Ricerca del rapporto fra i discriminanti di un'equazione algebrico-differenziale di 1.° ordine e della sua primitiva completa per mezzo della teoria delle curve piane razionali.

(*Di* GABRIELE TORELLI, *a Napoli.*)

1. Nel precedente lavoro: *Contribuzione alla teoria delle equazioni algebrico-differenziali* (*), io mi occupai della relazione:

$$G = g k^2,$$

dove G è il discriminante della primitiva completa:

$$f_0 \omega^m + f_1 \omega^{m-1} + \cdots + f_m = 0, \tag{1}$$

g quello della equazione differenziale che s'ottiene eliminando la costante arbitraria ω fra (1) e la sua differenziale immediata, e k è una espressione composta in modo razionale intero colle prime derivate parziali delle $f_0, f_1, \ldots, f_m$ rispetto alle variabili.

Prendendo le mosse da due memorie del compianto prof. CASORATI io riuscii a costruire la funzione k qualunque sia m, non essendo ciò fin allora stato fatto che pei valori particolari di $m = 2, 3, 4$.

Nell'intento di rinvenire un modo più semplice per formare la espressione in discorso io ora ho ripresa in esame la medesima quistione, ed ho

(*) Giornale di Matematiche BATTAGLINI, vol. 24, pag. 280, 1886.

rintracciato un metodo geometrico per pervenire alla costruzione di k. La forma, cui tale via mi ha condotto, è la medesima di quella sotto la quale io precedentemente presentai la espressione k. Nonpertanto stimo opportuno pubblicare questo nuovo procedimento, sia perchè esso si presta ad ulteriori trasformazioni, sia perchè il significato geometrico può facilitare lo studio delle proprietà della espressione k.

2. Consideriamo le tre forme:

$$a(\lambda) = a_0\lambda_1^n + a_1\lambda_1^{n-1}\lambda_2 + \cdots + a_n\lambda_2^n,$$
$$b(\lambda) = b_0\lambda_1^n + b_1\lambda_1^{n-1}\lambda_2 + \cdots + b_n\lambda_2^n,$$
$$c(\lambda) = c_0\lambda_1^n + c_1\lambda_1^{n-1}\lambda_2 + \cdots + c_n\lambda_2^n,$$

e supponiamo che nella $c(\lambda)$ si operi la trasformazione delle variabili λ_1, λ_2 nelle altre μ_1, μ_2 mediante l'equazione:

$$\mu_1 b(\lambda) - \mu_2 a(\lambda) = 0.$$

Se $C(\mu)$ è la trasformata e g, G sono rispettivamente i discriminanti di $c(\lambda)$, $C(\mu)$ si ha:

$$G = g k^2,$$

dove k è una funzione razionale intera ordinatamente dei gradi:

$$\frac{n(n-1)}{2}, \quad \frac{n(n-1)}{2}, \quad (n-1)^2,$$

rispetto ai coefficienti a, b, c, ed essa eguagliata a 0 è la condizione necessaria e sufficiente acciocchè sia possibile determinare il rapporto $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ in modo che $\mu_1 b(\lambda) - \mu_2 a(\lambda)$ e $c(\lambda)$ abbiano un fattore di 2.° grado di comune (*).

Ciò premesso consideriamo la curva piana razionale le coordinate dei

(*) Vedi la già citata mia *Contribuzione* ecc.; confronta pure GORDAN, *Ueber die Invarianten binärer Formen bei höheren Transformationen* (Giornale di CRELLE, vol. 71, pag. 164), e il mio lavoro: *Della trasformazione cubica di una forma binaria cubica.* Rendiconti del Circolo Matem. di Palermo, vol. 2, pag. 169, nota a piè di pagina.

cui punti siano rappresentate parametricamente da:

$$\left.\begin{aligned} \rho x_1 &= a(\lambda) \\ \rho x_2 &= b(\lambda) \\ \rho x_3 &= c(\lambda) \end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

Se è possibile determinare μ_1 e μ_2 in modo che $\mu_1 b(\lambda) - \mu_2 a(\lambda)$ abbia un fattore di 2.° grado in comune con $c(\lambda)$ vuol dire che due dei punti d'incontro della curva colla retta $\mu_1 x_2 - \mu_2 x_1 = 0$ coincidono con due delle intersezioni della medesima curva colla retta $x_3 = 0$. Ora essendo le due rette distinte, ciò non può avvenire se non quando esse concorrono in un punto doppio della curva, il che succede, e allora solo, quando un punto doppio di (2) giace sulla retta $x_3 = 0$; sicchè può conchiudersi: $k = 0$ *equivale alla condizione necessaria e sufficiente affinchè un punto doppio della curva razionale* (2) *giaccia sulla retta* $x_3 = 0$.

3. Moltiplichiamo le (2) successivamente per $\lambda_1^{n-2}, \lambda_1^{n-3}\lambda_2, \ldots, \lambda_2^{n-2}$; abbiamo:

$$\begin{aligned}
\rho\lambda_1^{n-2}x_1 &= a_0\lambda_1^{2n-2} + a_1\lambda_1^{2n-3}\lambda_2 + \cdot + a_{n-2}\lambda_1^n\lambda_2^{n-2} + \cdots \\
\rho\lambda_1^{n-2}x_2 &= b_0\lambda_1^{2n-2} + b_1\lambda_1^{2n-3}\lambda_2 + \cdot + b_{n-2}\lambda_1^n\lambda_2^{n-2} + \cdots \\
\rho\lambda_1^{n-2}x_3 &= c_0\lambda_1^{2n-2} + c_1\lambda_1^{2n-3}\lambda_2 + \cdot + c_{n-2}\lambda_1^n\lambda_2^{n-2} + \cdots \\
\rho\lambda_1^{n-3}\lambda_2 x_1 &= a_0\lambda_1^{2n-3}\lambda_2 + \cdot + a_{n-3}\lambda_1^n\lambda_2^{n-2} + \cdots \\
\rho\lambda_1^{n-3}\lambda_2 x_2 &= b_0\lambda_1^{2n-3}\lambda_2 + \cdot + b_{n-3}\lambda_1^n\lambda_2^{n-2} + \cdots \\
\rho\lambda_1^{n-3}\lambda_2 x_3 &= c_0\lambda_1^{2n-3}\lambda_2 + \cdot + c_{n-3}\lambda_1^n\lambda_2^{n-2} + \cdots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\rho\lambda_2^{n-2}x_1 &= a_0\lambda_1^n\lambda_2^{n-2} + \cdot + a_n\lambda_2^{2n-2} \\
\rho\lambda_2^{n-2}x_2 &= b_0\lambda_1^n\lambda_2^{n-2} + \cdot + b_n\lambda_2^{2n-2} \\
\rho\lambda_2^{n-2}x_3 &= c_0\lambda_1^n\lambda_2^{n-2} + \cdot + c_n\lambda_2^{2n-2}.
\end{aligned}$$

Se consideriamo come ignote distinte:

$$\rho\lambda_1^{n-2}, \quad \rho\lambda_1^{n-3}\lambda_2, \ldots, \quad \rho\lambda_2^{n-2}, \quad \lambda_1^{2n-2}, \quad \lambda_1^{2n-3}\lambda_2, \ldots, \quad \lambda_2^{2n-2},$$

il precedente sistema si compone di $3n-3$ equazioni lineari omogenee rispetto a queste $3n-2$ ignote; determiniamo da esso i rapporti delle prime

$n-1$ delle dette ignote. Ponendo:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \cdot & 0 & a_0 & a_1 & \cdot & a_{n-2} & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & b_0 & b_1 & \cdot & b_{n-2} & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & c_0 & c_1 & \cdot & c_{n-2} & \cdot & 0 \\ x_1 & \cdot & 0 & 0 & a_0 & \cdot & a_{n-3} & \cdot & 0 \\ x_2 & \cdot & 0 & 0 & b_0 & \cdot & b_{n-3} & \cdot & 0 \\ x_3 & \cdot & 0 & 0 & c_0 & \cdot & c_{n-3} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & x_1 & 0 & 0 & \cdot & a_0 & \cdot & a_n \\ 0 & \cdot & x_2 & 0 & 0 & \cdot & b_0 & \cdot & b_n \\ 0 & \cdot & x_3 & 0 & 0 & \cdot & c_0 & \cdot & c_n \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} x_1 & \cdot & 0 & a_0 & a_1 & \cdot & a_{n-2} & \cdot & 0 \\ x_2 & \cdot & 0 & b_0 & b_1 & \cdot & b_{n-2} & \cdot & 0 \\ x_3 & \cdot & 0 & c_0 & c_1 & \cdot & c_{n-2} & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & a_0 & \cdot & a_{n-3} & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & b_0 & \cdot & b_{n-3} & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & c_0 & \cdot & c_{n-3} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & x_1 & 0 & 0 & \cdot & a_0 & \cdot & a_n \\ 0 & \cdot & x_2 & 0 & 0 & \cdot & b_0 & \cdot & b_n \\ 0 & \cdot & x_3 & 0 & 0 & \cdot & c_0 & \cdot & c_n \end{vmatrix},$$

$$\ldots, \qquad \Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} x_1 & \cdot & 0 & a_0 & \cdot & a_{n-3} & a_{n-2} & \cdot & 0 \\ x_2 & \cdot & 0 & b_0 & \cdot & b_{n-3} & b_{n-2} & \cdot & 0 \\ x_3 & \cdot & 0 & c_0 & \cdot & c_{n-3} & c_{n-2} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & x_1 & 0 & \cdot & a_0 & a_1 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & x_2 & 0 & \cdot & b_0 & b_1 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & x_3 & 0 & \cdot & c_0 & c_1 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & a_0 & \cdot & a_n \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & b_0 & \cdot & b_n \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & c_0 & \cdot & c_n \end{vmatrix},$$

abbiamo:

$$\frac{\lambda_1^{n-2}}{\Delta_1} = \frac{\lambda_1^{n-3}\lambda_2}{\Delta_2} = \cdots = \frac{\lambda_2^{n-2}}{\Delta_{n-1}}.$$

Se dunque $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ è il valore del parametro corrispondente a un punto (x_1, x_2, x_3) della curva, per questo passano le curve di ordine $n-2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1\Delta_2 \;\; - \lambda_2\Delta_1 \;\; = 0 \\ \lambda_1\Delta_3 \;\; - \lambda_2\Delta_2 \;\; = 0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \lambda_1\Delta_{n-1} - \lambda_2\Delta_{n-2} = 0. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Ora a un punto doppio corrispondono due valori del parametro $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, $\frac{\lambda'_1}{\lambda'_2}$; perciò le sue coordinate verificar debbono anche le altre relazioni:

$$\begin{aligned} \lambda'_1\Delta_2 \quad &- \lambda'_2\Delta_1 \quad = 0 \\ \lambda'_1\Delta_3 \quad &- \lambda'_2\Delta_2 \quad = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \lambda'_1\Delta_{n-1} &- \lambda'_2\Delta_{n-2} = 0, \end{aligned}$$

le quali confrontate colle (3) dànno che le coordinate dei punti doppii soddisfano le equazioni;

$$\Delta_1 = 0, \qquad \Delta_2 = 0, \ldots, \qquad \Delta_{n-1} = 0. \tag{4}$$

Dunque:

Le curve dell'ordine $n-2$ rappresentate dalle equazioni (4) *passano pei punti doppii della curva* (2) (*).

4. Le equazioni (4) possono servire a determinare le coordinate dei punti doppii della curva razionale. Così per es. basta ordinarle rispetto ad x_1 ed eliminare x_1^{n-2}, $x_1^{n-3}, \ldots$, x_1. La risultante sarà rappresentata da un determinante le cui colonne saranno rispettivamente di grado $0, 1, 2, \ldots, n-2$ nelle x_2, x_3. Decomponendolo in determinanti a colonne semplici, e ordinando otterremo un'equazione di grado $\frac{1}{2}(n-2)(n-1)$ rispetto al rapporto $\frac{x_3}{x_2}$. L'ultimo termine di questa equazione eguagliato a 0 rappresenta la condizione, affinchè uno dei punti doppii della curva (2) giaccia sulla retta $x_3 = 0$, ossia ci fornisce l'espressione di k. Per ottenere questa più brevemente, noi possiamo fin dal principio introdurre l'ipotesi $x_3 = 0$ nelle (4). Sviluppando dopo ciò ogni determinante Δ secondo le potenze discendenti di x_1 e indicando con

$$(-)^{i-1+n} D_{1,i}, \qquad (-)^{i-2+n} D_{2,i}, \ldots, \qquad (-)^{i+1} D_{n-1,i},$$

rispettivamente i coefficienti di x_1^{n-2}, $x_1^{n-3}x_2, \ldots$, x_2^{n-2} in Δ_i ricaveremo dalle (4) il sistema:

$$\begin{aligned} D_{1,1}\, x_1^{n-2} \quad &- D_{2,1}\, x_1^{n-3} x_2 \quad + \cdots + (-)^{n-2} D_{n-1,1}\, x_2^{n-2} \quad = 0 \\ D_{1,2}\, x_1^{n-2} \quad &- D_{2,2}\, x_1^{n-3} x_2 \quad + \cdots + (-)^{n-2} D_{n-1,2}\, x_2^{n-2} \quad = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ D_{1,n-1}\, x_1^{n-2} &- D_{2,n-1}\, x_1^{n-3} x_2 + \cdots + (-)^{n-2} D_{n-1,n-1}\, x_2^{n-2} = 0. \end{aligned}$$

(*) Vedi Friedrich, *Die rationale Plancurve 4 Ordnung*, § 11. Giessen, 1886.

Perchè coesistano queste equazioni deve essere:

$$\begin{vmatrix} D_{1,1} & D_{1,2} & \cdot & D_{1,n-1} \\ D_{2,1} & D_{2,2} & \cdot & D_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{n-1,1} & D_{n-1,2} & \cdot & D_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Questa condizione è dunque necessaria perchè un punto doppio della curva razionale (2) giaccia sulla $x_3 = 0$. Evidentemente essa è sufficiente; perciò:

$$k = \Sigma \pm D_{1,1} D_{2,2} \dots D_{n-1,n-1}.$$

Gli elementi di questo determinante sono formati da determinanti ricavati col sopprimere $n-2$ orizzontali dalla matrice comune a tutti i determinanti Δ costituita dalle ultime $2n-1$ colonne di questi.

5. Nel caso di $n = 4$ se noi indichiamo con (r, s) il determinante ricavato col sopprimere le orizzontali r^{ma}, ed s^{ma} dalla matrice:

$$\begin{Vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{Vmatrix},$$

le equazioni $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = 0$ si possono scrivere:

$$(4,\ 7)x_1^2 - \{(4,\ 8) + (5,\ 7)\}x_1 x_2 + \{(4,\ 9) + (6,\ 7)\}x_1 x_3 +$$
$$+ (5,\ 8)x_2^2 - \{(5,\ 9) + (6,\ 8)\}x_2 x_3 + (6,\ 9)x_3^2 = 0$$

$$(1,\ 7)x_1^2 - \{(1,\ 8) + (2,\ 7)\}x_1 x_2 + \{(1,\ 9) + (3,\ 7)\}x_1 x_3 +$$
$$+ (2,\ 8)x_2^2 - \{(2,\ 9) + (3,\ 8)\}x_2 x_3 + (3,\ 9)x_3^2 = 0$$

$$(1,\ 4)x_1^2 - \{(1,\ 5) + (2,\ 4)\}x_1 x_2 + \{(1,\ 6) + (3,\ 4)\}x_1 x_3 +$$
$$+ (2,\ 5)x_2^2 - \{(2,\ 6) + (3,\ 5)\}x_2 x_3 + (3,\ 6)x_3^2 = 0,$$

sicchè ponendo:

$$A = \begin{vmatrix} (4,7) & (4,9)+(6,7) & (6,9) \\ (1,7) & (1,9)+(3,7) & (3,9) \\ (1,4) & (1,6)+(3,4) & (3,6) \end{vmatrix},$$

$$B = \begin{vmatrix} (4,7) & (4,9)+(6,7) & (5,9)+(6,8) \\ (1,7) & (1,9)+(3,7) & (2,9)+(3,8) \\ (1,4) & (1,6)+(3,4) & (2,6)+(3,5) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (4,7) & (4,8)+(5,7) & (6,9) \\ (1,7) & (1,8)+(2,7) & (3,9) \\ (1,4) & (1,5)+(2,4) & (3,6) \end{vmatrix},$$

$$C = \begin{vmatrix} (4,7) & (4,8)+(5,7) & (5,9)+(6,8) \\ (1,7) & (1,8)+(2,7) & (2,9)+(3,8) \\ (1,4) & (1,5)+(2,4) & (2,6)+(3,5) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (4,7) & (4,9)+(6,7) & (5,8) \\ (1,7) & (1,9)+(3,7) & (2,8) \\ (1,4) & (1,6)+(3,4) & (2,5) \end{vmatrix},$$

$$D = \begin{vmatrix} (4,7) & (4,8)+(5,7) & (5,8) \\ (1,7) & (1,8)+(2,7) & (2,8) \\ (1,4) & (1,5)+(2,4) & (2,5) \end{vmatrix},$$

l'equazione che fornisce il rapporto $\frac{x_3}{x_2}$ pei tre punti doppii è:

$$A x_3^3 - B x_3^2 x_2 + C x_3 x_2^2 - D x_2^3 = 0,$$

e:

$$k = D.$$