Sur la fonction $\mathfrak{T}(z)$.

(*Par* Ernest Cesàro, *étudiant, à Torre Annunziata.*)

---

1. Cette fonction, citée précédemment à propos d'une formule de M. Tchébychew, représente *la plus petite quantité qu'il faut ajouter ou retrancher à z pour obtenir un nombre entier*. Nous allons d'abord chercher une fonction de z, qui soit propre à indiquer, par les valeurs qu'elle prend, si la fonction $\mathfrak{T}(z)$ est inférieure ou supérieure à une certaine quantité ε, comprise entre 0 et $\frac{1}{2}\cdot$ Si $\mathfrak{T}(z) > \varepsilon$, il est évident que

$$\varepsilon < z - [z] < 1 - \varepsilon.$$

On en déduit

$$[z + \varepsilon] = [z], \qquad [z - \varepsilon] = [z].$$

Si, au contraire, $\mathfrak{T}(z) < \varepsilon$, deux cas peuvent se présenter:

1.° $z - [z] < \varepsilon$, et, par suite, $[z + \varepsilon] = [z]$, $[z - \varepsilon] = [z] - 1$.

2.° $z - [z] > 1 - \varepsilon$, et, par suite, $[z + \varepsilon] = [z] + 1$, $[z - \varepsilon] = [z]$.

Il en résulte que

$$[z + \varepsilon] - [z - \varepsilon] = \left| \begin{array}{l} 1, \text{ si } \mathfrak{T}(z) < \varepsilon \\ 0, \text{ si } \mathfrak{T}(z) > \varepsilon. \end{array} \right. \tag{1}$$

Il convient de considérer à part le cas de $\mathfrak{T}(z) = \varepsilon$. La différence $[z + \varepsilon] - [z - \varepsilon]$ est, alors, 1 ou 0, suivant que la fonction $z - [z]$ est ou n'est pas inférieure à $\frac{1}{2}\cdot$ Cela ne doit pas nous préoccuper, parceque les formules que nous allons établir ont une portée purement asymptotique, et, par conséquent, il est permis d'y négliger les valeurs de z pour lesquelles la fonction $\mathfrak{T}(z)$ est précisément égale à ε: celles-ci sont, en effet, infiniment moins nombreuses que les autres.

2. Il est aisé de déterminer les *fréquences* $L(\varepsilon)$, $\Lambda(\varepsilon)$ des valeurs inférieures à ε, dans chacune des séries

$$\mathfrak{T}\left(\frac{n}{1}\right),\quad \mathfrak{T}\left(\frac{n}{2}\right),\quad \mathfrak{T}\left(\frac{n}{3}\right),\dots\quad \mathfrak{T}\left(\frac{n}{n}\right),$$
$$\mathfrak{T}\left(\frac{1}{n}\right),\quad \mathfrak{T}\left(\frac{2}{n}\right),\quad \mathfrak{T}\left(\frac{3}{n}\right),\dots\quad \mathfrak{T}\left(\frac{n}{n}\right).$$

En effet, en vertu de (1),

$$n\,L(\varepsilon)=\sum_{p=1}^{p=n}\left\{\left[\frac{n}{p}+\varepsilon\right]-\left[\frac{n}{p}-\varepsilon\right]\right\}-N_{1-\varepsilon}(n). \tag{2}$$

Nous désignons par $N_\varepsilon(n)$ le nombre des valeurs de p, entières, positives et non supérieures à n, pour lesquelles la différence $\frac{n}{p}-\left[\frac{n}{p}\right]$ est précisément égale à ε. Il est clair que, si ε, nécessairement commensurable, est représenté par la fraction irréductible $\frac{\alpha}{\beta}$, le nombre $N_\varepsilon(n)$ indique aussi combien de diviseurs de n sont congrus avec α, (mod. β). L'ordre de la fonction $N_\varepsilon(n)$ est donc celui du logarithme de $n^{\frac{1}{\beta}}$. C'est pourquoi dans ce qui suit nous considérons $N_\varepsilon(n)$ comme négligeable vis-à-vis de n.

3. Si l'on calcule, de deux manières différentes, la quotité des couples de nombres x et y, entiers et positifs, satisfaisant à chacune des conditions $x(y-\varepsilon)\leqq n$, $x(y+\varepsilon)\leqq n$, on reconnaît que l'on peut écrire identiquement

$$\sum_{p=1}^{p=\left[\frac{n}{1-\varepsilon}\right]}\left[\frac{n}{p}+\varepsilon\right]=\sum_{p=1}^{p=n}\left[\frac{n}{p-\varepsilon}\right],$$
$$\sum_{p=1}^{p=\left[\frac{n}{1+\varepsilon}\right]}\left[\frac{n}{p}-\varepsilon\right]=\sum_{p=1}^{p=n-1}\left[\frac{n}{p+\varepsilon}\right].$$

On obtient, par soustraction,

$$\left.\begin{aligned}\sum_{p=1}^{p=n}\left\{\left[\frac{n}{p}+\varepsilon\right]-\left[\frac{n}{p}-\varepsilon\right]\right\}+\sum_{p=1}^{p=\left[\frac{n}{1-\varepsilon}\right]-n}\left[\frac{n}{n+p}+\varepsilon\right]+\\ +\sum_{p=1}^{p=n-\left[\frac{n}{1+\varepsilon}\right]}\left[\frac{n}{\left[\frac{n}{1+\varepsilon}\right]+p}-\varepsilon\right]=\sum_{p=1}^{p=n}\left\{\left[\frac{n}{p-\varepsilon}\right]-\left[\frac{n}{p+\varepsilon}\right]\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Des trois séries du premier membre, la dernière ne renferme que des termes nuls. Dans la deuxième, les $\left[\frac{n\varepsilon}{1-\varepsilon}\right]$ premiers termes sont égaux à l'unité: les autres sont nuls. Par conséquent la formule (3) devient

$$L(\varepsilon)=\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{p=n}\left\{\left[\frac{n}{p-\varepsilon}\right]-\left[\frac{n}{p+\varepsilon}\right]\right\}-\frac{1}{n}\left[\frac{n\varepsilon}{1-\varepsilon}\right]-\frac{N_{1-\varepsilon}(n)}{n}.$$

Lorsque n augmente indéfiniment, il vient

$$L(\varepsilon)=\sum_{p=1}^{p=\infty}\left\{\frac{1}{p-\varepsilon}-\frac{1}{p+\varepsilon}\right\}-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}=1+\frac{1-2\varepsilon}{\varepsilon(1-\varepsilon)}-\pi\cot\pi\varepsilon. \tag{4}$$

Par exemple

$$L\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{11}{3}-\pi=0{,}525074\ldots$$

4. Avec beaucoup plus de facilité on obtient

$$\Lambda(\varepsilon)=2\varepsilon. \tag{5}$$

Cela étant, désignons par $\mathfrak{p}(\alpha,\ \beta)$ la *probabilité que la plus petite quantité, qu'il faut ajouter ou retrancher à une fraction quelconque prise au hasard, pour obtenir un nombre entier, soit comprise entre* α *et* β. C'est aussi la *probabilité que, dans une division quelconque, le rapport du plus petit reste au diviseur soit compris entre* α *et* β. On a, en vertu de principes connus, et en ayant égard aux formules (4) et (5),

$$\mathfrak{p}(0,\ \varepsilon)=\varepsilon+\frac{1}{2}+\frac{1-2\varepsilon}{2\varepsilon(1-\varepsilon)}-\frac{\pi}{2}\cot\pi\varepsilon. \tag{6}$$

Si l'on observe que

$$\mathfrak{p}(\alpha,\ \beta)=\mathfrak{p}(0,\ \beta)-\mathfrak{p}(0,\ \alpha),$$

on obtient le résultat plus général

$$\mathfrak{p}(\alpha,\ \beta)=\frac{\beta-\alpha}{2}\left\{2-\frac{1}{\alpha\beta}-\frac{1}{(1-\alpha)(1-\beta)}\right\}+\frac{\pi\sin\pi(\beta-\alpha)}{2\sin\pi\alpha\cdot\sin\pi\beta}.$$

Par exemple

$$\mathfrak{p}\left(\frac{1}{8},\ \frac{3}{8}\right)=\pi-\frac{1111}{420}=0{,}496354\ldots;$$

c'est-à-dire que: « *dans une division quelconque, il y a environ* 209 *à parier, contre* 211, *que le plus petit des deux restes est compris entre* $\frac{1}{8}$ *et* $\frac{3}{8}$ *du diviseur* ».

5. En concevant z comme engendré par la division de deux entiers, pris au hasard, il est clair que la *densité* $D(\varepsilon)$ des valeurs de $\mathfrak{T}(z)$, aux en-

virons de ε, est exprimée, dans le cas actuel, par la *demi*-dérivée de $\mathfrak{p}(0, \varepsilon)$, relative à ε. D'après cela, la formule (6) donne

$$D(\varepsilon) = \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{4 \sin^2 \pi \varepsilon} - \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{(1-\varepsilon)^2}\right\}. \tag{7}$$

Par exemple:

$$D(0) = \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{4} = 1{,}072467\ldots; \qquad D\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{3}{2} = 0{,}967401\ldots$$

$$D\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi^2}{2} - \frac{71}{18} = 0{,}990357\ldots$$

On sait que la connaissance de la densité est essentielle, si l'on veut établir une formule générale, donnant les valeurs moyennes des fonctions de $\mathfrak{T}(z)$, pour autant que ces valeurs soient constantes. Dans le cas actuel, la formule

$$\mathfrak{M} = \frac{\int f(z) D(z)\, dz}{\int D(z)\, dz}$$

fournit l'égalité moyenne

$$f[\mathfrak{T}(z)] = \int_0^{\frac{1}{2}} f(z)\,dz + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \left\{\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{(1-z)^2}\right\} f(z)\,dz, \tag{8}$$

pourvu que l'on ait égard à (7).

6. D'ailleurs, ces formules ne sont pas essentiellement nouvelles: elles sont des conséquences nécessaires de celles qui ont été établies pour les fonctions des quantités z, engendrées par la division de deux entiers, pris au hasard; car, toute fonction de $\mathfrak{T}(z)$ est, en définitive, une fonction de z. Aussi la formule (8) doit pouvoir se déduire de la relation moyenne générale

$$f(z) = \frac{1}{2}\int_0^1 f(z)\,dz + \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{f(z)\,dz}{z^2},$$

dans laquelle on remplace $f(z)$ par $f[\mathfrak{T}(z)]$. Effectivement, on a:

$$f[\mathfrak{T}(z)] = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} f(z)\,dz + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 f(1-z)\,dz + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{p=\infty}\int_p^{p+\frac{1}{2}} \frac{f(z-p)\,dz}{z^2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{p=\infty}\int_{p+\frac{1}{2}}^{p+1} \frac{f(p+1-z)\,dz}{z^2};$$

ou bien

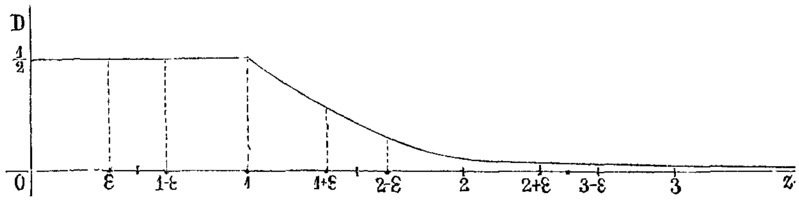
$$f[\mathfrak{T}(z)]=\int_0^{\frac{1}{2}} f(z)\,dz+\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{p=\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{(p+z)^2}+\frac{1}{(p+1-z)^2}\right\}f(z)\,dz=$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}} f(z)\,dz+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{(1+z)^2}+\frac{1}{(2-z)^2}+\frac{1}{(2+z)^2}+\frac{1}{(3-z)^2}+\cdots\right\}f(z)\,dz.$$

On retrouve donc la formule (8). Par exemple, pour $f(z)=z$, on a, en moyenne,

$$\mathfrak{T}(z)=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{p=\infty}\log\frac{2p+1}{2p}\cdot\frac{2p+1}{2p+2}=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\log\frac{4}{\pi}\cdot$$

7. La même observation doit être faite en ce qui concerne les densités. Reprenons le *diagramme des densités,* relatif aux quantités z:



Si l'on veut, par exemple, la densité des quantités $z-[z]$ autour de ε, il faut accumuler au point ε tous les points $1+\varepsilon$, $2+\varepsilon$, $3+\varepsilon,\ldots$, chacun avec sa propre densité. Conséquemment, la densité cherchée est

$$\frac{1}{2}\left\{1+\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}+\frac{1}{(2+\varepsilon)^2}+\frac{1}{(3+\varepsilon)^2}+\cdots\right\},$$

conformément à ce qui a été trouvé dans l'article précédent. Pour avoir, maintenant, la densité de $\mathfrak{T}(z)$, autour de ε, il faut encore accumuler sur ε les points $1-\varepsilon$, $2-\varepsilon$, $3-\varepsilon,\ldots$ Une telle condensation se faisant sur un espace moitié moindre, le résultat doit être divisé par 2. On retrouve ainsi la formule

$$D(\varepsilon)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}+\frac{1}{(2-\varepsilon)^2}+\frac{1}{(2+\varepsilon)^2}+\frac{1}{(3-\varepsilon)^2}+\cdots\right\},$$

qui ne diffère pas de (7).

8. La notion de la densité est indispensable pour l'extension des considérations qui précèdent aux systèmes de plusieurs valeurs de $\mathfrak{T}(z)$, prises au hasard. Elle permet de résoudre des problèmes, qui paraissent inabordables par

toute autre voie. Par exemple, un système de deux valeurs de $\mathfrak{T}(z)$ étant représenté par un point dont les coordonnées sont égales à ces valeurs, tous les points analogues sont renfermés dans un carré, de côté $\frac{1}{2}$. La densité autour du point (x, y) est $D(x)D(y)$. L'intégrale

$$\iint D(x)D(y)\,dx\,dy,$$

étendue à tout le carré est égale à $\frac{1}{4}$: étendue à une aire fermée, contenue dans le carré, elle représente le quart de la probabilité que, ayant pris au hasard deux fractions quelconques, les valeurs correspondantes de la fonction $\mathfrak{T}$ soient les coordonnées d'un point, situé à l'intérieur de l'aire considérée. D'après cela, nous pouvons résoudre des questions semblables à la suivante: « *Ayant effectué, à l'aide de deux couples d'entiers, pris au hasard, deux divisions, quelle probabilité y a-t-il que la somme des rapports des plus petits restes aux diviseurs correspondants soit moindre que* $\frac{1}{2}$? » Ici, l'*aire favorable* est constituée par la moitié du carré, limitée par la diagonale qui ne passe pas par l'origine. La probabilité cherchée est donc

$$P = 4\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}-x} D(x)D(y)\,dx\,dy.$$

On peut ramener la question à une intégration simple, en substituant les fonctions $\mathfrak{p}$ aux fonctions D. On trouve immédiatement

$$P = \int_0^{\frac{1}{2}} \mathfrak{p}\left(0,\ \frac{1}{2} - x\right)\mathfrak{p}'(0,\ x)\,dx.$$

Au point de vue arithmétique, le problème doit être considéré comme résolu; car nous savons exprimer la quantité soumise au signe d'intégration, en nous servant de la formule (6). Ce qui reste à faire est du ressort du Calcul intégral.

9. Les questions que nous venons de traiter sont susceptibles d'extension dans un autre sens, en supposant, par exemple, que la division soit effectuée à $\frac{1}{n}$ près. Alors, au lieu de considérer les quantités $z - [z]$, on doit étudier, plus généralement, les excès des quantités z sur les nombres de la forme $\alpha + \frac{\beta}{n}$

qui, par défaut, s'en rapprochent le plus. Ces excès sont évidemment exprimés par $z - \frac{[nz]}{n}$. Si $\mathfrak{D}_n(\varepsilon)$ est leur densité autour de la quantité ε, nécessairement comprise entre 0 et $\frac{1}{n}$, la simple inspection du diagramme des densités, relatif aux quantités z, donne immédiatement

$$\mathfrak{D}_n(\varepsilon) = \frac{1}{2} + \frac{n}{2} H'(n\varepsilon + n - 1).$$

Par intégration entre deux limites quelconques, on obtient la $n^{\text{ème}}$ partie de la probabilité que la différence $z - \frac{[nz]}{n}$ soit comprise entre les mêmes limites. On peut avoir intérêt à connaître ce qui arrive lorsque n augmente indéfiniment. Alors ε doit nécessairement tendre à zéro de manière que le produit $n\varepsilon$ ait pour limite une fraction proprement dite θ. Si B_p est le $p^{\text{ème}}$ des *Nombres de Bernoulli,* définis par l'égalité symbolique $(B+1)^p - B^p = p$, la théorie de la fonction H donne

$$\mathfrak{D}_n\left(\frac{\theta}{n}\right) = 1 + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(B-\theta)^p}{n^p},$$

c'est-à-dire:

$$\mathfrak{D}_n\left(\frac{\theta}{n}\right) = 1 + \frac{1-2\theta}{4n} + \frac{1-6\theta+6\theta^2}{12n^2} - \frac{\theta(1-\theta)(1-2\theta)}{4n^3} + \cdots$$

On voit que, si l'on effectue les divisions avec une exactitude de plus en plus grande, le système des rapports des restes aux diviseurs correspondants tend à devenir *uniformément dense.* Cependant, le terme $\frac{1-2\theta}{4n}$ nous montre que, avant qu'une telle homogénéité soit atteinte, la tendance des restes à être moindres que la moitié des diviseurs persiste jusqu'à la limite, en même temps que le rapport θ, autour duquel on a la *densité moyenne,* croît et se rapproche de plus en plus de $\frac{1}{2}$.

10. Connaissant la densité des quantités $z - \frac{[nz]}{n}$, nous pouvons procéder, sans difficultés, à leur évaluation moyenne. Nous avons d'abord

$$z - \frac{[nz]}{n} = n\int_0^{\frac{1}{n}} \mathfrak{D}_n(z)\cdot z\,dz,$$

d'où

$$nz - [nz] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{1}{n^p}\int_0^1 (B-\theta)^p\,\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\left\{1 - \sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{B_{p+1}}{(p+1)n^p}\right\},$$

c'est-à-dire

$$[nz] = nz - \frac{1}{2} + \frac{1}{24n} - \frac{1}{240n^3} + \cdots$$

On voit bien que $nz - [nz]$ tend, en moyenne, vers $\frac{1}{2}$. D'ailleurs, sous une forme concise,

$$z - \frac{[nz]}{n} = \frac{1}{4n} + \frac{1}{2}\left\{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - (\log n + C)\right\}.$$

Par exemple:

$$z - [z] = \frac{3}{4} - \frac{C}{2} = 0{,}461392\ldots$$

$$z - \frac{[2z]}{2} = \frac{7}{8} - \frac{C + \log 2}{2} = 0{,}239818\ldots$$

$$z - \frac{[3z]}{3} = 1 - \frac{C + \log 3}{2} = 0{,}162086\ldots$$

. . . .

La combinaison de ces égalités en fournit d'autres, fort intéressantes. Par exemple:

$$[nz] - n[z] = \frac{3}{4} - \frac{1}{4n} + \frac{1}{2}\left\{\log n - H(n)\right\}.$$

Il faut remarquer que le premier membre est égal au *reste de la division de* $[nz]$ *par* n. Ainsi, pour $n = 2$, la fonction $[2z] - 2[z]$ est 0 ou 1, suivant que $[2z]$ est *pair* ou *impair*. La valeur $\log 2 - \frac{1}{4}$ représente donc la probabilité que le plus grand nombre entier, contenu dans $2z$, soit impair. Plus généralement, *la probabilité que* $[2nz]$ *soit impair est*

$$\frac{1}{4} + n\left\{\log 2 - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)\right\}.$$

Elle croît sans cesse, et tend vers $\frac{1}{2}$, lorsque n augmente indéfiniment. De même, la différence $[10^k z] - 10^k[z]$ n'est autre chose que le $k^{\text{ème}}$ chiffre, dans le développement de z en fraction décimale. La formule ci-dessus donne donc, pour $n = 10^k$, la valeur moyenne du $k^{\text{ème}}$ chiffre décimal, dans une division quelconque.

11. Au lieu de prendre, dans les divisions à $\frac{1}{n}$ près, les quotients par défaut, prenons les quotients les plus approchés, et appelons $\mathfrak{T}_n(z)$ les différences *absolues* entre ces quotients et les valeurs des fractions correspondantes. Il est évident que

$$\mathfrak{T}_n(z) = \frac{\mathfrak{T}(nz)}{n}\cdot$$

Or, en appelant ε une quantité comprise entre 0 et $\frac{1}{2n}$, le diagramme des densités montre que la densité des valeurs de $\mathfrak{T}_n(z)$, autour de ε, est

$$D_n(\varepsilon) = \frac{1}{2}\left\{\mathfrak{D}_n(\varepsilon) + \mathfrak{D}_n\left(\frac{1}{n} - \varepsilon\right)\right\}\cdot$$

Par conséquent

$$D_n\left(\frac{\theta}{n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{n}{4}\left\{H'(n+\theta-1) + H'(n-\theta)\right\},$$

θ étant compris entre 0 et $\frac{1}{2}\cdot$ En développant le second membre suivant les puissances ascendantes de $\frac{1}{n}$ on obtient

$$D_n\left(\frac{\theta}{n}\right) = 1 + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{(B+\theta-1)^{2p}}{n^{2p}},$$

c'est-à-dire

$$D_n\left(\frac{\theta}{n}\right) = 1 + \frac{1-6\theta(1-\theta)}{12n^2} - \frac{1-30\theta^2(1-\theta)^2}{60n^4} + \cdots$$

La densité tend à devenir uniforme, à mesure que l'on effectue des divisions de plus en plus exactes.

12. Connaissant D_n, on obtient, par le procédé habituel, l'égalité moyenne

$$\mathfrak{T}(nz) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{(4^{p+1}-1)B_{2p+2}}{(2p+1)(2p+2)}\cdot\frac{1}{(2n)^{2p}}\cdot$$

On voit que, pour n infini, le second membre tend vers $\frac{1}{4}$, ce qui était à prévoir. D'ailleurs, la théorie de la *fonction gamma* permet de mettre la dernière égalité sous la forme que voici:

$$\mathfrak{T}(nz) = \frac{1}{8} + \frac{n}{2} \log \left\{ \frac{2n+1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{2n+3}{2n+2} \cdot \frac{2n+3}{2n+4} \cdots \right\};$$

ou bien sous celle-ci:

$$\mathfrak{T}(nz) = \frac{1}{8} + n \log \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \right\}.$$