On voit bien facilement que ces deux inégalités relatives à λ ne peuvent être vérifiées simultanément que si δ est limité en fonction de b, b' et a', et par suite de Δ. Le point λ doit en effet être intérieur au cercle

$$\lambda\lambda_0=\frac{1}{2}\frac{b'b'_0}{\delta}$$

et extérieur au cercle

$$\lambda\lambda_0-2\lambda\frac{b_0}{\sqrt{\delta}}-2\lambda_0\frac{b}{\sqrt{\delta}}+\frac{a'\sqrt{2b'b'_0}}{\delta}-1=0.$$

Or ces deux cercles étant symétriques par rapport à l'axe réel, il faut et il suffit qu'une des racines de l'équation:

$$\lambda^2=\frac{1}{2}\frac{b'b'_0}{\delta}$$

soit en dehors des racines de l'équation:

$$\lambda^2-2\lambda\frac{b+b_0}{\sqrt{\delta}}+\frac{a'\sqrt{2b'b'_0}}{\delta}-1=0,$$

Soit $\lambda = \varepsilon\sqrt{\frac{1}{2}\frac{b'b'_0}{\delta}}$, où $\varepsilon = \pm 1$, cette racine; le résultat de la substitution de cette valeur dans le premier membre de la seconde équation devra être positif; on aura alors

$$\frac{1}{2}\frac{b'b'_0}{\delta} - 2\varepsilon\sqrt{\frac{b'b'_0}{2}}(b+b_0)\frac{1}{\delta} + \frac{a'\sqrt{2b'b'_0}}{\delta} - 1 > 0,$$

d'où l'on déduit que δ est limité.

En résumé nous pouvons énoncer le théorème suivant qui est fondamental.

Le nombre des réduites arithmétiquement équivalentes à une forme indéfinie, dont le déterminant n'est pas nul, est fini.

II.

8. Commençons par faire un changement dans les paramètres; cette substitution se fera bien simplement en remarquant que la forme Φ est homogène en M, P, R. Posons alors

$$\frac{M}{R} = \xi, \quad \frac{P}{R} = \eta.$$

Nous considérerons dorénavant la forme Φ

$$\Phi = -(uu_0 + vv_0 - ww_0)(\xi\xi_0 + \eta\eta_0 - 1) + 2\,\text{Norme}\,(u\xi + v\eta + w)$$

et puisque on avait $MM_0 + PP_0 - RR_0 = -1$, on voit que les paramètres ξ, η devront satisfaire à la condition

$$\xi\xi_0 + \eta\eta_0 < 1.$$

Nous appellerons souvent dans la suite un système de valeurs (ξ, η), le point $\xi, \eta)$. L'ensemble des points (ξ, η) satisfaisant à une ou plusieurs conditions d'inégalité formera ce que nous appellerons un *domaine* de points. Ainsi, par exemple, l'ensemble des points ξ, η pour lesquels

$$\xi\xi_0 + \eta\eta_0 \leqq 1$$

formera un domaine que nous désignerons par S, et nous désignerons par *limite* ou *surface* du domaine S, l'ensemble des points tels que

$$\xi\xi_0 + \eta\eta_0 = 1.$$

Certaines inégalités entre ξ et η exprimeront que la forme Φ est réduite, et si ces inégalités sont compatibles, elles définiront pour le point (ξ, η) un certain domaine D qui correspondra à la réduite indéfinie

$$F = uu_0 + vv_0 - ww_0.$$

Nous n'avons d'ailleurs à considérer que les parties du domaine D intérieures à S.

Ceci posé, je vais établir que *le domaine D ne peut avoir plus d'un point commun avec la surface de S.*

Désignons par $-\Delta$ le déterminant (qui est évidemment négatif) de la forme F; on voit d'abord que le déterminant de la forme Φ est égal à

$$\Delta(1 - \xi\xi_0 - \eta\eta_0)^3.$$

Or dans une forme définie réduite, le coefficient de xx_0 est moindre que deux fois la racine cubique du déterminant (voir paragraphe 5); nous aurons par suite en conservant les notations précédemment adoptées

$$2\,\text{Norme}(\alpha\xi + \alpha'\eta + \alpha'') + a(1 - \xi\xi_0 - \eta\eta_0) \leqq 2\Delta^{\frac{1}{3}}(1 - \xi\xi_0 - \eta\eta_0)$$

et on conclut de cette égalité que si le point (ξ', η') appartient à la limite de S on aura

$$\alpha\xi' + \alpha'\eta' + \alpha'' = 0.$$

D'autre part en désignant comme précédemment par (A, A', A'', B, B', B'') une forme définie réduite, on peut écrire, comme on sait, cette forme de la façon suivante:

$$\mu_1\,\text{Norme}(x + \varepsilon_1 y + \varepsilon_2 z) + \mu_2\,\text{Norme}(y + \varepsilon_3 z) + \mu_3 zz_0$$

où les μ et ε satisfont aux conditions rappelées.

Or on a

$$\mu_1 = A$$

$$\mu_2 = A' - \frac{B''B''_0}{A}$$

$$\mu_3 = A'' - \frac{B'B'_0}{A} - \frac{AB - B''_0B'_0}{AA' - B''B''_0}\left(B_0 - \frac{B''B'}{A}\right)$$

et on a vu que

$$\text{Norme}\frac{B'}{A} < \frac{1}{2}, \quad \text{Norme}\frac{AB - B''_0B'_0}{AA' - B''B''_0} < \frac{1}{2}.$$

Considérons toujours un point du domaine D, qui appartienne à la surface de S; comme nous venons de le voir on a pour ce point (ξ', η')

$$\alpha\xi' + \alpha'\eta' + \alpha'' = 0.$$

Alors μ_1 devient nul et on voit que μ_2 et μ_3 se réduisent respectivement à

$$A' \quad \text{et} \quad A'' - \lim B_0 . \frac{AB - B''_0B'_0}{AA' - B''B''_0}.$$

Nous supposons que le point (ξ, η) restant toujours dans le domaine D tende suivant une loi arbitraire vers le point (ξ', η'); c'est dans ces conditions qu'il faut entendre le signe limite contenu dans l'expression précédente; les autres termes disparaissent car

$$\lim \frac{B''B''_0}{A} = 0 \ \text{ puisque } \ \text{Norme}\frac{B''}{A} < \frac{1}{2} \ \text{ et } \ \lim B'' = 0$$

et de même pour les autres.

Mais la forme Φ se réduit pour $\xi = \xi'$ et $\eta = \eta'$ à

$$2\,\text{Norme}\left[(\beta\xi' + \beta'\eta' + \beta'')y + (\gamma\xi' + \gamma'\eta' + \gamma'')z\right].$$

Or son déterminant est nul; donc pour $\xi = \xi'$, $\eta = \eta'$ on a

$$\mu_2\mu_3 = 0.$$

On a par suite $\mu_2 = 0$, l'hypothèse $\mu_3 = 0$ donnant aussi $\mu_2 = 0$ puisque $\mu_3 > \frac{1}{2}\mu_2$.

On a par suite

$$\beta\xi' + \beta'\eta' + \beta'' = 0,$$

et cette égalité jointe à

$$\alpha\xi' + \alpha'\eta' + \alpha'' = 0$$

déterminent complètement ξ' et η'; *il ne peut donc y avoir plus d'un point du domaine D appartenant à la surface de S.*

9. A chaque réduite ne correspondra pas d'ailleurs évidemment un tel point; il est nécessaire pour cela que les valeurs de ξ' et η' tirées des deux équations précédentes satisfassent à la relation

$$\xi'\xi'_0 + \eta'\eta'_0 - 1 = 0.$$

Approfondissons maintenant la signification de l'équation de condition à laquelle on est ainsi conduit. En résolvant les deux premières équations et portant les valeurs de ξ' et η' dans la troisième, on a:

$$\text{Norme}(\alpha''\beta' - \alpha'\beta'') + \text{Norme}(\beta\alpha'' - \alpha\beta'') - \text{Norme}(\alpha\beta' - \alpha'\beta) = 0.$$

Or désignons comme précédemment la forme par

$$F = (a,\ a',\ a'',\ b,\ b',\ b'')$$

on a

$$a = \alpha\alpha_0 + \alpha'\alpha'_0 - \alpha''\alpha''_0$$

$$a' = \beta\beta_0 + \beta'\beta'_0 - \beta''\beta''_0$$

et

$$b'' = \alpha\beta_0 + \alpha'\beta'_0 - \alpha''\beta''_0.$$

En formant l'expression $b''b''_0 - a'a$, on trouve:

$$b''b''_0 - a'a = \text{Norme}(\alpha''\beta' - \alpha'\beta'') + \text{Norme}(\beta\alpha'' - \alpha\beta'') - \text{Norme}(\alpha\beta' - \alpha'\beta)$$

et l'on voit par conséquent que:

$$b''b''_0 - a'a = 0.$$

Ainsi les réduites pour lesquelles cette relation est vérifiée sont les seules pour lesquelles le domaine D peut avoir un point commun avec la limite du domaine S.

Mais ce n'est pas tout; je dis que a *doit être nul.* Considérons en effet une réduite dans laquelle a n'est pas nul; nous avons vu précédemment que dans ce cas les coefficients de xx_0, yy_0 et zz_0 sont limités, par suite

$$M\alpha + P\alpha' + R\alpha'', \quad M\beta + P\beta' + R\beta'' \quad \text{et} \quad M\gamma + P\gamma' + R\gamma''$$

sont limités en fonction de Δ: M, P et R ne peuvent donc dépasser une certaine limite et par suite le point $\xi = \frac{M}{R}$, $\eta = \frac{P}{R}$ est intérieur au domaine S; il n'a aucun point commun avec la surface de ce domaine, car de tels points correspondent à des valeurs infiniment grandes de R.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant qui est fondamental:

Les réduites pour lesquelles $a = 0$, $b'' = 0$ sont les seules pour lesquelles le domaine correspondant D peut avoir un point commun avec la surface de S.

10. Nous allons montrer maintenant qu'aux réduites, dont il vient d'être question, correspondent bien effectivement des domaines D ayant un point commun avec la surface de S.

Soit donc comme précédemment une forme dans laquelle $a = 0$, $b'' = 0$, et que nous supposons réduite (voir paragraphe 7, le cas où $a = 0$, $b'' = 0$). Supposant comme précédemment que $\delta = a'a'' - bb_0$ est positif, nous avons

$$a'F = \text{Norme}\,(a'y + b_0 z) + \text{Norme}\left(\frac{a'b'x + \delta z}{\sqrt{\delta}}\right) - \text{Norme}\,\frac{a'b'x}{\sqrt{\delta}}$$

et nous prenons la forme Φ associée à $a'F$ avec les paramètres ξ et η

$$\Phi = a'F(1 - \xi\xi_0 - \eta\eta_0) + 2\,\text{Norme}\left[\frac{a'b'}{\sqrt{\delta}}(\eta + 1)x + a'\xi y + (\xi b_0 + \eta\sqrt{\delta})z\right].$$

La forme F étant réduite, il existe des valeurs de ξ et η pour lesquelles Φ est réduite, et il faut montrer que le domaine D de ces valeurs a un point commun avec la limite de S.

Les conditions de réduction pour Φ apprennent de suite que dans $b'\frac{\xi_0}{\eta_0 + 1}$ le coefficient de i et la partie réelle sont moindres que $\frac{1}{2}\frac{b'b'_0}{\sqrt{\delta}}$ en valeur absolue; puis dans

$$a'b'\left[1 + \frac{\eta - \eta_0}{(1+\eta)(1+\eta_0)} - \frac{\xi\xi_0}{(1+\eta)(1+\eta_0)} + \frac{2b}{\sqrt{\delta}}\frac{\xi_0}{1+\eta_0}\right]$$

la partie réelle et le coefficient de i sont moindres en valeur absolue que $\frac{a'^2b'b'_0}{\delta}$. Nous voyons encore que dans

$$\frac{1}{a'}\left(b - b'_0\frac{\xi}{\eta+1}\right)$$

la partie réelle et le coefficient de i sont moindres que $\frac{1}{2}$.

Les trois conditions précédentes expriment que dans Φ mis sous la forme canonique

$$\mu_1 \operatorname{Norme}(x + \varepsilon y + \varepsilon' z) + \mu_2 \operatorname{Norme}(y + \varepsilon'' z) + \mu_3 \operatorname{Norme} z,$$

ε, ε' et ε'' ont leur partie réelle et leur coefficient de i compris entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$. Il reste à écrire les deux autres conditions qui expriment que $\mu_2 < \frac{1}{2}\mu_1$ et $\mu_3 < \frac{1}{2}\mu_2$. On obtient ainsi:

$$1 - \xi\xi_0 - \eta\eta_0 > \frac{b'b'_0}{\delta}(\eta + 1)(\eta_0 + 1)$$

et

$$1 - \xi\xi_0 - \eta\eta_0 > \frac{a'^3b'b'_0}{\Delta\delta}(\eta + 1)(\eta_0 + 1).$$

Je dis d'abord qu'il existe dans le voisinage de $\xi = 0$, $\eta = -1$, des valeurs de ξ, η satisfaisant à la première série de conditions. En effet puisque la forme Φ est définie pour certaines valeurs de ξ et η, il existe des valeurs de

$$\frac{\xi}{1+\eta} \quad \text{et} \quad \frac{\eta - \eta_0}{(1+\eta)(1+\eta_0)}$$

satisfaisant aux trois premières conditions; on remarque d'ailleurs que les trois premières conditions ne dépendent que de ces quantités. Soient donc

$$\frac{\xi}{1+\eta} = \lambda \quad \text{et} \quad \frac{\eta - \eta_0}{(1+\eta)(1+\eta_0)} = \mu$$

deux valeurs convenables de λ et μ; nous allons montrer qu'il existe dans le voisinage de $\xi = 0$, $\eta = -1$ des valeurs de ξ et η donnant à

$$\frac{\xi}{1+\eta} \quad \text{et} \quad \frac{\eta - \eta_0}{(1+\eta)(1+\eta_0)}$$

des valeurs très peu différentes de λ et μ, et ces valeurs de ξ et η satisferont par suite aux trois premières conditions. Soit en effet $\eta = \alpha + i\beta$.

On aura

$$\frac{\eta - \eta_0}{(1+\eta)(1+\eta_0)} = \frac{2i\beta}{(1+\alpha)^2 + \beta^2}.$$

Or faisons tendre α vers -1 et β vers zéro de telle sorte que $\frac{2i\beta}{(1+\alpha)^2}$ tende vers μ; alors $\frac{\eta - \eta_0}{(1+\eta)(1+\eta_0)}$ tendra vers μ quand η tendra vers -1 de la manière indiquée; il suffit de prendre $\xi = \lambda(1+\eta)$, pour avoir, aussi rapproché que l'on veut de $\xi = 0$, $\eta = -1$, un système (ξ, η) satisfaisant aux trois premières conditions. Il importe de s'assurer que parmi ces valeurs de (ξ, η) il y en a pour lesquelles

$$\xi\xi_0 + \eta\eta_0 < 1.$$

Remarquons qu'on peut faire tendre β vers zéro et α vers -1, avec la condition que $\frac{\beta}{(1+\alpha)^2}$ ait une valeur donnée, de telle manière que $\alpha^2 + \beta^2$ soit moindre que l'unité. Soit donc η tellement choisi, l'égalité $\xi = \lambda(\eta + 1)$ donne une valeur correspondante de ξ; je dis que le point ξ, η est à l'intérieur du domaine S. Si on avait en effet

$$\xi\xi_0 + \eta\eta_0 > 1$$

on aurait

$$\frac{\xi\xi_0}{(1+\eta)(1+\eta_0)} > \frac{1 - \eta\eta_0}{(1+\eta)(1+\eta_0)} = \frac{1-\eta}{1+\eta_0} + \frac{\eta - \eta_0}{(1+\eta)(1+\eta_0)}.$$

Le second membre de l'inégalité est d'ailleurs positif. On voit alors que η tendant vers -1, la norme $\frac{\xi}{1+\eta}$ grandirait indéfiniment, ce qui est absurde.

Il existe donc dans le voisinage du point (o, — 1) une infinité de points ξ, η, pour lesquelles on a

$$\xi\xi_0 + \eta\eta_0 < 1$$

et qui satisfont aux trois premières conditions. Je dis maintenant que ces valeurs de ξ, η, si elles sont suffisamment rapprochées de $\xi = 0$, $\eta = -1$ satisferont aux deux autres conditions

$$1 - \xi\xi_0 - \eta\eta_0 > \frac{b'b'_0}{\delta}(\eta + 1)(\eta_0 + 1)$$

$$1 - \xi\xi_0 - \eta\eta_0 > \frac{a'^2 b'b'_0}{\Delta\delta}(\eta + 1)(\eta_0 + 1).$$

S'il en était autrement en effet, il y aurait sur l'une ou l'autre des deux surfaces

$$1 - \xi\xi_0 - \eta\eta_0 = \frac{b'b'_0}{\delta}(\eta + 1)(\eta_0 + 1)$$

$$1 - \xi\xi_0 - \eta\eta_0 = \frac{a'^2 b'b'_0}{\Delta\delta}(\eta + 1)(\eta_0 + 1)$$

des points aussi rapprochés que l'on voudrait de $\xi = 0$, $\eta = -1$, et satisfaisant aux trois premières conditions. Or pour de tels points on aurait manifestement

$$\frac{\xi\xi_0}{(1 + \eta)(1 + \eta_0)} = \frac{1 - \eta\eta_0}{(1 + \eta)(1 + \eta_0)} + A$$

où A est une constante, et en remarquant que:

$$\frac{1 - \eta\eta_0}{(1 + \eta)(1 + \eta_0)} = \frac{1 - \eta}{1 + \eta_0} + \frac{\eta - \eta_0}{(1 + \eta)(1 + \eta_0)}$$

on voit que $\frac{\xi}{1 + \eta}$ augmenterait indéfiniment, puisque $\frac{\eta - \eta_0}{(1 + \eta)(1 + \eta_0)}$ reste fini quand η tend vers -1, les trois premières conditions étant vérifiées. Nous arrivons donc encore à une contradiction.

Il résulte de cette discussion [1] *qu'à toute réduite dans laquelle* $a = 0$ *et* $b'' = 0$ *correspond bien effectivement un domaine* D *ayant un point commun avec la surface de* S.

11. Nous avons maintenant à rechercher s'il existe toujours, quelle que soit la forme donnée, des réduites arithmétiquement équivalentes et dans lesquelles a et b'' soient nuls. Nous allons démontrer qu'il en est ainsi.

Commençons par établir qu'il existe des formes arithmétiquement équivalentes à une forme donnée f et dans laquelle le coefficient de xx_0 est nul. Si l'on fait dans f la substitution

$$\begin{aligned} x &= MX + M_1Y + M_2Z \\ y &= PX + P_1Y + P_2Z \\ z &= QX + Q_1Y + Q_2Z \end{aligned}$$

il est clair que le coefficient de XX_0 dans la transformée sera:

$$f(M,\ P,\ Q).$$

Il s'agit donc de voir si en donnant aux indéterminées x, y, z des valeurs entières et premières entre elles M, P, Q, la forme f peut s'annuler. En d'autres termes nous allons montrer que zéro peut être représenté par une forme quadratique ternaire indéfinie à indéterminées conjuguées; c'est là un point qui distingue essentiellement la théorie de ces formes de celle des formes ternaires réelles, car on sait que Gauss a montré que zéro ne pouvait être représenté par toute forme ternaire indéfinie réelle (*Disquisitiones Arithmeticæ,* paragraphe 294). La cause de cette différence est dans le fait que l'on peut toujours satisfaire à la congruence (1)

$$xx_0 \equiv a \pmod b$$

---

[1] Nous avons supposé que $\delta = a'a'' - bb_0$ était différent de zéro et positif. Dans tous les autres cas, des considérations toutes semblables, conduisent au même résultat.

quels que soient a et b (b étant seulement supposé non divisible par un carré) tandis qu'au contraire on sait que la congruence (voir sur ce sujet HERMITE, Journal de CRELLE, t. 47)

$$x^2 \equiv a \pmod b$$

n'a pas de solutions quels que soient a et b.

Nous montrerons au paragraphe suivant comment de ce théorème on déduit que zéro peut être représenté pour toute forme ternaire indéfinie à indéterminées conjuguées. J'admets pour le moment ce résultat et je vais en conclure *qu'il existe une réduite dans laquelle* $a = b'' = 0$.

D'après ce que nous venons de dire, on pourra faire une première transformation linéaire de déterminant un, donnant une transformée dans laquelle le coefficient de xx_0 est nul. Que l'on fasse alors dans la forme une substitution

$$(x, \ y, \ z, \ x, \ my + nz, \ py + qz)$$

on voit de suite que l'on peut choisir deux entiers m et p premiers entre eux tels que le coefficient de xy_0 soit nul; on déterminera alors n et q par la condition $mq - np = 1$.

Nous obtenons donc une forme arithmétiquement équivalente à la proposée dans laquelle $a = b'' = 0$; mais cette forme n'est pas nécessairement réduite. Nous pouvons supposer que dans cette forme l'expression $a'a'' - bb_0$ est différente de zéro et positive, car s'il en était autrement en faisant la substitution

$$(x, \ y, \ z, \ x + nz, \ y, \ z)$$

où n est un entier arbitraire, cette expression se transformant en

$$a'a'' - bb_0 + a'(b'n + b'_0 n_0)$$

on peut choisir n de manière qu'elle soit positive (car a' et b' ne sont pas nuls vu qu'alors le déterminant de la forme serait nul).

Nous avons donc une forme f

$$f = a'yy_0 + a''zz_0 + byz_0 + b_0 y_0 z + b'xz_0 + b'_0 x_0 z$$

arithmétiquement équivalente à la proposée et dans laquelle on a $\delta = a'a'' - bb_0 > 0$. A la forme $a'f$ est associée la forme définie Φ (paragraphe 10)

$$\Phi = a'f(1 - \xi\xi_0 - \eta\eta_0) + 2 \,\text{Norme}\left[\frac{a'b'}{\sqrt{\delta}}(\eta + 1)x + a'\xi y + (\xi b_0 + \eta\sqrt{\delta})z\right];$$

cette forme ne sera réduite pour aucune valeur (ξ, η) du domaine S si la forme indéfinie f n'est pas réduite. Quelle substitution faut il faire dans Φ et par suite dans f pour la réduire? Φ peut se mettre sous la forme canonique

$$\mu_1 \,\text{Norme}\,(x + \varepsilon y + \varepsilon' z) + \mu_2 \,\text{Norme}\,(y + \varepsilon'' z) + \mu_3 z z_0\,;$$

or nous avons vu (paragraphe 10) que les inégalités $\mu_2 \geqq \frac{1}{2}\mu_1$, $\mu_3 \geqq \frac{1}{2}\mu_2$ devenaient pour la forme Φ

$$(\alpha) \qquad \begin{aligned} 1 - \xi\xi_0 - \eta\eta_0 &> \frac{b'b'_0}{\delta}(\eta + 1)(\eta_0 + 1) \\ 1 - \xi\xi_0 - \eta\eta_0 &> \frac{a'^2 b'b'_0}{\Delta\delta}(\eta + 1)(\eta_0 + 1). \end{aligned}$$

On peut toujours trouver des valeurs de ξ, η satisfaisant à ces inégalités; considérons en effet l'inégalité

$$(\beta) \qquad 1 - \xi\xi_0 - \eta\eta_0 > A(1 + \eta)(1 + \eta_0)$$

où A est une quantité positive quelconque; on pourra toujours y satisfaire et même pour des valeurs réelles de ξ et η. On voit de suite en effet que l'équation

$$1 - \xi^2 - \eta^2 = A(1 + \eta)^2$$

représente une ellipse réelle, intérieure au cercle de rayon un et tangente à ce cercle au point ($\xi = 0$, $\eta = -1$). Tout point ξ, η à l'intérieur de cette ellipse satisfait à l'inégalité (β).

Ainsi il existe des valeurs de (ξ, η) satisfaisant aux inégalités (α). Prenons un tel système de valeurs.

Pour réduire la forme Φ, c'est à dire pour que les ε aient leur partie réelle et leur coefficient de i compris entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$, il suffira évidemment d'employer une substitution de la forme

$$(x,\ y,\ z,\ x + my + nz,\ y + qz,\ z)$$

Une substitution convenable de cette nature transforme donc f en une forme réduite; mais cette substitution ne fait pas apparaître de terme en xx_0 et en xy_0: la proposition énoncée est donc établie.

12. Il nous faut maintenant établir que *zéro peut être représenté par toute forme quadratique ternaire indéfinie à indéterminées conjuguées.* Prenons d'abord la forme

$$f = axx_0 + byy_0 + czz_0$$

où nous supposons que a, b, c, ne sont pas de même signe. De plus ces nombres sont deux à deux premiers entre eux et aucun d'eux n'est divisible par un carré. Nous allons avoir peu de chose à changer à la profonde analyse par laquelle Gauss établit que zéro peut être représenté par une forme ternaire réelle quand $-bc$, $-ca$, $-ab$ sont respectivement résidus quadratiques de a, b, c. (*Disquisitiones arithmeticæ,* paragraphe 294).

Soient H, K, L trois entiers satisfaisant aux congruences:

$$HH_0 \equiv -bc \pmod a,\quad KK_0 \equiv -ac \pmod b,\quad LL_0 \equiv -ab \pmod c;$$

nous avons dit plus haut qu'on pourrait toujours trouver de tels nombres. On déterminera ensuite A, B, C de manière que

$$A \equiv c \pmod b \quad \text{et} \quad \equiv L \pmod c$$
$$B \equiv a \pmod c \quad \text{et} \quad \equiv H \pmod a$$
$$C \equiv b \pmod a \quad \text{et} \quad \equiv K \pmod b.$$

On aura

$$aAA_0 + bBB_0 + cCC_0 \equiv bHH_0 + cb^2 \equiv b(HH_0 + cb) \equiv 0 \pmod a;$$

on prouverait de la même manière que $aAA_0 + bBB_0 + cCC_0$ est divisible par b et c et par suite par abc.

On voit en outre que A est premier avec b et c, B avec a et c, C avec a et b. S'il arrivait que les valeurs de A, B, C eussent un diviseur commun μ (qui peut être un nombre complexe), μ serait nécessairement premier avec a, b, c et par suite avec abc. On divisera A, B, C par μ et on aura trois nouveaux nombres que nous appellerons encore A, B, C et tels que A soit premier avec b et c, B avec a et c, C avec b et c, et de plus

$$aAA_0 + bBB_0 + cCC_0 \equiv 0 \pmod{abc}.$$

Ceci posé, on voit de suite que Aa, Bb, Cc n'ont pas de diviseur commun. On peut alors trouver une substitution de déterminant un

$$(x,\ y,\ z,\ \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z,\ \beta x + \beta' y + \beta'' z,\ \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z)$$

déterminé par les conditions

$$\beta'\gamma'' - \beta''\gamma' = Aa,\ \ \gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha' = Bb,\ \ \alpha'\beta'' - \alpha''\beta' = Cc$$

et

$$\alpha Aa + \beta Bb + \gamma Cc = 1.$$

La forme proposée f se changera en une forme

$$g = (m,\ m',\ m'',\ n,\ n',\ n'')$$

dans laquelle m', m'' et n seront divisibles par abc. Posons en effet

$$\beta''\gamma - \beta\gamma'' = A',\ \ \gamma''\alpha - \gamma\alpha'' = B',\ \ \alpha''\beta - \alpha\beta'' = C'$$

$$\beta\gamma' - \beta'\gamma = A'',\ \ \gamma\alpha' - \gamma'\alpha = B'',\ \ \alpha\beta' - \alpha'\beta = C''$$

on aura

$$\alpha' = B''Cc - C''Bb,\ \ \beta' = C''Aa - A''Cc,\ \ \gamma' = A''Bb - B''Aa$$

$$\alpha'' = C'Bb - B'Cc,\ \ \beta'' = A'Cc - C'Aa,\ \ \gamma'' = B'Aa - A'Bb$$

et en substituant ces valeurs dans les expressions de m', m'' et n

$$m' = a\alpha'\alpha'_0 + b\beta'\beta'_0 + c\gamma'\gamma'_0,\quad m'' = a\alpha\alpha''_0 + \ldots,\quad n = a\alpha'\alpha''_0 + \ldots;$$

on trouve, par exemple pour m'

$$m' \equiv A''A_0''bc(bBB_0 + cCC_0) \equiv 0 \pmod a$$
$$m' \equiv B''B_0''ac(aAA_0 + cCC_0) \equiv 0 \pmod b$$
$$m' \equiv C''C_0''ab(aAA_0 + bBB_0) \equiv 0 \pmod c$$

par suite m' est divisible par abc et de même pour m'' et n.

Effectuons maintenant sur f la substitution

$$(x,\ y,\ z,\ \alpha dx + \alpha' y + \alpha'' z,\ \beta dx + \beta' y + \beta'' z,\ \gamma dx + \gamma' y + \gamma'' z)$$

en posant $abc = d$.

f se changera manifestement en

$$g' = (md^2,\ m',\ m'',\ n,\ n'd,\ n''d)$$

et le déterminant de cette forme sera d^3. Or considérons la forme

$$g'' = \left(md,\ \frac{m'}{d},\ \frac{m''}{d},\ \frac{n}{d},\ n',\ n''\right)$$

ces coefficients seront entiers et son déterminant est égal à l'unité. Or admettons pour un instant que toute forme ternaire indéfinie de déterminant un est équivalente à la forme

$$-xx_0 + yz_0 + y_0z$$

en employant une substitution à coefficients entiers de déterminant ± 1 ou $\pm i$. Il en résulte que, à l'aide d'une telle substitution, on peut transformer g' en la forme

$$G = -dxx_0 + dyz_0 + dy_0z$$

ou bien encore on peut passer de la forme f à la forme G en employant une substitution à coefficients entiers dont la norme est égale à d^2. Si

$$(x,\ y,\ z,\ \lambda x + \mu y + \nu z,\ \lambda' x + \mu' y + \nu' z,\ \lambda'' x + \mu'' y + \nu'' z)$$

est cette substitution, on voit que

$$x = \mu,\quad y = \mu',\quad z = \mu''$$

est une solution de l'équation

$$axx_0 + byy_0 + czz_0 = 0.$$

C. q. f. d.

μ, μ' et μ'' ne sont pas tous trois nuls, puisque la norme du déterminant est égale à d^2.

Nous avons admis que toute forme ternaire indéfinie de déterminant un était équivalente à la forme

$$-xx_0 + yz_0 + y_0z$$

en employant une substitution dont le déterminant a sa norme égale à l'unité. C'est ce que l'on peut établir comme il suit:

Soit

$$f = (a,\ a',\ a'',\ b,\ b',\ b'')$$

une forme indéfinie de déterminant un.

Considérons la forme binaire obtenue en faisant $z = 0$ dans f, c'est à dire

$$axx_0 + a'yy_0 + b''xy_0 + b''_0x_0y;$$

on sait que l'on peut réduire cette forme de telle manière que la valeur absolue de a soit moindre que $\sqrt{2|b''b''_0 - aa'|}$, (1) la quantité sous le radical étant prise en valeur absolue. Supposons cette réduction faite: si on fait sur y et z une substitution convenable de norme égale à un, la théorie des formes binaires montre encore qu'on peut arriver à avoir

$$|b''b''_0 - aa'| < \sqrt{2|a|};$$

on a donc simultanément

$$a^2 \leqq 2|b''b''_0 - aa'|, \qquad |b''b''_0 - aa'| \leqq \sqrt{2|a|}.$$

---

(1) Voir mon *Mémoire sur les formes quadratiques binaires à indéterminées conjuguées* (Annales de l'École Normale Supérieure, Janvier et Février 1884).

On conclut de là que les valeurs absolues de a et $b''b''_0 - aa'$ sont égales à zéro ou à l'unité; elles doivent être nulles simultanément ou toutes deux différentes de zéro.

1°. Soit d'abord

$$|a| = 1 \qquad |b''b''_0 - aa'| = 1 .$$

En employant une substitution de la forme

$$(x,\ y,\ z,\ x + \beta y + \gamma z,\ y + \gamma' z,\ z)$$

on ne change pas a et $b''b''_0 - aa'$ et un calcul facile montre que l'on peut choisir β, γ et γ' de façon que dans

$$b'', \quad ab_0 - b''b' \quad \text{et} \quad a'b' - b''_0 b_0$$

la partie réelle et le coefficient de i soient moindres en valeur absolue que

$$\frac{1}{2}|a|, \quad \frac{1}{2}|b''b''_0 - aa'|, \quad \frac{1}{2}|b''b''_0 - aa'|$$

respectivement. On en conclut

$$b'' = 0, \quad b_0 = 0, \quad b' = 0;$$

on a donc les formes dans lesquelles

$$|a| = 1, \quad |a'| = 1, \quad |a''| = 1$$

en prenant seulement les signes de manière que $D = 1$ et que la forme soit indéfinie. Elles sont équivalentes à la forme

$$xx_0 - yy_0 - zz_0$$

et cette dernière, comme on le voit de suite, est équivalente à

$$- xx_0 + yz_0 + y_0 z.$$

2°. Soit maintenant

$$|a| = 0, \quad |b''b''_0 - aa'| = 0 \quad \text{ou} \quad a = b'' = 0.$$

On aura alors

$$1 = - a'b'b'_0$$

donc

$$a' = -1 \quad \text{et} \quad b' = \pm 1, \ \pm i.$$

Si nous faisons maintenant la substitution:

$$(x, \ y, \ z, \ x + \beta y + \gamma z, \ y, \ z)$$

on ne change pas a, a', b' et b''. On peut choisir β et γ de manière que b soit nul après la transformation et que la norme de a'' soit zéro ou l'unité. On obtient ainsi des formes toutes équivalentes à

$$f = -yy_0 + \varepsilon zz_0 + xz_0 + x_0 z \quad \text{où} \quad \varepsilon = 0, \ +1, \ -1,$$

et on voit enfin sans peine que celle-ci est équivalente à

$$-xx_0 + yz_0 + y_0 z.$$

C. q. f. d.

III.

13. Revenons maintenant à la question de la réduction continuelle de la forme Φ. Pour bien fixer les idées, nous admettons que la forme indéfinie

$$F = uu_0 + vv_0 - ww_0$$

où comme précédemment

$$u = \alpha x + \beta y + \gamma z$$
$$v = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z$$
$$w = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z$$

dont nous partons, est une forme réduite. La forme définie Φ

$$\Phi = (1 - \xi\xi_0 - \eta\eta_0) F + 2 \,\text{Norme}\, (u\xi + v\eta + w)$$

sera donc réduite pour certaines valeurs de ξ, η situées dans le domaine S et formant elles-mêmes un domaine que nous avons appelé D (paragraphe 8). Lorsque le point (ξ, η) sort du domaine D, il faut suivant les circonstances de la variation de ce point employer certaines substitutions pour réduire la forme de nouveau, ce qui donne, en employant la totalité des substitutions propres à réduire de nouveau Φ, certaines réduites adjacentes à la réduite F, auxquelles correspondent des domaines D', D'', ... On continue ainsi à effectuer la réduction continuelle de la forme Φ jusqu'à ce qu'on ne trouve plus de nouvelles réduites, ce qui arrivera nécessairement puisque le nombre des réduites est limité. Désignons par ∂ le domaine total formé par les domaines D, D', D'', ... Lorsque le point (ξ, η) sort du domaine ∂ on retombe sur une réduite déjà obtenue, à laquelle se trouve ainsi correspondre un nouveau domaine D_1. Soit encore, pour ne pas multiplier les notations

$$F = uu_0 + vv_0 - ww_0$$

cette réduite. En faisant passer (ξ, η) du domaine D dans le domaine D_1 on est alors conduit à une substitution S à coefficients entiers et de déterminant un transformant F en elle-même. À une telle substitution correspond manifestement une substitution linéaire faite sur u, v, w soit

$$(u, \ v, \ w, \ Au + Bv + Cw, \ A'u + B'v + C'w, \ A''u + B''v + C''w)$$

et cette substitution transforme en elle-même l'expression $uu_0 + vv_0 - ww_0$. Quand on effectue sur x, y, z la substitution (S) la forme Φ devient:

$$(1 - \xi\xi_0 - \eta\eta_0)F$$
$$+ 2 \,\text{Norme}\,[(Au + Bv + Cw)\xi + (A'u + B'v + C'w)\eta + A''u + B''v + C''w]$$

où en divisant par $\text{Norme}\,(C\xi + C'\eta + C'')$, ce qui ne modifie en rien les conditions relatives à la réduction, et posant:

$$\xi' = \frac{A\xi + A'\eta + A''}{C\xi + C'\eta + C''}, \quad \eta' = \frac{B\xi + B'\eta + B''}{C\xi + C'\eta + C''}, \tag{1}$$

cette forme peut s'écrire:

$$(1 - \xi'\xi'_0 - \eta'\eta'_0)F + 2 \,\text{Norme}\,(u\xi' + v\eta' + w).$$

On en conclut que l'on passe du domaine D au domaine D_1 en effectuant sur (ξ, η) la substitution (1).

En continuant d'effectuer la réduction continuelle de la forme Φ, on obtiendra un *groupe* G d'une infinité de substitutions telles que (1); ce groupe sera *discontinu,* car à un système de valeurs de (ξ, η) ne correspond qu'un nombre limité de réduites arithmétiquement équivalentes à la forme définie Φ, le point (ξ, η) ne peut donc appartenir qu'à un nombre limité de domaines D.

Le domaine δ est un domaine *fondamental* de ce groupe, c'est à dire qu'à tout point (ξ, η) à l'intérieur de S correspond par une substitution du groupe un nombre limité de points à l'intérieur de δ (il y en a au moins un); c'est ce qui résulte immédiatement de ce que δ est l'ensemble des domaines D correspondant à *toutes* les réduites distinctes arithmétiquement équivalentes à F.

Le domaine δ a un nombre limité de points communs avec la surface de S, et il en a toujours un, puisque nous avons montré précédemment qu'il existait toujours au moins une réduite dans laquelle les coefficients de xx_0 et xy_0 étaient égaux à zéro.

14. Avant de continuer l'étude générale de ces groupes, examinons un cas particulier. Je prendrai:

$$F = yy_0 + xz_0 + x_0z.$$

Nous écrirons:

$$F = uu_0 + vv_0 - ww_0$$

en posant:

$$u = y, \quad v = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + z), \quad w = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - z).$$

On aura ici:

$$\Phi = (yy_0 + xz_0 + x_0z)(1 - \xi\xi_0 - \eta\eta_0) + 2 \text{ Norme}\left(\frac{\eta + 1}{\sqrt{2}}x + \xi y + \frac{\eta - 1}{\sqrt{2}}z\right).$$

Avant d'aller plus loin, ouvrons une parenthèse pour chercher les formes réduites de déterminant -1, dans lesquelles $a = b'' = 0$; nous éviterons ainsi plus tard une discussion un peu longue. Soit

$$yy_0 + a''zz_0 + byz_0 + b_0y_0z + b'xz_0 + b'_0x_0z$$

une telle forme; le déterminant étant égal à -1, on aura $b'b'_0 = 1$.

En supposant, comme au paragraphe 10, que

$$\delta = a'' - bb_0 > 0$$

nous avons vu (voir ce paragraphe) qu'on on doit déterminer ξ et η de telle manière que dans $b'\dfrac{\xi_0}{\eta_0 + 1}$ le coefficient de i et la partie réelle soient moindres en valeur absolue que $\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{\delta}}$, par suite moindres que $\dfrac{1}{2}$. D'autre part dans

$$b - b'_0\frac{\xi}{\eta + 1}$$

la partie réelle et le coefficient de i sont moindres que $\dfrac{1}{2}$, et on voit qu'il ne peut en être ainsi que si $b = 0$

Reportons-nous maintenant à l'égalité qui limite δ (à la fin du paragraphe 7), elle devient ici

$$\frac{1}{2\delta} + \frac{\sqrt{2}}{\delta} > 1$$

par suite $\delta = 0$ ou 1; on a donc $a'' = 0, 1$.

Nous avons supposé $\delta > 0$; *dans tous les cas on arrive à la conclusion suivante. On doit avoir $b = 0$ et $a'' = 0, \pm 1$.*

Revenons maintenant à la forme Φ; en la mettant sous la forme canonique

$$\mu_1 \operatorname{Norme}(x + \varepsilon y + \varepsilon' z) + \mu_2 \operatorname{Norme}(y + \varepsilon'' z) + \mu_3 zz_0,$$

on a

$$\varepsilon_0 = \sqrt{2}\frac{\xi_0}{\eta_0 + 1}$$

$$\varepsilon'_0 = -\frac{\xi\xi_0}{(1 + \eta)(1 + \eta_0)} + \frac{\eta_0 - \eta}{(1 + \eta)(1 + \eta_0)}$$

$$\varepsilon''_0 = -\sqrt{2}\frac{\xi}{1 + \eta};$$

les parties réelles et les coefficients de i dans ces trois expressions doivent être compris entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$, pour que la forme Φ soit réduite.

Calculons enfin μ_1, μ_2 et μ_3:

On aura

$$\mu_1 = (\eta + 1)(\eta_0 + 1)$$

$$\mu_2 = 1 - \xi\xi_0 - \eta\eta_0$$

$$\mu_3 = \frac{(1 - \xi\xi_0 - \eta\eta_0)^2}{(1 + \eta)(1 + \eta_0)}$$

et on voit que les deux inégalités $\mu_2 > \frac{1}{2}\mu_1$ et $\mu_3 > \frac{1}{2}\mu_2$ coïncident et se réduisent à l'inégalité unique:

$$1 - \xi\xi_0 - \eta\eta_0 > \frac{1}{2}(1 + \eta)(1 + \eta_0).$$

Soit D le domaine correspondant à la réduite F.

Laissons toujours le point (ξ, η) à l'intérieur du domaine

$$1 - \xi\xi_0 - \eta\eta_0 > \frac{1}{2}(1 + \eta)(1 + \eta_0)$$

et faisons varier (ξ, η), en le faisant sortir de D successivement par les autres faces. Posons

$$\frac{\xi}{\eta + 1} = u, \quad \frac{1}{\eta + 1} = v.$$

On a

$$\varepsilon_0 = \sqrt{2}.u_0, \quad \varepsilon_0' = -uu_0 + v - v_0, \quad \varepsilon_0'' = -\sqrt{2}.u.$$

Supposons que ξ, η varie de telle manière que dans v, le coefficient de i dépasse $\frac{1}{4}$, alors dans ε_0' le coefficient de i deviendra supérieur à $\frac{1}{2}$, et on réduira la forme de nouveau, en employant la substitution

$$(x, y, z, x + iz, y, z)$$

mais cette substitution transforme la forme F en elle-même; on rencontre donc ainsi une substitution fondamentale du groupe G; cette substitution est:

$$\left[\xi,\ \eta,\ \frac{\xi}{\frac{i}{2}(\eta+1)+1},\ \frac{\eta\left(1-\frac{i}{2}\right)-\frac{i}{2}}{\frac{i}{2}(\eta+1)+1}\right]$$

et elle laisse invariable le point

$$\xi = 0,\quad \eta = -1;$$

soient maintenant $(\xi,\ \eta)$ variant de telle manière que dans u le terme réel dépasse $\frac{1}{2\sqrt{2}}$, la substitution à employer pour réduire de nouveau F sera:

$$(x,\ y,\ z,\ x-y,\ y+z,\ z)$$

ce qui donnera la réduite

$$(2) \qquad yy_0 + zz_0 + xz_0 + x_0z.$$

Si on sort de D de telle manière que dans u le terme réel soit moindre que $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$, il faut employer la substitution:

$$(x,\ y,\ z,\ x+y,\ y-z,\ z)$$

et on retombe sur la réduite

$$yy_0 + zz_0 + xz_0 + x_0z.$$

Sort-on de D, de façon que dans u le coefficient de i soit moindre que $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$, il faudra considérer la substitution

$$(x,\ y,\ z,\ x+iy,\ y+iz,\ z)$$

ce qui donne encore

$$yy_0 + zz_0 + xz_0 + x_0z.$$

Quand on sort de D de telle manière que dans u le terme réel dépasse $\frac{1}{2\sqrt{2}}$, après la substitution indiquée précédemment, la forme Φ a changé, et les ε nouveaux sont alors

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \sqrt{2}\,.\,u - 1 \\ \varepsilon' &= -uu_0 + v_0 - v + \sqrt{2}\,.\,u \\ \varepsilon'' &= -\sqrt{2}\,.\,u_0 + 1\,. \end{aligned}$$

On aura un nouveau domaine D'; on cherchera comme pour le domaine D les différentes réduites contigues que l'on obtient en sortant de D' par les différentes *faces* qui forment *l'angle polyèdre* ayant pour sommet $\xi = 0$, $\eta = -1$. La seule réduite contigue différente des deux réduites déjà trouvées est

$$yy_0 - zz_0 + xz_0 + x_0z. \tag{3}$$

Cela résulte d'ailleurs à priori de la remarque faite plus haut; j'ajoute que je ne considère pas comme différentes deux réduites pour lesquelles les coefficients de xz_0 sont égaux et de signe contraire. On obtiendra la réduite (3) en sortant de D', de telle manière que dans $-uu_0 + \sqrt{2}\,.\,u$ la partie réelle dépasse $\frac{1}{2}$; il faut alors faire la substitution

$$(x,\ y,\ z,\ x - z,\ y,\ z)$$

ce qui donne bien la réduite (3).

En sortant de l'angle polyèdre formé par les trois domaines D, D', D'', on retombe sur les réduites déjà obtenues, et on est aussi conduit à certaines substitutions transformant en elles-mêmes la forme initiale

$$yy_0 + xz_0 + x_0z;$$

ces substitutions sont de la forme:

$$(x,\ y,\ z,\ x + my + nz,\ y + qz,\ z).$$

Étudions directement ces substitutions; on aura les relations:

$$\begin{aligned} qq_0 + n + n_0 &= 0 \\ m &= -q_0\,. \end{aligned}$$

On a donc les substitutions

$$\left[x,\ y,\ z,\ x + my - \left(\frac{mm_0}{2} + pi\right)z,\ y - m_0 z,\ z\right]$$

m étant un entier complexe arbitraire dont la norme est paire, et p un entier réel. Toutes ces substitutions peuvent s'obtenir en composant les trois suivantes:

$$(x,\ y,\ z,\ x + 2y - 2z,\ y - 2z,\ z)$$
$$(x,\ y,\ z,\ x + (1 + i)y - z,\ y - (1 - i)z,\ z)$$
$$(x,\ y,\ z,\ x + iz,\ y,\ z).$$

Multiplions en effet la puissance α de la première de ces substitutions par la puissance β de la seconde, et ce produit par la puissance γ de la troisième, on aura une substitution nécessairement de la forme

$$\left[x,\ y,\ z,\ x + My - \left(\frac{MM_0}{2} + Pi\right)z,\ y - M_0 z,\ z\right].$$

On calcule facilement M_0

$$M_0 = \alpha + 2\beta - \alpha i.$$

Supposons inversement que M soit donné ainsi que l'entier réel P, M étant d'ailleurs tel que MM_0 soit pair. Soit

$$M = \mu + \nu i$$

on aura:

$$\alpha + 2\beta = \mu, \quad \alpha = \nu$$

égalités qui donnent pour α et β des nombres entiers, car $\mu - \nu$ est nécessairement pair. On déterminera ensuite γ de manière que le coefficient de z dans la transformée de x soit $-\frac{MM_0}{2} - Pi$, ce qui pourra toujours se faire.

A chacune des substitutions précédentes transformant en elle-même

$$yy_0 + xz_0 + x_0 z$$

correspond une substitution pour le groupe G (paragraphe 13). Les trois substitutions ainsi obtenues laissent invariable le point $\xi = 0$, $\eta = -1$.

Posons, comme plus haut,

$$u = \frac{\xi}{\eta + 1}, \quad v = \frac{1}{\eta + 1},$$

ces trois substitutions donnent pour u et v les substitutions suivantes

$$(u, \ v, \ u + \sqrt{2}, \ v + u\sqrt{2} + 1)$$

$$\left(u, \ v, \ u + \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \ v + u\frac{1-i}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\left(u, \ v, \ u, \ v - \frac{i}{2}\right).$$

15. Les résultats précédents relatifs à une forme particulière, nous conduisent de suite au cas général. Soit

$$F = a'yy_0 + a''zz_0 + byz_0 + b_0y_0z + b'xz_0 + b'_0x_0z$$

une réduite dans laquelle $a = b'' = 0$ et à laquelle correspondent par suite, comme nous l'avons vu précédemment, des domaines ayant un point commun avec la limite de S.

Considérons le groupe des substitutions à coefficients entiers de la forme:

$$(x, \ y, \ z, \ x + my + nz, \ y + qz, \ z) \tag{1}$$

où m, n et q sont entiers, transformant F en elle-même. On aura les deux relations

$$a'qq_0 + bq + b_0q_0 + b'_0n_0 + b'n = 0$$

$$a'q_0 + mb' = 0.$$

Les substitutions fondamentales seront, comme précédemment, au nombre de trois. Nous n'établirons pas ce point; et, en nous bornant à ce qui nous sera utile dans la suite, nous allons simplement montrer qu'il existe dans le groupe trois substitutions de la forme

$$(2) \qquad \begin{array}{l} (x, \; y, \; z, \; x + \alpha z, \; y, \; z) \\ (x, \; y, \; z, \; x + \mu y + \nu z, \; y + \lambda z, \; z) \\ (x, \; y, \; z, \; x + \mu' y + \nu' z, \; y + \lambda' y, \; z) \end{array}$$

le rapport $\frac{\mu}{\mu'}$ étant imaginaire.

Nous aurons la première substitution, en prenant $\alpha = ib'_0$.

Pour la seconde, nous prendrons

$$\mu = ta', \quad \lambda_0 = -tb'$$

t étant seulement tel que l'équation

$$a'b'b'_0tt_0 - bt_0b'_0 - b_0tb' + b'\nu + b'_0\nu_0 = 0$$

puisse être résolue par rapport à ν. Or soit

$$\nu = x + iy, \quad b' = A + iB$$

l'équation s'écrira

$$2Ax - 2By = -a'b'b'_0tt_0 + bb'_0t_0 + b_0b't.$$

Il suffira de prendre pour t le plus grand commun diviseur entre $2A$ et $2B$. En prenant ensuite

$$\mu' = ta'i, \quad \lambda'_0 = -tb'i$$

on aura la troisième des substitutions (2), le rapport $\frac{\mu}{\mu'}$ qui se réduit à $-i$ est bien imaginaire.

A toute substitution (1) correspond une substitution du groupe G, relatif aux variables ξ et η. Il en résulte pour les deux variables

$$u = \frac{\xi}{\eta + 1}, \quad v = \frac{1}{\eta + 1}$$

déjà considérées précédemment, la substitution

$$\left[u, \; v, \; u + \frac{mb'}{\sqrt{\delta}}, \; v - \frac{a'q}{\sqrt{\delta}}u + \frac{b'}{\delta}(mb_0 - na')\right]$$

et par suite aux trois substitutions (2) correspondent les substitutions

$$\left[u,\ v,\ u,\ v-\frac{\alpha a'b'}{\delta}\right]$$

$$\left[u,\ v,\ u+\frac{\mu b'}{\sqrt{\delta}},\ v-\frac{a'\lambda}{\sqrt{\delta}}u+\frac{b'}{\delta}(\mu b_0-\nu a')\right]$$

$$\left[u,\ v,\ u+\frac{\mu' b'}{\sqrt{\delta}},\ v-\frac{a'\lambda'}{\sqrt{\delta}}u+\frac{b'}{\delta}(\mu' b_0-\nu' a')\right].$$

Remarquons que, α étant égal à ib'_0, l'expression $\frac{\alpha a'b'}{\delta}$ est purement imaginaire.

16. Avant d'aller plus loin, résumons les propriétés fondamentales du groupe G du paragraphe 13. Tout d'abord une substitution quelconque de ce groupe peut être obtenue en composant convenablement un nombre fini de substitutions, que nous appelons les substitutions fondamentales du groupe. Nous avons montré aussi qu'on pouvait trouver un domaine δ jouissant de la propriété suivante: à tout point $(\xi,\ \eta)$ à l'intérieur de S correspond par une substitution du groupe un nombre limité de points à l'intérieur de δ, et il y en a au moins un. S'il y a plus d'un point, on pourra évidemment diviser ce domaine en plusieurs autres tels que dans chacun d'eux il y aura un point et un seul correspondant par une substitution du groupe à un point quelconque de S: nous appellerons dans la suite un tel domaine, *un domaine fondamental,* et le désignerons par R.

Le domaine fondamental R a *un* ou *un nombre limité* de points communs avec la surface de S. Soit A un pareil point; nous avons signalé trois substitutions distinctes laissant le point A invariable.

Faisons encore quelques remarques sur ce groupe G, dont nous représentons, comme précédemment, une substitution quelconque par

$$\left(\xi,\ \eta,\ \frac{A\xi+A'\eta+A''}{C\xi+C'\eta+C''},\ \frac{B\xi+B'\eta+B''}{C\xi+C'\eta+C''}\right).$$

Parmi les points du domaine S, nous avons à remarquer particulièrement ceux que laisse invariables une substitution du groupe. Pour une substitution donnée $(A,\ B,\ C)$, nous avons les équations

$$\xi = \frac{A\xi + A'\eta + A''}{C\xi + C'\eta + C''}, \quad \eta = \frac{B\xi + B'\eta + B''}{C\xi + C'\eta + C''}.$$

En introduisant une troisième inconnue k, ces équations peuvent s'écrire

$$(1) \qquad \begin{aligned} (A - k)\xi + \quad A'\eta \quad + \quad A'' \quad &= 0 \\ B\xi \quad + (B' - k)\eta + \quad B'' \quad &= 0 \\ C\xi \quad + \quad C'\eta \quad + C'' - k &= 0; \end{aligned}$$

k sera donc déterminée par l'équation du troisième degré:

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} A - k & A' & A'' \\ B & B' - k & B'' \\ C & C' & C'' - k \end{vmatrix} = 0.$$

Si, comme on peut le supposer, le déterminant

$$\begin{vmatrix} A & A' & A'' \\ B & B' & B'' \\ C & C & C'' \end{vmatrix} = 1;$$

comme d'autre part la substitution laisse invariable l'hypersphère de rayon un, on aura (Acta Mathematica, T. 1, pag. 317)

$$\begin{aligned} AA_0 + A'A'_0 - A''A''_0 &= 1 \\ BB_0 + B'B'_0 - B''B''_0 &= 1 \\ CC_0 + C'C'_0 - C''C''_0 &= -1 \\ AB_0 + A'B'_0 - A''B''_0 &= 0 \\ CB_0 + C'B'_0 - C''B''_0 &= 0 \\ AC_0 + A'C'_0 - A''C''_0 &= 0. \end{aligned}$$

Par suite les équations (1) peuvent s'écrire:

$$\begin{aligned} (-1 + kA_0)\xi + \quad kB_0\eta \quad + \quad kC_0 \quad &= 0 \\ kA'_0\xi \quad + (kB'_0 - 1)\eta + \quad kC'_0 \quad &= 0 \\ kA''_0\xi \quad + \quad kB''_0\eta \quad + (kC''_0 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

et l'équation (2) est identique à la suivante:

$$(2')\qquad \begin{vmatrix} kA_0 - 1 & kB_0 & kC_0 \\ kA_0' & kB_0' - 1 & kC_0' \\ kA_0'' & kB_0'' & kC_0'' - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Or on passe de l'équation (2) à l'équation (2'), en remplaçant les coefficients par leur conjugué et en changeant k en $\frac{1}{k}$; on en conclut que si l, m et n désignent les trois racines de l'équation (1), les quantités

$$\frac{1}{l_0},\quad \frac{1}{m_0},\quad \frac{1}{n_0}$$

sont aussi racines de cette même équation; donc ces trois quantités doivent, dans un ordre convenable, représenter l, m et n.

Deux cas peuvent se présenter: ou chaque racine est égale à l'inverse de sa conjuguée, et par suite les trois racines ont un module égal à l'unité, ou bien l'on a

$$l = \frac{1}{l_0} \quad \text{mais} \quad \frac{1}{m_0} = n, \quad \frac{1}{n_0} = m.$$

Dans les deux cas l'équation (2) peut se mettre sous la forme

$$k^3 + Mk^2 - M_0k - 1 = 0$$

où

$$M = -(A + B' + C'').$$

A chaque racine de cette équation en k, correspond par les équations (1) un système de valeurs de (ξ, η). Le seul cas intéressant pour nous est celui où le point correspondant est à l'intérieur de l'hypersphère de rayon un. Je me bornerai à énoncer ici les résultats auxquels on arrive dans le cas *général*.

Dans le premier cas, c'est à dire quand les trois racines de l'équation en k ont un module égal à l'unité, un des points est à *l'intérieur* de l'hypersphère et les deux autres sont à *l'extérieur;* nous pouvons dire que dans ce cas *la substitution est elliptique*.

Dans le second cas, où il n'y a qu'une racine de module égal à un, deux des points sont situés *sur* l'hypersphère, et le troisième est à *l'extérieur;* la substitution sera dite alors *hyperbolique*.

17. Nous allons seulement examiner avec détails un cas particulier fort important pour la suite. Pour une valeur de k, racine de l'équation (2), il arrivera en général que les trois équations (1) se réduiront à deux, mais il peut arriver, dans certains cas particuliers, que les équations se réduisent à une seule; il y aura alors une infinité de points (ξ, η) restant invariables par la substitution (A, B, C); ils satisfont à une équation du premier degré entre ξ et η.

Si nous revenons maintenant au domaine fondamental R (paragraphe 16), les points (ξ, η) que nous venons de considérer ne pourront être que des *sommets* ou des *arêtes* de ce domaine. En particulier, d'un sommet A situé sur la surface de S pourront partir des arêtes dont tous les points resteront invariables pour une même substitution.

Soit, comme précédemment,

$$a'yy_0 + a''zz_0 + byz_0 + b_0y_0z + b'xz_0 + b'_0x_0z$$

la réduite qui nous a conduit au sommet A. Toute substitution semblable de cette réduite, conduisant à une substitution de G qui laisse invariable le point A sera de la forme

$$(x,\ y,\ z,\ \alpha x + \beta y + \gamma z,\ \beta' y + \gamma' z,\ \gamma'' z)$$

et les trois entiers α, β' et γ'' seront nécessairement égaux à ± 1 ou $\pm i$ et leur produit sera l'unité. A cette substitution correspondra pour G, une substitution de la forme

$$(u,\ v,\ Au + B,\ Cv + Du + E)$$

en posant, comme plus haut,

$$u = \frac{\xi}{\eta + 1} \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{\eta + 1}.$$

Les deux équations

$$u = Au + B, \quad v = Cv + Du + E$$

auront une infinité de solutions si $C = 1$ et si les valeurs de u données par les deux égalités

$$u = Au + B, \quad Du + E = 0$$

coïncident. Par conséquent une arête, de la nature considérée, partant du sommet A, correspond a une valeur déterminée de u, v étant arbitraire.

IV.

18. Nous pouvons maintenant aborder l'étude des fonctions de deux variables ξ et η, qui restent invariables par les substitutions du groupe G. Désignons, comme précédemment, par

$$\left(\xi, \quad \eta, \quad \frac{A\xi + A'\eta + A''}{C\xi + C'\eta + C''}, \quad \frac{B\xi + B'\eta + B''}{C\xi + C'\eta + C''}\right)$$

une substitution quelconque du groupe, et nous pouvons supposer que

$$\begin{vmatrix} A & A' & A'' \\ B & B' & B'' \\ C & C' & C'' \end{vmatrix} = 1.$$

Il existe des fonctions de deux variables indépendantes ξ et η, qui ne changent pas quand on effectue sur les variables une substitution quelconque du groupe G. J'ai démontré ce théorème dans un mémoire précédent (Acta mathematica, T. 1); je ne reviendrai pas sur la démonstration. Nous avons considéré la série suivante

$$(1) \qquad \sum R\left(\frac{A\xi + A'\eta + A''}{C\xi + C'\eta + C''}, \frac{B\xi + B'\eta + B''}{C\xi + C'\eta + C''}\right) \times \frac{1}{(C\xi + C'\eta + C'')^{3m}}$$

qui est étendue à toutes les substitutions du groupe; m est un entier supérieur à l'unité, et $R(\xi, \eta)$ est une fraction rationnelle de ξ et η qui reste holomorphe à l'intérieur du domaine S et sur la surface de ce domaine. Dans ces conditions on verra dans le mémoire cité que la série est convergente. Je m'arrêterai seulement ici pour montrer de nouveau que la série (1) ne sera pas identiquement nulle, quelle que soit la fraction rationnelle R, au moins à partir d'une valeur suffisamment grande de l'entier m. Considérons le point $\xi = 0$, $\eta = 0$. Supposons d'abord que toute substitution du groupe, autre que la substitution unité, donne comme transformé de 0 un point qui en soit différent. On pourra alors trouver autour de o un domaine σ, suffisamment petit pour qu'à tout point (ξ, η) de ce domaine ne correspondent par les substitutions du groupe que des points (ξ', η'), pour lésquels on aura:

$$\xi'\xi'_0 + \eta'\eta'_0 > \xi\xi_0 + \eta\eta_0. \tag{2}$$

Dans ces conditions, si

$$\xi' = \frac{A\xi + A'\eta + A''}{C\xi + C'\eta + C''}, \quad \eta' = \frac{B\xi + B'\eta + B''}{C\xi + C'\eta + C''}$$

on aura

$$\operatorname{Mod}(C\xi + C'\eta + C'') > 1;$$

c'est ce qui résulte de la relation

$$1 - \xi'\xi'_0 - \eta'\eta'_0 = \frac{1}{\operatorname{Mod}^2(C\xi + C'\eta + C'')}(1 - \xi\xi_0 - \eta\eta_0) \tag{3}$$

rapprochée de l'inégalité (2). Revenons maintenant à la série (1), que l'on peut écrire

$$R(\xi, \eta) + \sum R(\xi', \eta')\frac{1}{(C\xi + C'\eta + C'')^{3m}},$$

où la sommation s'étend à toutes les substitutions du groupe, sauf la substitution unité. On voit alors que si m est suffisamment grand, l'expression précédente différera peu de $R(\xi, \eta)$, on peut donc faire en sorte qu'elle ne soit pas nulle.

La même démonstration est applicable dans le cas où il y aurait un nombre N de substitutions changeant le point $\xi = 0$, $\eta = 0$ en lui-même; on écrira l'expression en prenant d'abord les termes correspondant aux N substitutions précédentes, soit

$$\sum{}' R(\xi', \eta')\frac{1}{(C\xi + C'\eta + C'')^{3m}}$$

cette somme; d'après l'égalité (3) $\operatorname{mod} C'' = 1$, et pour $\xi = 0$, $\eta = 0$ cette somme se réduit à

$$R(0, 0)\sum{}' \frac{1}{C''^{3m}}$$

et, comme m et $R(0, 0)$ sont arbitraires, cette somme ne sera pas nulle.

Désignons par $\theta(\xi, \eta)$ la fonction des deux variables ξ et η, dont l'existence se trouve maintenant complètement établie; il est aisé de montrer que ce sont des fonctions analytiques holomorphes de ξ et η, pour tout point du domaine S, c'est un point très simple auquel je ne m'arrête pas. On a enfin

$$\theta\left(\frac{A\xi + A'\eta + A''}{C\xi + C'\eta + C''}, \frac{B\xi + B'\eta + B''}{C\xi + C'\eta + C''}\right) = (C\xi + C'\eta + C'')^{3m}\theta(\xi, \eta)$$

la substitution (A, B, C) étant une substitution quelconque du groupe.

19. Je dis maintenant que, si m est suffisamment grand, on peut trouver deux fonctions θ, qui ne soient pas dans un rapport constant.

Soient θ_1 et θ_2 deux fonctions, correspondant aux fractions rationnelles R_1 et R_2; formons l'expression

$$\theta_1(\xi, \eta)\theta_2(\xi', \eta') - \theta_1(\xi', \eta')\theta_2(\xi, \eta)$$

(ξ, η) et (ξ', η') étant deux points arbitraires.

En nous supposant dans le cas général où nous nous sommes placé d'abord au paragraphe précédent, considérons le domaine σ autour du point o. Les points (ξ, η) et (ξ', η') étant dans ce domaine, l'expression précédente diffère peu de

$$R_1(\xi, \eta)R_2(\xi', \eta') - R_1(\xi', \eta')R_2(\xi, \eta)$$

si m est suffisamment grand; elle n'est donc pas identiquement nulle, si les fonctions R_1 et R_2 sont arbitraires, comme nous le supposons; par suite le quotient $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ ne se réduit pas à un facteur constant.

Ce résultat si simple est extrêmement important, car de cette manière se trouve établie en toute rigueur l'existence d'une fonction qui ne change pas, quand on fait sur les variables une substitution quelconque du groupe G. Si on pose en effet:

$$F(\xi, \eta) = \frac{\theta_1(\xi, \eta)}{\theta_2(\xi, \eta)}$$

la fonction F satisfera aux relations

$$F\left(\frac{A\xi + A'\eta + A''}{C\xi + C'\eta + C''}, \frac{B\xi + B'\eta + B''}{C\xi + C'\eta + C''}\right) = F(\xi, \eta).$$

Nous donnerons à la fonction F le nom de fonction hyperfuchsienne.

On peut obtenir évidemment une infinité de fonctions hyperfuchsiennes; des considérations toujours analogues, où l'on se sert d'un nombre m suffisamment grand, montrent que, les fractions rationnelles dont on dispose étant prises arbitrairement, toutes ces fonctions ne sont pas fonctions de l'une d'entre elles.

20. La fonction $\theta(\xi, \eta)$ est une fonction holomorphe de ξ et η dans le domaine S défini par l'inégalité

$$\xi\xi_0 + \eta\eta_0 < 1.$$

Considérons un domaine fondamental (R) (paragraphe 16); et soit A un point commun à R et à la surface de S. Nous nous proposons maintenant de rechercher la valeur de la fonction θ au point A.

Pour employer les mêmes notations qu'au paragraphe 15, nous pouvons admettre que le point A est le point $\xi = 0$, $\eta = -1$. Soit une substitution quelconque du groupe G

$$f_i(\xi, \eta) = \frac{A_i\xi + A'_i\eta + A''_i}{C_i\xi + C'_i\eta + C''_i}, \quad F_i(\xi, \eta) = \frac{B_i\xi + B'_i\eta + B''_i}{C_i\xi + C'_i\eta + C''_i}.$$

Si nous posons, comme plus haut,

$$u = \frac{\xi}{\eta + 1}, \quad v = \frac{1}{\eta + 1}$$

au groupe G relatif à ξ et η, correspondra un groupe G_1 relatif à u et v, et posons:

$$\varphi_i(u, v) = \frac{f_i}{F_i + 1}, \quad \Phi_i(u, v) = \frac{1}{F_i + 1}.$$

Considérons la fonction θ définie, comme on se rappelle, par la série

$$\theta(\xi, \eta) = \sum R(f_i, F_i)\left[\frac{D(f_i, F_i)}{D(\xi, \eta)}\right]^m$$

où la notation $\frac{D(f_i,\ F_i)}{D(\xi,\ \eta)}$ désigne, suivant l'usage, le déterminant fonctionnel de f_i et F_i par rapport à ξ et η. Or on a

$$\frac{D(f_i,\ F_i)}{D(\xi,\ \eta)} = \frac{D(f_i,\ F_i)}{D(u,\ v)} \cdot \frac{D(u,\ v)}{D(\xi,\ \eta)} = \frac{D(f_i,\ F_i)}{D(\varphi_i,\ \Phi_i)} \cdot \frac{D(\varphi_i,\ \Phi_i)}{D(u,\ v)} \cdot \frac{D(u,\ v)}{D(\xi,\ \eta)}$$

et par suite

$$\frac{D(f_i,\ F_i)}{D(\xi,\ \eta)} = v^3 \frac{1}{\Phi_i^3} \cdot \frac{D(\varphi_i,\ \Phi_i)}{D(u,\ v)}$$

et l'on peut écrire:

$$\theta(\xi,\ \eta) = v^{3m} \cdot \sum R(f_i,\ F_i) \frac{1}{\Phi_i^{3m}} \cdot \left[\frac{D(\varphi_i,\ \Phi_i)}{D(u,\ v)}\right]^m.$$

Nous poserons maintenant

$$\theta(\xi,\ \eta) = v^{3m}\theta_1(u,\ v);$$

d'après sa forme même la fonction $\theta_1(u,\ v)$ est analogue à $\theta(\xi,\ \eta)$ c'est à dire qu'elle se reproduit, multiplié par $\left[\frac{D(\varphi_i,\ \Phi_i)}{D(u,\ v)}\right]^m$ quand on remplace u et v respectivement par $\varphi_i(u,\ v)$ et $\Phi_i(u,\ v)$.

D'ailleurs puisque

$$\theta_1(u,\ v) = \sum R(f_i,\ F_i) \frac{1}{(C_i\xi + C'_i\eta + C''_i)^{3m}} \cdot \frac{1}{v^{3m}}$$

on voit que θ_1 tend vers zéro, quand ξ et η tendent respectivement vers 0 et -1, car la série est convergente et chacun de ses termes tend vers zéro. Étudions plus complètement cette fonction $\theta_1(u,\ v)$; tout d'abord elle est définie seulement pour les valeurs de u et v qui correspondent au domaine S, ce qui donne ici, en posant $u = u' + iu''$, $v = v' + iv''$

$$2v' > 1 + u'^2 + u''^2.$$

Parmi les substitutions du groupe G_1 nous en avons (paragraphe 15) signalé trois particulièrement intéressantes; ce sont

$$\left[u,\ v,\ u,\ v-\frac{\alpha a'b'}{\delta}\right]$$

$$\left[u,\ v,\ u+\frac{\mu b'}{\sqrt{\delta}},\ v-\frac{a'\lambda}{\sqrt{\delta}}u+\frac{b'}{\delta}(\mu b_0-\nu a')\right]$$

$$\left[u,\ v,\ u+\frac{\mu' b'}{\sqrt{\delta}},\ v-\frac{a'\lambda'}{\sqrt{\delta}}u+\frac{b'}{\delta}(\mu' b_0-\nu' a')\right].$$

Je rappelle que $\frac{\alpha a'b'}{\delta}$ est purement imaginaire, et que les deux entiers μ et μ' ne sont pas dans un rapport réel. Si on désigne par

$$(u,\ v,\ u+M,\ v+Nu+P)$$

une quelconque de ces substitutions, il résulte de ce qui a été dit sur la fonction θ_1 que

$$(1)\qquad \theta_1(u+M,\ v+Nu+P)=\theta_1(u,\ v).$$

De cette propriété nous allons immédiatement déduire un développement de θ_1. Pour une valeur fixe donnée à u, θ_1 est une fonction de v, uniforme et continue pour toute valeur telle que

$$2v'>1+u'^2+u''^2.$$

On a d'ailleurs d'après (1)

$$\theta_1\left(u,\ v-\frac{\alpha a'b'}{\delta}\right)=\theta_1(u,\ v);$$

cette fonction de v est donc développable en série ordonnée suivant les puissances croissantes de $e^{-\frac{2\pi i\delta}{\alpha a'b'}v}$ si la quantité réelle $\frac{2\pi i\delta}{\alpha a'b'}$ est positive et de $e^{+\frac{2\pi i\delta}{\alpha a'b'}v}$ dans le cas contraire. Nous pouvons donc écrire, en nous plaçant dans la première hypothèse et posant $\frac{2\pi i\delta}{\alpha a'b'}=d$

$$\theta_1(u,\ v)=\theta_1(u)e^{-dv}+\theta_2(u)e^{-2dv}+\ldots+\theta_n(u)e^{-ndv}+\ldots;$$

nous ne mettons pas de terme indépendant de v, puisque la fonction doit s'annuler pour $v=\infty$, c'est à dire $e^{-v}=0$.

Les coefficients θ_1, θ_2, ... sont des fonctions holomorphes de u.

Nous allons trouver les propriétés fondamentales de ces fonctions θ, en écrivant que

$$\theta_1\left[u + \frac{\mu b'}{\sqrt{\delta}},\ \ v - \frac{a'\lambda}{\sqrt{\delta}} u + \frac{b'}{\delta}(\mu b_0 - \nu a')\right] = \theta_1(u,\ v)$$

$$\theta_1\left[u + \frac{\mu' b'}{\sqrt{\delta}},\ \ v - \frac{a'\lambda'}{\sqrt{\delta}} u + \frac{b'}{\delta}(\mu' b_0 - \nu' a')\right] = \theta_1(u,\ v).$$

On trouve ainsi

(2)
$$\theta_n\left(u + \frac{\mu b'}{\sqrt{\delta}}\right) = e^{-\frac{na'\lambda d}{\sqrt{\delta}} u + \frac{ndb'}{\delta}(\mu b_0 - \nu a')} . \theta_n(u)$$

$$\theta_n\left(u + \frac{\mu' b'}{\sqrt{\delta}}\right) = e^{-\frac{na'\lambda' d}{\sqrt{\delta}} u + \frac{ndb'}{\delta}(\mu' b_0 - \nu' a')}\ \theta_n(u).$$

La fonction $\theta_n(u)$ est donc une fonction *intermédiaire.* Nous appelons avec MM. Briot et Bouquet fonction intermédiaire une fonction holomorphe $f(u)$ qui satisfait aux équations

$$f(u + \omega) = e^{Au+B} f(u), \quad f(u + \omega') = e^{A'u+B'} f(u).$$

On sait que le quotient $\dfrac{A\omega' - A'\omega}{2\pi i}$ doit être un entier réel. Assurons nous que cette condition est effectivement vérifiée; ce quotient est ici

$$\frac{na'b'(\mu\lambda' - \mu'\lambda)}{\alpha a'b'}$$

or on a (paragraphe 15)

$$\alpha = ib'_0, \quad \mu\lambda' - \mu'\lambda = 2tt_0 b'_0 a' i;$$

le quotient se réduit alors à $2ntt_0 a'$, c'est bien un entier réel.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant qui est fondamental pour la suite de cette étude.

La fonction $\theta(\xi,\ \eta)$ *peut, dans le voisinage de* $\xi = 0,\ \eta = -1$ *se mettre sous la forme*

$$\theta(\xi,\ \eta) = v^{3m}[\theta_1(u)e^{-dv} + \theta_2(u)e^{-2dv} + \ldots + \theta_n(u)e^{-ndv} + \ldots]$$

où

$$u = \frac{\xi}{\eta + 1}, \quad v = \frac{1}{\eta + 1} \quad \text{et} \quad d > 0.$$

Les fonctions $\theta_n(u)$ sont des fonctions holomorphes de u pour toute valeur de u; ce sont des fonctions intermédiaires satisfaisant aux équations (2).

On conclut de la forme précédente que $\theta(\xi, \eta)$ tend vers zéro quand le point (ξ, η) tend vers $\xi = 0$, $\eta = -1$.

21. Quelle que soit la fraction rationnelle R, la fonction $\theta(\xi, \eta)$ peut s'annuler pour certaines valeurs de ξ et η; ce sont les points qui restent invariables pour une substitution convenable du groupe (paragraphe 16). Ces points sont situés sur la limite du domaine fondamental R; s'ils sont en nombre limité, ce sont des sommets et dans le cas où il y en a une succession continue, ils forment des *arêtes* de ce domaine. Soit (ξ, η) un tel point et (A, B, C) la substitution qui le laisse invariable.

La relation générale:

$$\theta\left(\frac{A\xi + A'\eta + A''}{C\xi + C'\eta + C''}, \frac{B\xi + B'\eta + B''}{C\xi + C'\eta + C''}\right) = (C\xi + C'\eta + C'')^{3m}\theta(\xi, \eta)$$

nous montre que

$$\theta(\xi, \eta) = (C\xi + C'\eta + C'')^{3m}\theta(\xi, \eta).$$

Nous avons désigné par k l'expression $C\xi + C'\eta + C''$ (paragraphe 16) et formé l'équation du troisième degré donnant k. On voit que si la valeur de k qui correspond au point (ξ, η) ne satisfait pas à l'équation

$$k^{3m} = 1$$

on aura nécessairement

$$\theta(\xi, \eta) = 0.$$

Il pourra donc y avoir certains sommets ou certaines arêtes du domaine fondamental pour les points desquelles la fonction θ s'annulera quelle que soit la fonction rationnelle $R(\xi, \eta)$ qui figure dans la formation. En dehors de ces points qui sont sur la limite du domaine fondamental R, il n'y aura pas dans ce domaine de points pour lesquels θ

s'annulera quelle que soit R; c'est ce qu'on peut montrer, en toute rigueur, par un raisonnement analogue à celui dont nous avons fait usage au paragraphe 18.

Ceci posé, je considère maintenant deux fonctions θ et θ_1, relatives au même nombre entier m et correspondant respectivement aux deux fractions rationnelles arbitraires R et R_1. Envisageons les deux équations

$$\theta(\xi, \eta) = 0, \qquad \theta_1(\xi, \eta) = 0.$$

R et R_1 étant quelconques, elles n'auront dans le domaine R d'autres points racines *formant une succession continue* que les *arêtes* particulières dont nous avons parlé plus haut, s'il en existe. Je dis de plus, que, abstraction faite de ces points, le nombre des racines communes à ces deux équations dans l'intérieur du domaine R est *fini.*

Il ne peut y avoir de difficulté qu'à cause des points A communs au domaine R et à la surface de S; c'est seulement dans le voisinage de ces points qu'il pourrait y avoir *dans* le domaine R un nombre infini de racines (ne formant pas d'ailleurs une succession continue) communes aux deux équations. Or considérons un tel point A, que nous supposons, comme plus haut, être le point $\xi = 0$, $\eta = -1$. On a:

$$\theta(\xi, \eta) = v^{3m}[\theta_1(u)e^{-dv} + \theta_2(u)e^{-2dv} + \ldots + \theta_n(u)e^{-ndv} + \ldots]$$
$$\theta_1(\xi, \eta) = v^{3m}[\vartheta_1(u)e^{-dv} + \vartheta_2(u)e^{-2dv} + \ldots + \vartheta_n(u)e^{-ndv} + \ldots]$$

et en supprimant le facteur v^{3m}, les équations précédentes s'écriront:

$$(1) \qquad \begin{aligned} &e^{-dv}[\theta_1(u) + \theta_2(u)e^{-dv} + \ldots + \theta_n(u)e^{-(n-1)dv} + \ldots] = 0 \\ &e^{-dv}[\vartheta_1(u) + \vartheta_2(u)e^{-dv} + \ldots + \vartheta_n(u)e^{-(n-1)dv} + \ldots] = 0. \end{aligned}$$

On sait d'ailleurs, que, quand (ξ, η) à l'intérieur de R s'approche de $\xi = 0$, $\eta = -1$, la quantité v' (on pose $v = v' + iv''$) est positive et grandit indéfiniment. Les équations (1) ont donc la racine $e^{-dv} = 0$, ce qui donne $\xi = 0$, $\eta = -1$. Il peut arriver que tous les coefficients θ et ϑ aient une racine commune en u, v sera alors arbitraire et on aura une succession de points correspondant à une *arête* issue de A (voyez paragraphe 17). A l'exception de ces valeurs, il y aura seulement un nombre fini de racines communes aux équations (1), pour lesquelles e^{-dv} sera moindre qu'une quantité ε, aussi petite que l'on voudra. Les deux équations

$$\theta(\xi,\ \eta) = 0, \qquad \theta_1(\xi,\ \eta) = 0$$

ont donc seulement un nombre limité de racines communes à *l'intérieur* d'un domaine fondamental.

22. Ce nombre fini de racines, pour un groupe donné et une valeur donnée de m, est indépendant des deux fractions rationnelles R et R_1 qui figurent dans la formation des fonctions θ et θ_1. On peut concevoir en effet une fraction rationnelle dépendant de certains paramètres arbitraires, coïncidant pour des valeurs particulières de ceux-ci d'abord avec R et avec R_1. Pour une variation infiniment petite de ces paramètres le nombre des racines reste le même; d'ailleurs si pour des valeurs spéciales des paramètres une ou plusieurs racines sortent du domaine fondamental par une certaine face, on est assuré que des racines en nombre égal entreront dans le domaine par la face opposée: *le nombre des racines est donc constant.*

En prenant le quotient de deux fonctions θ, on obtient une fonction $F(\xi,\ \eta)$ qui reste invariable par les substitutions du groupe G: nous donnons le nom de fonction *hyperfuchsienne* à toute fonction de cette nature. Il résulte immédiatement du théorème établi au paragraphe précédent qu'*entre trois fonctions hyperfuchsiennes existe une relation algébrique.*

Ceci posé, nous allons montrer qu'on peut trouver trois fonctions hyperfuchsiennes relatives au groupe G, telles que toute autre fonction hyperfuchsienne soit une fonction rationnelle des trois premières. Prenons d'abord deux fonctions hyperfuchsiennes quelconques indépendantes F et F_1; a et b étant deux constantes arbitraires, nous considérons les équations

$$F(\xi,\ \eta) = a, \qquad F_1(\xi,\ \eta) = b$$

et soit n le nombre de leurs solutions à *l'intérieur* du domaine fondamental, que nous désignons par

$$(1) \qquad (\xi_1,\ \eta_1),\ (\xi_2,\ \eta_2),\ \ldots,\ (\xi_n,\ \eta_n).$$

a et b étant arbitraires, on peut supposer que ces n points sont à l'intérieur et non sur la limite du domaine fondamental, c'est à dire que pour chacun d'eux il n'y a que la substitution unité qui le laisse invariable.

En raisonnant toujours comme dans un paragraphe précédent, nous montrons que θ et θ_1 étant deux fonctions correspondants aux fractions rationnelles R et R_1 et à un entier m, le quotient

$$F_2(\xi, \eta) = \frac{\theta_1(\xi, \eta)}{\theta_2(\xi, \eta)}$$

aura certainement, si m est pris suffisamment grand, et si R et R_1 sont quelconques, des valeurs *distinctes* pour les points de la suite (1).

On conclut de là que *toute fonction hyperfuchsienne est une fonction rationnelle de F, F_1 et F_2.* On a d'ailleurs entre ces trois fonctions une relation algébrique:

$$f(F, F_1, F_2) = 0.$$

23. Les fonctions hyperfuchsiennes peuvent être obtenues par l'inversion des quotients de trois solutions communes d'un système d'équations aux dérivées partielles. Reprenons les deux fonctions F_1 et F_2 du paragraphe précédent. Je pose

$$x = F_1(\xi, \eta), \qquad y = F_2(\xi, \eta)$$

et soient les trois expressions

$$z_1 = \sqrt[3]{\frac{\partial F_1}{\partial \xi}\frac{\partial F_2}{\partial \eta} - \frac{\partial F_1}{\partial \eta}\frac{\partial F_2}{\partial \xi}}, \qquad z_2 = \xi . z_1, \qquad z_3 = \eta . z_1 .$$

z_1, z_2 et z_3 sont des fonctions de ξ et η et peuvent par suite être considérées comme des fonctions de x et y. Or, quand on a trois fonctions de deux variables indépendantes x et y, on peut former un système de trois équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre, auxquelles satisfont ces trois fonctions: soit, en désignant suivant l'usage par p, q, r, s, t les dérivées partielles de z,

$$r = ap + bq + cz$$

$$s = a_1 p + b_1 q + c_1 z$$

$$t = a_2 p + b_2 q + c_2 z.$$

Dans la première équation, on substituera à la place de z successivement z_1, z_2 et z_3, et on aura trois équations du premier degré pour déterminer a, b, c; on déterminera d'une manière semblable les coefficients des deux autres équations.

Les neuf coefficients précédents seront des fonctions de x et y: je dis qu'ici ce sont des fonctions algébriques de x et y. Il suffira, pour l'établir, de faire voir que ces coefficients sont des fonctions hyperfuchsiennes de ξ et η.

Prenons par exemple a, b, c; ils seront déterminés par les équations

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} = a\frac{\partial z_1}{\partial x} + b\frac{\partial z_1}{\partial y} + cz_1$$

$$\frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2} = a\frac{\partial z_2}{\partial x} + b\frac{\partial z_2}{\partial y} + cz_2$$

$$\frac{\partial^2 z_3}{\partial x^2} = a\frac{\partial z_3}{\partial x} + b\frac{\partial z_3}{\partial y} + cz_3;$$

a, b, c seront des quotients de déterminants. La dénominateur commun est

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x} & \frac{\partial z_1}{\partial y} & z_1 \\ \frac{\partial z_2}{\partial x} & \frac{\partial z_2}{\partial y} & z_2 \\ \frac{\partial z_3}{\partial x} & \frac{\partial z_3}{\partial y} & z_3 \end{vmatrix}$$

et en remplaçant z_2 et z_3 respectivement par ξz_1 et ηz_1, on trouve de suite

$$z_1^3\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right).$$

Mais

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{1}{\frac{\partial F_1}{\partial\xi}\frac{\partial F_2}{\partial\eta} - \frac{\partial F_1}{\partial\eta}\frac{\partial F_2}{\partial\xi}};$$

par conséquent, le déterminant est égal à l'unité.

Soit maintenant le déterminant:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} & \frac{\partial z_1}{\partial y} & z_1 \\ \frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2} & \frac{\partial z_2}{\partial y} & z_2 \\ \frac{\partial^2 z_3}{\partial x^2} & \frac{\partial z_3}{\partial y} & z_3 \end{vmatrix}$$

il se réduit à

$$2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) z_1^2 \frac{\partial z_1}{\partial x} + z_1^3\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right).$$

Or les dérivées partielles de ξ et η par rapport à x et y sont évidemment des fonctions uniformes de ξ et η, car on peut les tirer par différentiation des équations

$$x = F(\xi, \eta), \qquad y = F_1(\xi, \eta).$$

z_1^3 est de plus une fonction uniforme des mêmes variables et par suite $z_1^2 \frac{\partial z_1}{\partial x}$ qui représente à un facteur près $\frac{\partial z_1^3}{\partial x}$.

Le déterminant est donc une fonction uniforme de ξ et η. On peut reconnaître par une vérification directe que cette fonction est une fonction hyperfuchsienne; on y parvient plus simplement de la manière indirecte que voici. Lorsqu'on fait sur (ξ, η) une substitution quelconque du groupe, z_1, z_2 et z_3 se changent en z_1', z_2' et z_3', et on a:

$$z_1' = Cz_2 + C'z_3 + C''z_1$$
$$z_2' = Az_2 + A'z_3 + A''z_1$$
$$z_3' = Bz_2 + B'z_3 + B''z_1$$

les A, B, C étant des constantes. D'ailleurs x et y reprennent les mêmes valeurs quand ξ, η partant d'un système de valeurs arbitraires aboutissent à un système de valeurs équivalentes (c'est à dire qui se correspondent par une substitution du groupe); on a, par suite, pour déterminer les transformées de a, b, c les mêmes équations que pour déterminer a, b, c: c'est dire que ces fonctions sont des fonctions hyperfuchsiennes.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante:

Soient les trois fonctions hyperfuchsiennes

$$x = F_1(\xi, \eta), \quad y = F_2(\xi, \eta), \quad z = F(\xi, \eta)$$

du paragraphe précédent, liées par la relation algébrique

$$f(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

on peut former un système de trois équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = a_1\frac{\partial z}{\partial x} + b_1\frac{\partial z}{\partial y} + c_1 z$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a_2\frac{\partial z}{\partial x} + b_2\frac{\partial z}{\partial y} + c_2 z$$

où les a, b, c sont des fonctions rationnelles de x, y et z [z étant la fonction algébrique de x et y définie par (1)]; *ces trois équations ont trois solutions communes linéairement indépendantes z_1, z_2 et z_3, et si on pose*

$$\frac{z_2}{z_1} = \xi, \quad \frac{z_3}{z_1} = \eta$$

ces équations résolues par rapport à x et y donnent précisément

$$x = F_1(\xi, \eta), \quad y = F_2(\xi, \eta).$$

24. Nous avons indiqué les propriétés les plus simples des fonctions hyperfuchsiennes; je ne pousserai pas en ce moment plus loin cette étude, me proposant d'y revenir ultérieurement, après avoir fait une étude approfondie de quelques cas particuliers.

Je vais revenir, en terminant, sur un exemple de fonctions hyperfuchsiennes dont je me suis précédemment occupé (Acta mathematica, T. 2); cet exemple ne se rattache pas aux formes quadratiques ternaires à indéterminées conjuguées relatives aux entiers complexes $a + bi$ de

Gauss, mais aux entiers formés avec les racines cubiques de l'unité, mais il est clair que des considérations analogues à celles dont nous avons fait usage dans ce mémoire peuvent être employées dans ce nouveau cas.

Nous avons vu que les trois équations linéaires simultanées aux dérivées partielles

$$9x(x-1)(x-y)r = (-5x^2+4xy+3x+2y)3p - 3y(1-y)q + (x-y)z$$

$$3(x-y)s = p-q$$

$$9y(y-1)(y-x)t = -3x(1-x)p + (-5y^2+4xy+3y+2x)q + (y-x)z$$

qui rentrent dans le type du paragraphe précédent, ont *trois* solutions communes linéairement indépendantes, et nous avons montré qu'en désignant par ω_1, ω_2 et ω_3 trois solutions convenables, les équations

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = u, \quad \frac{\omega_3}{\omega_1} = v$$

donnent pour x et y des fonctions uniformes de u et v, et ces fonctions ne sont définies que pour les valeurs de u et v, comprises dans le domaine:

$$2v' + u'^2 + u''^2 < 0$$

en posant

$$u = u' + iu'', \quad v = v' + iv''.$$

J'ai indiqué dans le mémoire cité les substitutions fondamentales du groupe relatif aux fonctions hyperfuchsiennes x et y; c'est là un point sur lequel je veux faire une rectification. Les substitutions désignées par S_1, S_2, S_3 (Acta mathematica, T. 2, p. 127 § 4), ne constituent pas toutes les substitutions fondamentales; elles ont été obtenues en laissant x constant et faisant varier y; par suite d'une erreur de calcul, j'avais cru que les substitutions obtenues en laissant y constant et faisant varier x rentraient dans les précédentes. J'ai reconnu depuis que le fait n'est pas exact, et trouvé ainsi deux nouvelles substitutions. En définitive, le groupe s'obtiendra en combinant de toutes les manières les *cinq* substitutions qui suivent $(\lambda = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$:

$$(S_1)\qquad \begin{cases} U = \lambda^2 u - (\lambda - 1) \\ V = v + (\lambda - \lambda^2)u - (1 - \lambda^2) \end{cases}$$

$$(S_2)\qquad \begin{cases} U = \lambda^2 u + (1 - \lambda^2) \\ V = v + (1 - \lambda^2)u - (1 - \lambda^2) \end{cases}$$

$$(S_3)\qquad \begin{cases} U = \lambda u \\ V = v \end{cases}$$

$$(S_4)\qquad \begin{cases} U = \dfrac{u}{-2\lambda + (\lambda^2 - 1)v} \\ V = \dfrac{\lambda v + (\lambda^2 - 1)}{-2\lambda + (\lambda^2 - 1)v} \end{cases}$$

$$(S_5)\qquad \begin{cases} U = \dfrac{(\lambda - \lambda^2)v + \lambda^2 u}{1 + (\lambda^2 - 1)v + (1 - \lambda)u} \\ V = \dfrac{v}{1 + (\lambda^2 - 1)v + (1 - \lambda)u}. \end{cases}$$

Je me propose de faire, dans un autre travail, l'étude approfondie de ce cas particulier, qui me paraît d'autant plus intéressant qu'il se rattache à une classe particulière de fonctions abéliennes. Je montrerai seulement quelles sont ici les trois substitutions permettant de mettre toute fonction θ, correspondant au groupe, sous la forme de développement en série du paragraphe 20.

Ces substitutions se tirent de S_1, S_2 et S_3.

En faisant le produit de S_3 et de S_2, on a

$$(1)\qquad \begin{aligned} U &= u + 1 - \lambda^2 \\ V &= v + (\lambda - 1)u - (1 - \lambda^2). \end{aligned}$$

De même en composant S_3 et S_1, il vient:

$$(2)\qquad \begin{aligned} U &= u + 1 - \lambda \\ V &= v + (\lambda^2 - 1)u - (1 - \lambda^2). \end{aligned}$$

En combinant S_2 et S_3 on a d'autre part

$$U = u + \lambda - 1$$
$$V = v + (1 - \lambda^2)u - (1 - \lambda^2).$$

Faisant le produit de cette dernière substitution avec la substitution (2), nous obtenons

$$(3) \qquad \begin{aligned} U &= u \\ V &= v + \lambda^2 - \lambda. \end{aligned}$$

Les substitutions (1), (2) et (3) ont la forme des trois substitutions employées au paragraphe 20.

Le domaine que nous avons ici à considérer est définie par l'inégalité

$$2v' + u'^2 + u''^2 < 0.$$

Un changement de variable bien simple, permet de le transformer dans le domaine hypersphérique, auquel nous avons tout ramené dans ce travail. Que l'on pose en effet

$$u = \frac{\xi}{1 + \eta}, \quad v = \frac{1}{2}\frac{\eta - 1}{\eta + 1}.$$

Au domaine précédent correspondra le domaine hypersphérique

$$\xi\xi_0 + \eta\eta_0 < 1.$$

Pour le groupe précédent, toutes les fonctions hyperfuchsiennes correspondantes s'expriment en fonction rationnelle de deux d'entre elles, convenablement choisies, par exemple les fonctions x et y; il ne correspond en effet à un système de valeurs de x et y, qu'un seul système de valeurs de u et v, en faisant bien entendu abstraction de celles qui s'en déduisent par les substitutions du groupe.

Paris, le 15 Janvier 1884.