Ueber die Fortpflanzung von Stössen durch elastische feste Körper.

(*Von* E. B. Christoffel, *in Strassburg*.)

I. Die vollständigen Bedingungen für die Bewegungen im Innern eines elastischen festen Körpers.

1.

In der gegenwärtigen Abhandlung werde ich die in meiner vorigen Arbeit (Seite 81 d. B.) entwickelten Principien auf die Fortpflanzung von Stössen durch elastische feste Körper anwenden. Ich beginne mit einigen Vorbemerkungen darüber, wie die hier zu entwickelnden Erscheinungen zu verstehen sind, da die folgenden Untersuchungen keine Unklarheit über diesen Punkt vertragen.

Ich denke mir einen homogenen elastischen Körper ohne Einwirkung äusserer Kräfte im Gleichgewichte, und bezeichne für diesen Fall durch xyz die rechtwinkligen Coordinaten eines seiner Theilchen m, durch ρ seine constante Dichtigkeit, durch $\mathfrak{R}$ den von ihm erfüllten Raum, durch $\mathfrak{S}$ seine Oberfläche.

Wird das Gleichgewicht dieses Körpers gestört, so bezeichne ich wie üblich durch $x+u$, $y+v$, $z+w$ die Coordinaten des nämlichen Theilchens m zur Zeit t. Die Grössen uvw, die Verschiebungscomponenten von m, werden als Functionen von $txyz$ aufgefasst, d. h. sie werden den Punkten xyz des ruhenden Raumes $\mathfrak{R}$ zugeordnet, so dass sie für jeden Zeitpunkt t die wirkliche Lage desjenigen Theilchens m bestimmen, welches xyz zu Gleichgewichtscoordinaten hat.

Wir reduciren demnach sämmtliche hier zu untersuchenden Erscheinungen auf diesen ruhenden Raum $\mathfrak{R}$ und seine Oberfläche $\mathfrak{S}$. Insbesondere wird, bei der Fortpflanzung von Stössen, als Unstetigkeitsfläche zur Zeit t nicht die wirkliche, zu dieser Zeit stattfindende Unstetigkeitsfläche bezeichnet, sondern diejenige Fläche Σ, welche zwar die nämlichen Massentheilchen wie jene, aber in ihrer Gleichgewichtslage von einander trennt. Aus der Gestalt dieser letztern und ihrer Fortpflanzung im homogen ausgefüllten Raume $\mathfrak{R}$ kann man, wenn uvw bekannt sind, sofort auch die Gestalt jener und ihre Fortpflanzung durch den in Vibration befindlichen elastischen Körper finden.

2.

Die elastischen festen Körper bieten zwei Erscheinungen dar, welche auf Unstetigkeiten beruhen, die Spaltung und die Fortpflanzung von Stössen.

Bei der Spaltung bildet sich im Raume $\mathfrak{R}$ eine Fläche, längs welcher die Verschiebungscomponenten uvw selbst unstetig sind, und diese Fläche breitet sich, der fortschreitenden Spaltung entsprechend, im Raume $\mathfrak{R}$ immer weiter aus. Ich schliesse diesen Fall von den gegenwärtigen Untersuchungen aus; er betrifft in erster Linie die Lehre von den Spaltflächen der Krystalle, erfordert aber eine Vervollständigung der Hypothesen über die Constitution der elastischen festen Körper.

Ich setze also für die folgenden Untersuchungen voraus dass uvw, welche nach dem Begriffe der Masse sich mit t stetig ändern, auch stetige Functionen von xyz sind. Die einzigen Unstetigkeiten, welche in Betracht zu ziehen sein werden, sind in Folge dessen Unstetigkeiten der ersten und höhern Derivirten von uvw; ihnen entspricht die Fortpflanzung von Stössen.

Schliesslich bemerke ich noch, dass die Untersuchung in üblicher Weise auf solche Erscheinungen beschränkt ist, bei denen das Princip der Superposition stattfindet, also alle Bedingungen in den Werthen von uvw linear werden.

3.

Unter diesen Voraussetzungen lassen sich bekanntlich die Spannungen, welche an einem Theilchen m auftreten, wenn die Einrichtung des elastischen Körpers gestört wird, aus einer Kräftefunction herleiten. Dieselbe ist eine quadratische Form der sechs Variabeln

$$\theta_1 = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \theta_2 = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \theta_3 = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\theta_4 = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \qquad \theta_5 = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \qquad \theta_6 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

und soll im Folgenden durch

$$\Pi = \Sigma a_{\mu\nu} \theta_\mu \theta_\nu \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots 6)$$

bezeichnet werden.

Seien $\overset{+}{m}$, $\overset{-}{m}$ Theilchen welche einander berühren, und sei $\Delta\Sigma$ das Flächenelement, welches sie in der Gleichgewichtslage voneinander trennt. Ueber $\Delta\Sigma$ wird auf der Seite von $\overset{+}{m}$ die Normale errichtet; die Winkel, welche sie mit den positiven Axen bildet, heissen $\alpha\beta\gamma$. Zwischen $\overset{-}{m}$ und $\overset{+}{m}$ wirken Spannkräfte; sind

$$\rho X \Delta\Sigma, \qquad \rho Y \Delta\Sigma, \qquad \rho Z \Delta\Sigma$$

die an m wirkenden Componenten derselben, so ist

$$X = \Pi_1 \cos\alpha + \Pi_6 \cos\beta + \Pi_5 \cos\gamma$$

$$Y = \Pi_6 \cos\alpha + \Pi_2 \cos\beta + \Pi_4 \cos\gamma$$

$$Z = \Pi_5 \cos\alpha + \Pi_4 \cos\beta + \Pi_3 \cos\gamma,$$

und hier ist allgemein

$$\Pi_\mu = \frac{1}{2} \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_\mu}.$$

Man nimmt an, dass die quadratische Form Π eine vollständige und stets positive ist, d. h. dass sie die Eigenschaft besitzt, bei reellen Werthen der sechs Variabeln θ nur dann $= 0$ zu werden wenn alle Variabeln zugleich verschwinden, und in allen übrigen Fällen positive von Null verschiedene Werthe anzunehmen (vergl. die Abhandlung des Herrn Kirchhoff in Borchardt's Journal 56, pag. 290-291).

In besondern Fällen vereinfacht sich der Ausdruck für die Kräftefunction Π (vergl. unten art. 14 *B* und art. 15 zu Ende); für unsern Zweck ist es vortheilhafter, die obige allgemeine Form beizubehalten.

4.

Wird der elastische Körper ausschliesslich den zwischen seinen Theilchen wirkenden Spannungen überlassen, so gelten für das Innere des Raumes $\mathfrak{R}$

die linearen partiellen Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial \Pi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_6}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_5}{\partial z} \\
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial \Pi_6}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_4}{\partial z} \\
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial \Pi_5}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_4}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_3}{\partial z},
\end{aligned}\right\} \qquad (d)$$

solange die ersten Derivirten von uvw nicht unstetig werden. Wo dieser Ausnahmefall eintritt, gelten andere Bedingungen welche wir nun entwickeln wollen.

Sei, immer auf den Raum $\mathfrak{R}$ reducirt, das Flächenelement $\Delta\Sigma$ des vorigen art. Element einer Unstetigkeitsfläche Σ, und mit Beibehaltung der dort gewählten Bezeichnungen, diejenige Seite von Σ, über welcher die Normale errichtet worden ist, die positive. Sodann sei T die Ebene, von welcher Σ in diesem Elemente berührt wird.

Mit Σ zugleich schreiten auch die Tangentialebenen von Σ im Raume fort. Ist Σ' eine spätere Lage von Σ, so kann man das Gesetz, nach welchem die einzelnen Tangentialebenen sich fortbewegen, so wählen, dass T nach diesem Gesetze in eine beliebige Tangentialebene T' von Σ' übergeht.

Wir wählen dieses Gesetz, wie in der vorigen Abhandlung, so, dass jede Tangentialebene T ihre Lage nur nach der Stetigkeit ändert und zu ihrer ursprünglichen Lage parallel bleibt. Die Bahn σ ihres Berührungspunktes heisst dann der zur festen Normalenrichtung $\alpha\beta\gamma$ gehörige Strahl, und die positive oder negative Geschwindigkeit, mit welcher T nach der nämlichen Richtung fortschreitet, wird durch

$$\omega$$

bezeichnet.

Ist ω positiv, so ist $\rho\omega\Delta t\Delta\Sigma$ die Masse m, welche $\Delta\Sigma$ im Raume $\mathfrak{R}$ während der Zeit Δt überstreicht. Diese Masse geht während der Zeit Δt aus den Geschwindigkeitscomponenten $\frac{\partial u^+}{\partial t}$, $\frac{\partial v^+}{\partial t}$, $\frac{\partial w^+}{\partial t}$ über in die Geschwindigkeitscomponenten $\frac{\partial u^-}{\partial t}$, $\frac{\partial v^-}{\partial t}$, $\frac{\partial w^-}{\partial t}$, was die Geschwindigkeitsvermehrungen

$$\frac{\partial u^-}{\partial t} - \frac{\partial u^+}{\partial t} = -\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right], \qquad \frac{\partial v^-}{\partial t} - \frac{\partial v^+}{\partial t} = -\left[\frac{\partial v}{\partial t}\right], \qquad \frac{\partial w^-}{\partial t} - \frac{\partial w^+}{\partial t} = -\left[\frac{\partial w}{\partial t}\right]$$

gibt. Sie erleidet also in der Zeit Δt einen Stoss, und die Componenten der Stoss kraft sind

$$-\rho\omega\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]\Delta\Sigma, \qquad -\rho\omega\left[\frac{\partial v}{\partial t}\right]\Delta\Sigma, \qquad -\rho\omega\left[\frac{\partial w}{\partial t}\right]\Delta\Sigma.$$

Diese Ausdrücke bleiben auch richtig, wenn $\Delta\Sigma$ in entgegengesetzter Richtung fortschreitet, also ω negativ ist, weil dann die Ausdrücke für die gestossene Masse und ihre Geschwindigkeitsänderungen mit entgegengesetztem Zeichen zu nehmen sind.

Diese Masse hat die Gestalt eines Cylinders, dessen Grundflächen zu $\Delta\Sigma$ parallel und $=\Delta\Sigma$ sind. Bedeuten $\overset{+}{X}\overset{+}{Y}\overset{+}{Z}$ die Werthe der im vorigen art. gegebenen Ausdrücke XYZ in derjenigen Grundfläche, welche während der Zeit Δt auf der positiven Seite von $\Delta\Sigma$ liegt, $\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ ihre Werthe in der andern, so wirken auf die Masse m, während sie von $\Delta\Sigma$ durchlaufen wird, (1) an den beiden Grundflächen die Componenten $\rho\overset{+}{X}\Delta\Sigma$, $\rho\overset{+}{Y}\Delta\Sigma$, $\rho\overset{+}{Z}\Delta\Sigma$ und $-\rho\bar{X}\Delta\Sigma$, $-\rho\bar{Y}\Delta\Sigma$, $-\rho\bar{Z}\Delta\Sigma$, (2) ausserdem nur noch Kräfte, welche einander bis auf unendlich kleine Differenzen aufheben. Also folgt z. B.

$$-\rho\omega\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]\Delta\Sigma = \rho\overset{+}{X}\Delta\Sigma - \rho\bar{X}\Delta\Sigma,$$

mithin

$$\omega\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] + \overset{+}{X} - \bar{X} = 0, \qquad \omega\left[\frac{\partial v}{\partial t}\right] + \overset{+}{Y} - \bar{Y} = 0, \qquad \omega\left[\frac{\partial w}{\partial t}\right] + \overset{+}{Z} - \bar{Z} = 0.$$

Nun sind X, Y, Z in $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \cdots$ linear und homogen; also ist $\overset{+}{X} - \bar{X}$ aus $\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right], \left[\frac{\partial u}{\partial y}\right], \cdots$ genau ebenso gebildet, wie X selbst aus $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \cdots$ zusammengesetzt ist. Setzen wir daher

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \theta'_1 \qquad \left[\frac{\partial v}{\partial y}\right] = \theta'_2 \qquad \left[\frac{\partial w}{\partial z}\right] = \theta'_3$$

$$\left[\frac{\partial v}{\partial z}\right] + \left[\frac{\partial w}{\partial y}\right] = \theta'_4 \qquad \left[\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \left[\frac{\partial u}{\partial z}\right] = \theta'_5 \qquad \left[\frac{\partial u}{\partial y}\right] + \left[\frac{\partial v}{\partial x}\right] = \theta'_6,$$

und

$$\Pi' = \Sigma\alpha_{\mu\nu}\theta'_\mu\theta'_\nu, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial \Pi'}{\partial\theta'_\mu} = \Pi'_\mu,$$

so wird

$$\overset{+}{X} - \overset{-}{X} = \Pi'_1 \cos\alpha + \Pi'_6 \cos\beta + \Pi'_5 \cos\gamma,$$

u. s. w., also haben wir für den Stoss, den die von Σ überschrittenen Theilchen erleiden, die mechanischen Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned} \omega\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] + \Pi'_1 \cos\alpha + \Pi'_6 \cos\beta + \Pi'_5 \cos\gamma = 0 \\ \omega\left[\frac{\partial v}{\partial t}\right] + \Pi'_6 \cos\alpha + \Pi'_2 \cos\beta + \Pi'_4 \cos\gamma = 0 \\ \omega\left[\frac{\partial w}{\partial t}\right] + \Pi'_5 \cos\alpha + \Pi'_4 \cos\beta + \Pi'_3 \cos\gamma = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (\delta)$$

während längs Σ wegen der Continuität der Masse

$$\overset{+}{u} - \overset{-}{u} = 0, \qquad \overset{+}{v} - \overset{-}{v} = 0, \qquad \overset{+}{w} - \overset{-}{w} = 0 \qquad (\varepsilon)$$

bleiben muss.

Dies ist, für das Innere eines elastischen Körpers, das vollständige System aller aus mechanischen Gründen zu schöpfenden Bedingungen, wenn der Fall wo dieser Körper sich spaltet, ausgeschlossen bleibt.

II. Die Fortpflanzung der Unstetigkeiten im Innern eines elastischen Körpers.

5.

Wir bezeichnen auch in dieser Abhandlung die Coordinaten eines Punktes durch $\xi\eta\zeta$ oder durch xyz, jenachdem er der Unstetigkeitsfläche Σ angehört oder im Innern des Raumes $\mathfrak{R}$ nach Belieben angenommen werden kann. Dann hat t für alle Punkte einer Unstetigkeitsfläche denselben Werth, und ist durch die Fortpflanzung dieser Fläche so als Function von $\xi\eta\zeta$ bestimmt, dass

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} = \frac{\cos\alpha}{\omega}, \qquad \frac{\partial t}{\partial \eta} = \frac{\cos\beta}{\omega}, \qquad \frac{\partial t}{\partial \zeta} = \frac{\cos\gamma}{\omega} \qquad (1)$$

ist. In der That ist (vergl. meine vorige Abh. art. 5) das vollständige Differential von t proportional zu $\cos\alpha\,\partial\xi + \cos\beta\,\partial\eta + \cos\gamma\,\partial\zeta$; nimmt man, zur Bestimmung des Proportionalitätsfactors, für $\partial\xi$, $\partial\eta$, $\partial\zeta$ die Componenten des

Weges $\omega \partial t$, welcher in der Zeit ∂t in der Richtung der positiven Normale zurückgelegt wird, so ergibt sich $\cos\alpha\,\partial\xi + \cos\beta\,\partial\eta + \cos\gamma\,\partial\zeta = \omega\,\partial t$, also gilt diese Gleichung allgemein. Setzen wir nun

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = U, \qquad \left[\frac{\partial v}{\partial t}\right] = V, \qquad \left[\frac{\partial w}{\partial t}\right] = W, \tag{2}$$

so ergeben sich aus (ε) die Relationen

$$\left.\begin{array}{lll}
\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] + U\frac{\partial t}{\partial \xi} = 0 & \left[\frac{\partial u}{\partial y}\right] + U\frac{\partial t}{\partial \eta} = 0 & \left[\frac{\partial u}{\partial z}\right] + U\frac{\partial t}{\partial \zeta} = 0 \\
\left[\frac{\partial v}{\partial x}\right] + V\frac{\partial t}{\partial \xi} = 0 & \left[\frac{\partial v}{\partial y}\right] + V\frac{\partial t}{\partial \eta} = 0 & \left[\frac{\partial v}{\partial z}\right] + V\frac{\partial t}{\partial \zeta} = 0 \\
\left[\frac{\partial w}{\partial x}\right] + W\frac{\partial t}{\partial \xi} = 0 & \left[\frac{\partial w}{\partial y}\right] + W\frac{\partial t}{\partial \eta} = 0 & \left[\frac{\partial w}{\partial z}\right] + W\frac{\partial t}{\partial \zeta} = 0
\end{array}\right\} \tag{3}$$

als die Bedingungen für die mit der Stetigkeit von *uvw* verträglichen Unstetigkeiten ihrer ersten Derivirten.

Diese Werthe müssen nun in (δ) eingeführt werden. Benutzt man die Relationen (1) und (2), so folgt zunächst:

$$\left.\begin{array}{l}
U + \Pi'_1\frac{\partial t}{\partial \xi} + \Pi'_6\frac{\partial t}{\partial \eta} + \Pi'_5\frac{\partial t}{\partial \zeta} = 0 \\
V + \Pi'_6\frac{\partial t}{\partial \xi} + \Pi'_2\frac{\partial t}{\partial \eta} + \Pi'_4\frac{\partial t}{\partial \zeta} = 0 \\
W + \Pi'_5\frac{\partial t}{\partial \xi} + \Pi'_4\frac{\partial t}{\partial \eta} + \Pi'_3\frac{\partial t}{\partial \zeta} = 0.
\end{array}\right\} \tag{δ_1}$$

Nun folgt aus (3)

$$\left.\begin{array}{lll}
\theta'_1 = -U\frac{\partial t}{\partial \xi} & \theta'_2 = -V\frac{\partial t}{\partial \eta} & \theta'_3 = -W\frac{\partial t}{\partial \zeta} \\
\theta'_4 = -\left(V\frac{\partial t}{\partial \zeta} + W\frac{\partial t}{\partial \eta}\right) & \theta'_5 = -\left(W\frac{\partial t}{\partial \xi} + U\frac{\partial t}{\partial \zeta}\right) & \theta'_6 = -\left(U\frac{\partial t}{\partial \eta} + V\frac{\partial t}{\partial \xi}\right);
\end{array}\right\} \tag{4}$$

bedeutet daher

$$P$$

den Ausdruck, in welchen Π' durch diese Substitution übergeht, so ist P quadratische Form von UVW und, weil U nur in θ'_1, θ'_6, θ'_5 vorkommt,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial U} = -\Pi'_1\frac{\partial t}{\partial \xi} - \Pi'_6\frac{\partial t}{\partial \eta} - \Pi'_5\frac{\partial t}{\partial \zeta};$$

ähnlich verhält es sich mit den Ausdrücken für die Derivirten von P nach V und W. Die Gleichungen (∂_1) geben also

$$U = \frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial U}, \qquad V = \frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial V}, \qquad W = \frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial W}, \tag{5}$$

und es handelt sich zunächst um den Ausdruck und die Eigenschaften von P.

6.

Die folgenden Rechnungen sind ohne Anwendung symbolischer Formen schwer durchführbar. Sei

$$\Theta = a_1\theta_1 + a_2\theta_2 + a_3\theta_3 + a_4\theta_4 + a_5\theta_5 + a_6\theta_6,$$

so ist Θ^2 die symbolische Form für Π. Setzt man nun

$$\begin{aligned}
a_1\frac{\partial t}{\partial \xi} + a_6\frac{\partial t}{\partial \eta} + a_5\frac{\partial t}{\partial \zeta} &= \Lambda_1 \qquad & a_1U + a_6V + a_5W &= M_1\\
a_6\frac{\partial t}{\partial \xi} + a_2\frac{\partial t}{\partial \eta} + a_4\frac{\partial t}{\partial \zeta} &= \Lambda_2 \qquad & a_6U + a_2V + a_4W &= M_2\\
a_5\frac{\partial t}{\partial \xi} + a_4\frac{\partial t}{\partial \eta} + a_3\frac{\partial t}{\partial \zeta} &= \Lambda_3 \qquad & a_5U + a_4V + a_3W &= M_3
\end{aligned}$$

und

$$Q = \Lambda_1U + \Lambda_2V + \Lambda_3W = M_1\frac{\partial t}{\partial \xi} + M_2\frac{\partial t}{\partial \eta} + M_3\frac{\partial t}{\partial \zeta},$$

so wird vermöge der Gleichungen (4)

$$\Sigma a_\mu \theta'_\mu = -Q,$$

also ist symbolisch

$$P = Q^2$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial U} = \Lambda_1 Q, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial V} = \Lambda_2 Q, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial W} = \Lambda_3 Q.$$

Hierzu bilden wir die Effectivwerthe

$$\Lambda_\mu \Lambda_\nu = \Lambda_{\mu\nu} = \Lambda_{\nu\mu},$$

so dass ausgerechnet

$$P = \Lambda_{11}U^2 + \Lambda_{22}V^2 + \Lambda_{33}W^2 + 2\Lambda_{23}VW + 2\Lambda_{31}WU + 2\Lambda_{12}UV$$

wird; die Ausdrücke dieser Coefficienten ergeben sich aus folgender Tabelle:

	$\left(\frac{\partial t}{\partial \xi}\right)^2$	$\left(\frac{\partial t}{\partial \eta}\right)^2$	$\left(\frac{\partial t}{\partial \zeta}\right)^2$	$\frac{\partial t}{\partial \eta}\frac{\partial t}{\partial \zeta}$	$\frac{\partial t}{\partial \zeta}\frac{\partial t}{\partial \xi}$	$\frac{\partial t}{\partial \xi}\frac{\partial t}{\partial \eta}$
Λ_{11}	a_{11}	a_{66}	a_{55}	$2a_{65}$	$2a_{51}$	$2a_{16}$
Λ_{22}	a_{66}	a_{22}	a_{44}	$2a_{24}$	$2a_{46}$	$2a_{62}$
Λ_{33}	a_{55}	a_{44}	a_{33}	$2a_{43}$	$2a_{35}$	$2a_{54}$
Λ_{23}	a_{65}	a_{24}	a_{43}	$a_{23}+a_{44}$	$a_{45}+a_{63}$	$a_{64}+a_{25}$
Λ_{31}	a_{51}	a_{46}	a_{35}	$a_{45}+a_{63}$	$a_{31}+a_{55}$	$a_{56}+a_{41}$
Λ_{12}	a_{16}	a_{62}	a_{54}	$a_{64}+a_{25}$	$a_{56}+a_{41}$	$a_{12}+a_{66}$

Dies sind die Formeln, deren wir für die Behandlung der Gleichungen (5) bedürfen. Was die Eigenschaften von P als quadratische Form betrifft, so erinnere man sich, dass Π' eine vollständige und stets positive quadratische Form von $\theta'_1, \theta'_2, \ldots \theta'_6$ ist. Solange die in (4) stehenden Werthe dieser Argumente reell sind, ist also P stets positiv, und nur in dem Falle $=0$, wo alle Argumente zugleich verschwinden. Da aber z. B. $\theta'^2_4 - 4\theta'_2\theta'_3 = \left(V\frac{\partial t}{\partial \zeta} - W\frac{\partial t}{\partial \eta}\right)^2$ ist, so können die sechs Argumente von P nur dann gleichzeitig verschwinden, wenn

$$\begin{array}{lll} U\frac{\partial t}{\partial \xi}=0 & U\frac{\partial t}{\partial \eta}=0 & U\frac{\partial t}{\partial \zeta}=0 \\ V\frac{\partial t}{\partial \xi}=0 & V\frac{\partial t}{\partial \eta}=0 & V\frac{\partial t}{\partial \zeta}=0 \\ W\frac{\partial t}{\partial \xi}=0 & W\frac{\partial t}{\partial \eta}=0 & W\frac{\partial t}{\partial \zeta}=0, \end{array}$$

d. h. wenn gleichzeitig $U=0$, $V=0$, $W=0$ wird, da wegen der Gleichung

$$\left(\frac{\partial t}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial \zeta}\right)^2 = \frac{1}{\omega^2}$$

die ersten Derivirten von t nicht zugleich verschwinden können.

Also folgt, dass P positiv und von Null verschieden bleibt, solange U, V, W nicht zugleich verschwinden, d. h. P ist eine vollständige und stets positive quadratische Form von UVW.

7.

Die Gleichungen (5) gehen nunmehr über in

$$\left.\begin{array}{l} \Lambda_{11}U+\Lambda_{12}V+\Lambda_{13}W=U \\ \Lambda_{21}U+\Lambda_{22}V+\Lambda_{23}W=V \\ \Lambda_{31}U+\Lambda_{32}V+\Lambda_{33}W=W. \end{array}\right\} \qquad \text{(I)}$$

Ist

$$\Delta\left(\frac{\partial t}{\partial \xi}, \frac{\partial t}{\partial \eta}, \frac{\partial t}{\partial \zeta}\right)=\begin{vmatrix} \Lambda_{11}-1 & \Lambda_{12} & \Lambda_{13} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22}-1 & \Lambda_{23} \\ \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & \Lambda_{33}-1 \end{vmatrix}$$

die Determinante dieser Gleichungen, und werden die Unterdeterminanten in üblicher Weise durch $\Delta_{\mu\nu}$ bezeichnet, so folgt, wenn der Fall wo gar keine Unstetigkeiten stattfinden ausgeschlossen bleibt,

$$\Delta\left(\frac{\partial t}{\partial \xi}, \frac{\partial t}{\partial \eta}, \frac{\partial t}{\partial \zeta}\right)=0 \qquad \text{(II)}$$

als Differentialgleichung der Unstetigkeitsflächen und, abgesehen von den besondern Fällen, wo mit Δ zugleich alle Unterdeterminanten verschwinden

$$\frac{U^2}{\Delta_{11}}=\frac{V^2}{\Delta_{22}}=\frac{W^2}{\Delta_{33}}=\frac{VW}{\Delta_{23}}=\frac{WU}{\Delta_{31}}=\frac{UV}{\Delta_{12}}=\frac{P}{\Delta'}, \qquad \text{(III)}$$

wenn

$$\Delta'=\Delta_{11}+\Delta_{22}+\Delta_{33}$$

gesetzt wird. In der That sind die Glieder dieser continuirlichen Gleichung $=(U^2+V^2+W^2):(\Delta_{11}+\Delta_{22}+\Delta_{33})$, und aus (I) ergibt sich

$$P=U^2+V^2+W^2.$$

Abgesehen von den Grenzfällen, wo in (III) alle Nenner verschwinden, sind also UVW durch P allein ausgedrückt, während es zur Bestimmung von P neuer Bedingungsgleichungen bedarf. Die weitere Untersuchung mit Einschluss der in Rede stehenden Grenzfälle hängt von der Integration der Gleichung (II) ab, zu welcher wir nun übergehen.

III. Die Unstetigkeitsfläche Σ und das zugehörige Strahlensystem.

8.

Zur Integration der Gleichung

$$\Delta\left(\frac{\partial t}{\partial \xi}, \frac{\partial t}{\partial \eta}, \frac{\partial t}{\partial \zeta}\right)=0 \tag{II}$$

führen wir wieder die Werthe

$$\frac{\partial t}{\partial \xi}=\frac{\cos\alpha}{\omega}, \qquad \frac{\partial t}{\partial \eta}=\frac{\cos\beta}{\omega}, \qquad \frac{\partial t}{\partial \zeta}=\frac{\cos\gamma}{\omega} \tag{1}$$

ein, wodurch sie in

$$\Delta\left(\frac{\cos\alpha}{\omega}, \frac{\cos\beta}{\omega}, \frac{\cos\gamma}{\omega}\right)=0 \tag{II a}$$

übergeht. In dieser Form lehrt sie, dass die Gleichung (II) weiter nichts enthält als die Vorschrift, mit welcher Geschwindigkeit ω eine jede Tangentialebene T von Σ nach der zu ihr senkrechten Richtung $\alpha\beta\gamma$ der positiven Normale fortschreiten soll.

Es ist demnach klar, dass die Fläche Σ in ihren spätern Lagen nur dann bestimmt sein kann, wenn eine Anfangslage derselben feststeht, und dass diese letztere willkürlich angenommen werden kann, soweit ihrer Normalenrichtung durch die Gleichung (II a) ein reelles ω zugeordnet wird. Sei Σ_0 die der Zeit $t=0$ entsprechende Anfangslage von Σ.

Um die spätern Lagen von Σ zu ermitteln, hat man nur nöthig, zu jedem Punkte $m_0(\xi_0\eta_0\zeta_0)$ von Σ_0 die Lage $m(\xi\eta\zeta)$ desjenigen Punktes von Σ zu bestimmen, in welchem die Tangentialebene T parallel ist zur Tangentialebene T_0 von Σ_0 in m_0. Sei $X\cos\alpha+\cdots=p$ die Gleichung von T, also p das, nach der positiven Normalenrichtung $\alpha\beta\gamma$ hin wachsende Loth aus dem Ursprunge auf T, mithin $\frac{\partial p}{\partial t}=\omega$. Da ω von t unabhängig und (art. 4) p stetige Function von t ist, so folgt $p-p_0=\omega t$, wenn p_0 den Werth von p in T_0 bedeutet. Ausserdem folgt für $t=0$, weil T_0 durch m_0 geht, $p_0=\xi_0\cos\alpha+\cdots$, also erhalten wir als Gleichung von T:

$$(X-\xi_0)\cos\alpha+(Y-\eta_0)\cos\beta+(Z-\zeta_0)\cos\gamma=\omega t. \tag{T}$$

Um die Coordinaten $\xi\eta\zeta$ des Berührungspunctes m zu finden, müssen wir $\cos\alpha$,

$\cos\beta$, $\cos\gamma$ variiren, während t und ebenso $X=\xi$, $Y=\eta$, $Z=\zeta$ ungëandert bleiben. Dann folgt

$$(\xi-\xi_0)\cos\alpha+(\eta-\eta_0)\cos\beta+(\zeta-\zeta_0)\cos\gamma=\omega t \tag{a}$$

ferner

$$(\xi-\xi_0)\delta\cos\alpha+(\eta-\eta_0)\delta\cos\beta+(\zeta-\zeta_0)\delta\cos\gamma$$
$$-(\cos\alpha\,\delta\xi_0+\cos\beta\,\delta\eta_0\,\cos\gamma\,\delta\zeta_0)=t\,\delta\omega,$$

oder weil

$$\cos\alpha\,\delta\xi_0+\cos\beta\,\delta\eta_0+\cos\gamma\,\delta\zeta=0 \tag{b}$$

ist,

$$(\xi-\xi_0)\delta\cos\alpha+(\eta-\eta_0)\delta\cos\beta+(\zeta-\zeta_0)\delta\cos\gamma=t\,\delta\omega. \tag{c}$$

Um für $\delta\omega$ einen passenden Ausdruck zu gewinnen, setze ich folgendes fest. Sind p, q, r unabhängige Variabeln, so bestimmt die Gleichung

$$\Delta\left(\frac{p}{\Omega},\ \frac{q}{\Omega},\ \frac{r}{\Omega}\right)=0$$

Ω als homogene Function ersten Grades von p, q, r; im Folgenden soll unter

$$\omega,\qquad \frac{\partial\omega}{\partial\cos\alpha},\qquad \frac{\partial\omega}{\partial\cos\beta},\qquad \frac{\partial\omega}{\partial\cos\gamma}$$

das verstanden werden, was aus

$$\Omega,\qquad \frac{\partial\Omega}{\partial p},\qquad \frac{\partial\Omega}{\partial q},\qquad \frac{\partial\Omega}{\partial r}$$

wird, wenn man $p=\cos\alpha$, $q=\cos\beta$, $r=\cos\gamma$ setzt. Es soll mit andern Worten ω als homogene Function ersten Grades von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ aufgefasst werden; dann steht die Bedeutung seiner Derivirten nach diesen Grössen vollkommen fest, und es wird

$$\frac{\partial\omega}{\partial\cos\alpha}\cdot\cos\alpha+\frac{\partial\omega}{\partial\cos\beta}\cdot\cos\beta+\frac{\partial\omega}{\partial\cos\gamma}\cdot\cos\gamma=\omega, \tag{d}$$

während die Gleichung (c) in

$$\left(\xi-\xi_0-t\frac{\partial\omega}{\partial\cos\alpha}\right)\delta\cos\alpha+\left(\eta-\eta_0-t\frac{\partial\omega}{\partial\cos\beta}\right)\delta\cos\beta+\left(\zeta-\zeta_0-t\frac{\partial\omega}{\partial\cos\gamma}\right)\delta\cos\gamma=0$$

übergeht. Dies gilt für alle Werthe der Variationen, welche $\cos\alpha\,\delta\cos\alpha+\cos\beta\,\delta\cos\beta+\cos\gamma\,\delta\cos\gamma=0$ geben, also folgt

$$\xi-\xi_0-t\frac{\partial\omega}{\partial\cos\alpha}=h\cos\alpha,\qquad \eta-\eta_0-t\frac{\partial\omega}{\partial\cos\beta}=h\cos\beta,\qquad \zeta-\zeta_0-t\frac{\partial\omega}{\partial\cos\gamma}=h\cos\gamma.$$

Führt man diese Werthe in (a) ein, und berücksichtigt die Relation (d), so folgt $h=0$, also sind

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \xi_0 + t\frac{\partial\omega}{\partial\cos\alpha} \\ \eta &= \eta_0 + t\frac{\partial\omega}{\partial\cos\beta} \\ \zeta &= \zeta_0 + t\frac{\partial\omega}{\partial\cos\gamma} \end{aligned}\right\} \qquad (m)$$

die Coordinaten desjenigen Punktes m, in welchem Σ von T berührt wird.

Es ist nur noch zu verificiren, dass dies bei jeder Annahme über Σ_0 die Lösung der vorgelegten Differentialgleichung (II) ist.

9.

Denkt man sich zu den Gleichungen (m) noch die Gleichung von Σ_0 (zwischen $\xi_0\eta_0\zeta_0$) gefügt, und die aus ihr folgenden Werthe von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ in (m) eingesetzt, so hat man vier Gleichungen zwischen $t\xi\eta\zeta$ einer-und $\xi_0\eta_0\zeta_0$ andererseits. Für $t=0$ sind die Gleichungen (m) voneinander unabhängig in Bezug auf $\xi_0\eta_0\zeta_0$; sie können daher in Bezug auf diese Variabeln nicht für ein unbestimmtes t voneinander abhängig sein. Die in Rede stehenden vier Gleichungen gestatten also die Elimination von $\xi_0\eta_0\zeta_0$ und liefern dann eine Relation zwischen $t\xi\eta\zeta$, welche für $t=0$ in die Gleichung von Σ_0 übergeht, und von welcher zu verificiren ist, dass sie der partiellen Differentialgleichung (II) genügt.

Genauer gesprochen ist durch die Annahme einer bestimmten Fläche Σ_0 und ihre Beziehung zu den Formeln (m) in diesen letztern eine Abhängigkeit zwischen $t\xi\eta\zeta$ allein festgelegt, vermöge deren t Function von $\xi\eta\zeta$ wird, und es ist zu verificiren, dass diese Function der Differentialgleichung (II) genügt, wie auch immer Σ_0 angenommen werden mag.

Entnimmt man aber den Gleichungen (m) die Differentiale von $\xi\eta\zeta$, so wird, mit Berücksichtigung von (b) und (d)

$$\cos\alpha\,\partial\xi + \cos\beta\,\partial\eta + \cos\gamma\,\partial\zeta = \omega\,\partial t + t\cdot\varepsilon,$$

wo

$$\varepsilon = \cos\alpha\,\partial\left(\frac{\partial\omega}{\partial\cos\alpha}\right) + \cos\beta\,\partial\left(\frac{\partial\omega}{\partial\cos\beta}\right) + \cos\gamma\,\partial\left(\frac{\partial\omega}{\partial\cos\gamma}\right)$$

ist. Dies gibt

$$\varepsilon=\partial\left(\cos\alpha\frac{\partial\omega}{\partial\cos\alpha}+\cos\beta\frac{\partial\omega}{\partial\cos\beta}+\cos\gamma\frac{\partial\omega}{\partial\cos\gamma}\right)-\left(\frac{\partial\omega}{\partial\cos\alpha}\partial\cos\alpha+\frac{\partial\omega}{\partial\cos\beta}\partial\cos\beta+\frac{\partial\omega}{\partial\cos\gamma}\partial\cos\gamma\right),$$

also

$$\varepsilon=0$$

da Minuend und Subtrahend $=\partial\omega$ ist.

Das vollständige Differential von t ist also

$$\partial t=\frac{\cos\alpha}{\omega}\partial\xi+\frac{\cos\beta}{\omega}\partial\eta+\frac{\cos\gamma}{\omega}\partial\zeta,$$

mithin

$$\frac{\partial t}{\partial\xi}=\frac{\cos\alpha}{\omega},\qquad\frac{\partial t}{\partial\eta}=\frac{\cos\beta}{\omega},\qquad\frac{\partial t}{\partial\zeta}=\frac{\cos\gamma}{\omega}.$$

Wenn daher, wie wir voraussetzen, ω als homogene Function ersten Grades von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ der Gleichung

$$\Delta\left(\frac{\cos\alpha}{\omega},\ \frac{\cos\beta}{\omega},\ \frac{\cos\gamma}{\omega}\right)=0 \tag{II a}$$

gemäss angenommen wird, so folgt, dass in der That die Derivirten von t der Gleichung

$$\Delta\left(\frac{\partial t}{\partial\xi},\ \frac{\partial t}{\partial\eta},\ \frac{\partial t}{\partial\zeta}\right)=0 \tag{II}$$

genügen, w. z. v. w.

Die Gleichungen (m) liefern also, wie auch immer Σ_0 angenommen werden mag, die Fläche Σ so, dass ihre Fortpflanzung und Umgestaltung der Differentialgleichung (II) gemäss von Statten geht, und Σ_0 ihre Anfangslage ist.

10.

Wir betrachten nun die Bahn des Punktes m oder den zur festen Normalenrichtung $\alpha\beta\gamma$ gehörigen Strahl σ (art. 4). Seine Gleichungen ergeben sich aus (m), wenn man $\xi_0\eta_0\zeta_0$ und $\alpha\beta\gamma$ ungeändert, aber t variiren lässt.

Die Gleichungen (m) zeigen, dass jeder Strahl σ geradlinigt ist, und vom Punkte m mit den constanten Geschwindigkeitscomponenten

$$\Xi=\frac{\partial\omega}{\partial\cos\alpha},\qquad H=\frac{\partial\omega}{\partial\cos\beta},\qquad Z=\frac{\partial\omega}{\partial\cos\gamma} \tag{Δ}$$

durchlaufen wird.

Diese Formeln, oder die Gleichungen (m) selbst, bestimmen also zu jedem Punkte m_0 der Fläche Σ_0 einen von ihm ausgehenden Strahl σ nebst den Geschwindigkeiten, mit welchen m denselben durchlaufen soll.

Auf diese Weise entsteht ein Strahlensystem ($\sigma\sigma$), in welchem die Fläche Σ so fortschreitet, dass die Ebene T, von welcher sie im Schnittpunkte m mit ein und demselben Strahl σ berührt wird, zu ihrer Anfangslage T_0 fortwährend parallel bleibt.

Ist also $\Delta\Sigma_0$ ein Element von Σ_0, so geht von dort ein unendlich dünnes Strahlenbündel aus, und wenn dasselbe auf Σ das Element $\Delta\Sigma$ bestimmt, so durchläuft $\Delta\Sigma$ dieses Strahlenbündel mit den Geschwindigkeitscomponenten $\Xi H Z$, indem es dabei fortwährend zu $\Delta\Sigma_0$ parallel bleibt. Ich nenne $\Delta\Sigma$ den Querschnitt des unendlich dünnen Strahlenbündels; derselbe wird nur ausnahmsweise von den Strahlen dieses Bündels senkrecht geschnitten.

11.

Ein einzelner Strahl σ des Systems ($\sigma\sigma$) hängt nicht von der Gestalt der ganzen Fläche Σ_0 ab, sondern nur von der Lage seines Ausgangspunktes m_0 und der Normalenrichtung $\alpha\beta\gamma$ in demselben.

Zwei verschiedene Flächen Σ_0 geben also, wofern nicht eine von ihnen Anfangslage der andern ist, zu verschiedenen Strahlensystemen ($\sigma\sigma$) Veranlassung, aber in allen ist die Zuordnung der Strahlen zur Normalenrichtung dieselbe.

Um für diese Art der Zuordnung die einfachste Darstellung zu gewinnen, nehmen wir für Σ_0 einen einzigen Punkt m_0, indem wir denselben etwa als Grenzfall einer Kugelfläche von abnehmendem Halbmesser auffassen.

Dann bestimmen die Gleichungen

$$\xi - \xi_0 = t\frac{\partial\omega}{\partial\cos\alpha}, \qquad \eta - \eta_0 = t\frac{\partial\omega}{\partial\cos\beta}, \qquad \zeta - \zeta_0 = t\frac{\partial\omega}{\partial\cos\gamma}, \qquad (m)$$

wenn t constant bleibt, und die Normalenrichtung variirt, eine Fläche C_t, welche wir als die zum Punkte m_0 gehörige Centralfläche bezeichnen, während m_0 ihr Centralpunkt heissen soll.

Ist m_0 derselbe Punkt wie im vorigen art., so sind $\xi\eta\zeta$ die Coordinaten von m; also hat Σ mit C_t den Punkt m gemein. Auch führt in beiden Fällen derselbe Strahl σ von m_0 nach m. Ergänzen wir ihn in beiden Fällen zu unendlich dünnen Strahlenbündeln, so werden beide von parallelen, nämlich zu derselben Richtung $\alpha\beta\gamma$ senkrechten Querschnitten und mit den nämlichen Geschwindigkeiten $\Xi H Z$ durchlaufen; so weit beide Strahlenbündel einander durchdringen, decken beide Querschnitte einander. Dies findet also stets im gemeinsamen Schnittpunkte mit σ statt. Ist dieser Punkt in m angelangt, so sind die beiden Querschnitte Elemente von Σ und C_t, also folgt, dass Σ von C_t in m berührt wird.

Legt man also um jeden Punkt m_0 von Σ_0 als Centralpunkt die Centralfläche C_t, so ist Σ die Einhüllende aller dieser Centralflächen, und zwar derjenige Theil der vollständigen Einhüllenden, in welchem die von Σ_0 ausgehenden Strahlen münden.

12.

Diejenige Centralfläche, welche dem speciellen Werthe $t=1$ entspricht, bezeichnen wir als die Wellenfläche Δ. Die Gleichungen (m) zeigen, dass man aus der Wellenfläche Δ die Centralfläche C_t erhält, wenn alle vom Centralpunkte ausgehenden Leitstrahlen im Verhältnisse von 1 zu t vergrössert werden.

Für die in Rede stehende Zuordnung der Strahlen und der Normalenrichtung reicht es aus, die Wellenfläche zu betrachten und ihren Centralpunkt in den Coordinatenursprung zu verlegen. Dann erhält man für die Wellenfläche die Gleichungen

$$\Xi = \frac{\partial \omega}{\partial \cos\alpha}, \qquad H = \frac{\partial \omega}{\partial \cos\beta}, \qquad Z = \frac{\partial \omega}{\partial \cos\gamma}, \tag{Δ}$$

und nach art. 8 (T) (wo $\xi_0 = \eta_0 = \zeta_0 = 0$ und $t=1$ zu nehmen ist) lautet die Gleichung ihrer Tangentialebene T in dem hierdurch bestimmten Punkte $\Xi H Z$:

$$X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma = \omega. \tag{T}$$

Legt man also an die Wellenfläche Δ eine Tangentialebene T so, dass ihre Normale mit den Axen die Winkel $\alpha\beta\gamma$ bildet, so ist das Loth aus dem Centralpunkte auf T die Geschwindigkeit ω, mit welcher die parallele Tangentialebene der Unstetigkeitsfläche Σ fortschreitet; der Leitstrahl aus dem Centralpunkte nach dem Berührungspunkte $\Xi H Z$ bestimmt die Richtung des zugehörigen Strahls und zugleich die Geschwindigkeitscomponenten $\Xi H Z$, mit welchen derselbe durchlaufen wird.

Die ganze Untersuchung der Differentialgleichung

$$\Delta\left(\frac{\partial t}{\partial \xi}, \frac{\partial t}{\partial \eta}, \frac{\partial t}{\partial \zeta}\right)=0 \tag{II}$$

concentrirt sich also in der Theorie der Wellenfläche Δ.

Die Gleichung dieser Fläche in Punktcoordinaten $\Xi H Z$ würde sich durch Elimination von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ aus den Gleichungen (Δ) ergeben; in geeigneten Plancoordinaten kann man sie ohne Weiteres hinschreiben.

Als Coordinaten einer Ebene führen wir ihre reciproken Axensegmente ein, die wir durch p, q, r bezeichnen. Die Coordinaten von T sind also

$$p=\frac{\cos\alpha}{\omega}, \qquad q=\frac{\cos\beta}{\omega}, \qquad r=\frac{\cos\gamma}{\omega},$$

also folgt, dass

$$\Delta(p, q, r)=0 \tag{II b}$$

die Gleichung der Wellenfläche in diesen Plancoordinaten ist.

Alles dies gilt für jede Differentialgleichung von der Form (II), und lässt sich auch umkehren. Ist nämlich die Wellenfläche Δ vorgeschrieben, und gelingt es, ihre Gleichung in den Plancoordinaten p, q, r auszuführen, so hat man ohne Weiteres auch die partielle Differentialgleichung (II) derjenigen Klasse von Unstetigkeitsflächen und zugehörigen Strahlensystemen, welche zu dieser nämlichen Wellenfläche gehört.

13.

Es handelt sich nun darum, diese allgemeinen Resultate für den besondern Fall weiter auszuführen, wo

$$\Delta\left(\frac{\partial t}{\partial \xi}, \frac{\partial t}{\partial \eta}, \frac{\partial t}{\partial \zeta}\right)=\begin{vmatrix} \Lambda_{11}-1 & \Lambda_{12} & \Lambda_{13} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22}-1 & \Lambda_{23} \\ \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & \Lambda_{33}-1 \end{vmatrix}$$

ist, und die Ausdrücke $\Lambda_{\mu\nu}$ die im art. 6 angegebene Bedeutung haben. Durch die Substitution

$$\frac{\partial t}{\partial \xi}=\frac{\cos\alpha}{\omega}, \qquad \frac{\partial t}{\partial \eta}=\frac{\cos\beta}{\omega}, \qquad \frac{\partial t}{\partial \zeta}=\frac{\cos\gamma}{\omega} \tag{1}$$

werde

$$\mathrm{A}_{\mu\nu} = \frac{A_{\mu\nu}}{\omega^2}.$$

Ist alsdann

$$A_1 = a_1 \cos\alpha + a_6 \cos\beta + a_5 \cos\gamma$$
$$A_2 = a_6 \cos\alpha + a_2 \cos\beta + a_4 \cos\gamma$$
$$A_3 = a_5 \cos\alpha + a_4 \cos\beta + a_3 \cos\gamma,$$

so hat man in symbolischer Form

$$A_{\mu\nu} = A_\mu A_\nu.$$

Wir setzen nun

$$\begin{vmatrix} A_{11} - x & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} - x & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} - x \end{vmatrix} = D(x),$$

und bezeichnen die Unterdeterminanten durch $D_{\mu\nu}$. Dann haben wir für ω die Gleichung sechsten Grades $D(\omega^2) = 0$, um deren Wurzeln es sich vor allen Dingen handelt. In dieser Beziehung finden folgende beiden Sätze statt:

1. Die Wurzeln der Gleichung $D(x) = 0$ sind alle positiv und von Null verschieden.

2. Ist $x = a$ mehrfache Wurzel dieser Gleichung und $(x - a)^\alpha$ die höchste Potenz von $x - a$, durch welche $D(x)$ ohne Rest theilbar ist, so sind alle Unterdeterminanten $D_{\mu\nu}$ durch $(x - a)^{\alpha - 1}$, aber nicht alle durch $(x - a)^\alpha$ theilbar.

Beide Sätze sind besondere. Fälle von sehr allgemeinen Theoremen, von denen das zweite von Herrn Weierstrass (Monatsberichte der Berliner Akademie vom 4 März 1858), das erste, von allen überflüssigen Bedingungen befreit, von mir herrührt (Borchardt's Journal 63, pag. 257 und 264). In Bezug auf beide Theoreme ist auch eine Abhandlung des Herrn Somof zu erwähnen (Mém. de l'Ac. de St. Pétersbourg vom Iahre 1859) welche mir selbst zu meinem Bedauern erst in der letzten Zeit zugänglich geworden ist, und deren sehr interessante Schlussweise sich leicht zu einer grössern Vollendung bringen lässt.

Den Beweis des ersten Satzes muss ich vollständig nach meiner so eben erwähnten Arbeit reproduciren, indem dort nur die Realität von ω^2 bewiesen ist. Dieser Beweis gründet sich darauf dass (art. 6 zu Ende) P eine vollständige und stets positive quadratische Form von UVW ist; dasselbe gilt also auch von

$$\eta = A_{11} U^2 + A_{22} V^2 + A_{33} W^2 + 2 A_{23} V W + 2 A_{31} W U + 2 A_{12} U V.$$

Nun ist $D(x) = 0$ die nothwendige und ausreichende Bedingung dafür, dass man den drei in UVW linearen Gleichungen

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \eta}{\partial U} = xU, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial \eta}{\partial V} = xV, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial \eta}{\partial W} = xW$$

genügen kann, ohne U, V, W alle $=0$ zu setzen. Sei also x Wurzel dieser Gleichung und, indem man nöthigenfalls das Reelle vom Imaginären trennt, seien $U = U_1 + i U_2$, $V = V_1 + i V_2$, $W = W_1 + i W_3$ die entsprechenden Werthe von UVW; die sechs Grössen U_1, $U_2, \ldots W_2$ sind also nicht alle $=0$. Sind nun η_1, η_2 die Werthe in welche η übergeht, wenn UVW den Index 1 oder 2 erhalten, und ist

$$U_1^2 + U_2^2 + V_1^2 + V_2^2 + W_1^2 + W_2^2 = p,$$

so erhält man aus den vorstehenden Gleichungen durch Multiplication mit $U_1 - i U_2$, $V_1 - i V_2$, $W_1 - i W_2$

$$\eta_1 + \eta_2 = xp.$$

Hier ist p positiv und von Null verschieden, ebenso $\eta_1 + \eta_2$, da weder η_1 noch η_2 negativ ist also ihre Summe nur in dem Falle $=0$ werden kann, wo η_1 und η_2 einzeln, also U_1, $V_1, \ldots W_2$ sämmtlich verschwinden. Also ist jede Wurzel x der Gleichung $D(x) = 0$ positiv und von Null verschieden. Zugleich ist aus der Form des Ausdrucks D ersichtlich, dass es keine Normalenrichtung $\alpha\beta\gamma$ gibt, für welche eine Wurzel dieser Gleichung unendlich wird.

Den Beweis des zweiten, in allgemeinerer Form von Herrn Weierstrass herrührenden Satzes kann man für den vorliegenden Fall auf die leicht zu beweisende identische Gleichung

$$D_{11}^2 + D_{22}^2 + D_{33}^2 + 2 D_{23}^2 + 2 D_{31}^2 + 2 D_{12}^2 = D'^2 - DD''$$

gründen wo $D = D(x)$ und D' die erste, D'' die zweite Derivirte ist. Hat D den Wurzelfactor $x - a$ genau α mal, so ist $D'^2 - DD''$ durch ihn $2\alpha - 2$ mal und nicht öfter theilbar; a ist nach dem vorigen Satze reell. Lässt man also $x - a$ abnehmen, so wird die ganze Function zur Linken an der Grenze unendlich klein zur Ordnung $2\alpha - 2$; bleibt während dessen x reell, was unmöglich sein würde wenn a imaginär wäre, so bleibt jedes einzelne Glied positiv, also wird jedes Glied unendlich klein mindestens zur Ordnung $2\alpha - 2$, aber nicht jedes Glied zu höherer Ordnung unendlich klein; dies ist der zweite von den obigen Sätzen.

14.

Es sind demnach bei der cubischen Gleichung $D(x)=0$ drei Fälle zu unterscheiden.

A) Soll ω^2 dreifache Wurzel, also

$$D(x)=(\omega^2-x)^3$$

sein, so folgt aus dem Satze des Herrn Weierstrass, dass die in x linearen Functionen D_{23}, D_{31}, D_{12} identisch $=0$ sein müssen, was

$$A_{23}=0, \qquad A_{31}=0, \qquad A_{12}=0$$

gibt, und dann, dass D_{11}, D_{22}, D_{33} reine Quadrate und $=(\omega^2-x)^2$ sein müssen, was

$$A_{11}=A_{22}=A_{33}=\omega^2$$

gibt.

Für die Normalenrichtungen $\alpha\beta\gamma$, denen eine dreifache Wurzel ω^2 entsprechen soll, gibt dies fünf Bedingungsgleichungen

$$A_{11}=A_{22}=A_{33}; \qquad A_{23}=0 \quad A_{31}=0 \quad A_{12}=0; \tag{A 1}$$

wählt man die Coordinaten axen so, dass $\alpha=0$, $\beta=\gamma=90^\circ$ wird, so überzeugt man sich leicht, dass dieser Fall mit der Bedingung vereinbar ist, dass die Kräftefunction Π eine vollständige und stets positive quadratische Form sei.

Dagegen ist mit dieser unerlässlichen Eigenschaft von Π die Forderung unverträglich, dass für jede Normalenrichtung eine dreifache Wurzel stattfinde. Dir Bedingungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} A_{11}U+A_{12}V+A_{13}W&=\omega^2U\\ A_{21}U+A_{22}V+A_{23}W&=\omega^2V\\ A_{31}U+A_{32}V+A_{33}W&=\omega^2W,\end{aligned}\right\} \tag{U}$$

die sich für U, V, W ergeben haben, sind identisch erfüllt.

B) Soll D einen Doppelfactor haben, also

$$D(x)=(\omega_1^2-x)^2(\omega_3^2-x)$$

sein, wo ω_1^2 von ω_3^2 verschieden ist, so müssen alle Unterdeterminanten durch ω_1^2-x theilbar sein. Aus den Ausdrücken für D_{23}, D_{31}, D_{12} folgt

$$\omega_1^2=A_{11}-\frac{A_{31}A_{12}}{A_{23}}=A_{22}-\frac{A_{12}A_{23}}{A_{31}}=A_{33}-\frac{A_{23}\cdot A_{31}}{A_{12}}, \tag{B 1}$$

wenn der Kürze wegen von dem besondern Falle Abstand genommen wird, wo zwei von den Grössen A_{23}, A_{31}, A_{12} verschwinden. Setzt man die hieraus folgenden Werthe von A_{11}, A_{22}, A_{33} ein, so wird

$$D = (\omega_1^2 - x)^2 \left[\omega_1^2 - x + \frac{A_{31} A_{12}}{A_{23}} + \frac{A_{12} A_{23}}{A_{31}} + \frac{A_{23} A_{31}}{A_{12}}\right],$$

d. h. die in (B 1) enthaltenen Bedingungen reichen für den vorliegenden Fall aus. Der Ausdruck für die Summe der Wurzeln gibt

$$\omega_3^2 = A_{11} + A_{22} + A_{33} - 2\,\omega_1^2.$$

Benutzt man die Bedingungsgleichungen (B 1) auch in (U), so folgt

$$A_{31} A_{12} U + A_{12} A_{23} V + A_{23} A_{31} W = (\omega^2 - \omega_1^2) A_{23} U = (\omega^2 - \omega_1^2) A_{31} V = (\omega^2 - \omega_1^2) A_{12} W.$$

Versieht man die Componenten UVW mit demselben Index wie ω, so folgt

1. wenn für ω^2 die Doppelwurzel ω_1^2, genommen wird,

$$\frac{U_1}{A_{23}} + \frac{V_1}{A_{31}} + \frac{W_1}{A_{12}} = 0,$$

2. dagegen für $\omega^2 = \omega_3^2$

$$U_3 : V_3 : W_3 = \frac{1}{A_{23}} : \frac{1}{A_{31}} : \frac{1}{A_{12}}\,.$$

Damit der vorliegende Fall eintrete, sind für die entsprechende Normalenrichtung $\alpha\beta\gamma$ nur zwei Bedingungen erforderlich, die sich aus (B 1) ergeben. Sind diese beiden Bedingungen identisch erfüllt, so findet für jede Normalenrichtung eine Doppelwurzel ω_1^2 und eine einfache ω_3^2 statt. Ich habe die Untersuchung dieses Falles vollständig durchgeführt, und finde, ausser einem nicht hierher gehörigen Falle (*), wo Π zwar eine vollständige Form aber nicht von unveränderlichem Zeichen ist, nur den folgenden Fall, wo bei passender Wahl der Coordinatenaxen

$$\Pi = k^2(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 + \theta_4^2 + \theta_5^2 + \theta_6^2 - 2\,\theta_2\theta_3 - 2\,\theta_3\theta_1 - 2\theta_1\theta_2) + (a_1\theta_1 + a_2\theta_2 + a_3\theta_3)^2$$

ist. Die Constanten sind alle reell und der Bedingung unterworfen, dass 1) $a_2 + a_3$,

(*) Bei geeigneter Wahl der Coordinatenaxen ist in diesem Falle

$$\Pi = A^2[(\theta_2 - \theta_3)^2 + \theta_1^2] + B^2[\theta_5^2 + \theta_6^2 - 2\,\theta_1(\theta_2 + \theta_3)] + \Gamma^2\theta_4^2$$

und $\omega_1^2 = A^2 \sin\alpha^2 + B^2 \cos\alpha^2$, $\omega_3^2 = B^2 \sin\alpha^2 + \Gamma^2 \cos\alpha^2$. Der Ausdruck Π wird $= 0$ z. B. für $\theta_4 = \theta_5 = \theta_6 = 0$, $\theta_3 = \theta_2$, $\theta_1 = 2\frac{B^2}{\Gamma^2}\theta_2$, also ohne dass alle $\theta = 0$ werden.

a_3+a_1, a_1+a_2 von Null verschieden sein müssen und 2) $a_2a_3+a_3a_1+a_1a_2>k^2$ ist. Dann wird für jede Normalenrichtung $\omega_1^2=k^2$, $\omega_3^2=k^2+a_1^2\cos\alpha^2+a_2^2\cos\beta^2+a_3^2\cos\gamma^2$. Die Wellenfläche zerfällt also in eine doppelt gelegte Kugel vom Halbmesser k und ein dieselbe einschliessendes concentrisches Ellipsoid, in dessen Hauptaxen die Coordinatenaxen gelegt sind. Die Quadrate der Halbaxen sind $a_1^2+k^2$, $a_2^2+k^2$, $a_3^2+k^2$; sind a_1, a_2, a_3 einander gleich, so entspricht der vorstehende Ausdruck den Medien von constanter Elasticität.

C) Mit Ausnahme dieses besondern Falles hat also die Gleichung $D(x)=0$ im Allgemeinen drei ungleiche Wurzeln ω_1^2, ω_2^2, ω_3^2, und dieselben fallen nur für besondere Normalenrichtungen zusammen. Wir beschränken unsere Untersuchung auf diese Voraussetzung, da der hiermit ausgeschlossene Fall, wo für jede Normalenrichtung eine Doppelwurzel stattfindet, keinerlei Schwierigkeiten darbietet.

Bedeutet D' die Derivirte von D, so folgt für $x=\omega^2$

$$\frac{U^2}{D_{11}}=\frac{V^2}{D_{22}}=\frac{W^2}{D_{33}}=\frac{VW}{D_{23}}=\frac{WU}{D_{31}}=\frac{UV}{D_{12}}=-\frac{P}{D'},$$

wodurch die Componenten des Stosses auf seine Resultante $\sqrt{P}$ als allein übrigbleibende Unbekannte reducirt werden (art. 7, III), und zur Bestimmung des zur Normalenrichtung $\alpha\beta\gamma$ und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit ω gehörigen Strahls σ

$$\left.\begin{aligned}\Xi&=\frac{\partial\omega}{\partial\cos\alpha}=-\frac{1}{2\omega D'}\sum_\mu\sum_\nu D_{\mu\nu}\cdot\frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial\cos\alpha}\\ H&=\frac{\partial\omega}{\partial\cos\beta}=-\frac{1}{2\omega D'}\sum\sum D_{\mu\nu}\cdot\frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial\cos\beta}\\ Z&=\frac{\partial\omega}{\partial\cos\gamma}=-\frac{1}{2\omega D'}\sum\sum D_{\mu\nu}\cdot\frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial\cos\gamma}\end{aligned}\right\}\qquad(\sigma)$$

oder wegen der vorangehenden Gleichung

$$\Xi=\frac{1}{2\omega P}\left[U^2\frac{\partial A_{11}}{\partial\cos\alpha}+\cdots+2VW\frac{\partial A_{23}}{\partial\cos\alpha}+\cdots\right]\text{ u. s. w.}\qquad(\sigma_1)$$

Einer gegebenen Normalenrichtung $\alpha\beta\gamma$ entsprechen hiernach im Allgemeinen 6 Fortpflanzungsgeschwindigkeiten $\pm\omega_1$, $\pm\omega_2$, $\pm\omega_3$, also 6 Punkte ΞHZ der Wellenfläche Δ, welche paarweise zum Ursprunge symmetrisch liegen. Die Wellenfläche besteht also aus 3 Schalen, und ihr Centralpunkt ist auch ihr Mittelpunkt.

15.

In den Fällen (A) und (B) werden die in (σ) stehenden Ausdrücke von $\Xi H Z$ unbestimmt; die Gleichungen (σ_1) zeigen, dass diese Unbestimmtheit gehoben wird, sobald es gelingt, auch für diese Fälle die Verhältnisse von UVW zur $\sqrt{P}$ zu bestimmen. Ist N die Normalenrichtung $\alpha\beta\gamma$, für welche einer von diesen Fällen eintritt, N_1 eine unendlich benachbarte Normalenrichtung $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, so muss man UVW und die zugehörigen Werthe $\Xi H Z$ als die Grenzen ansehen, gegen welche die zu N_1 gehörigen Werthe convergiren, wenn N_1 mit N zusammenfällt.

Was die Durchführung dieser Untersuchung betrifft, so muss ich mich der Uebersichtlichkeit wegen begnügen, im Wesentlichen den Gang derselben nebst den Resultaten anzugeben. Um die Bedingung, dass N_1 von N nur unendlich wenig abweiche, so auszudrücken, dass zugleich ersichtlich wird, nach welcher Richtung die Abweichung stattfindet, führt man noch zwei zueinander und zu N senkrechte Richtungen $N'(\alpha'\beta'\gamma')$ und $N''(\alpha''\beta''\gamma'')$ ein. Ist dann ε (in Bogenmass) der unendlich kleine Winkel, den N_1 mit N bilden soll, und φ der von N' nach N'' hin wachsende Winkel von der Ebene NN' bis zur Ebene NN_1, so erhält man sofort

$$\cos\alpha_1 = \cos\alpha\cos\varepsilon + (\cos\alpha'\cos\varphi + \cos\alpha''\sin\varphi)\sin\varepsilon$$
$$\cos\beta_1 = \cos\beta\cos\varepsilon + (\cos\beta'\cos\varphi + \cos\beta''\sin\varphi)\sin\varepsilon$$
$$\cos\gamma_1 = \cos\gamma\cos\varepsilon + (\cos\gamma'\cos\varphi + \cos\gamma''\sin\varphi)\sin\varepsilon.$$

Seien $U_1V_1W_1\omega_1$ die Werthe welche der Normalenrichtung N_1 entsprechen; für $\varepsilon = 0$ gehen sie über in $UVW\omega$, während ω^2 mehrfache Wurzel ist. Sodann sei

$$B_1 = a_1\cos\alpha_1 + a_6\cos\beta_1 + a_5\cos\gamma_1$$
$$B_2 = a_6\cos\alpha_1 + a_2\cos\beta_1 + a_4\cos\gamma_1$$
$$B_3 = a_5\cos\alpha_1 + a_4\cos\beta_1 + a_3\cos\gamma_1$$

und, nach ε und φ geordnet,

$$B_\mu = A_\mu\cos\varepsilon + (A'_\mu\cos\varphi + A''_\mu\sin\varphi)\sin\varepsilon,$$

endlich ausgerechnet

$$(B_1U_1 + B_2V_1 + B_3W_1)^2 = G.$$

Dann haben wir (vergl. art. 5)

$$\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial U_1} = \omega_1^2 U_1, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial V_1} = \omega_1^2 V_1, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial W_1} = \omega_1^2 W_1,$$

wo man, wenn man will, für $U_1 V_1 W_1$ auch die Cosinus der Winkel setzen darf, nach denen der Stoss erfolgt.

Für $\varepsilon = 0$ erhält man die Gleichungen

$$A_{11}U + A_{12}V + A_{13}W = \omega^2 U$$
$$A_{21}U + A_{22}V + A_{23}W = \omega^2 V$$
$$A_{31}U + A_{32}V + A_{33}W = \omega^2 W$$

wieder. Sodann differentiiren wir nach ε und setzen dann wieder $\varepsilon = 0$. Diese Operation gebe

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \varepsilon} = \omega', \qquad \frac{\partial U_1}{\partial \varepsilon} = U', \qquad \frac{\partial V_1}{\partial \varepsilon} = V', \qquad \frac{\partial W_1}{\partial \varepsilon} = W'.$$

Dann wird, für $\varepsilon = 0$

$$\lim (B_1 U_1 + B_2 V_1 + B_3 W_1) = A_1 U + A_2 V + A_3 W$$

$$\lim \frac{\partial}{\partial \varepsilon}(B_1 U_1 + B_2 V_1 + B_3 W_1) = (A_1 U' + A_2 V' + A_3 W') +$$
$$(A'_1 U + A'_2 V + A'_3 W)\cos\varphi + (A''_1 U + A''_2 V + A''_3 W)\sin\varphi,$$

also, wenn die Effectivwerthe

$$(A_1 U + A_2 V + A_3 W)(A'_1 U + A'_2 V + A'_3 W) = G'$$
$$(A_1 U + A_2 V + A_3 W)(A''_1 U + A''_2 V + A''_3 W) = G''$$

sind, und

$$G' \cos\varphi + G'' \sin\varphi = \Gamma$$

gesetzt wird, immer für $\varepsilon = 0$

$$\lim \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial \varepsilon} = A_{11} U U' + \cdots A_{23}(V W' + W V') + \cdots + \Gamma$$

und

$$\lim \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial \varepsilon \partial U_1} = A_{11} U' + A_{12} V' + A_{13} W' + \frac{\partial \Gamma}{\partial U},$$

da $U_1 = U + \varepsilon U' \ldots$ ist. Da ausserdem noch für $\varepsilon = 0$

$$\frac{\partial \omega_1^2 U_1}{\partial \varepsilon} = \omega^2 U' + 2\omega\omega' U$$

ist, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} (A_{11}-\omega^2)U'+A_{12}V'+A_{13}W'+\frac{\partial\Gamma}{\partial U}&=2\omega\omega' U\\ A_{21}U'+(A_{22}-\omega^2)V'+A_{23}W'+\frac{\partial\Gamma}{\partial V}&=2\omega\omega' V\\ A_{31}U'+A_{32}V'+(A_{33}-\omega^2)W'+\frac{\partial\Gamma}{\partial W}&=2\omega\omega' W, \end{aligned}\right\} \qquad (U')$$

indem die beiden letzten Gleichungen aus der ersten durch Vertauschungen folgen.

Nun ist im Falle (A) des vorigen art. $A_{23}=A_{31}=A_{12}=0$, $A_{11}=A_{22}=A_{33}=\omega^2$; die Gleichungen ($U$) werden also identisch erfüllt, aber aus (U') erhalten wir

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial U}=2\omega\omega' U,\qquad \frac{\partial\Gamma}{\partial V}=2\omega\omega' V,\qquad \frac{\partial\Gamma}{\partial W}=2\omega\omega' W.$$

Dies gibt für ω' eine kubische Gleichung, deren Wurzeln stets reell sind; ausserdem bestimmen diese drei Gleichungen die Verhältnisse von $U:V:W$, und liefern also mittelst der Formeln (σ_1) des art. 14 vollkommen bestimmte Lagen für diejenigen Punkte $\Xi H Z$ der Wellenfläche, in denen die singuläre Normalenrichtung $\alpha\beta\gamma$ stattfindet, und in denen Δ von der Ebene $X\cos\alpha+Y\cos\beta+Z\cos\gamma=\omega$ berührt wird.

Die Werthe $\Xi H Z$ hängen im Allgemeinen von φ ab; die genauere Untersuchung zeigt, das der Ort aller Punkte $\Xi H Z$, in denen Δ von der singulären Tangentialebene berührt wird, eine vollständige, ganz im Endlichen verlaufende Kurve dritter Klasse ist. Wenn sie nicht in Oerter niederer Klassen zerfällt, ist sie vom 6 oder vom 4 Grade. In beiden Fällen ist sie frei von Doppel- und Wendepunkten. Im ersten Falle besteht sie aus einem Kurvendreieck, dessen Ecken Rückkehrpunkte sind, und einem dasselbe einschliessenden Oval. Das Loth aus dem Centrum der Wellenfläche auf die Ebene der Kurve trifft dieselbe innerhalb der vom Oval eingeschlossenen Fläche. Im zweiten Falle hat die Kurve eine Gestalt, ähnlich wie die Cardioïden, die von derselben Ordnung und Klasse sind; sie ist Grenzfall der vorigen Kurve, und ergibt sich, wenn zwei Rückkehrpunkte derselben zu Punkten des Ovals werden, wobei die Bögen zwischen diesen beiden Punkten in eine doppeltgelegte, geradlinigte Strecke, ein Stück der Doppeltangente ausarten.

Im Falle (B) des vorigen art. gehen die Gleichungen (U) über in die einzige

$$\frac{U}{A_{23}}+\frac{V}{A_{31}}+\frac{W}{A_{12}}=0; \qquad (U)$$

nimmt man in (U') für ω^2 den dort $(B\,1)$ gegebenen Werth von ω_1^2, und setzt zur Abkürzung $A_{31}A_{12}U'+\cdots=K$, so erhält man

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial U}=2\omega\omega' U+\frac{K}{A_{23}},\qquad \frac{\partial\Gamma}{\partial V}=2\omega\omega' V+\frac{K}{A_{31}},\qquad \frac{\partial\Gamma}{\partial W}=2\omega\omega' W+\frac{K}{A_{12}}\cdot\quad (U')$$

Diese Gleichungen bestimmen UVW proportional zu K; setzt man ihre Werthe in (U) ein, so erhält man für ω' eine quadratische Gleichung, von welcher man durch das in art. 13 mitgetheilte Verfahren beweist, dass ihre Wurzeln stets reell sind.

Für ΞHZ erhält man wieder völlig bestimmte, im Allgemeinen von φ abhängige Werthe. Der Ort aller Punkte ΞHZ, in denen die Wellenfläche Δ von der singulären Tangentialebene berührt wird, ist in diesem Falle eine vollständige, ganz im Endlichen verlaufende Kurve zweiter Klasse, also entweder das System von zwei getrennten oder zusammenfallenden Punkten, oder eine vollständige Ellipse.

Für die Lehre von den singulären Punkten der Wellenfläche bedarf es nicht ihrer Gleichung in Punktcoordinaten; man kann dieselbe ebenfalls direkt an die Gleichung $D(\omega^2)=0$ knüpfen. Durch die Substitution

$$\omega=\xi\cos\alpha+\eta\cos\beta+\zeta\cos\gamma,\qquad \cos\alpha=\frac{x-\xi}{s},\qquad \cos\beta=\frac{y-\eta}{s},\qquad \cos\gamma=\frac{z-\zeta}{s}\quad (S)$$

werde

$$\omega=\frac{q}{s},\qquad A_{\mu\nu}=\frac{(x\xi)_{\mu\nu}}{ss},$$

was

$$q=\xi(x-\xi)+\eta(y-\eta)+\zeta(z-\zeta)$$

gibt. Sodann sei

$$\vartheta=\begin{vmatrix} (x\xi)_{11}-q^2 & (x\xi)_{12} & (x\xi)_{13} \\ (x\xi)_{21} & (x\xi)_{22}-q^2 & (x\xi)_{23} \\ (x\xi)_{31} & (x\xi)_{32} & (x\xi)_{33}-q^2 \end{vmatrix},$$

also vermöge der Substitution (S)

$$\vartheta=\frac{1}{s^6}D(\omega^2).$$

Die Gleichung $\vartheta=0$ bestimmt für jede Lage des Punktes $\xi\eta\zeta$ einen Kegel 6 Grades ϑ_6, dessen Scheitel der Punkt $\xi\eta\zeta$ ist. Sind $\alpha\beta\gamma$ die Richtungswinkel einer Kante dieses Kegels, so erhält man $D(\omega^2)=0$ für $\omega=\frac{q}{s}=\xi\cos\alpha+\cdots$;

folglich ist die Ebene ($X \cos\alpha + \cdots = \omega$), welche durch den Scheitel geht und zu dieser Kante senkrecht ist, Tangentialebene der Wellenfläche Δ (art. 12 T).

Der Ort aller Tangentialebenen T der Wellenfläche Δ, welche durch den Scheitel von ϑ_6 gehen, ist also ein Kegel D_6 der 6. Klasse, und beide Kegel sind zu einander supplementär, dh. sie haben denselben Scheitel und jede Kante des einen ist senkrecht zu einer Tangentialebene des andern.

Damit xyz Punkt einer Doppelkante von ϑ_6 sei, muss gleichzeitig sein

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = 0;$$

führt man diese Gleichungen aus, und macht dann wieder die Substitution (S), so ergibt sich

$$\xi = -\frac{1}{2\omega D'} \sum_{\mu}\sum_{\nu} D_{\mu\nu} \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial \cos\alpha}$$

$$\eta = -\frac{1}{2\omega D'} \Sigma\Sigma D_{\mu\nu} \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial \cos\beta}$$

$$\zeta = -\frac{1}{2\omega D'} \Sigma\Sigma D_{\mu\nu} \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial \cos\gamma}.$$

Aber dies sind (art. 14 $C\,\sigma$) die Gleichungen der Wellenfläche Δ und es folgt, dass der Kegel ϑ_6 stets und nur dann eine Doppelkante hat, wenn sein Scheitel $\xi\eta\zeta$ Punkt der Wellenfläche ist, und zwar ist in einem solchen Falle die Doppelkante von ϑ_6 die Normale der Wellenfläche in jenem Punkte. Die entsprechende Doppelberührebene des Supplementärkegels D_6 ist die Tangentialebene T der Wellenfläche im nämlichen Punkte.

Soll daher $\xi\eta\zeta$ ein singulärer Punkt von Δ und der Berührungskegel d_μ von Δ in diesem Punkte von der Klasse μ sein, so muss der Supplementärkegel ϑ_μ vom μ^{ten} Grade und jede Kante desselben mehrfache, also mindestens Doppelkante von ϑ_6 sein. Also muss ϑ_6 zerfallen in den mindestens zweimal gelegten Kegel ϑ_μ und einen zweiten Kegel ϑ'_ν, so dass, wenn $\vartheta = \vartheta_\mu^m \vartheta'_\nu$ wird, $m \geqq 2$ und $\mu m + \nu = 6$ ist. Der Supplementärkegel d'_ν von ϑ'_ν hat dann ebenfalls seinen Scheitel im singulären Punkte $\xi\eta\zeta$, aber er berührt Δ ausserhalb desselben. Dies gibt drei Fälle

$$\vartheta = \vartheta_2^2 \vartheta'_2 \tag{a}$$

$$\vartheta = \vartheta_3^2 \tag{b}$$

$$\vartheta = \vartheta_2^3, \tag{c}$$

und es wird durch die in diesen Formeln geforderten Zerfällungen von ϑ, soweit sie statt haben, der singuläre Punkt $\xi\eta\zeta$ von Δ sowie das Gleichungspolynom ϑ_μ des Normalenkegels in demselben völlig bestimmt.

Ein ohne grosse Schwierigkeiten ausführbares Beispiel dieses, auch durch Rechnung leicht zu bestätigenden Satzes bietet der bekannte Fall dar, welcher in der Krystalloptik behandelt wird, und in welchem Δ in die Fresnel'sche Fläche und eine sie einschliessende Kugel zerfällt. Bei passender Wahl der Coordinatenaxen ist unter den Voraussetzungen der Krystalloptik die Kräftefunction

$$\Pi = k^2(\theta_1+\theta_2+\theta_3)^2 + a^2(\theta_4^2 - 4\theta_2\theta_3) + b^2(\theta_5^2 - 4\theta_3\theta_1) + c^2(\theta_6^2 - 4\theta_1\theta_2);$$

die Constanten sind der Bedingung unterworfen, dass aus a, b, c als Seiten ein Dreieck gebildet werden könne, und k grösser ist wie der Halbmesser des umschriebenen Kreises.

IV. Die mit den partiellen Differentialgleichungen d. verträglichen Unstetigkeiten.

16.

Setzen wir wieder

$$\Theta = a_1\theta_1 + a_2\theta_2 + \cdots + a_6\theta_6,$$

und symbolisch

$$\Pi = \Theta^2,$$

so wird in den Differentialgleichungen d. des art. 4 allgemein $\Pi_\mu = a_\mu\Theta$, also kann man dieselben in symbolischer Form schreiben:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_1\frac{\partial\Theta}{\partial x} + a_6\frac{\partial\Theta}{\partial y} + a_5\frac{\partial\Theta}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a_6\frac{\partial\Theta}{\partial x} + a_2\frac{\partial\Theta}{\partial y} + a_4\frac{\partial\Theta}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a_5\frac{\partial\Theta}{\partial x} + a_4\frac{\partial\Theta}{\partial y} + a_3\frac{\partial\Theta}{\partial z}.$$

Für die mit diesen Gleichungen verträglichen Unstetigkeiten haben wir also

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]=a_1\left[\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right]+a_6\left[\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right]+a_5\left[\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right]$$

$$\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right]=a_6\left[\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right]+a_2\left[\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right]+a_4\left[\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right]$$

$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right]=a_5\left[\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right]+a_4\left[\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right]+a_3\left[\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right].$$

Den Ausdruck für $\overset{+}{\Theta}-\overset{-}{\Theta}=a_1\theta'_1+a_2\theta'_2+\cdots$ haben wir bereits im art. 6 umgeformt; es war

$$Q=\Lambda_1 U+\Lambda_2 V+\Lambda_3 W=M_1\frac{\partial t}{\partial\xi}+M_2\frac{\partial t}{\partial\eta}+M_3\frac{\partial t}{\partial\zeta},$$

und

$$\overset{+}{\Theta}-\overset{-}{\Theta}=-Q.$$

Da längs der Unstetigkeitsfläche Σ t Function von $\xi\eta\zeta$ ist, so können auch, wie von hier ab geschehen soll, UVW und Q als solche aufgefasst werden. Dann liefert die vorstehende Gleichung sofort

$$\left[\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right]+\left[\frac{\partial\Theta}{\partial t}\right]\frac{\partial t}{\partial\xi}=-\frac{\partial Q}{\partial\xi},\quad \left[\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right]+\left[\frac{\partial\Theta}{\partial t}\right]\frac{\partial t}{\partial\eta}=-\frac{\partial Q}{\partial\eta},\quad \left[\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right]+\left[\frac{\partial\Theta}{\partial t}\right]\frac{\partial t}{\partial\zeta}=-\frac{\partial Q}{\partial\zeta},$$

also erhalten wir

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]=-\Lambda_1\left[\frac{\partial\Theta}{\partial t}\right]-\left(a_1\frac{\partial Q}{\partial\xi}+a_6\frac{\partial Q}{\partial\eta}+a_5\frac{\partial Q}{\partial\zeta}\right)$$

$$\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right]=-\Lambda_2\left[\frac{\partial\Theta}{\partial t}\right]-\left(a_6\frac{\partial Q}{\partial\xi}+a_2\frac{\partial Q}{\partial\eta}+a_4\frac{\partial Q}{\partial\zeta}\right)$$

$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right]=-\Lambda_3\left[\frac{\partial\Theta}{\partial t}\right]-\left(a_5\frac{\partial Q}{\partial\xi}+a_4\frac{\partial Q}{\partial\eta}+a_3\frac{\partial Q}{\partial\zeta}\right).$$

Es handelt sich nur noch um $\left[\frac{\partial\Theta}{\partial t}\right]$. Aus dem Ausdrucke für $\frac{\partial\Theta}{\partial t}$ folgt zunächst

$$\left[\frac{\partial\Theta}{\partial t}\right]=a_1\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x}\right]+a_6\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial y}\right]+a_5\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial z}\right]$$

$$+a_6\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial x}\right]+a_2\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial y}\right]+a_4\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial z}\right]$$

$$+a_5\left[\frac{\partial^2 w}{\partial t\,\partial x}\right]+a_4\left[\frac{\partial^2 w}{\partial t\,\partial y}\right]+a_3\left[\frac{\partial^2 w}{\partial t\,\partial z}\right].$$

Zugleich ist längs Σ

$$\frac{\partial \overset{+}{u}}{\partial t}-\frac{\partial \overset{-}{u}}{\partial t}=U,\qquad \frac{\partial \overset{+}{v}}{\partial t}-\frac{\partial \overset{-}{v}}{\partial t}=V,\qquad \frac{\partial \overset{+}{w}}{\partial t}-\frac{\partial \overset{-}{w}}{\partial t}=W,$$

also

$$\begin{array}{lll}
\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right]=\frac{\partial U}{\partial \xi}-\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]\frac{\partial t}{\partial \xi} & \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial y}\right]=\frac{\partial U}{\partial \eta}-\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]\frac{\partial t}{\partial \eta} & \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial z}\right]=\frac{\partial U}{\partial \zeta}-\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]\frac{\partial t}{\partial \zeta} \\
\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t\partial x}\right]=\frac{\partial V}{\partial \xi}-\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right]\frac{\partial t}{\partial \xi} & \left[\frac{\partial^2 v}{\partial t\partial y}\right]=\frac{\partial V}{\partial \eta}-\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right]\frac{\partial t}{\partial \eta} & \left[\frac{\partial^2 v}{\partial t\partial z}\right]=\frac{\partial V}{\partial \zeta}-\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right]\frac{\partial t}{\partial \zeta} \\
\left[\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x}\right]=\frac{\partial W}{\partial \xi}-\left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right]\frac{\partial t}{\partial \xi} & \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial y}\right]=\frac{\partial W}{\partial \eta}-\left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right]\frac{\partial t}{\partial \eta} & \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial z}\right]=\frac{\partial W}{\partial \zeta}-\left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right]\frac{\partial t}{\partial \zeta}.
\end{array}$$

Führt man diese Werthe ein und ordnet die Minuenden nach den Vertikal-, die Subtrahenden nach den Horizontalreihen, so wird

$$\left[\frac{\partial \Theta}{\partial t}\right]=\frac{\partial M_1}{\partial \xi}+\frac{\partial M_2}{\partial \eta}+\frac{\partial M_3}{\partial \zeta}-\Lambda_1\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]-\Lambda_2\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right]-\Lambda_3\left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right].$$

Dies ist oben einzusetzen. Werden zur Abkürzung die Effectivwerthe von

$$\begin{aligned}
\Lambda_1\left(\frac{\partial M_1}{\partial \xi}+\frac{\partial M_2}{\partial \eta}+\frac{\partial M_3}{\partial \zeta}\right)+a_1\frac{\partial Q}{\partial \xi}+a_6\frac{\partial Q}{\partial \eta}+a_5\frac{\partial Q}{\partial \zeta}&=\Xi_1\\
\Lambda_2\left(\frac{\partial M_1}{\partial \xi}+\frac{\partial M_2}{\partial \eta}+\frac{\partial M_3}{\partial \zeta}\right)+a_6\frac{\partial Q}{\partial \xi}+a_2\frac{\partial Q}{\partial \eta}+a_4\frac{\partial Q}{\partial \zeta}&=\Xi_2\\
\Lambda_3\left(\frac{\partial M_1}{\partial \xi}+\frac{\partial M_2}{\partial \eta}+\frac{\partial M_3}{\partial \zeta}\right)+a_5\frac{\partial Q}{\partial \xi}+a_4\frac{\partial Q}{\partial \eta}+a_3\frac{\partial Q}{\partial \zeta}&=\Xi_3
\end{aligned}$$

gesetzt, so folgt

$$\begin{aligned}
(\Lambda_{11}-1)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]+\Lambda_{12}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right]+\Lambda_{13}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right]&=\Xi_1\\
\Lambda_{21}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]+(\Lambda_{22}-1)\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right]+\Lambda_{23}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right]&=\Xi_2\\
\Lambda_{31}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]+\Lambda_{32}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right]+(\Lambda_{33}-1)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right]&=\Xi_3
\end{aligned}$$

Aber die Determinante dieser Gleichungen ist $=0$, da wir eine den mechanischen Bedingungen entsprechende Unstetigkeitsfläche Σ voraussetzen. Also lassen sich die Unstetigkeiten der Accelerationen eliminiren, wobei jedoch die nämlichen Fälle wie im art. 14 zu unterscheiden sind.

17.

Im allgemeinen Falle (C), wo die Gleichung $D=0$ nur ungleiche Wurzeln hat, verschwindet die Determinante der vorstehenden Gleichungen, aber nicht jede Unterdeterminante. Als Multiplicatoren nehmen wir nicht Unterdeterminanten, was zu nichts führen würde, sondern mit Rücksicht auf die Gleichungen (I) art. 7 die Grössen UVW selbst; dann erhalten wir

$$U\Xi_1+V\Xi_2+W\Xi_3=0,$$

was selbstverständlich auch in den andern Fällen passt. Führt man die Werthe von $\Xi_1\Xi_2\Xi_3$ ein, so erhält man sofort

$$Q\left(\frac{\partial M_1}{\partial\xi}+\frac{\partial M_2}{\partial\eta}+\frac{\partial M_3}{\partial\zeta}\right)+M_1\frac{\partial Q}{\partial\xi}+M_2\frac{\partial Q}{\partial\eta}+M_3\frac{\partial Q}{\partial\zeta}=0$$

oder

$$\frac{\partial QM_1}{\partial\xi}+\frac{\partial QM_2}{\partial\eta}+\frac{\partial QM_3}{\partial\zeta}=0.$$

Um von den symbolischen zu den Effectivformen zurückzukehren, setzen wir wieder

$$\frac{\partial t}{\partial\xi}=\frac{\cos\alpha}{\omega},\qquad\frac{\partial t}{\partial\eta}=\frac{\cos\beta}{\omega},\qquad\frac{\partial t}{\partial\zeta}=\frac{\cos\gamma}{\omega},$$

ausserdem

$$X=A_1U+A_2V+A_3W=M_1\cos\alpha+M_2\cos\beta+M_3\cos\gamma;$$

dann wird

$$Q=\frac{X}{\omega},\qquad M_1=\frac{\partial X}{\partial\cos\alpha}$$

also

$$QM_1=\frac{X}{\omega}\frac{\partial X}{\partial\cos\alpha}=\frac{1}{2\omega}\frac{\partial XX}{\partial\cos\alpha},$$

wo aber in

$$XX=A_{11}U^2+\cdots+2A_{23}VW+\cdots$$

nur auf die homogenen Coefficienten zu operiren ist. Dies gibt

$$\frac{\partial XX}{\partial\cos\alpha}=U^2\frac{\partial A_{11}}{\partial\cos\alpha}+\cdots+2VW\frac{\partial A_{23}}{\partial\cos\alpha}+\cdots$$

oder mit Rücksicht auf die Formeln (σ) (σ_1) am Schlusse des art. 14

$$\frac{\partial XX}{\partial\cos\alpha}=2\omega P\Xi=2\omega P\frac{\partial\omega}{\partial\cos\alpha},$$

wo wieder $P = U^2 + V^2 + W^2$ ist. Also erhalten wir

$$QM_1 = P\frac{\partial\omega}{\partial\cos\alpha}, \qquad QM_2 = P\frac{\partial\omega}{\partial\cos\beta}, \qquad QM_3 = P\frac{\partial\omega}{\partial\cos\gamma},$$

so dass unsere Differentialgleichung die folgende sehr einfache Form annimmt:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(P\frac{\partial\omega}{\partial\cos\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(P\frac{\partial\omega}{\partial\cos\beta}\right) + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(P\frac{\partial\omega}{\partial\cos\gamma}\right) = 0,$$

also zur Bestimmung von P verhilft. Es möge erlaubt sein zu bemerken, dass jede Specialisirung der Kräftefunction Π die Herleitung dieser Gleichung in der vorstehenden, naturgemässen Form derselben, in hohem Grade erschwert.

Die Integration dieser Gleichung ist überaus einfach. Auf der Unstetigkeitsfläche Σ_0 nehme man ein Stück $\Delta\Sigma_0$ an und lege durch jeden Punkt m_0 desselben den zugehörigen Strahl (σ). Das so entstehende Strahlenbündel durchdringe bis zur Fläche Σ das Volumen $\mathfrak{V}$ und auf Σ das Flächenstück $\Delta\Sigma$; sei M die Mantelfläche von $\mathfrak{V}$. Wird ein unbestimmtes Element der Gesammtoberfläche von $\mathfrak{V}$ durch $\partial\mathfrak{S}$ bezeichnet, und sind lmn die Winkel welche die über $\partial\mathfrak{S}$ nach Aussen errichtete Normale mit den Axen bildet, so liefert die vorstehende Gleichung, über alle Elemente von $\mathfrak{V}$ integrirt:

$$\int P\left[\frac{\partial\omega}{\partial\cos\alpha}\cos l + \frac{\partial\omega}{\partial\cos\beta}\cos m + \frac{\partial\omega}{\partial\cos\gamma}\cos n\right]\partial\mathfrak{S} = 0.$$

Den Factor von $P\partial\mathfrak{S}$ erhält man, indem man die Geschwindigkeit, mit welcher σ durchlaufen wird, senkrecht auf die Normale über $\partial\mathfrak{S}$ projicirt; er ist also $=0$ für alle Elemente von M, $=\omega$ in $\Delta\Sigma$ und $=-\omega$ in $\Delta\Sigma_0$; also bleibt

$$\int P\omega\,\partial\Delta\Sigma - \int P_0\omega\,\partial\Delta\Sigma_0 = 0,$$

unter P_0 den Anfangswerth von P verstanden. Wenn daher für die entsprechenden Flächenstücke $\Delta\Sigma_0$, $\Delta\Sigma$ die Querschnitte eines unendlich dünnen Strahlenbündels genommen werden (art. 10), so ergibt sich

$$P\Delta\Sigma = P_0\Delta\Sigma_0;$$

es ist nicht zweckmässig, das Verhältniss der beiden Flächenelemente in endlichen Zahlen auszudrücken.

Nun ist $\sqrt{P}$ die Resultante aus UVW; sind $\lambda\mu\nu$ die Winkel welche die Richtung dieses Stosses mit den Axen der xyz bildet, so folgt, wenn wir R

statt $\sqrt{P}$ schreiben:

$$\frac{\cos\lambda^2}{D_{11}}=\frac{\cos\mu^2}{D_{22}}=\frac{\cos\nu^2}{D_{33}}=\frac{\cos\mu\cos\nu}{D_{23}}=\frac{\cos\nu\cos\lambda}{D_{31}}=\frac{\cos\lambda\cos\mu}{D_{12}} \tag{1}$$

$$U=R\cos\lambda, \qquad V=R\cos\mu, \qquad W=R\cos\nu \tag{2}$$

$$R\sqrt{\Delta\Sigma}=R_0\sqrt{\Delta\Sigma_0}. \tag{3}$$

Während die Unstetigkeitsfläche Σ durch das Innere des elastischen Körpers fortschreitet, bleibt für ein und dasselbe unendlich dünne Strahlenbündel die Richtung $\lambda\mu\nu$ des Stosses constant und die Stärke R desselben umgekehrt proportional zur Quadratwurzel aus dem Querschnitte des Strahlenbündels mit der Unstetigkeitsfläche.

Gehören zur Normale von $\Delta\Sigma_0$ drei ungleiche Werthe von ω^2, so gehen von $\Delta\Sigma_0$ drei Strahlenbündel aus. Wird also gegen $\Delta\Sigma_0$ ein Stoss ausgeführt, so bilden sich drei Stosswellen, die sich nach jenen Strahlenbündeln fortpflanzen. Die Stossrichtungen sind durch (1) bestimmt und bilden, wie man aus den Gleichungen (U) art. 14 in bekannter Weise schliesst, ein orthogonales System. Zerlegt man den anfänglichen, gegen $\Delta\Sigma_0$ ausgeübten Stoss nach diesen drei Richtungen, so hat man für jede der drei Stosswellen den Werth von R_0, also UVW selbst.

Wenn ferner diejenigen Theile von Σ_0, zu deren Normale eine mehrfache Wurzel ω gehört, nur als Grenzlagen solcher Flächentheile auftreten, innerhalb deren dieser Ausnahmefall nicht vorkommt, so gelten die Schlussformeln für UVW nicht bloss für letztere, sondern auch noch für jene.

18.

Für die Bestimmung der Stösse, die aus einem vorgeschriebenen Anfangszustande hervorgehen, reichen die Resultate des vorigen art. also nur in dem Falle nicht aus, wo ein endlicher Theil von Σ_0 oder kürzer Σ_0 selbst eben und zu einer singulären Tangentialebene von Δ parallel ist. In einem solchen Falle ergeben sich die fehlenden Bedingungen aus art. 16. Da $\frac{\partial t}{\partial\xi}$, $\frac{\partial t}{\partial\eta}$, $\frac{\partial t}{\partial\zeta}$ unter den gegenwärtigen Voraussetzungen constant sind, so kann man die Schlussgleichungen des art. 16 in die Form setzen:

$$\Xi_1 = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial Q M_1}{\partial U}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial Q M_2}{\partial U}\right) + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\partial Q M_3}{\partial U}\right)$$

$$\Xi_2 = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial Q M_1}{\partial V}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial Q M_2}{\partial V}\right) + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\partial Q M_3}{\partial V}\right)$$

$$\Xi_3 = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial Q M_1}{\partial W}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial Q M_2}{\partial W}\right) + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\partial Q M_3}{\partial W}\right)$$

da die weggelassenen Glieder im vorliegenden Falle verschwinden; ausserdem folgt:

$$(A_{11} - \omega^2)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) + A_{12}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right) + A_{13}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) = \omega^2 \Xi_1$$

$$A_{21}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) + (A_{22} - \omega^2)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right) + A_{23}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) = \omega^2 \Xi_2$$

$$A_{31}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) + A_{32}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right) + (A_{33} - \omega^2)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) = \omega^2 \Xi_3.$$

Im Falle (A) des art. 14, wo ω^2 dreifache Wurzel der Gleichung $D = 0$ ist, und wir aus den Gleichungen (U) gar keine Bestimmungen über UVW erhielten, liefern die vorstehenden Formeln die partiellen Differentialgleichungen

$$\Xi_1 = 0, \qquad \Xi_2 = 0, \qquad \Xi_3 = 0;$$

dieselben enthalten nur die ersten Derivirten von UVW und sind in denselben linear und homogen, mit constanten Coefficienten.

Im Falle (B) sei ω^2 die Doppelwurzel; wird ihr Werth in die obigen Gleichungen eingeführt und

$$A_{31} A_{12}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] + A_{12} A_{23}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right] + A_{23} A_{31}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right] = K$$

gesetzt, so ergibt sich

$$\frac{K}{A_{23}} = \omega^2 \Xi_1, \qquad \frac{K}{A_{31}} = \omega^2 \Xi_2, \qquad \frac{K}{A_{12}} = \omega^2 \Xi_3,$$

indem wir wieder von dem ebenfalls sehr leicht zu behandelnden Falle Abstand nehmen, wo zwei von den Grössen A_{23}, A_{31}, A_{12} verschwinden.

Im vorliegenden Falle erhalten wir also zwischen UVW nur zwei Differentialgleichungen

$$A_{23}\Xi_1 = A_{31}\Xi_2 = A_{12}\Xi_3,$$

aber dazu kommt noch die Relation

$$\frac{U}{A_{23}} + \frac{V}{A_{31}} + \frac{W}{A_{12}} = 0,$$

so dass auch hier die nöthige Anzahl von Bedingungsgleichungen vorhanden ist, um UVW aus ihrem längs Σ_0 vorgeschriebenen Verlaufe für die übrigen Theile des Raumes zu bestimmen.

Im besondern Falle der Krystalloptik ist die Integration der Differentialgleichungen, die man mutatis mutandis für den vorliegenden Fall findet, mit keinen Schwierigkeiten verbunden.

V. Ueber die Modification der Unstetigkeiten an der Grenzfläche zweier Mittel.

19.

Seien $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$ die Räume, welche zwei einander berührende elastische feste Körper in ihrer Gleichgewichtslage ausfüllen, und $\mathfrak{S}$ die Grenzfläche zwischen beiden Räumen; die auf $\mathfrak{R}'$ bezüglichen Grössen werden wir mit einem Accent versehen, im Uebrigen alle bisherigen Bezeichnungen beibehalten. Sollen die nämlichen Körpertheilchen, welche während des Gleichgewichtes einander längs $\mathfrak{S}$ berührten, auch während der Bewegung in Berührung bleiben, so muss längs $\mathfrak{S}$

$$u' = u, \qquad v' = v, \qquad w' = w \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}
(\rho'\Pi'_1 - \rho\Pi_1)\cos\lambda + (\rho'\Pi'_6 - \rho\Pi_6)\cos\mu + (\rho'\Pi'_5 - \rho\Pi_5)\cos\nu = 0 \\
(\rho'\Pi'_6 - \rho\Pi_6)\cos\lambda + (\rho'\Pi'_2 - \rho\Pi_2)\cos\mu + (\rho'\Pi'_4 - \rho\Pi_4)\cos\nu = 0 \\
(\rho'\Pi'_5 - \rho\Pi_5)\cos\lambda + (\rho'\Pi'_4 - \rho\Pi_4)\cos\mu + (\rho'\Pi'_3 - \rho\Pi_3)\cos\nu = 0
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

bleiben, wenn $\lambda\mu\nu$ die Richtungswinkel der Normale über $\mathfrak{S}$ bedeuten.

Die Bedingungen (1) gelten ununterbrochen, die Bedingungen (2) solange die ersten Derivirten der Verschiebungscomponenten nicht unstetig werden, also falls dies eintritt, vor und nach dem Stosse. Die Gleichungen (2) und diejenigen, welche sich aus (1) durch Differentiiren ergeben, liefern ohne Weiteres die Grenzbedingungen für die Reflection und Brechung eines auf die Grenzfläche $\mathfrak{S}$ einfallenden Stosses, sobald die Anzahl und Beschaffenheit der neu entstehenden Unstetigkeitsflächen ermittelt ist.

20.

Sei

$$t = f(\xi\eta\zeta) \tag{Σ}$$

eine aus $\mathfrak{R}$ auf $\mathfrak{S}$ einfallende Unstetigkeitsfläche Σ, d. h. t Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta\left(\frac{\partial t}{\partial \xi}, \frac{\partial t}{\partial \eta}, \frac{\partial t}{\partial \zeta}\right) = 0.$$

Ebenso sei

$$t' = f'(\xi\eta\zeta) \tag{Σ'}$$

eine durch Reflection oder durch Brechung an $\mathfrak{S}$ aus Σ hervorgehende Unstetigkeitsfläche, d. h.

$$\Delta'\left(\frac{\partial t'}{\partial \xi}, \frac{\partial t'}{\partial \eta}, \frac{\partial t'}{\partial \zeta}\right) = 0,$$

wo Δ' im ersten Falle den auf $\mathfrak{R}$, im andern den auf $\mathfrak{R}'$ bezüglichen Ausdruck bedeutet. In beiden Fällen lautet die Grenzbedingung

$$t' = t, \tag{3}$$

weil die sämmtlichen Stösse, zu denen Σ Veranlassung gibt, einen der Grenzfläche $\mathfrak{S}$ angehörigen materiellen Punkt gleichzeitig treffen müssen. Schneidet also Σ die Grenzfläche $\mathfrak{S}$ zur Zeit t in der Kurve l, so muss l zur nämlichen Zeit $t' = t$ auch der Schnitt von $\mathfrak{S}$ mit Σ' sein. Für jeden Punkt $\xi\eta\zeta$ des von l überschrittenen Theiles von $\mathfrak{S}$ muss sich also für t' derselbe Werth ergeben wie für t, was die Grenzbedingung ist.

Aus (3) folgt sofort, dass an $\mathfrak{S}$ entlang

$$\frac{\partial t'}{\partial \xi} - \frac{\partial t}{\partial \xi} : \frac{\partial t'}{\partial \eta} - \frac{\partial t}{\partial \eta} : \frac{\partial t'}{\partial \zeta} - \frac{\partial t}{\partial \zeta} = \cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu$$

ist; wir setzen

$$\frac{\partial t'}{\partial \xi} - \frac{\partial t}{\partial \xi} = \frac{k}{\omega}\cos\lambda, \qquad \frac{\partial t'}{\partial \eta} - \frac{\partial t}{\partial \eta} = \frac{k}{\omega}\cos\mu, \qquad \frac{\partial t'}{\partial \zeta} - \frac{\partial t}{\partial \zeta} = \frac{k}{\omega}\cos\nu; \tag{4}$$

die Form in welcher wir den Proportionalitätsfactor angenommen haben, wird sich in der Folge rechtfertigen. Wenn daher

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial \xi} &= \frac{\cos\alpha}{\omega}, & \frac{\partial t}{\partial \eta} &= \frac{\cos\beta}{\omega}, & \frac{\partial t}{\partial \zeta} &= \frac{\cos\gamma}{\omega} \\ \frac{\partial t'}{\partial \xi} &= \frac{\cos\alpha'}{\omega'}, & \frac{\partial t'}{\partial \eta} &= \frac{\cos\beta'}{\omega'}, & \frac{\partial t'}{\partial \zeta} &= \frac{\cos\gamma'}{\omega'} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

gesetzt wird, so folgt auch

$$\frac{\cos\alpha'}{\omega'}=\frac{\cos\alpha+k\cos\lambda}{\omega}, \qquad \frac{\cos\beta'}{\omega'}=\frac{\cos\beta+k\cos\mu}{\omega}, \qquad \frac{\cos\gamma'}{\omega'}=\frac{\cos\gamma+k\cos\nu}{\omega}; \tag{6}$$

wir setzen ω und ω', wie immer, als homogene Functionen ersten Grades der drei Cosinus voraus, von denen sie abhängen, so dass ihre partiellen Derivirten nach denselben eine völlig bestimmte Bedeutung haben.

Dann sind (art. 8 m) die Gleichungen des Strahls σ die folgenden

$$\xi=\xi_0+t\frac{\partial\omega}{\partial\cos\alpha}, \qquad \eta=\eta_0+t\frac{\partial\omega}{\partial\cos\beta}, \qquad \zeta=\zeta_0+t\frac{\partial\omega}{\partial\cos\gamma}; \tag{m}$$

derselbe geht zur Zeit $t=0$ vom Punkte $m_0(\xi_0\eta_0\zeta_0)$ der Fläche Σ_0 aus; trifft er die Fläche $\mathfrak{S}$ im Punkte $p(xyz)$ und zur Zeit τ, so folgt

$$x=\xi_0+\tau\frac{\partial\omega}{\partial\cos\alpha}, \qquad y=\eta_0+\tau\frac{\partial\omega}{\partial\cos\beta}, \qquad z=\zeta_0+\tau\frac{\partial\omega}{\partial\cos\gamma}. \tag{pm_0}$$

Zum Ausgangspunkte m_0 und dem Einfallspunkte p berechnen wir einen Punkt $m'_0(\xi'_0\eta'_0\zeta'_0)$ so, dass auch

$$x=\xi'_0+\tau\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\alpha'}, \qquad y=\eta'_0+\tau\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\beta'}, \qquad z=\zeta'_0+\tau\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\gamma'} \tag{pm'_0}$$

wird.

Dieser Punkt m'_0 heisst Bild von m_0; der Ort aller Punkte m'_0 ist eine Fläche Σ'_0, welche man Bild von Σ_0 nennen kann.

Wenn, wie wir sogleich beweisen werden, $\alpha'\beta'\gamma'$ die Richtungswinkel der Normale von Σ'_0 im Punkte m'_0 sind, und dies für alle Punkte dieser Fläche gilt, so ist sie die Anfangslage einer der Gleichung $\Delta'=0$ entsprechenden Unstetigkeitsfläche Σ':

$$\xi=\xi'_0+t'\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\alpha'}, \qquad \eta=\eta'_0+t'\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\beta'}, \qquad \zeta=\zeta'_0+t'\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\gamma'}, \tag{m'}$$

wie aus der in art. 9 für Σ gegebenen Verification folgt, und zwar ist dann Σ' diejenige Unstetigkeitsfläche, welche der Grenzbedingung $t'=t$ unserer Aufgabe genügt. Denn nimmt man, um die Zeitpunkte t, t' zu bestimmen, wo Σ und Σ' auf $\mathfrak{S}$ zusammentreffen, in den Gleichungen (m) (m') für $\xi\eta\zeta$ die Coordinaten xyz des nämlichen Punktes p von $\mathfrak{S}$, so erhält man aus (m') und (pm'_0)

$$0=(t'-\tau)\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\alpha'}, \qquad 0=(t'-\tau)\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\beta'}, \qquad 0=(t'-\tau)\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\gamma'},$$

also $t' = \tau$, und ebenso $t = \tau$ aus (m) und $(p\,m_0)$, also aus beiden zusammen $t' = t$, wie die Grenzbedingung es fordert.

Der noch zu beweisende Hülfssatz ergibt sich wie folgt. Aus $(p\,m'_0)$ hat man, mit leicht verständlicher Bezeichnung

$$\Sigma \cos\alpha' \delta \xi'_0 + \omega' \delta \tau + \tau \varepsilon' = \Sigma \cos\alpha' \delta x;$$

hier ist

$$\varepsilon' = \cos\alpha' \delta\left(\frac{\partial \omega'}{\partial \cos\alpha'}\right) + \cos\beta' \delta\left(\frac{\partial \omega'}{\partial \cos\beta'}\right) + \cos\gamma' \delta\left(\frac{\partial \omega'}{\partial \cos\gamma'}\right),$$

also nach art. 9 $\varepsilon' = 0$. Dies gibt zunächst

$$\Sigma \cos\alpha' \delta \xi'_0 = \Sigma \cos\alpha' \delta x - \omega' \delta \tau.$$

Sodann folgt aus 6, weil

$$\Sigma \cos\lambda \delta x = 0$$

ist:

$$\Sigma \cos\alpha' \delta x = \frac{\omega'}{\omega} \Sigma \cos\alpha \delta x,$$

mithin weiter

$$\Sigma \cos\alpha' \delta \xi'_0 = \frac{\omega'}{\omega} (\Sigma \cos\alpha \delta x - \omega \delta \tau).$$

Endlich folgt aus $(p\,m_0)$

$$\Sigma \cos\alpha \delta x = \Sigma \cos\alpha \delta \xi_0 + \omega \delta \tau + \tau \varepsilon = \omega \delta \tau,$$

da ε dieselbe Bedeutung hat wie in art. 9, also $\varepsilon = 0$, und nach Voraussetzung auch

$$\Sigma \cos\alpha \delta \xi_0 = 0$$

ist. Es folgt

$$\Sigma \cos\alpha' \delta \xi'_0 = 0,$$

also sind $\alpha' \beta' \gamma'$ in der That die Richtungswinkel der Normale von Σ'_0 im Punkte m'_0, w. z. v. w.

21.

Wir erhalten für die Fortpflanzung der Unstetigkeitsflächen durchaus die nämlichen Gesetze, welche aus der Optik für die Fortpflanzung der Lichtwellen bekannt sind, und wo das, wie im gegenwärtigen art., in der Natur der Sache liegt, auch durch dieselben Methoden. Es dürfte daher nicht überflüssig sein, solchen Berührungspunkten gegenüber auch den wesentlichen Unterschied zwischen beiden Theorien hervorzuheben. Ich erblicke denselben keineswegs darin, dass die vorliegenden Untersuchungen für jede Wellenfläche gültig sind; man kann sie in derselben Allgemeinheit auf die Lehre vom Lichte übertragen, wenn man die Gesichtspunkte der Undulationstheorie zu Grunde legt und dann, wie das nicht anders möglich ist, die beiden Huyghens'schen Principien zu Hülfe nimmt, um die Begriffe der Lichtwellen und der Wellenfläche aufeinander zurückzuführen und aus einem von ihnen den Begriff des Lichtstrahls abzuleiten. Der wesentliche Unterschied, auf den wir aufmerksam zu machen wünschen ist der, dass die Theorie der Unstetigkeiten auf alle diese Begriffe direct und mit Nothwendigkeit führt, ohne sie auf Umwegen einführen zu müssen oder für diesen Zweck secundärer Principien zu bedürfen.

Seien T, T', $\mathfrak{T}$ die Tangentialebenen von Σ, Σ', $\mathfrak{S}$ in den Punkten m, m', p. Das Gleichungspolynom der Ebene T ist (art. 8 T)

$$T = (X-\xi_0)\cos\alpha + (Y-\eta_0)\cos\beta + (Z-\zeta_0)\cos\gamma - \omega t$$

und kann mittelst der Gleichungen $(p m_0)$ in die Form

$$T = (X-x)\cos\alpha + (Y-y)\cos\beta + (Z-z)\cos\gamma - \omega(t-\tau)$$

gebracht werden. Legt man um $p(xyz)$ als Centralpunkt die Centralfläche $C_{t-\tau}$, so ist m Punkt derselben und, wie die zweite Form von T zeigt, $T=0$ ihre Tangentialebene in m.

Wird daher für jeden Punkt p einer beliebigen Fläche $\mathfrak{S}$ (vergl. art. 11) die Zeit τ bestimmt, in welcher die Unstetigkeitfläche Σ von Σ_0 aus dort eintrifft, und dann um ihn als Centralpunkt die Centralfläche $C_{t-\tau}$ gelegt, so hüllt die zur Zeit t stattfindende Unstetigkeitsfläche Σ diese Schaar von Centralflächen ein. Dieser Satz entspricht dem Princip der Erregungscentra in der Huyghens'schen Theorie des Lichtes.

Dieselbe Construction gilt auch für die, von Σ'_0 aus fortschreitende Unstetigkeitsfläche Σ', wofern man nur die aus der entsprechenden Wellenfläche Δ' hervorgehende Centralfläche $C'_{t-\tau}$ benutzt.

Die Gleichungspolynome der Ebenen T' und $\mathfrak{T}$ lauten

$$T' = (X-x)\cos\alpha' + (Y-y)\cos\beta' + (Z-z)\cos\gamma' - \omega'(t-\tau)$$

$$\mathfrak{T} = (X-x)\cos\lambda + (Y-y)\cos\mu + (Z-z)\cos\nu;$$

die Formeln 6 des vorigen art. lehren also, dass identisch

$$\frac{T'}{\omega'} - \frac{T}{\omega} = \frac{k}{\omega} \mathfrak{T}$$

ist, d. h. dass die drei Ebenen T', T und $\mathfrak{T}$ durch die nämliche Gerade G gehen. Um G zu construiren, legt man also in bekannter Weise (1) an $\mathfrak{S}$ die Tangentialebene $\mathfrak{T}$ im Einfallspunkte p von σ, (2) an $C_{t-\tau}$ die Tangentialebene T in demjenigen Punkte m dieser Fläche, in welchem σ mündet; dann ist G der Durchschnitt beider und die gesuchte Ebene T' ergibt sich als eine durch G an $C'_{t-\tau}$ zulegende Tangentialebene. Ist σ' der Strahl aus p nach dem Berührungspunkte von T', so ist seine Richtung so wie die Geschwindigkeit, mit welcher er durchlaufen wird, unabhängig von t und τ; beide ergeben sich also insbesondere auch, wenn man $t-\tau=1$ nimmt, also für jeden Einfallspunkt p die Centralflächen $C_{t-\tau}$, $C'_{t-\tau}$ durch die Wellenflächen Δ, Δ' ersetzt.

22.

Wir erhalten demnach für die Brechung und Reflection der Unstetigkeitsflächen die nämlichen Constructionen, welche Huyghens für das Licht gefunden hat.

Handelt es sich um die Reflection einer aus $\mathfrak{R}$ einfallenden Unstetigkeitsfläche Σ, so ist Δ' die den Raume $\mathfrak{R}$ eigenthümliche Wellenfläche, also mit Δ identisch. Die aus G an Δ zu legende Tangentialebene T' liefert indess nur dann eine Lösung unserer Aufgabe, wenn der aus p nach dem Berührungspunkte von T' führende Strahl bei p zunächst in den Raum $\mathfrak{R}$ zurückkehrt.

Bei der Brechung aus $\mathfrak{R}$ nach $\mathfrak{R}'$ ist Δ' die dem Raume $\mathfrak{R}'$ eigenthümliche Wellenfläche: durch G werden alle Tangentialebenen an Δ' gelegt, und diejenigen Strahlen aus p nach den Berührungspunkten, welche von p aus zunächst in den Raum $\mathfrak{R}'$ eindringen, sind die gebrochnen Strahlen im engern Sinne.

Nun wissen wir aus den art. 11 und 12, dass die hier auftretenden Strahlensysteme wesentlich durch die Wellenfläche charakterisirt sind, zu welcher sie gehören, indem diese in geometrischer Form die Strahlen-und Normalenrichtungen einander zuordnet und gleichzeitig die entsprechenden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten angibt.

Andererseits gehört zu jeder Wellenfläche Δ ein bestimmtes Reflectionsgesetz, welches durch die erste, und zu jedem Paar von Wellenflächen Δ, Δ' ein bestimmtes Brechungsgesetz, welches durch die zweite Huyghens'sche Construction ausgedrückt ist.

Lässt man als reflectirte Strahlen alle gelten, welche sich aus der ersten, und als gebrochne alle, die sich aus der zweiten Construction ergeben, so folgt aus der im art. 20 geleisteten Verification der Satz:

Wird ein zur Wellenfläche Δ gehöriges Strahlensystem an einer beliebigen Fläche $\mathfrak{S}$ nach den in den Huyghens'schen Constructionen enthaltenen Gesetzen reflectirt und der Wellenfläche Δ' gemäss gebrochen, so gehört jedes reflectirte Strahlensystem zur nämlichen Wellenfläche Δ und jedes gebrochne zur Wellenfläche Δ'.

Und wenn man sich der Grenzbedingung $t' = t$ als Gleichung von $\mathfrak{S}$ erinnert und bedenkt dass mit t zugleich auch t — const. Lösung der Differentialgleichung $\Delta = 0$ ist, während beiden Lösungen das nämliche, zur Wellenfläche Δ gehörige Strahlensystem entspricht, so erkennt man den Satz:

Sind zwei Strahlensysteme in Raume vorhanden, welche zu beliebigen Wellenflächen Δ, Δ' gehören, so gibt es, soweit beide einander durchdringen, unzählig viel Flächen $\mathfrak{S}$, an denen das eine aus dem andern durch Brechung nach der für diese Wellenflächen geltenden Huyghens'schen Construction hervorgeht.

Sind die Wellenflächen Δ, Δ' so beschaffen, dass die Huyghens'sche Construction für einen einzigen einfallenden Strahl σ mehrere reflectirte Strahlen σ_1, $\sigma_2, \ldots$ und mehrere gebrochne Strahlen σ', $\sigma'', \ldots$ liefert, so entspringen aus einem einzigen einfallenden Strahlensystem $(\sigma\sigma)$ mehrere reflectirte Strahlensysteme $(\sigma_1\sigma_1)$, $(\sigma_2\sigma_2), \ldots$ und mehrere gebrochne Strahlensysteme $(\sigma'\sigma')$, $(\sigma''\sigma''), \ldots$; für jedes einzelne von ihnen gelten die vorstehenden Sätze.

Diesen reflectirten und gebrochnen Strahlensystemen entsprechen ebensoviel reflectirte und gebrochne Unstetigkeitsflächen Σ_1, $\Sigma_2, \ldots$ und Σ', $\Sigma'', \ldots$ Das im vorigen art. gefundene Resultat zeigt, dass auch für diese Flächen eine der von Huyghens gefundenen Constructionen gilt. Sollen sie für die Zeit t dargestellt werden, so ermittle man für jeden Punkt p der Grenzfläche $\mathfrak{S}$ die von Σ_0 abhängige Zeit τ, wann Σ dort anlangt; legt man dann um ihn als Centralpunkt die Centralflächen $C_{t-\tau}$, $C'_{t-\tau}$, so sind Σ_1, $\Sigma_2, \ldots$ Einhüllende der ersten, Σ', $\Sigma'', \ldots$ Einhüllende der zweiten Schaar von Centralflächen, und zwar sind sie diejenigen Theile der vollständigen einhüllenden Flächen, in denen beziehungsweise die Strahlensysteme $(\sigma_1\sigma_1)$, $(\sigma_2\sigma_2), \ldots$ $(\sigma'\sigma')$, $(\sigma''\sigma''), \ldots$ münden.

Alle diese Constructionen zusammengenommen sind der geometrische Ausdruck für die Lösung der Aufgabe, zwei längs einer Fläche $\mathfrak{S}$ aneinander grenzende Räume $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ stetig nach Werthen von t so zu ordnen, dass in jenem

$$\Delta\left(\frac{\partial t}{\partial \xi}, \frac{\partial t}{\partial \eta}, \frac{\partial t}{\partial \zeta}\right)=0,$$

in diesem

$$\Delta'\left(\frac{\partial t}{\partial \xi}, \frac{\partial t}{\partial \eta}, \frac{\partial t}{\partial \zeta}\right)=0$$

wird, wo die Grenzbedingung $t'=t$ durch die Bedingung ersetzt ist, dass t nicht bloss innerhalb $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$, sondern auch beim Durchgange durch $\mathfrak{S}$ stetig bleiben soll.

Sie leisten durch Wiederholung die vollständige Lösung dieser Aufgabe, soweit die Anfangsbedingungen die verlangte Ordnung des Raumes nach Werthen von t überhaupt nach sich ziehen, auch für den Fall, wo man sich den unbegrenzten Raum in beliebige Theile $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$,... zerlegt, und jedem derselben eine bestimmte Differentialgleichung obiger Form, oder eine bestimmte Wellenfläche Δ, Δ', Δ'',... zugeordnet denkt, immer in geometrischer Form und bei ausschliesslich geometrischer Deutung der Differentialgleichungen. Die Frage nach der Lösbarkeit dieser Aufgabe durch analytische Ausdrücke würde in die Eliminationstheorie gehören.

23.

Es fragt sich nun, wie die reflectirten und gebrochnen Strahlen im engern Sinne sich analytisch voneinander unterscheiden. Lassen wir, um wieder beide Fälle zu vereinigen, dahingestellt, ob der Ausdruck Δ' mit Δ übereinstimmt oder nicht, so haben wir für den aus σ durch Reflection oder Brechung hervorgehenden Strahl σ' aus art. 20

$$\frac{\cos\alpha'}{\omega'}=\frac{\cos\alpha+k\cos\lambda}{\omega}, \qquad \frac{\cos\beta'}{\omega'}=\frac{\cos\beta+k\cos\mu}{\omega}, \qquad \frac{\cos\gamma'}{\omega'}=\frac{\cos\gamma+k\cos\nu}{\omega}, \qquad (\alpha)$$

ausserdem

$$\Delta'\left(\frac{\cos\alpha'}{\omega'}, \frac{\cos\beta'}{\omega'}, \frac{\cos\gamma'}{\omega'}\right)=0,$$

also

$$\Delta'\left(\frac{\cos\alpha+k\cos\lambda}{\omega}, \frac{\cos\beta+k\cos\mu}{\omega}, \frac{\cos\gamma+k\cos\nu}{\omega}\right)=0. \tag{β}$$

Iede reelle Wurzel k dieser Gleichung liefert, in (α) eingesetzt, einen reellen Werth für ω', und mit Zugrundelegung desselben eine unzweideutig bestimmte Richtung $\alpha'\beta'\gamma'$ für die Normale der neu erzeugten, nach dieser Richtung mit der Geschwindingkeit ω' fortschreitenden Unstetigkeitsfläche. Unsere Aufgabe ist diese, zu unterscheiden ob dies eine nach $\mathfrak{R}$ zurückkehrende oder eine in den Raum $\mathfrak{R}'$ übergehende Fläche ist, d. h. ob der neu erzeugte Strahl σ' vom Einfallspunkte aus zunächst nach $\mathfrak{R}$ zurückführt oder nach $\mathfrak{R}'$ übergeht.

Die Geschwindigkeitscomponenten, mit denen σ' durchlaufen wird, sind

$$\Xi'=\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\alpha'}, \qquad H'=\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\beta'}, \qquad Z'=\frac{\partial\cos\gamma'}{\partial\omega'};$$

Zerlegt man nach der Normale von $\mathfrak{S}$ und zwei dazu senkrechten Richtungen, so ist

$$\mathfrak{N}'=\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\alpha'}\cos\lambda+\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\beta'}\cos\mu+\frac{\partial\omega}{\partial\cos\gamma'}\cos\nu$$

die Componente nach der Normale, und zwar nach der durch $\lambda\mu\nu$ bestimmten Richtung derselben.

Im Vorangehenden war keine Veranlassung vorhanden, in dieser Hinsicht genauere Bestimmungen zu treffen; ich setze nunmehr fest, es sollen $\lambda\mu\nu$ oder ihre Cosinus so gewählt werden, dass die durch sie bestimmte Richtung von $\mathfrak{R}$ nach $\mathfrak{R}'$ führt.

Dann ist σ ein gebrochner oder ein reflectirter Strahl, jenachdem $\mathfrak{N}'$ positiv oder negativ ist.

Dieses Kriterium muss nun auf die Gleichung (β) übertragen werden. Sei

$$\frac{\cos\alpha'}{\omega'}=p, \qquad \frac{\cos\beta'}{\omega'}=q, \qquad \frac{\cos\gamma'}{\omega'}=r, \tag{1}$$

also

$$\Delta'(pqr)=0. \tag{β}$$

Ist das vollständige Differential

$$\partial\Delta'(pqr)=P\partial p+Q\partial q+R\partial r,$$

ferner

$$Pp+Qq+Rr=N, \qquad P\cos\lambda+Q\cos\mu+R\cos\nu=Z,$$

so folgt aus (β)

$$N\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\alpha'}=P, \qquad N\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\beta'}=Q, \qquad N\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\gamma'}=R,$$

also

$$\mathfrak{N}'=\frac{Z}{N}.$$

Setzen wir nun für pqr ihre Werthe aus (α) ein, mithin

$$p=\frac{\cos\alpha+k\cos\lambda}{\omega}, \qquad q=\frac{\cos\beta+k\cos\mu}{\omega}, \qquad r=\frac{\cos\gamma+k\cos\nu}{\omega}, \tag{2}$$

und betrachten in der Gleichung (β) k und ω als Variable, so folgt auch

$$Z\partial k-N\partial\omega=0,$$

also haben wir unter dieser Voraussetzung

$$\mathfrak{N}'=\frac{\partial\omega}{\partial k}.$$

Um zu untersuchen, ob einer reellen Wurzel k der Gleichung (β) ein nach $\mathfrak{N}'$ oder ein nach $\mathfrak{N}$ führender Strahl σ' entspricht, muss man also in dieser Gleichung ω als Function von k betrachten; dann findet der erste oder der zweite Fall statt, jenachdem

$$\frac{\partial\omega}{\partial k}$$

positiv oder negativ ist, vorausgesetzt dass die Normalenrichtung $\lambda\mu\nu$ von $\mathfrak{N}$ nach $\mathfrak{N}'$ führt.

24.

Die Anwendung dieses Kriteriums auf die Wellenfläche der homogenen elastischen Körper liefert die folgende Eigenschaft derselben, welche vielen, aber nicht allen Mittelpunktsflächen zukommt:

Die Anzahl der Tangentialebenen, welche durch eine Gerade G an die Wellenfläche Δ' eines homogenen elastischen Körpers gelegt werden können, ist stets eine gerade Zahl $2m$, und m eine der Zahlen 0, 1, 2, 3.

Legt man eine Ebene $\mathfrak{T}$ durch G und den Mittelpunkt der Fläche Δ', und zieht aus letzterm die Strahlen nach den $2m$ Berührungspunkten, so erhält man auf der einen Seite von $\mathfrak{T}$ ebenso viel Strahlen wie auf der andern, also auf jeder Seite m Strahlen.

Ist

$$\begin{vmatrix} \Lambda'_{11}-1 & \Lambda'_{12} & \Lambda'_{13} \\ \Lambda'_{21} & \Lambda'_{22}-1 & \Lambda'_{23} \\ \Lambda'_{31} & \Lambda'_{32} & \Lambda'_{33}-1 \end{vmatrix} = 0$$

die Differentialgleichung $\Delta' = 0$ und, wenn für die Derivirten von t' ihre Werthe aus (α) eingesetzt werden:

$$\Lambda'_{\mu\nu} = \frac{A'_{\mu\nu}}{\omega'^2} = \frac{\mathfrak{A}_{\mu\nu}}{\omega^2},$$

so dass

$$\mathfrak{A}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} + 2B_{\mu\nu}k + C_{\mu\nu}k^2$$

von ω frei und ganze Function zweiten Grades von k ist, so können wir statt der Gleichung (β) die folgende nehmen

$$K = \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_{11}-\omega^2 & \mathfrak{A}_{12} & \mathfrak{A}_{13} \\ \mathfrak{A}_{21} & \mathfrak{A}_{22}-\omega^3 & \mathfrak{A}_{23} \\ \mathfrak{A}_{31} & \mathfrak{A}_{32} & \mathfrak{A}_{33}-\omega^2 \end{vmatrix} = 0;$$

dann entsprechen die aus G an Δ' zulegenden Tangentialebenen den reellen Wurzeln k dieser Gleichung, vorausgesetzt dass man für ω denjenigen festen Werth nimmt, welcher dem einfallenden Strahl σ entspricht.

Um die Bedingung zur Geltung zu bringen, dass nur reelle Werthe von k und ω in Betracht kommen, stellen wir k als Abscisse, ω als Ordinate in einem rechtwinkligen Axensystem dar. Dann ist K eine Kurve 6 Grades, und die Anzahl ihrer Schnittpunkte mit einer Geraden $\omega = \text{const.}$ eine der Zahlen 6, 4, 2, 0, was der erste Theil des obigen Satzes ist. Ist $2m$ die Anzahl der Schnittpunkte, so behauptet der zweite Theil des Satzes, dass $\frac{\partial \omega}{\partial k}$ in m von ihnen positiv, in den m übrigen negativ ist. Der Beweis hiervon ergibt sich wie folgt.

Für jedes reelle k sind alle Wurzeln ω reell, paarweise entgegen gesetzt gleich, und keine von ihnen wird jemals $=0$ (art. 13). Die Kurve hat also

6 reelle Zweige, die sich von $k = -\infty$ bis $k = +\infty$ erstrecken; drei von ihnen, ω_1 ω_2 und ω_3, verlaufen auf der Halbebene $\omega > 0$, die drei andern sind zu ihnen in Bezug auf die Axe der k symmetrisch. Diese Axe wird von keinem Zweige geschnitten.

Solange k endlich bleibt, ändern ω_1, ω_2, ω_3 sich stetig mit k. Werden, während k sich ununterbrochen in der nämlichen Richtung ändert, zwei Wurzeln ω_1, ω_2 einander gleich, so trennen sie sich darüber hinaus wieder, ohne imaginär zu werden; also kehrt die Kurve dort nicht zu frühern Werthen von k zurück, sondern es bildet sich ein Doppelpunkt.

Wenn also, während k fortwährend zunimmt, zwei Zweige ω_1 und ω_2 zum nämlichen Punkte führen, so gehen von dort zwei Zweige weiter zu grössern k; welchen von beiden man als Fortsetzung von ω_1 betrachten will, ist für unsern Zweck gleichgültig. Hat man aber hierüber für jeden Doppelpunkt verfügt, so hat jeder Zweig der Kurve die wesentliche Eigenschaft dass ein Punkt, welcher ihn von $k = -\infty$ bis $k = +\infty$ durchläuft, während dessen niemals zu kleinern k zurückkehrt, sondern ununterbrochen zu grössern k fortschreitet. Dies ist die erste Eigenschaft der Kurvenzweige, welche hier in Betracht kommt.

Die zweite, welche mit dieser zusammen den Beweis unserer Behauptung liefert, besteht darin, dass sowohl für $k = -\infty$ wie für $k = +\infty$ drei Wurzeln $\omega = +\infty$ die drei andern $= -\infty$ werden.

Aus beiden zusammen folgt, dass ein Punkt, welcher auf der Halbebene $\omega > 0$ einem Kurvenzweige von $k = -\infty$ bis $k = +\infty$ folgt, stets zu grössern k fortschreitet, aber Anfangs von unendlich grossen zu endlichen Werthen von ω sinkt, und schliesslich wieder von endlichen zu unendlich grossen Werthen von ω steigt. Wenn aber ein solcher Zweig von einer Geraden $\omega = \text{const.}$ überhaupt geschnitten wird, so muss er durch diese Gerade ebenso oft von grössern zu kleinern, wie von kleinern zu grössern ω gehen. Da er jedesmal zu grössern k fortschreitet, so ist $\frac{\partial \omega}{\partial k}$ im ersten Falle negativ, im andern positiv. Beide Fälle treten für jeden einzelnen Zweig gleich oft ein, also gilt dies auch von allen Zweigen zusammengenommen, w. z. b. w.

Die Huyghens'sche Construction liefert jedenfalls eine Tangentialebene an Δ, diejenige, welche dem nach $\mathfrak{R}'$ hinein sich fortsetzenden Strahl σ entspricht, also auch mindestens eine, welcher ein reflectirter Strahl entspricht. Die Anzahl der reflectirten Strahlen ist also 1, 2 oder 3, die der gebrochnen 0, 1, 2 oder 3, was im Ganzen 12 verschiedene Fälle gibt.

Nur in einem von diesen Fällen, nämlich wenn beide Zahlen $=3$ sind, reichen die Grenzbedingungen allein hin, um die entstehenden Unstetigkeiten völlig zu bestimmen; in den 11 übrigen Fällen bedarf es hierfür der Integration der Differentialgleichungen d. art. 4.

25.

Es handelt sich nur noch um den Nachweis dieses Satzes, nicht um ausgeführte Rechnungen, deren Resultate wenig lohnend sein würden.

Sei wieder l die Kurve, in welcher die Grenzfläche $\mathfrak{S}$ zur Zeit t von Σ geschnitten wird. Wird ein an $\mathfrak{S}$ grenzender Punkt von l überschritten, so möge die Gesammtzunahme, welche ein ihm zugeordneter Werth, z. B. $\frac{\partial u}{\partial t}$ oder Π'_1 erlangt, durch

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right), \qquad (\Pi'_1)$$

bezeichnet werden.

Nun bleibt sowohl vor- wie nachher in einem solchen Punkte [(1) art. 19] $u'=u$, $v'=v$, $w'=w$ also auch $\frac{\partial u'}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial t}$, u. s. w., also folgt weiter

$$\left(\frac{\partial u'}{\partial t}\right)=\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right), \qquad \left(\frac{\partial v'}{\partial t}\right)=\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right), \qquad \left(\frac{\partial w'}{\partial t}\right)=\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right), \tag{I}$$

und aus demselben Grunde folgt aus (2) art. 19

$$\left.\begin{aligned}
\rho'(\Pi'_1\cos\lambda+\Pi'_6\cos\mu+\Pi'_5\cos\nu)&=\rho(\Pi_1\cos\lambda+\Pi_6\cos\mu+\Pi_5\cos\nu)\\
\rho'(\Pi'_6\cos\lambda+\Pi'_2\cos\mu+\Pi'_4\cos\nu)&=\rho(\Pi_6\cos\lambda+\Pi_2\cos\mu+\Pi_4\cos\nu)\\
\rho'(\Pi'_5\cos\lambda+\Pi'_4\cos\mu+\Pi'_3\cos\nu)&=\rho(\Pi_5\cos\lambda+\Pi_4\cos\mu+\Pi_3\cos\nu).
\end{aligned}\right\} \tag{II}$$

Es ist für unsern Zweck wünschenswerth, noch ein Formelnsystem abzuleiten. Da an $\mathfrak{S}$ vor und nach dem Durchgange von l

$$\frac{\partial u'}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}:\frac{\partial u'}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}:\frac{\partial u'}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}=\cos\lambda:\cos\mu:\cos\nu$$

ist, was ebenso für v' und v sowie für w' und w gilt, so ist auch

$$\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right):\left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right):\left(\frac{\partial u'}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\cos\lambda:\cos\mu:\cos\nu,$$

oder, wenn $\alpha\beta\gamma\omega$ sich nur auf die einfallende Unstetigkeitsfläche Σ beziehen, wegen (I)

$$\left(\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial u'}{\partial t}\cdot\frac{\cos\alpha}{\omega}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\cos\alpha}{\omega}\right):\left(\frac{\partial u'}{\partial y}+\frac{\partial u'}{\partial t}\cdot\frac{\cos\beta}{\omega}\right)-$$

$$-\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\cos\beta}{\omega}\right):\left(\frac{\partial u'}{\partial z}+\frac{\partial u'}{\partial t}\frac{\cos\gamma}{\omega}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\cos\gamma}{\omega}\right)=\cos\lambda:\cos\mu:\cos\nu.$$

Die hier eingehenden Gesammtzunahmen erhält man auch wie folgt. Man lege um den Einfallspunkt p in der Normalebene von l einen unendlich kleinen Kreis und nenne R den Halbkreis welcher in den Raum $\mathfrak{R}$ fällt, den andern R'. Sodann wähle man zur positiven Seite einer Unstetigkeitsfläche jedesmal diejenige, welche der wirklichen Fortschrittsrichtung von l zugewandt ist. Dann ist z. B. $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ die Summe aller stetigen vermehrt um die Summe aller plötzlichen Zunahmen, welche $\frac{\partial u}{\partial x}$ erlangt, wenn R von der positiven nach der negativen Seite durchlaufen wird. Die unstetigen Zunahmen treten ein beim Durchgange durch Σ und die verschiedenen reflectirten Unstetigkeitsflächen, die stetigen beim Durchgange durch die Winkelräume zwischen $\mathfrak{S}$ und den Unstetigkeitsflächen. Ebenso verhält es sich auf der andern Seite von $\mathfrak{S}$.

Ich bezeichne nun die Summen der plötzlichen Zunahmen für die Minuenden der vorstehenden Formel durch $A'B'C'$, für die Subtrahenden durch ABC, und behaupte dass identisch $A:B:C=A'B'C'=\cos\lambda:\cos\mu:\cos\nu$ ist. Ist dies bewiesen, so ergibt sich, dass aus der Grenzbedingung $u'=u$, abgesehen von (I), nur noch zu schliessen ist, dass die vorstehende Proportion für die Summen der stetigen Zunahmen der in sie eingehenden Ausdrücke gilt.

Es nehmen aber

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\cos\alpha}{\omega},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\cos\beta}{\omega},\qquad \frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\cos\gamma}{\omega}$$

zu (1) beim Durchgange durch Σ um Null, da diese Zunahme

$$-\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]-\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]\frac{\cos\alpha}{\omega}=0$$

u. s. w. ist; (2) beim Durchgange durch Σ_1 um

$$-\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_1-\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_1\frac{\cos\alpha}{\omega}=\frac{\cos\alpha_1-\cos\alpha}{\omega}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_1=\frac{k_1\cos\lambda}{\omega}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_1,$$

$$\frac{k_1\cos\mu}{\omega}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_1,\qquad \frac{k_1\cos\nu}{\omega}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_1;$$

und da dies für jede reflectirte Unstetigkeitsfläche Σ_1 gilt, so folgt für die Summen aller plötzlichen Zunahmen $A : B : C = \cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu$, und offenbar gilt dieser Nachweis, der sich allein auf die Formeln (3) art. 5 und (6) art. 20 gründet, auch für A', B' und C'.

Bezeichnen wir also durch $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_c$, $\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)_c$ u. s. w. die Summe aller stetigen Zunahmen, welche $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u'}{\partial x}$ u. s. w. erlangen, wenn R, R' von der positiven nach der negativen Seite durchlaufen werden, so reducirt sich unsere Proportion auf

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial u'}{\partial t}\frac{\cos\alpha}{\omega}\right)_c-\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\cos\alpha}{\omega}\right)_c:\left(\frac{\partial u'}{\partial y}+\frac{\partial u'}{\partial t}\frac{\cos\beta}{\omega}\right)_c-\\ -&\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\cos\beta}{\omega}\right)_c:\left(\frac{\partial u'}{\partial t}+\frac{\partial u'}{\partial t}\frac{\cos\gamma}{\omega}\right)_c-\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\cos\gamma}{\omega}\right)_c=\cos\lambda:\cos\mu:\cos\nu\end{aligned}\right\}\text{(III)}$$

nebst der gleichen Proportion für v' und v so wie für w' und w, und es ist bewiesen dass ausser (I) sich aus der Grenzbedingung $u'=u$ usw. keine andern mehr ergeben. —

Wenn die Linie l in unendlicher Nähe umkreist wird und eine veränderliche Grösse sich dabei stetig, aber so ändert, dass sie endliche Zunahmen erlangt, nachdem die Umkreisung um einen endlichen Winkel fortgeschritten ist, so ist sie in der Linie l selbst unbestimmt. Wenn daher die ersten Derivirten von u, v, w, u', v', w' in l nicht unbestimmt werden, so sind auf der linken Seite von (III) alle Glieder $=0$. Wir werden sehen, dass letzteres nicht immer der Fall sein kann, und dann schliessen müssen, dass die in Rede stehenden Derivirten an l unbestimmt und von der Eintrittsrichtung abhängig werden.

Ich beginne mit dem Falle, wo sowohl durch Reflection wie durch Brechung drei Unstetigkeitsflächen entstehen; derselbe tritt ein, so lange die in $\mathfrak{T}$ liegende Gerade G weder Δ noch Δ' schneidet. Nimmt man an, dass in diesem Falle die ersten Derivirten von u v... w' an l nicht unbestimmt werden, so bleiben nur die Grenzbedingungen (I) (II) übrig, und die dort eingehenden Gesammtzunahmen drücken sich aus durch die Unstetigkeiten der Derivirten. Diese reduciren sich durch die Formeln (3) art. 5 auf die Componenten UVW, während diese sich (art. 14 C und art. 15 AB) in allen Fällen durch eine einzige Hülfsgrösse ausdrücken. Die Anzahl der Unbekannten ist also $=6$, gleich der Anzahl der Gleichungen (I) (II).

Wir halten uns bei einer Theorie dieser Gleichungen nicht auf, und gehen zur Schlussuntersuchung über, dem Nachweise, dass die noch übrigen 11 Fälle eine neue nicht mehr hierhin gehörige Klasse von Problemen bilden, insofern die im vorigen Falle vorhandene Möglichkeit, die gesuchten Unstetigkeiten unabhängig vom stetigen Verlaufe der mit ihnen behafteten Functionen, also ohne Kenntniss dieser Functionen selbst zu finden, in den noch übrigen Fällen nicht mehr stattfindet.

Ich vergleiche miteinander drei Fälle der vorliegenden Anfgabe, welche a, b, c heissen mögen, und unendlich benachbarten Lagen der Geraden G entsprechen: im Falle a schneidet die Gerade G weder Δ noch Δ', im Falle b berührt sie Δ', im Falle c wird Δ' von G in zwei unendlich benachbarten Punkten geschnitten.

Im Falle a existiren also alle Unstetigkeitsflächen; derselbe wird demnach durch die vorhin erörterten Gleichungen (I) (II) erledigt. Im Falle c existiren nur noch zwei gebrochne Unstetigkeitsflächen; folgen dieselben im Falle a von der positiven nach der negativen Seite hin in der Reihenfolge Σ', Σ'', Σ''' aufeinander, so möge im Falle c Σ' und Σ''' noch reell vorhanden, aber Σ'' imaginär geworden sein.

Im Falle a findet also zwischen $\overset{-}{\Sigma}'$ und $\overset{+}{\Sigma}'''$ noch eine Unstetigkeit statt, aber nicht mehr im Falle c. Zu beiden gehört b als Grenzfall. Die Werthsvertheilungen in den Fällen a und c können also von der im Falle b stattfindenden, folglich voneinander nur unendlich wenig abweichen. Während aber die Derivirten von $u'v'w'$ im Falle a beim Durchgange durch Σ'' plötzliche Werthsaenderungen erleiden, ist an Stelle dieser Unstetigkeiten im Falle c eine davon nur wenig abweichende, aber stetige Aenderung um die gleichen Beträge getreten.

Im Falle a bedeutet hiernach z. B. $\left(\frac{\partial u'}{\partial t}\right)$ die Summe von 3 plötzlichen Aenderungen, welche beim Durchgange durch Σ', Σ'', Σ''' stattfinden: im Falle c bedeutet dieses Zeichen, bei nahezu gleichem Werthe, die Summe der plötzlichen Aenderungen beim Durchgange durch Σ' und Σ''', vermehrt um die von Null verschiedene, aber auf stetigem Wege erfolgende Zunahme beim Uebergange von $\overset{-}{\Sigma}'$ bis $\overset{+}{\Sigma}'''$.

Von den Unbekannten, die im Falle a aus (I) und (II) bestimmt werden, sind also im Falle c deren 12 nicht mehr vorhanden: es sind dies die Unstetigkeiten der ersten Derivirten von $u'v'w'$ an Σ'', welche sich durch phoronomische und mechanische Relationen auf eine einzige Unbekannte reduciren. An ihre Stelle sind im Falle c die stetigen Zunahmen getreten, welche diese 12 Derivirten beim Uebergange von $\overset{-}{\Sigma}'$ bis $\overset{+}{\Sigma}'''$ erlangen. Für diese stetigen Zunahmen besitzen wir in den Gleichungen (III) (welche sich vereinfachen) phoronomische Relationen, durch welche diese 12 Unbekannten auf 6 reducirt werden. Gäbe es noch mehr mechanische oder phoronomische Relationen, z. B. solche, die aus dem Begriffe der Unbestimmtheit einer Function in einer Linie l entspringen, und zwar im Ganzen so viele, dass durch sie diese 12 stetigen, unbekannten Zunahmen auf eine einzige Unbekannte reducirt würden, so würden die Gleichungen (I) (II) wieder nur 6 Unbekannte enthalten, und auch die vorliegende Aufgabe würde ohne die Kenntniss der Functionen uvw selbst lösbar sein.

Aber ein solches System von phoronomischen und mechanischen Relationen gibt es in diesem Umfange nicht. Denn wenn dasselbe existirte, so würde das nämliche System der so beschaffenen Relationen die erwähnten 12 stetigen Zunahmen auch in dem Falle auf eine einzige Unbekannte reduciren, wo z. B. zwei gebrochne Unstetigkeitsflächen imaginär geworden sind, während die Grenzbedingungen (I) (II) für den Raum $\mathfrak{R}'$ drei Unbekannte fordern.

Ich schliesse daraus, dass in allen denjenigen Fallen, wo gebrochne oder reflectirte Unstetigkeitsflächen imaginär werden, die stetigen Zunahmen der ersten Derivirten von $u'v'w'$ oder uvw in den frei werdenden Winkelräumen nicht durch phoronomische und mechanische Grenzbedingungen allein, sondern nur durch Integration der partiellen Differentialgleichungen d. (art. 4) auf diejenige Anzahl von Unbekannten reducirt werden können, welche für die Befriedigung der Grenzbedingungen (I) (II) erforderlich ist.

Strassburg, 20 März 1877.